РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А. Ф. ИОФФЕ
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Г. Г. Зегря, Д. А. Паршин

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

(конспект лекций по общему курсу физики)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Движение относительно инерциальных систем отсчета. Законы Ньютона. Принцип относительности Галилея. Преобразование Галилея

Из школьного курса физики вам известны три закона Ньютона. Напомним их содержание.

Первый закон Ньютона. Тело остается в состоянии покоя или движется с постоянной скоростью (без ускорения), если оно предоставлено самому себе, то есть если на него не действуют никакие внешние силы. Это означает, что

$$\mathbf{a} = 0, \qquad \text{когда } \mathbf{F} = 0. \tag{5.1}$$

Второй закон Ньютона. Результирующая сила, действующая на тело, равна произведению массы этого тела на его ускорение:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{5.2}$$

Третий закон Ньютона. При взаимодействии двух тел сила $\mathbf{F}_{21}$, действующая на второе тело со стороны первого, равна по величине и противоположна по направлению силе $\mathbf{F}_{12}$, действующей на первое тело со стороны второго:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \tag{5.3}$$

причем оба вектора направлены по линии, соединяющей эти тела.

Имеются определенные пределы применимости третьего закона. Мы знаем, что все сигналы, а значит и силы, передаются не мгновенно, а с конечной скоростью. Однако третий закон содержит утверждение, что $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, когда обе эти силы измеряются в один и тот же момент времени. Это требование противоречит тому факту, что данное тело воспринимает действие силы, оказываемое другим телом, не мгновенно, а через конечный промежуток времени.

Поэтому третий закон Ньютона не всегда является достаточно хорошим приближением при рассмотрении столкновения атомов и заряженных частиц. Рассмотрим, например, два положительных точечных заряда q_1 и q_2, скорости которых $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ перпендикулярны, так что их пути пересекаются, но заряды не сталкиваются, так как один из них успевает проскочить перед другим. Пусть в некий момент их относительное положение будет таким, как изображено на рис. 5.1. Каждый из зарядов создает вокруг себя электрическое и магнитное поля. Если скорость заряда много меньше скорости света, то эти поля определяются формулами

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \qquad \mathbf{H} = \frac{q}{c}\frac{[\mathbf{v}\times\mathbf{r}]}{r^3}, \tag{5.4}$$

где радиус вектор $\mathbf{r}$ проведен из заряда в точку наблюдения поля. Поскольку, как следует из этой формулы, движущийся заряд q_1 не создает магнитного поля в направлении своего движения, то на заряд q_2 со стороны заряда q_1 будет действовать только электрическая сила по линии, соединяющей оба заряда. Однако на заряд q_1 со стороны заряда q_2, помимо электрической силы, будет действовать еще и сила со стороны магнитного поля, создаваемого зарядом q_2. Поскольку электрические силы, действующие на заряды, равны по величине и противоположны по направлению, то наличие магнитной силы, действующей на заряд q_1, приведет к нарушению третьего закона Ньютона. Нарушение, однако, будет небольшим, в меру малости отношения $v_1 v_2/c^2 \ll 1$.

Для столкновения же автомобилей третий закон Ньютона будет очень хорошим приближением, потому что продолжительность такого столкновения велика по сравнению с промежутком времени, необходимым для того, чтобы световой сигнал прошел вдоль длины помятого автомобиля. (Кстати, почему световой, а не звуковой, ведь волна деформации распространяется со скоростью звука?)

$$\frac{L}{c} \approx \frac{300\,\text{см}}{3\cdot 10^{10}\,\text{см/сек}} \approx 10^{-8}\,\text{сек}, \tag{5.5}$$

L — длина автомобиля (за 10^{-8} сек автомобиль, движущийся со скоростью 100 км/час, то есть около $3\cdot 10^3$ см/сек, проходит примерно $3\cdot 10^{-5}$ см).

Первые два закона движения выполняются только тогда, когда наблюдение ведется в системах отсчета, движущихся без ускорения. Такие системы отсчета называются **инерциальными**. Например,

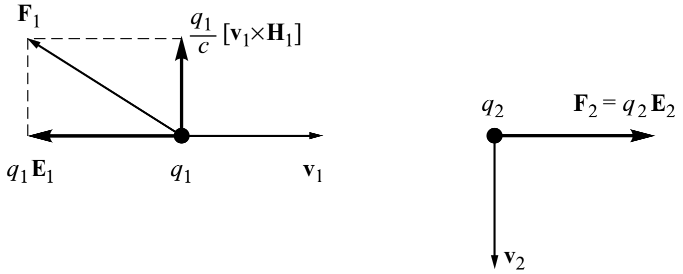

Рис. 5.1. Силы взаимодействия между двумя движущимися зарядами не всегда равны и противоположны.

если тело в одной системе отсчета движется с постоянной скоростью и имеется система отсчета, которая движется с ускорением относительно нее, то очевидно, что тело будет двигаться относительно этой системы отсчета с ускорением.

Например, если система отсчета жестко связана с вращающейся каруселью, то в такой системе отсчета ускорение тела не равно нулю, когда на это тело не действуют силы. Вы можете неподвижно стоять на карусели, только если будете от чего-либо отталкиваться, сообщая вашему телу силу $m\omega^2 r$ по направлению к оси, где m — масса вашего тела, ω — угловая скорость вращения, а r — расстояние от вас до оси вращения. Другим примером может служить система отсчета, неподвижно связанная с самолетом, который быстро набирает скорость при взлете. Благодаря ускорению, вас прижимает назад, к сидению, а сила, действующая со стороны спинки сидения, удерживает вас в состоянии покоя относительно этой системы.

Если бы вы находились в состоянии равномерного движения или покоя относительно системы отсчета, не имеющей ускорения, то для этого не требовалось бы никакой силы. Но если вы хотите находиться в состоянии покоя относительно системы отсчета, движущейся с ускорением, то вы должны прилагать силу или испытывать действие силы со стороны другого тела. Вам нужна веревка, чтобы удержаться, или сидение, чтобы прижаться к нему. Движение (его характер) в системах отсчета, движущихся с ускорением, играет важную роль в физике. Такие системы отсчета называются **неинерциальными**. Особенно важно понять характер движения тел во вращающейся системе отсчета (практическое применение — центрифуга), хотя бы потому, что мы с вами находимся как раз в такой системе отсчета (на Земле), но этого мы пока делать не будем и попытаемся ответить на вопрос, с какой точностью ту или иную систему отсчета можно считать инерциальной.

Ясно, что наша Земля не является инерциальной системой отсчета (является неинерциальной), поскольку она, например, вращается вокруг собственной оси. Из-за этого точка на экваторе имеет центростремительное ускорение

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \simeq 3{,}4 \quad \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}, \tag{5.6}$$

где угловая скорость вращения Земли ω и радиус Земли R равны

$$\omega = \frac{2\pi}{\underbrace{8{,}6\cdot 10^4\,\text{сек}}_{\text{сутки}}} \approx 0{,}73\cdot 10^{-4}\,\text{сек}^{-1}, \quad R \simeq 6{,}4\cdot 10^8\,\text{см}. \tag{5.7}$$

В результате центростремительное ускорение получается равным примерно $3{,}4\,\text{см}/\text{сек}^2$. Это составляет около $0{,}3\,\%$ от ускорения свободного падения $g \approx 980\,\text{см}/\text{сек}^2$, что, вообще говоря, с точки зрения прецизионных физических измерений, является огромной величиной, которую необходимо учитывать при расчетах. Из-за этого, например, наблюдаемое на Северном полюсе ускорение силы тяжести превышает ускорение силы тяжести, наблюдаемое на экваторе (там бананы весят меньше, вот, наверное, почему их везут продавать на север).

Вторая причина, по которой Земля не является инерциальной системой, — это ее движение по орбите вокруг Солнца. Так, соответствующая угловая скорость равна

$$\omega = \frac{2\pi}{\underbrace{3\cdot 10^7\,\text{сек}}_{\text{год}}} \approx 2\cdot 10^{-7}\,\text{сек}^{-1}. \tag{5.8}$$

При радиусе орбиты Земли $R = 150\cdot 10^6 = 1{,}5\cdot 10^{13}\,\text{см}$ получим $a = \omega^2 R \approx 0{,}6\,\text{см}/\text{сек}^2$, что примерно на порядок меньше ускорения, развиваемого за счет вращения Земли вокруг своей оси.

Наконец, само Солнце вращается со всеми своими планетами вокруг центра нашей Галактики со скоростью порядка $300\,\text{км}/\text{сек}$. Эта скорость была измерена при исследовании доплеровского сдвига спектральных линий света, испускаемого звездами. Расстояние до центра нашей Галактики, R,

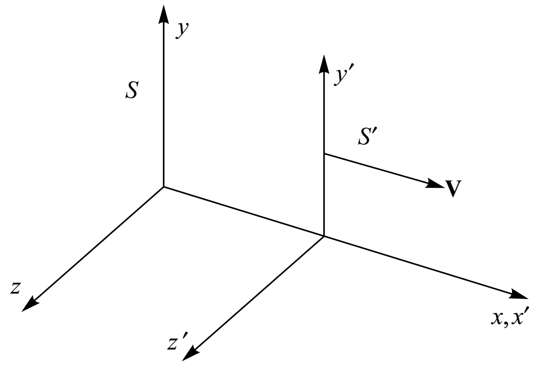

Рис. 5.2. Две инерциальные системы отсчета.

