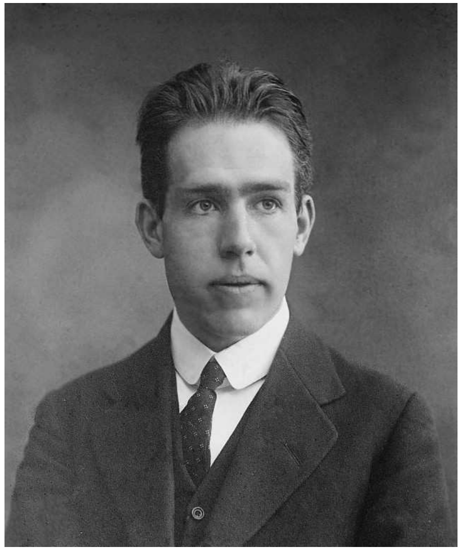
Физика вещества в сильных магнитных полях. Часть 2

1. Термодинамические функции идеальной электрон-ионной плазмы в квантующем магнитном поле
2. Электронная теплопроводность и электропроводность плотной плазмы в сильном магнитном поле
   2a: неквантующее поле
   2b: квантующее поле

Термодинамика вещества в неквантующем магнитном поле

Теорема Бора – ван Леувен



Нильс Бор, 1911

Хендрик Лоренц

Поль Ланжевен

Хендрика Йоханна
ван Леувен, 1919

Термодинамика электрон-ионной плазмы в магнитном поле с учётом квантования

Ионы

Свободная энергия: $$\frac{F_{\mathrm{id}}^{(\mathrm{i})}}{N_{\mathrm{i}}T} = \ln\left(2\pi\frac{n_{\mathrm{i}}\lambda_{\mathrm{i}}a_{\mathrm{m}}^2}{Z}\right) + \ln\left(1-\mathrm{e}^{-\zeta_{\mathrm{i}}}\right) - 1 + \frac{\zeta_{\mathrm{i}}}{2} + \ln\left(\frac{\sinh[g_{\mathrm{i}}\,\zeta_{\mathrm{i}}(2s_{\mathrm{i}}+1)/4]}{\sinh(g_{\mathrm{i}}\,\zeta_{\mathrm{i}}/4)}\right)$$

При $B \to 0$ $\quad F_{\mathrm{id}} = N_{\mathrm{i}}\,k_{\mathrm{B}}T\,[\ln(n_{\mathrm{i}}\,\lambda_{\mathrm{i}}^3) - 1].$

Электроны (учитываем возможные вырожденность и релятивизм)

Свободная энергия $\quad F_{\mathrm{id}}^{(e)} = \mu_e N_e - P_{\mathrm{id}}^{(e)}\,V$

$$P_{\mathrm{id}}^{(e)} = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\pi^{3/2}a_{\mathrm{m}}^2\lambda_e}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma}(1+2bn)^{1/4}\,I_{1/2}(\chi_n,\tau_n)$$

$$I_\nu(\chi_e,\tau) \equiv \int_0^\infty \frac{x^\nu\,(1+\tau x/2)^{1/2}}{\exp(x-\chi_e)+1}\,\mathrm{d}x \qquad \chi_e = \frac{\mu_e}{k_{\mathrm{B}}T}$$

$$n_e = \frac{1}{\pi^{3/2}a_{\mathrm{m}}^2\lambda_e}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma}(1+2bn)^{1/4}\,\frac{\partial I_{1/2}(\chi_n,\tau_n)}{\partial\chi_n}$$

