

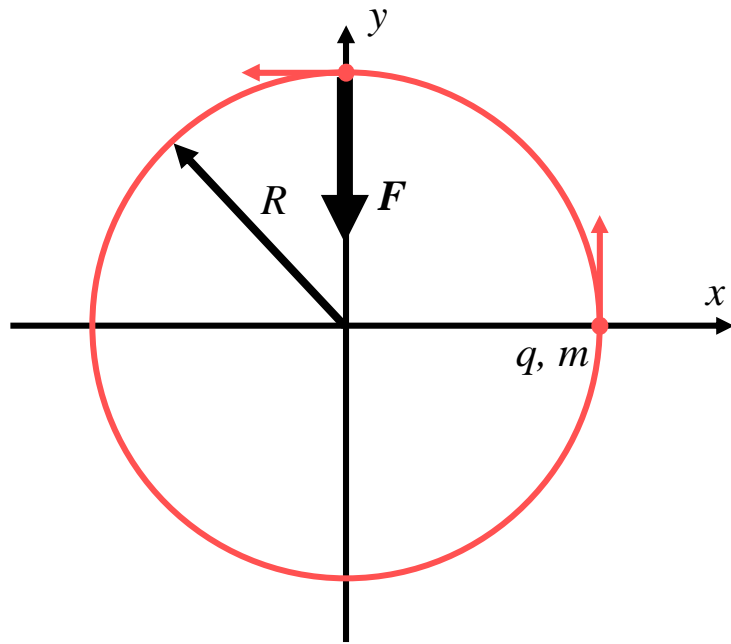
Физика вещества в сильных магнитных полях.

1. Свободная частица в магнитном поле. Квантование Ландау
2. Основные параметры и режимы для электрон-ионной плазмы в магнитном поле
3. Термодинамические функции идеальной электрон-ионной плазмы

Частица в магнитном поле

Сила Лоренца $F = (q/c) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

Циклотронная частота $\omega_c = |q|B/(mc)$



$$H = \frac{[\mathbf{p} - (q/c)\mathbf{A}(r,t)]^2}{2m} + V(r,t)$$

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - (q/c)\mathbf{A}$$

кинетический импульс

канонический импульс

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$$

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda \\ V \rightarrow V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{cases}$$

Калибровка Ландау: $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$

Симметричная калибровка: $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(-By, Bx, 0)$

Обобщение симметричной калибровки:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)$$

Частица в магнитном поле

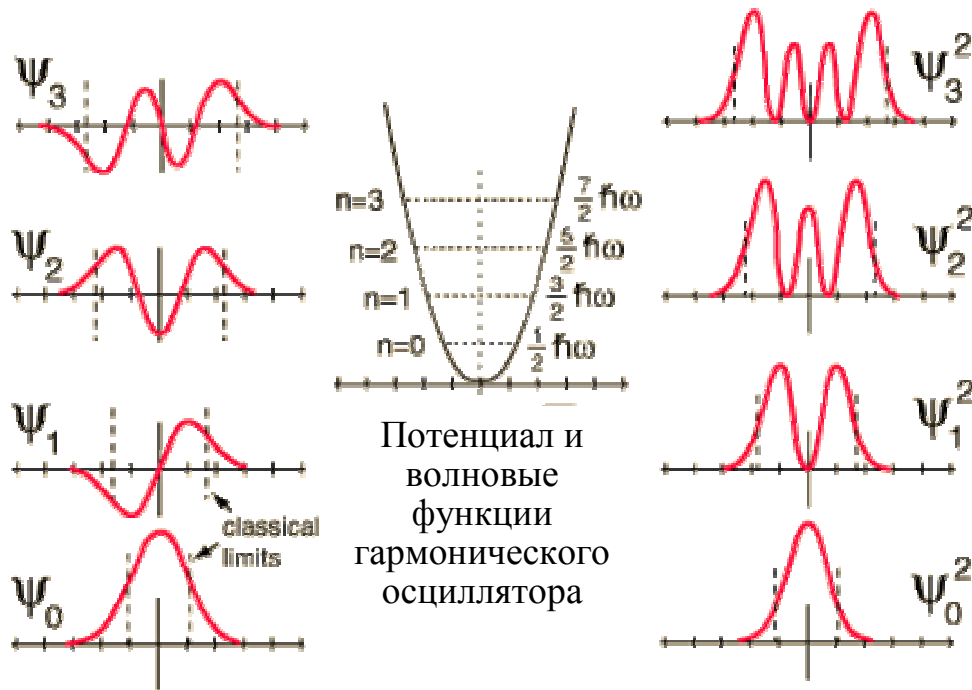
Калибровка Ландау: $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$

$$H\psi(x, y) = \left[\frac{1}{2m} (p_x + qBy/c)^2 + \frac{p_y^2}{2m} \right] \psi(x, y) = E\psi(x, y).$$

$$\psi(x, y) = e^{ip_x x/\hbar} \chi(y). \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} \chi(y) + \frac{1}{2} m \left(\frac{qB}{mc} \right)^2 (y - y_0)^2 \chi(y) = E \chi(y)$$

