Квантовый Канал

как

Классическая Вычислительная Модель

Владислав Малышкин

Прямая Задача Квантовой Механики

Задан Гамильтониан H найти волновую функцию во времени. Стационарный случай основного состояния.

$$|H|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$$

$$\psi(t) = \exp\left(-i\lambda t/\hbar\right)\left|\psi^{[\lambda]}\right\rangle$$

Алгебраческая задача, сводится к задаче на собственные значения Гамильтониана H (конечномерный случай)

$$\frac{\sum\limits_{j,k=0}^{n-1} \alpha_j^* H_{jk} \alpha_k}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k^* \alpha_k} \xrightarrow[\alpha]{} \text{extremum}$$

Квантовые Вычисления как Квантовая Динамика

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{1}$$

Эволюция системы как квантовый канал (унитарный случай)

$$A^{OUT} = \mathcal{U}A^{IN}\mathcal{U}^{\dagger} \tag{2}$$

Для уравнения Шрёдингера унитарный оператор $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = \exp\left[-i\frac{\tau}{\hbar}H\right] \tag{3}$$

$$\left|\psi^{(t)}\right\rangle = \left|\mathcal{U}_{N_t}\middle|\mathcal{U}_{N_t-1}\middle|\dots\middle|\mathcal{U}_1\middle|\psi^{(0)}\right\rangle \tag{4}$$

Определяет квантовый канал. Число преобразований $N_t = t/\tau$. Вместо многих фиксированных $\mathcal{U}_k$ можно рассматривать один $\mathcal{U}(t)$.

Квантовые вычисления это результат квантовой эволюции системы.

Квантовый алгоритм – это инструкция какой надо создать $\mathcal{U}_k$ и $|\psi_0\rangle$.

Замечу что H по $\mathcal{U}$ определяется неднозначно. $H = i\frac{\hbar}{\tau}\ln\mathcal{U}$. Есть много разных H приводящих к одному и тому же $\mathcal{U}$. Для вычислений нужен именно определённый $\mathcal{U}$, а не H.

Квантовые Каналы

Унитарный. Преобразует чистое состояние в чистое

$$A^{OUT} = \mathcal{U} A^{IN} \mathcal{U}^{\dagger}$$

Канал с Kraus rank $N_s > 1$. Преобразует чистое состояние в смешанное.

$$A^{OUT} = \sum_{s=0}^{N_s-1} B_s A^{IN} B_s^{\dagger}$$

Можно добавлять слагаемые в уравнение Шрёдингера и получить уравнение Линдблада, дающее такую эволюцию.

Посмотрим на эти каналы как на матричные вычисления на классическом компьютере

Данные на Вход, Даные на Выход

Для классических данных, отображение вектор в вектор

$$\mathbf{x}^{(l)} \to \mathbf{f}^{(l)} \qquad l = 1 \dots M \tag{5}$$

надо построить отображение типа матрица плотности в матрицу плотности

$$\rho^{(l)} \to \varrho^{(l)} \tag{6}$$

или волновая функция в волновую функцию

$$\psi^{(l)} \to \phi^{(l)} \tag{7}$$

которые потом можно передавать через квантовый канал и получать результат вычислений.

Вычислительная модель: $\rho^{(l)}$ – вопрос, $\to$ $\varrho^{(l)}$ – ответ.

Данные на Вход, Даные на Выход. Примеры

$$\mathbf{x}^{(l)} \to \mathbf{f}^{(l)} \qquad\qquad l = 1 \dots M$$

Преобразуем в

$$\frac{\sum\limits_{j,k=0}^{n-1} x_j G^{\mathbf{x};\,-1}_{jk} x^{(l)}_k}{\sqrt{\sum\limits_{j,k=0}^{n-1} x^{(l)}_j G^{\mathbf{x};\,-1}_{jk} x^{(l)}_k}} \to \frac{\sum\limits_{j,k=0}^{D-1} f_j G^{\mathbf{f};\,-1}_{jk} f^{(l)}_k}{\sqrt{\sum\limits_{j,k=0}^{D-1} f^{(l)}_j G^{\mathbf{f};\,-1}_{jk} f^{(l)}_k}} \tag{8}$$

Здесь $x^{(l)}_k$ and $f^{(l)}_j$ — компоненты входных векторов, а x_k и f_j — компоненты аргументов волновых функций $\rho^{(l)} \to \varrho^{(l)}$.

Матрицы $G^{\mathbf{x}}_{jk} = \langle x_j \,|\, x_k \rangle$ and $G^{\mathbf{f}}_{jk} = \langle f_j \,|\, f_k \rangle$ представляют собой матрицы Грама, вычисленные из $\mathbf{x}^{(l)}$ и $\mathbf{f}^{(l)}$ путем усреднения по исходной выборке.

Есть и другие варианты, обсуждали на прошлом докладе.