$$\tau_n = \tau/\sqrt{1+2bn}, \qquad \chi_n = \chi_e + \tau^{-1} - \tau_n^{-1}$$

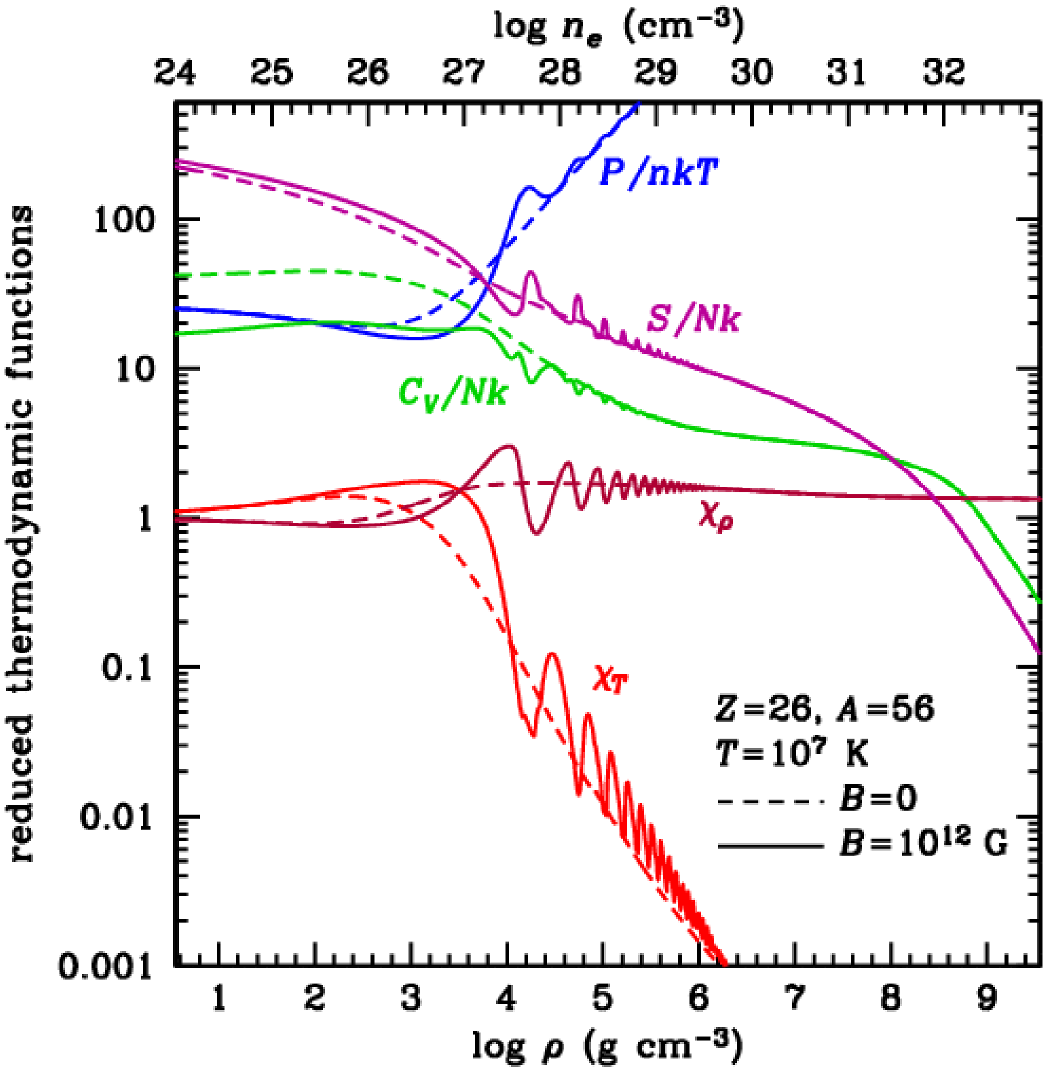
Импульс Ферми в **<u>сильно квантующем</u>** магнитном поле $\quad p_F = 2\pi^2 a_{\mathrm{m}}^2\hbar n_e \qquad x_B = 2x_{\mathrm{r}}^3/3b$

При $B \to 0$ $$P_{\mathrm{id}}^{(e)} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\lambda_e^3}\left[I_{3/2}(\chi_e,\tau) + \frac{\tau}{2}I_{5/2}(\chi_e,\tau)\right]$$

$$n_e = \frac{4}{\sqrt{\pi}\,\lambda_e^3}\left[I_{1/2}(\chi_e,\tau) + \tau I_{3/2}(\chi_e,\tau)\right]$$

+ неидеальность (= взаимодействия) [выходит за рамки лекции]

Термодинамические функции идеальной электрон-ионной плазмы в квантующем магнитном поле