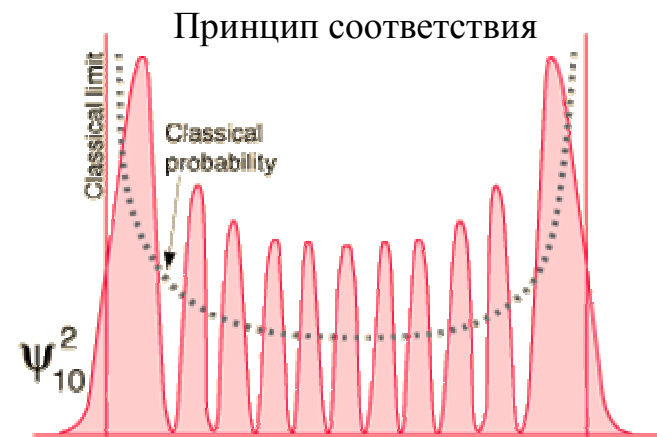
$$\chi_N(y) = \frac{\exp(-y^2/2a_m^2)}{\pi^{1/4} (2^N N! a_m)^{1/2}} H_N(y/a_m)$$

$$H_N(\xi) = (-1)^N e^{\xi^2} \frac{d^N e^{-\xi^2}}{d\xi^N}$$



$$E_n^\perp = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c$$

$$a_m = \sqrt{\hbar c / (|q|B)}$$



Частица в магнитном поле

Симметричная калибровка: $A = 1/2 (-By, Bx, 0)$

$$E_n^\perp = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c \quad a_m = \sqrt{\hbar c/(|q|B)}$$

$$\chi(r_\perp) = a_m^{-1} e^{\pm is\varphi} I_{n',n}(r_\perp/a_m) \quad n' = n + s$$

$$I_{N'N}(x) = \sqrt{\frac{N!}{N'!}} e^{-x/2} x^{(N'-N)/2} L_N^{N'-N}(x) = e^{-x/2} x^{(N'-N)/2} \sum_{l=0}^N \frac{\sqrt{N!N'!} (-x)^l}{l! (N-l)! (N'-N+l)!}$$

Энергия иона с учётом спина:

$$\varepsilon = (n_L + \frac{1}{2})\hbar\omega_{ci} + m_i p_z^2/2 + \frac{1}{4} g_i \zeta_i s_i$$

(s_i – проекция спина на \mathbf{B} в единицах $\hbar/2$, g_i – гиромагнитное отношение)

Энергия электрона по уравнению Дирака:

$$\varepsilon_N(p_z) = c (m_e^2 c^2 + 2\hbar\omega_c m_e N + p_z^2)^{1/2} - m_e c^2$$

Тонкое расщепление: $\delta\varepsilon \approx \frac{\alpha_f}{2\pi} \times \begin{cases} \hbar\omega_c & \text{at } b \ll 1, \\ m_e c^2 [\ln b - 1.584]^2 & \text{at } b \gg 1 \end{cases}$

Электрон-ионная плазма в магнитном поле

Основные параметры

Концентрация электронов n_e , температура T , магнитная индукция B .

Циклотронная частота: $\omega_c = eB/m_e c$ Магнитная длина: $a_m = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} = \frac{a_0}{\sqrt{\gamma}}$

Магнитное поле в атомных единицах: $\gamma = \frac{\hbar \omega_c}{m_e e^4 / \hbar^2} = \frac{B}{2.3505 \times 10^9 \text{ G}}$

Магнитное поле в релятивистских единицах: $b = \frac{\hbar \omega_c}{m_e c^2} = \alpha^2 \gamma = \frac{B}{4.414 \times 10^{13} \text{ G}}$

Отношение циклотронной энергии к тепловой: $\zeta_e = \frac{\hbar \omega_c}{T} = 134.34 \frac{B_{12}}{T_6}$

$$B_{12} = B / (10^{12} \text{ Гс}), \quad T_6 = T / 10^6 \text{ К}; \quad k_B T := T.$$

Для ионов:

Циклотронная частота: $\omega_{ci} = Z (m_e/m_i) \omega_c$

Релятивистский магнитный параметр для ионов: $b_i = \frac{\hbar \omega_{ci}}{m_i c^2} = b_e \left(\frac{Z m_e}{m_i} \right)^2 = 0.68 \times 10^{-6} \frac{Z}{A^2} B_{14}$