составляет примерно 30 тысяч световых лет. В результате ускорение равно

$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \approx \frac{\left(3 \cdot 10^7 \text{ см/сек}\right)^2}{\underbrace{3 \cdot 10^{22} \text{ см}}_{30\,\text{тыс. свет. лет}}} \approx 3 \cdot 10^{-8} \, \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}, \tag{5.9}$$

то есть это совершенно ничтожная величина. Поэтому иногда говорят, что система отсчета, связанная с неподвижными звездами, может считаться инерциальной с очень хорошей степенью точности.

Если существует хотя бы одна инерциальная система, то таких систем должно быть бесконечное множество, так как любая система, движущаяся с постоянной скоростью относительно инерциальной, тоже является инерциальной. Существует фундаментальный физический принцип, который называется **принципом относительности Галилея**[1].

Основные законы физики одинаково формулируются для всех систем отсчета, которые движутся относительно друг друга с постоянной скоростью (то есть без ускорения).

Согласно этому принципу, наблюдатель, находящийся в кабине без окон, не может экспериментально определить, покоится он или находится в равномерном прямолинейном движении относительно неподвижных звезд. Только глядя в окно и имея, таким образом, возможность сравнивать свое движение с движением звезд, наблюдатель может сказать, что он равномерно движется относительно них. Но даже и тогда он не мог бы решить, сам ли он движется или движутся звезды. Принцип относительности Галилея был одним из первых основных принципов физики. Он является основным для картины Вселенной, предложенной Ньютоном. Этот принцип выдержал многократную экспериментальную проверку и служит сейчас одним из краеугольных камней специальной теории относительности.

Постараемся теперь придать принципу относительности Галилея математическую форму. Обозначим через S какую-либо инерциальную декартову систему координат, а через S' — другую инерциальную декартову систему координат, которая движется со скоростью $\mathbf{V}$ относительно первой (рис. 5.2). Пусть x', y', z', оси системы S', направлены параллельно осям x, y, z системы S. Выберем эти оси так, чтобы вектор $\mathbf{V}$ был направлен параллельно оси x. Мы хотим сравнить результаты измерения времени и расстояний, которые сделаны неподвижным относительно системы S наблюдателем, с такими же измерениями, которые выполнены наблюдателем, покоящимся относительно системы S'. Каким будет результат такого сравнения, можно будет окончательно решить только с помощью опыта.

Если каждый из двух наблюдателей располагает большим числом часов с совершенно одинаковым ходом, то они могут проделать следующее. Пусть сначала наблюдатель в системе S распределит свои часы вдоль оси x и установит их все на одно и то же время. Осуществить это совсем не просто, но мы отложим анализ того, как следует точно выполнять эти измерения, до тех пор, пока аналогичный опыт не будет рассмотрен нами с точки зрения специальной теории относительности. Если мы будем считать скорость света бесконечно большой, то надо только “посмотреть” на все эти часы, чтобы удостовериться, что их начальные показания одинаковы. Теперь мы можем сравнить показания часов в системе S' с показаниями часов 1, 2, 3,... в системе S, когда часы в системе S' проходят мимо каждых часов в системе S. В результате мы приходим к выводу, что

$$t' = t \ (V \ll c). \tag{5.10}$$

[1]Во времена Галилея под законами физики понимались в основном законы механики. Лишь позднее этот принцип был обьединен с конечностью скорости распространения взаимодействий и стал называться **принципом относительности Эйнштейна**. Во времена же Галилея скорость распространения взаимодействий считалась бесконечной.

Это означает, что результаты отсчетов времени, выполненных в системе S', равны результатам отсчетов времени в системе S. Здесь t означает время события в системе S, а t' — время события в системе S'.

Мы можем даже определить относительные размеры неподвижной и движущейся метровой линейки. Мы хотим знать, какой размер для наблюдателя в системе S имеет метровая линейка, которая покоится в системе S'. Простой способ определить это заключается в использовании часов для регистрации положения обоих концов движущейся метровой линейки. Эта регистрация производится одновременно, то есть при одном и том же показании часов, находящихся в системе S у переднего и заднего концов этой линейки. Экспериментально мы находим, что

$$L' = L \ (V \ll c). \tag{5.11}$$

Мы можем теперь выразить равенства $t' = t$ и $L' = L$ в виде преобразования, связывающего координаты x', y', z' и время t' какого-либо события, измеренные в системе S', с координатами x, y, z, и временем t этого же события в системе S. Предположим, что в начальный момент времени, который одинаков для обеих систем, то есть при $t = 0$ и $t' = 0$, начала координат обеих систем совпадают. Тогда, если мы выберем совершенно одинаковые масштабы длин, то получим следующие уравнения преобразования:

$$t = t', \quad x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{5.12}$$

Это преобразование называется **преобразованием Галилея**. В векторной форме его, очевидно, можно записать так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t', \quad t = t'. \tag{5.13}$$

Если сопоставить преобразование Галилея с основным постулатом о том, что законы физики, определенные в системах S и S', должны быть тождественными, то мы можем сделать такой вывод.

Основные законы физики должны быть инвариантными относительно преобразований Галилея (то есть не должны изменяться относительно них).

Этот вывод имеет более **частный** характер, чем принцип относительности Галилея, так как мы считали, что скорость света бесконечна, из чего следовало, что можно одновременно синхронизировать часы в обеих системах отсчета, то есть что $t' = t$. На самом деле из-за конечности скорости света основными преобразованиями, относительно которых должны быть инвариантными все законы природы, являются **преобразования Лоренца**, а не Галилея. Именно они адекватно выражают принцип относительности Галилея (не путать: принцип относительности Галилея верен точно, а преобразования Галилея — приближенно при условии, что $V \ll c$).

Давайте теперь рассмотрим второй закон Ньютона с точки зрения его инвариантности относительно преобразований Галилея:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{5.14}$$

Поскольку $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, а $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, то из преобразований Галилея следует, что

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{V}, \text{ или } \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \tag{5.15}$$

Дифференцируя это выражение по времени, получаем

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \quad (\text{так как } \mathbf{V} = \text{const}), \tag{5.16}$$

или $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, то есть ускорения материальной точки в обеих системах совпадают. С другой стороны, из принципа относительности следует, что второй закон Ньютона должен выглядеть одинаково в обеих системах отсчета, то есть

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= \mathbf{F}, \\ m\mathbf{a}' &= \mathbf{F}' \end{aligned} \tag{5.17}$$

(полагаем, что масса от скорости не зависит). Поскольку $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, то следовательно, и $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$, то есть сила, действующая на частицу в любой инерциальной системе отсчета, одна и та же.

С этим утверждением, например, согласуется закон всемирного тяготения, согласно которому между двумя телами действует сила притяжения, пропорциональная произведению масс этих тел и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними:

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}. \tag{5.18}$$

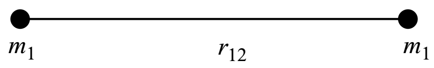

Рис. 5.3. Сила гравитационного притяжения двух точечных масс зависит только от расстояния между ними r_{12}. Оно одинаково во всех инерциальных системах отсчета (при условии, что $V \ll c$).

Очевидно, что эта величина будет одинаковой во всех инерциальных системах отсчета, поскольку одинаково расстояние между двумя точками 1 и 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}'_1 + \mathbf{V}t', \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}'_2 + \mathbf{V}t'. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Следовательно,

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_{12}, \tag{5.20}$$

при этом мы предполагали, что массы тел не зависят от скорости, то есть одинаковы в обеих инерциальных системах отсчета.

Закон сохранения импульса. Центр инерции. Движение центра инерции. Связь закона сохранения импульса с принципом относительности Галилея

Второй закон Ньютона можно переписать в таком виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{6.1}$$

где мы ввели величину

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \tag{6.2}$$

называемую в физике **импульсом**. При этом мы предполагали, что масса частицы m от скорости (а значит и от времени) не зависит:

$$m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{6.3}$$

А если зависит? В какой форме справедлив второй закон Ньютона, описывающий движение релятивистских частиц? Ответ:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{6.4}$$

Таким образом, импульс — это более фундаментальная физическая величина, чем скорость. Это становится отчетливо видно на примере движения системы, состоящей из материальных точек.