Задачи ML/AI

По заданной обучающей выборке данных $\mathbf{x}^{(l)} \to \mathbf{f}^{(l)}$ строим квантовый канал, после чего используем его для предсказаний. Представление знания в виде **квантового канала**. Есть и другие виды представления знания:

- коэффициенты линейной регрессии
- веса персептрона
- логические формулы
- методы опорных векторов
- правила и деревья решений
- нечеткая логике
- веса нейронной сети и deep learning

Критерий Качества

Fidelity – функция близости состояний в квантовой механике. Для чистых состояний

$$F(|\phi\rangle\langle\phi|, |\psi\rangle\langle\psi|) = |\langle\phi\,|\,\psi\rangle|^2$$

Для чистого и смешанного состояния

$$F(|\phi\rangle\langle\phi|, \varrho) = \langle\phi\,|\,\varrho\,|\,\phi\rangle$$

Для двух смешанных состояний

$$F(\varrho, \sigma) = \mathrm{Tr}\sqrt{\varrho^{1/2}\sigma\varrho^{1/2}}$$

Вопрос на самом деле сложный. Ниже мы будем рассматривать только $\langle\phi\,|\,\varrho\,|\,\phi\rangle$, т.к. нам нужна квадратичная функция по операторам квантового канала.

$$\mathcal{F} = \sum_{l=1}^{M}\omega^{(l)}\sum_{s=0}^{N_s-1}\left\langle\phi^{(l)}\middle|B_s\middle|\rho^{(l)}\middle|B_s^\dagger\middle|\phi^{(l)}\right\rangle$$

Квадратичная Total Fidelity и Квадратичные Constraints

$$\mathcal{F} = \sum_{l=1}^{M} \omega^{(l)} \sum_{s=0}^{N_s-1} \left\langle \phi^{(l)} \middle| B_s \middle| \rho^{(l)} \middle| B_s^\dagger \middle| \phi^{(l)} \right\rangle$$

Раскрыв скобки, получаем квадратичную форму

$$\mathcal{F} = \sum_{s=0}^{N_s-1} \sum_{j,j'=0}^{D-1} \sum_{k,k'=0}^{n-1} B^*_{s,jk} S_{jk;j'k'} B_{s,j'k'}$$

Её нужно максимизировать subject to constraints (сохранение следа матрицы)

$$\delta_{kk'} = \sum_{s=0}^{N_s-1} \sum_{j=0}^{D-1} B^*_{s,jk} B_{s,jk'}$$

QCQP задача

QCQP – максимизация (экстремальность) квадратичной формы при квадратичных условиях вида $<$, $>$, $=$, а также возможно ещё и некоторого количества линейный условий.

Пример 1: задача на собственные значения – квадратичный constraint **один** — нормировка на единицу волновой функции.

Пример 2: Unitary Learning. Восстановить унитарный оператор. Очень сложная задача. Решали на прошлом докладе. Результаты: Есть оригинальный алгоритм решения глобальной оптимизации. Требует итерационного решения задачи на собственные значения размером

- $O(n^2)$ для Unitary Learning
- $O(n^4)$ для квантового канала полного ранга.

Квантовый Канал в Choi Представлении

$$\mathcal{J}_{jk;j'k'} = \sum_{s=0}^{N_s-1} B^*_{s,jk} B_{s,j'k'}$$

Тогда и целевая функция и constraints становятся линейными функциями $\mathcal{J}$

$$\mathcal{F} = \sum_{j,j'=0}^{D-1} \sum_{k,k'=0}^{n-1} \mathcal{J}_{jk;j'k'} S_{jk;j'k'}$$

$$\delta_{kk'} = \sum_{j=0}^{D-1} \mathcal{J}_{jk;jk'}$$

Матрица $\mathcal{J}_{jk;j'k'}$ должна иметь только положительные собственные значения, здесь пара (j,k) рассматривается как мультиндекс $\mathbf{i} = (j,k)$

$$\mathcal{J} \succeq 0$$

Semidefinite Programming

Максимизировать fidelity $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\mathcal{J}S &\to \max \\ \mathrm{Tr}\mathcal{J}A_c &= \beta_c \qquad\qquad\qquad c = 1\dots N_c \\ \mathcal{J} &\succeq 0 \end{aligned}$$

Это в точности даёт задачу восстановления квантового канала **полного ранга**

$$N_s = \dim(IN)\dim(OUT)$$

Задача выпуклая. Решается любым методом (например внутренней точки). Любой локальный максимум является глобальным. Если добавить условие на ранг $\mathcal{J}$ (например для унитарного преобразования $N_s = 1$

$$\mathrm{rank}\mathcal{J} = N_s$$

получаем невыпуклую задачу, которую очень сложно решать.