Компенсация анизотропии давления токами намагничивания

Blandford & Hernquist (1982) *J. Phys. C* **15**, 6233 :

$$P_\perp^k = \frac{B^2}{V}\left(\frac{\partial}{\partial B}(\Omega/B)\right)_{\mu,V,T} = -\frac{\Omega}{V} - MB$$

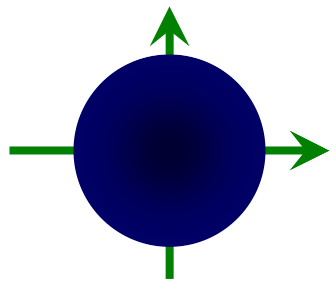
Lorentz force density $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}/c$

Ток намагничивания $\boldsymbol{j}_b = c\nabla \times \boldsymbol{M}$

Поверхностный ток: $c\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B}/B$ $\qquad$ $\boldsymbol{M} = -\partial\Omega / \partial\boldsymbol{B} = \partial(PV) / \partial\boldsymbol{B}$

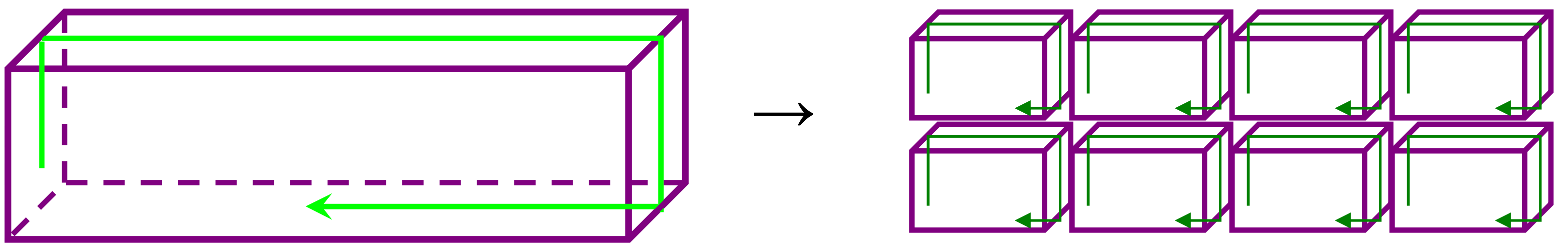
Случай 1: $\boldsymbol{B}$ вдоль $\boldsymbol{g}$ => $\rho g = dp_\parallel^{\rm kin}/dz = dP/dz$

Случай 2: $\boldsymbol{B}$ поперёк $\boldsymbol{g}$ => $\rho g = \dfrac{dp_\perp^{\rm kin}}{dz} + B\dfrac{dM}{dz}$



В обоих случаях градиент $d\rho/dz = (\partial P/\partial\rho)^{-1}\rho g$ один и тот же.

Случай отсутствия объёмных токов (строго однородная плотность и однородное поле):



Теплопроводность

Кинетическое уравнение Больцмана

$$f = f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, s, t) \qquad f = f^{(0)} + \delta f \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\mathrm{d}f^{(0)}}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\epsilon-\zeta}{T}\nabla T + e\boldsymbol{E}^*\right)\cdot \boldsymbol{v}\,\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \epsilon}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = I_e, \quad I_e = \sum_j I_{ej}[f] \qquad \boldsymbol{E}^* \equiv \boldsymbol{E} + \frac{\nabla\mu}{e} + \frac{S_e}{n_e}\frac{\nabla T}{e}$$

Простые оценки без магнитного поля

Дж. Займан, *Электроны и фононы*. – М.: ИЛ, 1962. – Гл. VII.