Рассмотрим, например, свободное движение двух тел с массами m_1 и m_2, связанных друг с другом пружинкой, которую для простоты мы будем считать невесомой (рис. 6.1). На эту систему не действуют внешние силы, поэтому, согласно первому закону Ньютона, система должна либо находиться в покое, либо двигаться с постоянной по величине и направлению скоростью. Но скорость каждого из тел в процессе движения сложным образом меняется по величине и направлению, поскольку система одновременно совершает **поступательное**, **колебательное** и **вращательное** движения. Значит, первый закон Ньютона применим не ко всем точкам системы. А тогда где же находится та точка, которая движется с постоянной скоростью? Она существует (хотя бы одна), иначе первый закон Ньютона не был бы справедливым.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, запишем уравнение, выражающее второй закон Ньютона, для каждой из материальных точек 1 и 2:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21}, \tag{6.5}$$

где $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая со стороны второй частицы на первую, а $\mathbf{F}_{21}$ — сила, действующая со стороны первой частицы на вторую. Согласно третьему закону Ньютона, эти силы равны по величине и противоположны по направлению:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \tag{6.6}$$

Сложим теперь два уравнения движения:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0. \tag{6.7}$$

Это можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0. \tag{6.8}$$

В результате получаем **закон сохранения импульса** системы двух тел

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathrm{const}. \tag{6.9}$$

Подставляя сюда выражение для импульсов частиц, получаем после следующей цепочки преобразований

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \mathrm{const}, \text{ или} \tag{6.10}$$

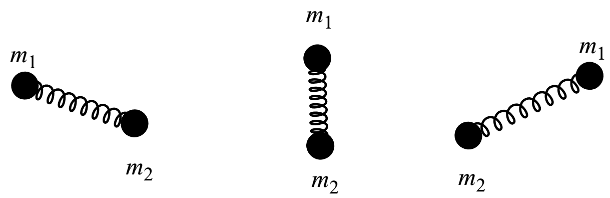

Рис. 6.1. Свободное движение двух тел, связанных пружинкой.

$$m_1\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}+m_2\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}=\mathrm{const},\ \text{или} \tag{6.11}$$

$$\frac{d(m_1\mathbf{r}_1)}{dt}+\frac{d(m_2\mathbf{r}_2)}{dt}=\mathrm{const},\ \text{или} \tag{6.12}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2\right)=\mathrm{const}. \tag{6.13}$$

Разделив обе части последнего равенства на суммарную массу, $m=m_1+m_2$, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}\right)=\frac{\mathrm{const}}{m_1+m_2}=\mathrm{const}'. \tag{6.14}$$

Введем теперь вектор

$$\mathbf{R}_c\equiv\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}. \tag{6.15}$$

Точка с координатами $\mathbf{R}_c$ называется **центром инерции** (или **центром масс**) системы из двух материальных точек. Из уравнения (6.14) следует, что, каким бы сложным ни казалось движение каждой из масс, производная $d\mathbf{R}_c/dt=\mathrm{const}$. Таким образом, центр инерции движется с постоянной скоростью (независимо от наличия колебательного и вращательного движения системы). Обозначим эту скорость как $\mathbf{V}_c$:

$$\frac{d\mathbf{R}_c}{dt}=\mathbf{V}_c. \tag{6.16}$$

Подставляя сюда выражение для $\mathbf{R}_c$ и дифференцируя, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}\right)=\frac{m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2}=\mathbf{V}_c. \tag{6.17}$$

Эта формула определяет скорость центра инерции $\mathbf{V}_c$ через массы и скорости составляющих систему частиц. К движению именно этой точки относится первый закон Ньютона, и скорость этой точки надо считать скоростью движения системы как целого[1]. Если мы согласимся на такое определение скорости движения системы как целого, то тогда импульс системы как целого должен быть равен произведению суммарной массы системы m_1+m_2 на ее скорость $\mathbf{V}_c$, то есть $(m_1+m_2)\mathbf{V}_c$. С другой стороны,

$$(m_1+m_2)\mathbf{V}_c=m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2 \tag{6.18}$$

и импульс системы оказывается равным сумме импульсов составляющих ее частиц. Таким образом, импульс, как говорят, — величина **аддитивная**, то же самое можно сказать и о массе тела. Мы показали, что в отсутствие внешних сил этот импульс не меняется со временем, то есть сохраняется. Очевидно, что все вышесказанное можно отнести и к системе с бо́льшим числом материальных точек.

Если на систему теперь действуют внешние силы, например на первое тело $\mathbf{F}_1$ и на второе $\mathbf{F}_2$, то уравнения движения для каждой из материальных точек запишутся в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}_1}{dt}&=\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_1\,,\\ \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}&=\mathbf{F}_{21}+\mathbf{F}_2\,.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2\right)&=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2\,,\quad \text{или}\\ m\frac{d\mathbf{V}_c}{dt}&=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2\,.\end{aligned} \tag{6.20}$$

[1] В системе отсчета, движущейся со скоростью $\mathbf{V}_c$, импульс системы материальных точек равен нулю.

Отсюда следует, что

центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила — геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

Примером может служить движение снаряда по параболе в безвоздушном пространстве. Если в какой-либо момент времени снаряд разорвется на мелкие осколки, то эти осколки будут далее разлетаться в разные стороны. Однако центр масс осколков и газов, образовавшихся при взрыве, будет продолжать свое движение по параболической траектории, как если бы никакого взрыва не было.

Принцип относительности Галилея и закон сохранения импульса

Сформулировав принцип относителньости Галилея и законы Ньютона, мы нашли, что они не противоречат друг другу, то есть второй закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Галилея. Затем из второго и третьего законов Ньютона мы вывели закон сохранения импульса (этих двух законов, по существу, достаточно: первый закон — частный случай второго, когда сила равна нулю). Таким образом, возникает естественное желание проверить закон сохранения импульса с точки зрения принципа относительности Галилея. А именно: давайте покажем, что если этот закон сохранения верен в одной инерциальной системе, то он верен и во всех остальных системах, движущихся относительно нее с постоянной скоростью.

Действительно, рассмотрим две системы координат S и S' и пусть последняя движется со скоростью $\mathbf{V}$ относительно первой. Тогда, если $\mathbf{v}$ — это скорость частицы в системе S, а $\mathbf{v}'$ — скорость в системе S', то, как мы видели, эти скорости связаны соотношением

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \tag{6.21}$$

Пусть теперь в системе отсчета S происходит столкновение двух частиц m_1 и m_2 со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, В результате столкновения они разлетаются, но уже с другими скоростями $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$. Закон сохранения импульса в системе отсчета S выглядит тогда следующим образом:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{w}_1 + m_2\mathbf{w}_2. \tag{6.22}$$

Подставляя сюда

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_2' + \mathbf{V}, \\ \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1' + \mathbf{V}, \quad \mathbf{w}_2 &= \mathbf{w}_2' + \mathbf{V}, \end{aligned} \tag{6.23}$$

мы получим

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{v}_1' + \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{v}_2' + \mathbf{V}) &= m_1(\mathbf{w}_1' + \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{w}_2' + \mathbf{V}), \text{ или} \\ m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' + (m_1+m_2)\mathbf{V} &= m_1\mathbf{w}_1' + m_2\mathbf{w}_2' + (m_1+m_2)\mathbf{V}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Сокращая на $(m_1+m_2)\mathbf{V}$, мы приходим к выводу, что и в системе S' выполняется закон сохранения импульса:

$$m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = m_1\mathbf{w}_1' + m_2\mathbf{w}_2'. \tag{6.25}$$

Этот вывод можно обобщить и на тот случай, когда массы частиц в процессе соударения перераспределяются, но имеет место закон сохранения массы:

$$m_1 \to M_1 \text{ и } m_2 \to M_2, \text{ но } m_1 + m_2 = M_1 + M_2. \tag{6.26}$$

Таким образом, закон сохранения импульса не противоречит принципу относительности Галилея.

Если импульс сохраняется в одной инерциальной системе, то он сохраняется и в любой другой системе, движущейся относительно нее с произвольной скоростью прямолинейно и равномерно.

После этого утверждения возникает один интересный вопрос. Нельзя ли вывести закон сохранения импульса, исходя из одного только принципа относительности Галилея? Замечательно то, что ответ на этот вопрос утвердительный.

Давайте сначала рассмотрим случай, когда два совершенно одинаковых тела связаны между собой пружинкой или чем-то еще в таком роде и покоятся, а затем вдруг они освобождаются и разлетаются под действием этой пружины, или быть может небольшого взрыва, в разные стороны (рис. 6.2). Для простоты рассмотрим движение только в одном направлении. Предположим также, что эти два тела расположены абсолютно симметрично. Когда между ними произойдет взрыв, одно из них полетит направо с некоторой скоростью v. Тогда естественно, что другое тело полетит налево с той же самой скоростью v, поскольку оба тела подобны и нет никаких оснований считать, что левая стороны окажется предпочтительней правой. В результате, вследствие симметрии, импульс системы сохраняется (он равен нулю до взрыва и после взрыва).

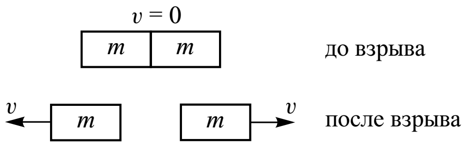

Рис. 6.2. Разлет двух равных масс в результате взрыва.