Квантовый канал как классическая вычислительная модель

Два компонента обработки матриц:

$$\rho - \boxed{\mathcal{Q}} - \varrho$$

Квантовый канал: $\varrho = \sum_{s=0}^{N_s-1} B_s \rho B_s^\dagger$

$$\begin{array}{r} \rho^{(1)} - \\ \cdots \\ \rho^{(m)} - \end{array} \boxed{\mathcal{T}} - \varrho$$

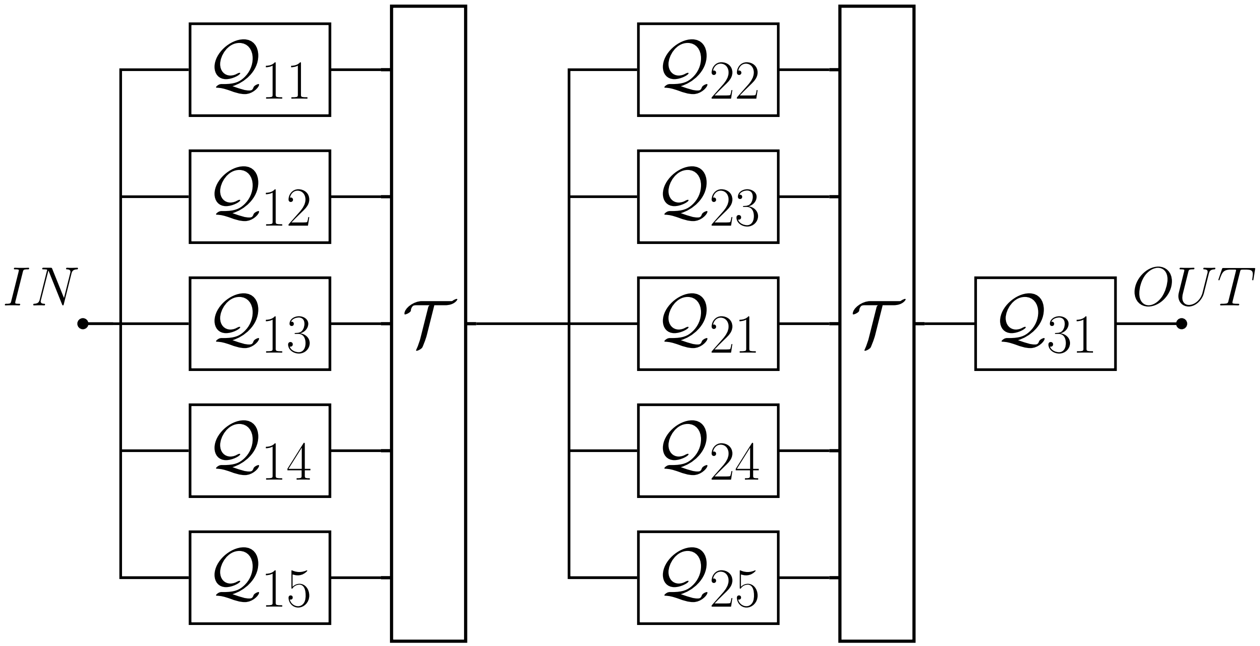
Тензорное произведение: $\varrho_{\mathbf{jj'}} = \rho^{(1)}_{j_1 j_1'} \ldots \rho^{(m)}_{j_m j_m'}$

Можно делать последовательную обработку

$$IN \bullet\!-\!\!-\boxed{\mathcal{Q}_1}-\!\!-\boxed{\mathcal{Q}_2}-\!\!-\boxed{\mathcal{Q}_3}-\!\!-\!\bullet\, OUT$$

Density Matrix Network

или объединять в сети. Последовательная обработка матрицы плотности



За преобразованием ясный физический смысл — квантовый канал. Выбор конкретной топологии является лишь вопросом вычислительной оптимизации. Это контрастирует с нейронными сетями, где выбор подходящей топологии является решающим фактором успеха. Ещё одной причиной выбора квантового канала является то, что практический анализ данных обычно включает как когерентные, так и некогерентные эффекты.

Выводы

- Обратная задача восстановления квантового канала полного ранка $N_s = \dim(\rho)\dim(\varrho)$ Является выпуклой и легко решается.

- Случай фиксированного ранга $N_s < \dim(\rho)\dim(\varrho)$, например для unitary learning $N_s = 1$ очень сложен, задача невыпуклая, её решали на прошлом семинаре памяти И.П.Ипатовой 19 декабря 2024.

- Квантовый канал рассматриваемый как отображение абстрактных матриц

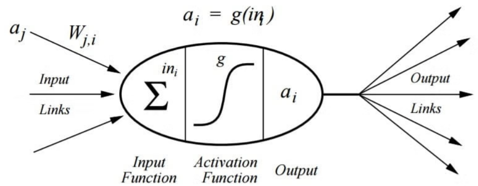
$$A^{OUT} = \sum_{s=0}^{N_s-1} B_s A^{IN} B_s^{\dagger}$$

Является перспективной альтернативой например весам нейронных сетей. В частности понятна калибровка.

Спасибо за внимание

задача восстановления квантового канала полного ранга выпукла

Используем $A^{OUT} = \sum_{s=0}^{N_s-1} B_s A^{IN} B_s^\dagger$ вместо



$$a_i = g(\sum_j W_{j,i} a_j)$$