В «элементарной теории» (с эффективной частотой столкновений, не зависящей от энергии)

$$\varkappa = a\,\frac{n_e k^2 T}{m_e^* \nu}, \quad a = \begin{cases} 3/2 & (T \gg T_\mathrm{F}) \\ \pi^2/3 & (T \ll T_\mathrm{F}) \end{cases} \qquad m_e^* = m_e \gamma_\mathrm{r} \qquad \text{Matthiessen rule: } \nu = \nu_{ei} + \nu_{ee}$$

Для невырожденного электронного газа:

$$\nu_{ei} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{m_e}}\frac{Z^2 e^4}{(kT)^{3/2}} n_i \Lambda_{ei}, \quad \Lambda_{ei} \sim \ln\frac{r_\mathrm{max}}{r_\mathrm{min}} \qquad r_\mathrm{min} = \max(\lambda_e, Ze^2/k_\mathrm{B}T), \quad r_\mathrm{max} \sim r_\mathrm{Debye}$$

$$\nu_{ee} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{\pi}{m_e}}\frac{e^4}{(kT)^{3/2}} n_e \Lambda_{ee}$$

Для сильно вырожденного электронного газа:

$$\nu_\mathrm{ei} = \frac{4Zm_e^* e^4 \Lambda_\mathrm{ei}}{3\pi\hbar^3} = \frac{Z\Lambda_\mathrm{ei}\sqrt{1+x_\mathrm{r}^2}}{5.7\times 10^{-17}\ \mathrm{s}} \qquad r_\mathrm{min} = \hbar/2p_\mathrm{F}, \quad r_\mathrm{max} \sim a_\mathrm{i}$$

(Lee 1950; Яковлев и Урпин 1980)

Перенос тепла и заряда в магнитном поле

Параметр Холла: $\omega_g \tau \approx 1760 \frac{B_{12}}{\sqrt{1+x_r^2}} \frac{\tau}{10^{-16}\ \mathrm{s}}$ (здесь $\tau = 1/\nu$)

$$\boldsymbol{j}_e = \hat{\sigma} \cdot \boldsymbol{E}^* - \hat{\alpha} \cdot \nabla T, \quad \boldsymbol{j}_T = \hat{\beta} \cdot \boldsymbol{E}^* - \hat{\tilde{\kappa}} \cdot \nabla T$$

$$\boldsymbol{E}^* = \hat{R} \cdot \boldsymbol{j}_e - \hat{Q} \cdot \nabla T, \quad \boldsymbol{j}_T = -T \hat{Q} \cdot \boldsymbol{j}_e - \hat{\kappa} \cdot \nabla T$$

$$\hat{R} = \hat{\sigma}^{-1}, \hat{Q} = -\hat{R} \cdot \hat{\alpha} \qquad \boxed{\hat{\kappa} = \hat{\tilde{\kappa}} + T \hat{\alpha} \cdot \hat{Q}}$$

Плотность числа электронов можно записать в виде

$$n_e = \int \mathcal{N}_B(\epsilon) \left(-\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \epsilon} \right) \mathrm{d}\epsilon \text{ , где } \quad \mathcal{N}_B(\epsilon) = \frac{m_e \omega_c}{2(\pi\hbar)^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} g_n p_n(\epsilon)$$

$$f^0(\epsilon) = \{\exp\left[(\epsilon - \mu)/k_B T\right] + 1\}^{-1} \qquad p_n(\epsilon) = \left[(\epsilon/c)^2 - (m_e c)^2 - 2 m_e \hbar \omega_c n\right]^{1/2}$$

Тогда кинетические коэффициенты для электрон-ионного рассеяния предстанут в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ij} \\ \alpha_{ij} \\ \tilde{\kappa}_{ij} \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} e^2 \\ e(\mu - \epsilon)/T \\ (\mu - \epsilon)^2/T \end{bmatrix} \frac{\mathcal{N}_B(\epsilon)}{m_e^*(\epsilon)} \tau_{ij}(\epsilon) \left(-\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \epsilon} \right) \mathrm{d}\epsilon$$

$$\tau_{zz} = \tau_{\|}, \quad \tau_{xx} = \frac{\tau_\perp}{1 + (\omega_g \tau_\perp)^2}, \quad \tau_{yx} = \frac{\omega_g \tau_\perp^2}{1 + (\omega_g \tau_\perp)^2}$$

При $T/T_F \to 0$ $\quad \sigma_{ij} \approx \frac{e^2 c^2 n_e}{\mu} \tau_{ij}(\mu), \qquad \kappa_{ij} \approx \tilde{\kappa}_{ij} \approx \frac{\pi^2 T}{3e^2} \sigma_{ij}.$