Теперь рассмотрим обратный процесс, когда два совершенно одинаковых тела движутся навстречу друг другу с равными скоростями, а после столкновения слипаются (рис. 6.3). Здесь опять на помощь приходят соображения симметрии (то есть что между левой и правой сторонами нет никакого различия), из которых следует, что образовавшееся тело должно стоять на месте. Теперь посмотрим на этот же процесс в системе отсчета, в которой первое тело покоится (рис. 6.4). Тогда второе движется ему навстречу со скоростью $2v$. Очевидно, что тогда в этой системе отсчета слипшиеся тела будут двигаться налево со скоростью, в два раза меньшей и равной v. Отсюда следует вывод, что если на покоящееся тело налетает другое такое же тело, которое движется со скоростью v, то после соударения оба слипшихся тела будут двигаться в том же направлении со скоростью, в два раза меньшей, $v/2$ (см. рис. 6.5). Импульс опять сохраняется!

Точно так же можно рассмотреть неупругое столкновение двух одинаковых тел, каждое из которых движется с **произвольной** скоростью. Представим себе, что одно тело летит со скоростью v_1, а другое — со скоростью v_2 в том же направлении ($v_1 > v_2$) (рис. 6.6). Какой будет их скорость после соударения? Давайте снова перейдем в систему отсчета, в которой второе тело покоится. В ней первое тело налетает на второе (покоящееся) со скоростью $v_1 - v_2$. Мы знаем, что в такой ситуации после соударения скорость слипшегося тела будет равна $(v_1 - v_2)/2$. В исходной же системе отсчета она будет на v_2 больше, то есть равной

$$\frac{v_1 - v_2}{2} + v_2 = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

В результате мы снова имеем закон сохранения импульса

$$mv_1 + mv_2 = 2m \cdot \frac{1}{2}(v_1 + v_2). \tag{6.27}$$

Таким образом, принцип относительности Галилея позволяет разобраться в любом неупругом соударении одинаковых масс. И хотя мы рассмотрели чисто одномерную ситуацию, ее легко обобщить на произвольный случай. Надо только перейти в систему отсчета, движущуюся не вдоль направления движения тел, а под каким-нибудь углом. Принцип остается тем же самым, хотя детали немного усложняются.

Продвинемся немного дальше. Рассмотрим три одинаковых тела. Первые два скреплены пружиной (или между ними заложен взрыватель), а рядом на очень близком расстоянии Δ находится третье тело. Пусть теперь произойдет “взрыв”. Два первых тела разлетятся со скоростями v в разные стороны. Через небольшой промежуток времени (Δ/v) второе тело сталкивается с третьим и слипается с ним. Образовавшееся новое тело, как мы уже убедились, будет двигаться вправо со скоростью $v/2$ (рис. 6.7).

А что произойдет, если взрыв устроить между телом массы m и телом массы $2m$? Ответ очевиден. Для этого надо повторить предыдущий эксперимент с $\Delta = 0$ (см. рис. 6.8)!

Давайте теперь обратим движение вспять, то есть прокрутим “ленту” в обратную сторону. Что произойдет, если тело массы m летит со скоростью v навстречу телу массы $2m$, скорость которого равна $v/2$? Интуитивно кажется, что, когда тела слипнутся, результирующая скорость будет равна

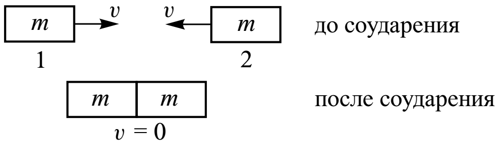

Рис. 6.3. Неупругое соударение двух равных масс.

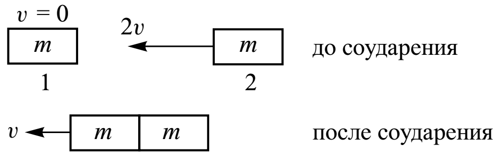

Рис. 6.4. Неупругое соударение двух равных масс в системе отсчета одной из них.

нулю. Это действительно так, если уравнения механики инвариантны относительно инверсии времени: $t \to -t$. Впоследствии мы убедимся, что это действительно так и происходит. А сейчас примем это for granted. Итак, ситуация будет выглядеть так, как изображено на рис. 6.9а.

Теперь выясним, что произойдет в системе отсчета, которая движется вместе с телом $2m$. Как следует из рис. 6.9б, скорость тела, образовавшегося после столкновения, равна $v/2$. Иными словами (см. рис. 6.10), после столкновения скорость трех тел будет в три раза меньше скорости налетающего тела. Опять импульс сохраняется!

Очевидно, что этот процесс можно было бы продолжать до бесконечности и вывести закон сохранения импульса для любого соотношения масс сталкивающихся и затем слипающихся частиц. Но мы на этом остановимся! Наступает время поразмыслить над этой ситуацией!

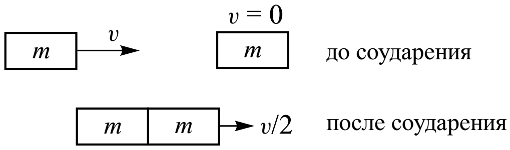

Рис. 6.5. Неупругое соударение двух равных масс, одна из которых покоится, — итог.

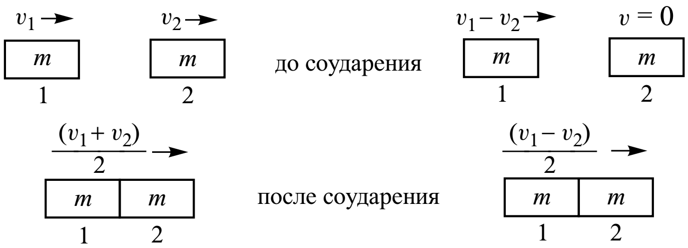

Рис. 6.6. Неупругое соударение двух равных масс, движущихся с произвольной скоростью. Слева — лабораторная система отсчета, справа — система отсчета, связанная с одной из масс.

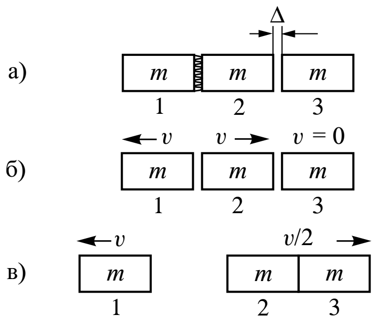

Рис. 6.7. Три одинаковых массы: а) ситуация до взрыва, б) через очень короткое время после взрыва, в) спустя некоторое время после взрыва.

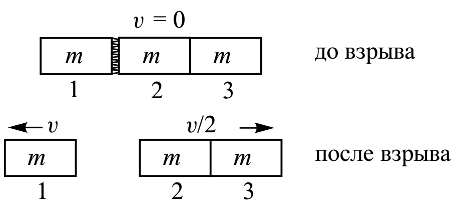

Рис. 6.8. Разлет тел массы m и массы $2m$.

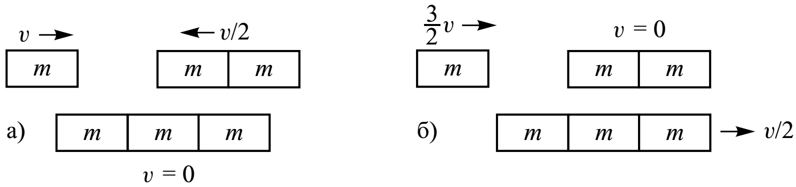

Рис. 6.9. а) Неупругое столкновение двух тел с массами m и $2m$. б) То же самое, но в системе отсчета, в которой тело массы $2m$ покоится.

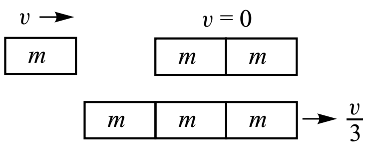

Рис. 6.10. Окончательный итог.

Сила. Уравнение движения Ньютона. Основные задачи динамики материальной точки. Работа. Кинетическая энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Принцип обратимости движения в поле консервативных сил

Итак, для того чтобы определить движение материальной точки, надо решить уравнение движения Ньютона

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \tag{7.1}$$

где сила $\mathbf{F}$ в общем случае может зависеть от:

— координат частицы $\mathbf{r}$ (колебания груза на пружине, $F = -kx$, движение Земли вокруг Солнца, $F \sim 1/r^2$),
— скорости частицы $\mathbf{v}$ (сила трения: при больших скоростях $\sim v^2$, а при малых $\sim v$),
— времени t (переменное во времени воздействие).

Так, например, если заряженная частица движется в электрическом и магнитном полях, то на нее действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\left[\mathbf{v} \times \mathbf{H}\right], \tag{7.2}$$

где q заряд частицы. Заметим, что здесь оба слагаемых — полярные векторы!

Однако, как известно, заданием силы движение однозначно еще не определяется. Необходимо задать также **начальные условия** $\mathbf{r}(0)$ и $\mathbf{v}(0)$, то есть значения координаты и скорости в некоторый начальный момент времени $t = 0$.[1] Тогда, как доказывается в математике, уравнение (7.1) будет иметь единственное решение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Поскольку в уравнение, описывающее второй закон Ньютона, входят не только сама функция $\mathbf{r}(t)$, но и ее первая, $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, и вторая, $d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{a}$, производные по времени, это уравнение называется **дифференциальным уравнением второго порядка**. Не существует универсальной теории или рецепта, как решать такие уравнения в общем случае. Достаточно хорошо разработаны лишь численные методы, но для них часто безразлично, насколько сложным выглядит выражение для силы. Однако в достаточно простых случаях такие решения могут быть найдены аналитически.

Работа

Как известно из курса физики средней школы, работа — это скалярная величина, равная произведению силы на перемещение и на косинус угла между ними. Для конечного перемещения $\Delta\mathbf{r}$ имеем

$$\Delta A = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r} = F\,\Delta r\,\cos\alpha, \tag{7.3}$$

где мы воспользовались понятием скалярного произведения двух векторов.

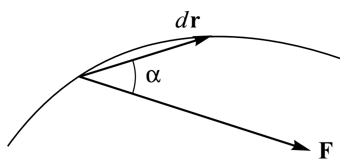

Рис. 7.1. Работа равна скалярному произведению силы на перемещение.

В общем случае, когда материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории L, проходит путь конечной длины, этот путь можно мысленно разбить на бесконечно малые участки, на каждом из которых сила $\mathbf{F}$ может считаться приближенно постоянной, а элементарная работа может быть

[1] Можно задать две других величины, например значение координаты (или скорости) в два разных момента времени.

вычислена по формуле $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Если теперь сложить все эти элементарные работы, то получим выражение для работы в виде интеграла

$$A = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{7.4}$$

Это выражение называется **криволинейным интегралом** от вектора $\mathbf{F}$ вдоль кривой L.

Работа силы, отнесенная к единице времени, называется **мощностью**:

$$P = \frac{dA}{dt}. \tag{7.5}$$

Поскольку

$$dA = \frac{dA}{dt}\,dt = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt, \tag{7.6}$$

то формулу для работы можно переписать в виде

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\,dt, \tag{7.7}$$

то есть можно выразить работу через интеграл от мощности по времени, или через интеграл по времени от скалярного произведения силы на скорость частицы. В последнем случае ясно, что если сила, действующая на частицу, перпендикулярна скорости $\mathbf{v}$, то работа такой силы равна нулю. Поэтому, например, магнитное поле никакой работы над частицей не производит (смотри второе слагаемое в формуле (7.2)).

Воспользуемся теперь формулой второго закона Ньютона и выразим силу через производную от импульса по времени $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$:

$$A = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\,dt = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v}\,dt = \int d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}. \tag{7.8}$$

Поскольку $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, то $d\mathbf{p} = m\,d\mathbf{v}$. Поэтому

$$A = \int d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = \int m d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = m \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m \int d\frac{v^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \mathrm{const}. \tag{7.9}$$

При этом мы воспользовались тем, что $dv^2 = d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$. Если теперь мы будем рассматривать работу силы при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2, то искомая работа будет равна

$$A_{12} = \int_1^2 d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = m \int_1^2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \left.\frac{mv^2}{2}\right|_1^2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{7.10}$$

Как известно, скалярная величина

$$K = \frac{mv^2}{2} \tag{7.11}$$

называется **кинетической энергией** частицы. Таким образом, мы доказали, что

работа силы по перемещению материальной точки равна приращению ее кинетической энергии.

При этом под силой надо, однако, понимать полную силу, действующую на точку. Так, например, если вы тащите санки по не очень скользкой дороге (посыпанной песком), то работа, которую вы совершаете, отлична от нуля. Однако никакого приращения кинетической энергии санок не происходит. Все дело в том, что сила трения тоже производит работу (отрицательную). В результате полная сила и полная работа оказываются равными нулю.

Полученный результат может быть без труда обобщен на случай произвольной системы материальных точек. Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий материальных точек, из которых состоит эта система:

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \tag{7.12}$$

В результате:

Суммарная работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы.

При этом нужно учитывать также и работу всех внутренних сил. Сравните: внутренние силы суммарный импульс системы не изменяют (только внешние), а кинетическую энергию системы изменяют. Например, в процессе соударения существует момент, когда два сталкивающихся тела останавливаются. Кинетическая энергия системы в этот момент равна нулю, а энергия упругой деформации максимальна. Если соударение упругое, то после него кинетическая энергия, разумеется, восстанавливается и остается такой же, как и до соударения.

Консервативные и неконсервативные силы

Все силы, встречающиеся в механике макроскопических тел, принято разделять на **консервативные** и **неконсервативные**. Консервативными называются силы, работа которых не зависит от формы пути между двумя точками (при перемещении тела между ними).

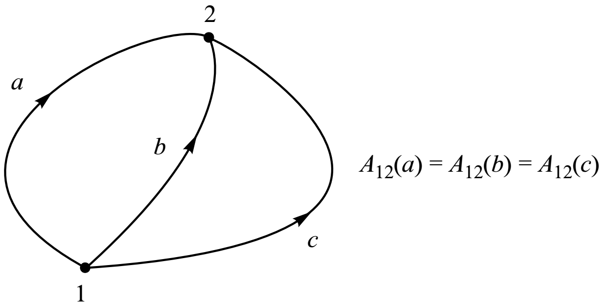

Рис. 7.2. Работа консервативной силы не зависит от пути перехода.

Примером консервативных сил является, например, сила тяжести. Вычислим работу этой силы при переходе материальной точки из положения 1 в положение 2 вдоль прямолинейного отрезка $\mathbf{r}_{12}$:

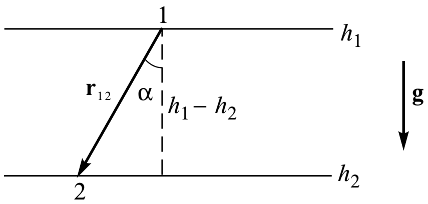

Рис. 7.3. Работа силы тяжести зависит только от разности высот $h_1 - h_2$.

$$A_{12} = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{12} = mgr_{12}\cos\alpha = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2, \tag{7.13}$$

где h_1 и h_2 — высоты, на которых находилась материальная точка в начале и в конце пути. Они отсчитываются от какого-либо произвольного уровня, например от земной поверхности или от уровня моря.

Формула для работы $A_{12} = mgh_1 - mgh_2$ остается справедливой и при перемещении вдоль произвольной кривой $1a2$ или $1b2$. Для доказательства этого утверждения надо разбить весь путь горизон-

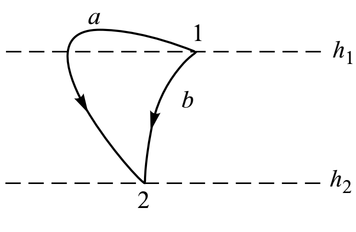

Рис. 7.4. То же, что и на предыдущем рисунке, но в случае криволинейной траектории частицы.

тальными плоскостями на малые участки, каждый из которых может быть принят за прямолинейный. Применив к каждому участку выведенную формулу $A_{12} = mgh_1 - mgh_2$ и сложив полученные работы, мы придем к прежнему результату. Таким образом,

работа силы тяжести не зависит от формы пути. Она определяется только начальным и конечным положениями перемещающейся точки.

Кроме того, сравнивая

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad \text{и} \qquad A_{12} = mgh_1 - mgh_2,$$

приходим к выводу, что

$$mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2},$$

то есть при движении в поле силы тяжести сохраняется величина

$$E = mgh + \frac{mv^2}{2} = \text{const}. \tag{7.14}$$

Она, как вы знаете, называется **полной энергией** системы и складывается из кинетической и **потенциальной энергии**. Под потенциальной энергией здесь надо понимать величину $U = mgh$.

Вторым примером консервативных сил являются так называемые **центральные силы**. Так называется сила, которая всегда направлена по радиус-вектору, соединяющему материальную точку с некоторой точкой в пространстве, и зависит только от расстояния до этой точки (рис. 7.5). Сама эта точка называется центром силы, или силовым центром. Примером таких сил могут служить силы

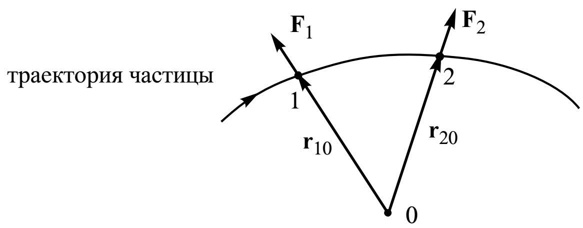

Рис. 7.5. Точка 0 — силовой центр. Силы $F_1(r_{10})$ и $F_2(r_{20})$ зависят только от расстояния до центра.

гравитационного притяжения Земли к Солнцу (или Луны к Земле). Для того чтобы рис. 7.5 соответствовал этому случаю, надо только изменить направления сил на рисунке на противоположные, так как там они изображены как силы отталкивания.

Покажем, что работа центральных сил также не зависит от формы пути и определяется только начальным и конечным положениями материальной точки. Для этого произведем бесконечно малое перемещение $d\mathbf{r}$. При этом $|d\mathbf{r}|\cos\alpha = dr$, где dr — приращение расстояния до центра (смотри

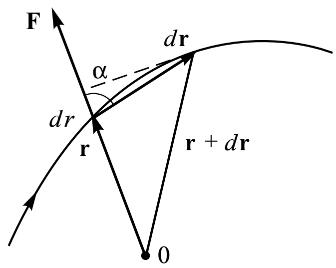

Рис. 7.6. Работа центральных сил.

рис. 7.6). Таким образом, $dA = Fdr$ и

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr. \tag{7.15}$$

Значение определенного интеграла зависит только от нижнего и верхнего пределов r_1 и r_2 и, таким образом, не зависит от формы пути.

Рассмотрим пример. Так, сила гравитационного притяжения между двумя точечными массами m и M зависит только от расстояния r между ними:

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{7.16}$$

Поместим начало координат в точку, где расположено одно тело массы M (пусть это, скажем, будет Земля), тогда второе тело массы m, находящееся на расстоянии r от первого, притягивается к нему с силой (7.16) (рис. 7.7).

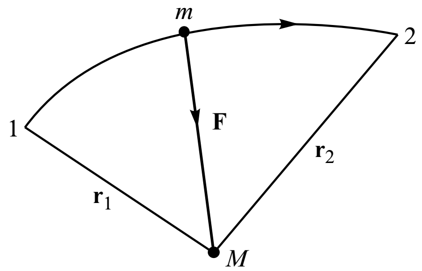

Рис. 7.7. Работа силы гравитационного притяжения двух точечных масс.

Работа этой силы определяется выражением

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_1^2 G\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} = -GmM\int_1^2 \frac{1}{r^3}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} =$$

$$-GmM\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -\,GmM\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \tag{7.17}$$

При этом мы воспользовались тем, что $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (1/2)dr^2 = r\,dr$. Таким образом,

$$A_{12} = \frac{GmM}{r_2} - \frac{GmM}{r_1}. \tag{7.18}$$

Учитывая, что работа равна изменению кинетической энергии,

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{GmM}{r_2} - \frac{GmM}{r_1}, \tag{7.19}$$

мы получаем, что в процессе движения остается постоянной величина

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{GmM}{r_2} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GmM}{r_1} = \mathrm{const}. \tag{7.20}$$

Она, как и прежде, называется полной энергией и складывается из кинетической и потенциальной энергии,

$$E = T + U, \tag{7.21}$$

причем под потенциальной энергией здесь следует понимать величину

$$U = -\frac{GmM}{r}. \tag{7.22}$$

Она отрицательна, так как соответствует притяжению.

Рассмотрим теперь замкнутый контур, который соединяет точки 1 и 2. Если сила консервативна, то $A_{132} = A_{142}$. Если мы изменим направление движения и будем двигаться не от 1 к 2, а от 2 к 1,

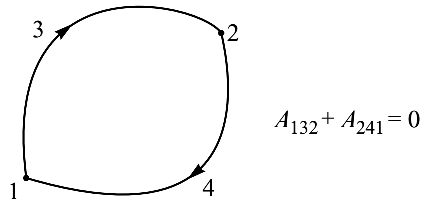

Рис. 7.8. Работа консервативных сил на замкнутом контуре равна нулю.

то на каждом отрезке нашего пути сила будет той же самой, а перемещение изменит знак, то есть

$$A_{142} = -A_{241}, \tag{7.23}$$

в результате

$$A_{132} = -A_{241}, \quad \text{или} \quad A_{132} + A_{241} = 0. \tag{7.24}$$

Таким образом, мы приходим к важному результату, что

работа консервативных сил на замкнутом контуре равна нулю.

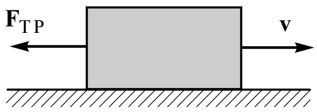

Рис. 7.9. Сила трения всегда направлена против скорости частицы.

Все силы, не являющиеся консервативными, называются **неконсервативными силами**. К ним относятся, прежде всего, так называемые **диссипативные силы**, например силы трения, возникающие при скольжении одного тела относительно другого. Сила трения в этом случае всегда направлена против скорости движения, то есть против перемещения тела. Работа этой силы всегда отрицательна. И если тело сместилось налево, а потом вернулось назад, то очевидно, что суммарная работа будет величиной отрицательной и не равной нулю. Таким образом, работа силы трения скольжения при движении по замкнутому контуру не равна нулю! К неконсервативным силам относятся также силы

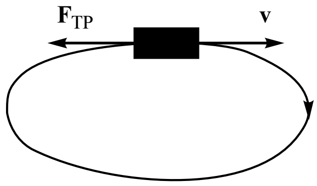

Рис. 7.10. Работа силы трения на замкнутом контуре не равна нулю.

сопротивления, которые действуют на тело при его движении в жидкой или газообразной среде. Эти силы называют иногда силами вязкого трения. В отличие от трения скольжения, они всегда зависят от абсолютной величины скорости тела! И направлены противоположно ей.

Здесь необходимо отметить, что на микроскопическом уровне, как это выяснено на сегодняшний день, все силы, действующие между элементарными частицами, консервативны! Таким образом, неконсервативность сил на макроскопическом уровне — это есть следствие того, что мы не рассматриваем детально движение составляющих тело атомов, молекул, электронов и т.д. Если бы мы могли представить себе замкнутый контур в **конфигурационном пространстве** всех составляющих тело частиц, то тогда работа всех сил при движении по этому контуру была бы всегда равна нулю. А так в исходное положение возвращается одно лишь макроскопическое тело, и то приближенно, поскольку составляющие тело молекулы теперь движутся быстрее — тело нагрелось. Нагрелась в результате трения и окружающая тело внешняя среда, то есть она тоже изменила свое состояние. Таким образом, в результате движения макроскопического тела по замкнутому контуру **вся** система, строго говоря, не возвращается в исходное состояние! Поэтому отлична от нуля и работа. Эта работа в конечном счете перешла в тепло. И нет уже способа вернуть затраченную энергию. Этот процесс **необратим**!

Еще один вид сил — это **гироскопические силы**. Они зависят от скорости материальной точки, но направлены всегда перпендикулярно этой скорости. Поэтому работа таких сил всегда равна нулю. Из-за этого их можно условно отнести к консервативным. Единственным примером гироскопических сил в инерциальных системах отсчета является сила Лоренца, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле,

$$\frac{q}{c}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right]. \tag{7.25}$$

Принцип обратимости движения в поле консервативных сил

Для того чтобы сила была консервативной, достаточно, чтобы она не зависела от скорости частицы и от времени (явно):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\equiv\mathbf{F}(\mathbf{r}). \tag{7.26}$$

Неявно она может зависеть от времени — через зависимость $\mathbf{r}(t)$. В этом случае уравнение движения Ньютона (7.1) инвариантно относительно **операции инверсии времени**

$$t\to -t. \tag{7.27}$$

Другими словами, если мы нашли решение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ уравнения движения

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \tag{7.28}$$

то решением этого уравнения будет также и функция $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(-t)$. Последнее справедливо потому, что операция двукратного дифференцирования инвариантна относительно замены $t \to -t$:

$$\frac{d^2}{dt'^2} = \frac{d^2}{dt^2}, \tag{7.29}$$

где $t' = -t$.

Проявлением этой симметрии является то, что если, например, частица движется по некоторой траектории, определяемой какими-то начальными значениями координаты и скорости, и мы в какой-то момент времени обратим движение, изменив скорость частицы на противоположную, то принимая ее за новую начальную скорость, мы увидим,что система будет двигаться обратно по той же точно

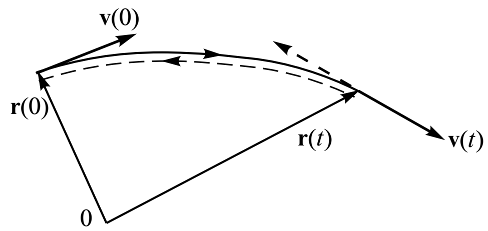

Рис. 7.11. Обращение движения вспять. Частица пойдет назад по той же самой траектории!

траектории и с той же (с точностью до знака) скоростью. Это происходит так, как если бы мы засняли движение частицы на кинопленку и прокрутили пленку назад. Этот важный принцип называется **принципом обратимости движения**. Он справедлив, когда частица (или тело) движется в поле консервативных сил, не зависящих от скорости частицы.

Хотя работа гироскопических сил равна нулю и поэтому их можно отнести к консервативным, к ним не применим в прежнем виде принцип обратимости движения, поскольку эти силы зависят не только от положения материальной точки, но и от ее скорости. Поэтому, например, если заряд движется по какой-либо траектории в электрическом и магнитном полях и мы в какой-то момент времени обратим его движение, то заряд не пойдет назад по той же самой траектории. Это произойдет лишь в том случае, если мы одновременно изменим и знак магнитного поля $\mathbf{H}$:

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] = [(-\mathbf{v}) \times (-\mathbf{H})]. \tag{7.30}$$

Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике. Сила и потенциальная энергия. Одномерное движение. Границы движения. Закон сохранения импульса и энергии как следствие однородности пространства-времени

Для консервативных сил, работа которых не зависит от формы пути, можно ввести важное понятие **потенциальной энергии**. Давайте какое-либо произвольное положение системы, характеризуемое заданием координат ее материальных точек, условно примем за нулевое. Тогда

работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из некоторого положения в нулевое, называется **потенциальной энергией** U системы в этом положении.

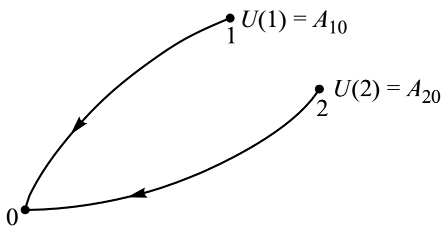

Рис. 8.1. Определение потенциальной энергии.

Работа консервативных сил не зависит от пути перехода, а поэтому потенциальная энергия системы при фиксированном нулевом положении зависит только от координат материальных точек системы в рассматриваемом положении. Иными словами,

потенциальная энергия системы U является функцией только ее координат.

Значение потенциальной энергии, вообще говоря, зависит от того, какое положение системы условно принято за нулевое. Если за нулевое принять положение 0, то в положении 1 система будет обладать потенциальной энергией $U = A_{10}$, равной работе консервативных сил при переходе системы из положения 1 в положение 0. Если же за нулевое принять положение $0'$, то потенциальная энергия будет равна $U' = A_{10'}$. Вследствие консервативности сил

$$A_{10'} = A_{10} + A_{00'} \quad \text{или} \quad U_1' = U_1 + A_{00'}. \tag{8.1}$$

Работа $A_{00'}$ постоянна, то есть не зависит от координат системы в рассматриваемом состоянии 1. Она полностью определяется выбором нулевых положений 0 и $0'$.

Мы видим, таким образом, что при замене одного нулевого положения другим потенциальная энергия системы изменяется на постоянную величину. Неопределенность можно усилить еще больше, если условиться считать потенциальную энергию в нулевом положении равной не нулю, а какому-либо постоянному произвольному значению. Тогда в приведенном выше определении вместо потенциальной энергии следует говорить об ее **разности** в двух положениях.

Разностью потенциальных энергий в рассматриваемом и нулевом положениях называется работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое.

Таким образом, потенциальная энергия определена не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной. Этот произвол нестрашен, так как на самом деле всегда важна лишь разность потенциальных энергий.

Пусть система перешла из положения 1 в положение 2 по какому-либо пути 12. Тогда, как следует из рис. 8.3,

$$A_{12} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20} = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1),$$

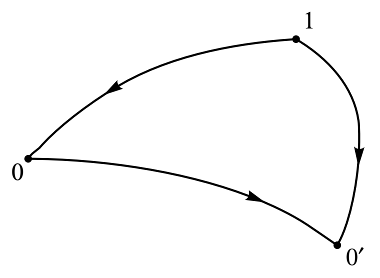

Рис. 8.2. Потенциальная энергия зависит от выбора нулевого положения.

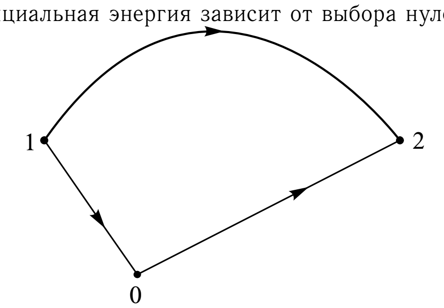

Рис. 8.3. Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы.

то есть работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы при переходе ее из точки 1 в точку 2.

С другой стороны, работа силы равна приращению кинетической энергии системы

$$A_{12} = U_1 - U_2 = K_2 - K_1, \tag{8.2}$$

поэтому

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2. \tag{8.3}$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии системы называется ее **полной энергией** E. Мы получили, что полные энергии в положениях 1 и 2 равны: $E_1 = E_2$, или, что то же самое, полная энергия сохраняется:

$$E = K + U = \mathrm{const}. \tag{8.4}$$

Таким образом,

в системе с одними только консервативными (и гироскопическими) силами полная энергия остается неизменной. Могут происходить лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии системы измениться не может.

Это положение называется **законом сохранения энергии** в механике.

Примеры потенциальной энергии в некоторых простейших случаях:

— $U = mgh$ — потенциальная энергия однородного поля тяжести. Начало отсчета $h = 0$.
— $U = kx^2/2$ — потенциальная энергия растянутой пружины. Начало отсчета $x = 0$.
— $U = -GMm/r$ — потенциальная энергия гравитационного притяжения двух точечных масс m и M. За начало отсчета выбрана бесконечно удаленная точка.

Сила и потенциальная энергия

Зная силу как функцию координат материальной точки $\mathbf{F}(x, y, z)$, можно путем интегрирования (нахождения работы) определить потенциальную энергию системы

$$U_1 = U(x, y, z) - U(0) = A_{10} = -A_{01} = -\int_0^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{8.5}$$

(знак минус перед интегралом обусловлен тем, что при интегрировании в этой формуле мы движемся от точки 0 к точке 1, то есть в направлении, противоположном тому, что изображено на рис. 8.4).

Другая задача — вычисление силы $\mathbf{F}(x, y, z)$ по заданной потенциальной энергии $U(x, y, z)$. Это, естественно, обратная операция — дифференцирование. Пусть у нас есть две бесконечно близкие точки, $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}$. Тогда

$$U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{8.6}$$

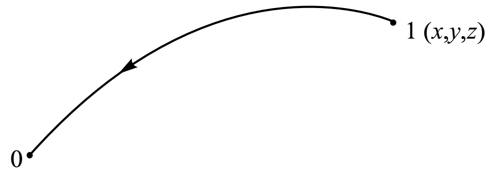

Рис. 8.4. Связь потенциальной энергии с силой.

Расписывая скалярное произведение, получаем

$$dU = -(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz). \tag{8.7}$$

Следовательно,

$$F_x = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{y,z=\text{const}} \equiv -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{8.8}$$

(это есть **частная производная**) и, аналогично,

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{8.9}$$

Подробнее можно записать

$$F_x(x,y,z) = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом, компоненты силы можно найти, дифференцируя потенциальную энергию системы по координатам x, y и z.

Если ввести единичные орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ вдоль осей координат X, Y и Z, то формулу для силы можно будет записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = \\ &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right) \equiv -\operatorname{grad} U, \end{aligned} \tag{8.10}$$

где мы ввели обозначения:

$$\operatorname{grad} U \equiv \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{8.11}$$

Величина, стоящая слева, называется **градиентом скалярной функции** U ($U(x,y,z)$ — скаляр). Эта величина является вектором, поскольку определяет действующую на материальную точку силу. Таким образом, дифференцирование по координатам скалярной функции дает вектор. Проверим это. Согласно данному нами в лекции 4 определению, вектор — это физическая величина, ведущая себя при преобразовании системы координат следующим образом:

$$A_i = \alpha_{ik}A'_k. \tag{8.12}$$

Поскольку координаты преобразуются как компоненты вектора

$$x_i = \alpha_{ik}x'_k, \quad \text{или} \quad x'_k = \alpha_{ik}x_i, \tag{8.13}$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x'_k}\,\frac{\partial x'_k}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x'_k}\alpha_{ik} = \alpha_{ik}\frac{\partial U}{\partial x'_k}. \tag{8.14}$$

Таким образом, мы видим, что производные $\partial U/\partial x_i$ действительно преобразуются как компоненты вектора.

Наряду с обозначением градиента как $\operatorname{grad} U$ применяется обозначение ∇U, где оператор ∇ (**набла**) определяется следующим образом:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{8.15}$$

Используя это обозначение, мы можем записать

$$\operatorname{grad} U = \nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) U = \\ = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{8.16}$$

Геометрический смысл градиента

Для выяснения геометрического смысла градиента полезно ввести **эквипотенциальные поверхности**, то есть такие поверхности, на которых скалярная функция U остается постоянной:

$$U(x, y, z) = \text{const}. \tag{8.17}$$

Пусть U — одна из таких поверхностей, и пусть она проходит через точку пространства O, в которой ищется градиент (рис. 8.5). Поместим в этой точке начало координат. Ось Z направим по нормали к поверхности ($\mathbf{n}$ — единичный орт нормали), а оси X и Y лежат в плоскости, касательной к поверхности в точке O. Поэтому в первом приближении вдоль осей x и y функция U не изменяется:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \tag{8.18}$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{n}, \tag{8.19}$$

поскольку в нашем случае $\mathbf{k} = \mathbf{n}$. Если U возрастает в направлении оси Z, то $\partial U/\partial z > 0$ и, следовательно, градиент направлен по нормали $\mathbf{n}$ к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциальной энергии. Очевидно, что в этом направлении потенциальная энергия изменяется наиболее быстро:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial n}\mathbf{n}. \tag{8.20}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что

> градиент скалярной функции U есть вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности $U(x, y, z) = \text{const}$ в сторону возрастания функции U. Его длина численно равна производной от U по нормали к эквипотенциальной поверхности.

Это определение, как говорят, **инвариантно**. Оно не зависит от выбора системы координат.

Наряду с эквипотенциальной поверхностью через каждую точку пространства можно провести так называемую **силовую линию**. Направление касательной к ней в каждой точке совпадает с направлением силы, действующей на частицу в этой точке. Очевидно, что силовые линии и эквипотенциальные поверхности взаимно ортогональны друг другу (рис. 8.6).

Пользуясь понятием градиента, второй закон Ньютона при движении одной материальной точки в силовом поле можно представить в виде

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \tag{8.21}$$

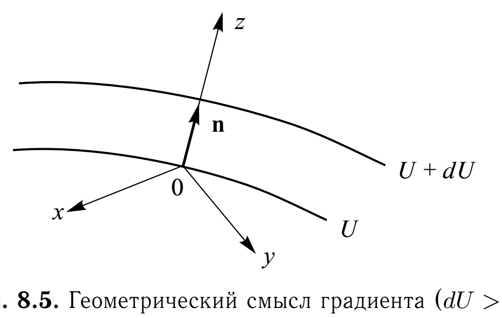

Рис. 8.5. Геометрический смысл градиента ($dU > 0$).

Покажем теперь, как из этого уравнения следует закон сохранения энергии. Умножим для этого правую и левую части уравнения скалярно на скорость частицы $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$:

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{dU\left(\mathbf{r}(t)\right)}{dt} \tag{8.22}$$

(при этом мы воспользовались правилом дифференцирования сложной функции). Выражение слева можно переписать через производную по времени от кинетической энергии частицы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -\frac{dU}{dt}, \tag{8.23}$$

или, перенося все в левую часть,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + U\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{mv^2}{2} + U = \text{const} \tag{8.24}$$

— получаем закон сохранения энергии. Заметим, что при выводе здесь было важно, чтобы потенциальная энергия частицы не зависела бы явно от времени t (то есть как $U\left[\mathbf{r}(t), t\right]$). Зависимость от времени входила в потенциальную энергию лишь **неявно**, через зависимость от времени радиус-вектора частицы $\mathbf{r}(t)$ (то есть как $U\left[\mathbf{r}(t)\right]$).

Одномерное движение

В этом случае уравнение движения можно проинтегрировать до конца и выразить ответ через интеграл, или, как говорят в квадратурах. Легче всего это сделать, воспользовавшись законом сохранения энергии

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x). \tag{8.25}$$

Поскольку кинетическая энергия всегда положительна, то неравенство

$$\frac{mv^2}{2} = E - U(x) > 0 \tag{8.26}$$

определяет классически доступные области движения (**границы движения**) в одномерном случае. Другими словами, движение может происходить лишь в областях пространства, где $E > U(x)$.[1]

Ниже, на рис. 8.7, показан пример. Согласно этому примеру, движение может происходить лишь на конечном отрезке $x_A < x < x_B$, что соответствует **финитному** движению и в полубесконечном интервале $x_C < x < \infty$. В последнем случае движение **инфинитно**, так как частица может уходить на бесконечность. Точки x_A, x_B и x_C называют **точками остановки**, поскольку скорость в них обращается в нуль.

Найдем теперь зависимость координаты x от времени t. Для этого выразим из уравнения (8.25) скорость

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}. \tag{8.27}$$

Это есть дифференциальное уравнение с **разделяющими переменными**, которое можно легко проинтегрировать (то есть решить):

$$\pm\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}} = t. \tag{8.28}$$

[1]Мы увидим, что в квантовой механике это ограничение отсутствует.

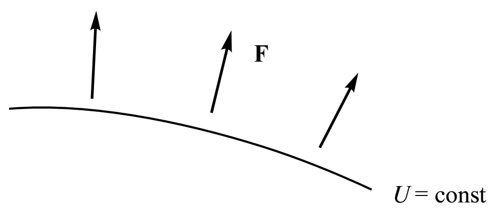

Рис. 8.6. Семейство силовых линий и эквипотенциальных поверхностей взаимно ортогональны друг другу.

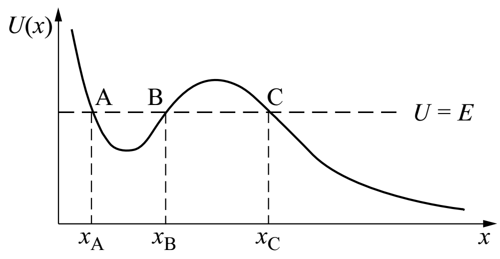

Рис. 8.7. Границы движения в одномерном случае.

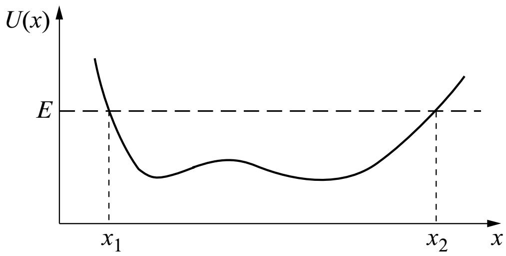

Рис. 8.8. Периодическое движение.

В случае финитного движения, которое мы сейчас рассмотрим, можно вычислить период движения как функцию энергии системы E (см. рис. 8.8):

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \tag{8.29}$$

где x_1 и x_2 — точки поворота, где скорость обращается в нуль, то есть $E = U(x)$.

Применим теперь эту формулу в качестве примера для движения в поле

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \tag{8.30}$$

В этом случае $x_2 = -x_1 = \sqrt{2E/k}$ (см. рис. 8.9), поэтому

$$T = \sqrt{2m}\int_{-\sqrt{2E/k}}^{\sqrt{2E/k}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}} = 2\sqrt{2m}\int_0^{\sqrt{2E/k}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}}. \tag{8.31}$$

Введем теперь новую переменную интегрирования

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\, y \quad \Longrightarrow \quad dx = \sqrt{\frac{2E}{k}}\, dy. \tag{8.32}$$

Тогда

$$T = 2\sqrt{2m}\int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}}\, dy}{\sqrt{E - \frac{k}{2}\,\frac{2E}{k} y^2}} = 2\sqrt{2m}\frac{\sqrt{\frac{2E}{k}}}{\sqrt{E}}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{8.33}$$

Интеграл равен

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y. \tag{8.34}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} T \;&=\; 4\sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin\Big|_0^1 = \\ &= 4\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \end{aligned} \tag{8.35}$$

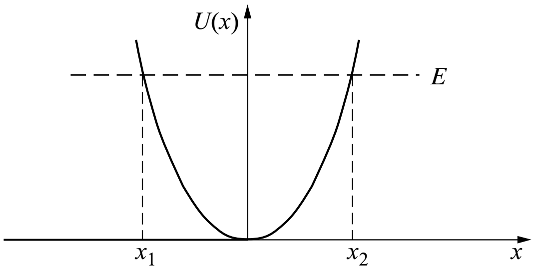

Рис. 8.9. Движение в квадратичном потенциале. Гармонические колебания.

то есть в этом случае получается известная формула

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{8.36}$$

для периода колебаний грузика на пружине, который не зависит от энергии (так называемые **гармонические колебания**). Во всех остальных случаях период колебаний зависит от энергии системы (**ангармонические колебания**).

Закон сохранения импульса и энергии и однородность пространства-времени

Если потенциальная энергия не зависит от какой-либо, скажем одной координаты x, то $\partial U/\partial x = 0$, и следовательно,

$$\frac{dp_x}{dt} = 0, \tag{8.37}$$

то есть $p_x = \mathrm{const}$ — сохраняется импульс частицы в этом направлении. Независимость U от координаты x означает, что пространство **однородно** в направлении оси x, то есть что потенциальная энергия не изменяется при любых перемещениях в этом направлении:

$$U(x,\, y,\, z) = U(x + a,\, y,\, z). \tag{8.38}$$

Таким образом, закон сохранения импульса (проекции) в каком-либо направлении связан с однородностью пространства в этом же направлении.

Похожие выводы можно сделать и в отношении полной энергии системы E. Как мы уже видели, если потенциальная энергия системы $U(x, y, z, t)$ не зависит явным образом от времени t, то есть является функцией только координат системы, $U(x, y, z)$, то имеет место закон сохранения энергии

$$E = T + U = \mathrm{const}. \tag{8.39}$$

Поэтому по аналогии с законом сохранения импульса можно сказать, что закон сохранения энергии связан с **однородностью времени**.

Литература

[1] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1979 — 520 с.
[2] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклеевский курс физики, том 1, Механика. М., Наука, 1975 — 480 с.
[3] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике (1–2 том). М., Мир, 1976 — 440 с.
[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика в 10 томах, том 1, Механика. М., Наука, 1973 — 208 с.
[5] Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М., Наука, 1988 — 416 с.

Оглавление