Отношение циклотронной энергии к тепловой: $\zeta_i = \hbar \omega_{ci} / T = 0.0737 (Z/A) B_{12} / T_6$

Электрон-ионная плазма в магнитном поле

Основные режимы

Сильное магнитное поле B :

$$E_{ce} = \hbar\omega_c = \hbar eB/m_e c = 11,577 B_{12} \text{ кэВ} > 1 \text{ а.у.} = 27,21 \text{ эВ}$$

$$B > m_e^2 c e^3 / \hbar^3 = \alpha^2 B_Q$$

Сверхсильное поле:

$$E_{ce} > m_e c^2$$

$$B > B_Q = 4,414 \times 10^{13} \text{ Гс}$$

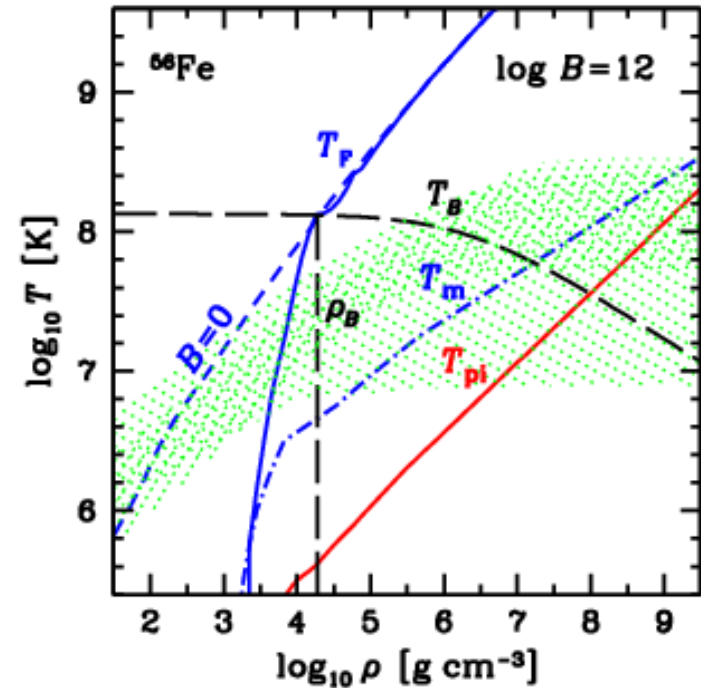
Сильно квантующее магнитное поле:

$$\rho < \rho_B, \quad T < T_B, \quad \rho_B = 7045 \frac{A'}{Z} B_{12}^{3/2} \quad T_B = 1.343 \times 10^8 B_{12} \text{ К} \quad T'_B = T_B / \gamma_r$$

Квантующее магнитное поле для ионов:

$$E_{ci} = \hbar\omega_{ci} = 6,351 B_{12} \text{ эВ} > k_B T$$

$$\text{В кристалле: } \begin{cases} \omega_{ci} \gtrsim \omega_p \\ \hbar\omega_{ci} \gtrsim k_B T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_{12} \gtrsim 100 \sqrt{\rho_6} \\ B_{12} \gtrsim T / 10^5 \text{ К} \end{cases}$$



Термодинамика электрон-ионной плазмы в магнитном поле

Ионы

Свободная энергия:
$$\frac{F_{\text{id}}^{(i)}}{N_i T} = \ln \left(2\pi \frac{n_i \lambda_i a_m^2}{Z} \right) + \ln \left(1 - e^{-\zeta_i} \right) - 1 + \frac{\zeta_i}{2} + \ln \left(\frac{\sinh[g_i \zeta_i (2s_i + 1)/4]}{\sinh(g_i \zeta_i / 4)} \right)$$

При $B \rightarrow 0$ $F_{\text{id}} = N_i k_B T [\ln(n_i \lambda_i^3) - 1]$.

Электроны (учитываем возможные вырожденность и релятивизм)

Свободная энергия $F_{\text{id}}^{(e)} = \mu_e N_e - P_{\text{id}}^{(e)} V$

$$P_{\text{id}}^{(e)} = \frac{k_B T}{\pi^{3/2} a_m^2 \lambda_e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma} (1+2bn)^{1/4} I_{1/2}(\chi_n, \tau_n)$$

$$I_{\nu}(\chi_e, \tau) \equiv \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu} (1 + \tau x/2)^{1/2}}{\exp(x - \chi_e) + 1} dx \quad \chi_e = \frac{\mu_e}{k_B T}$$

$$n_e = \frac{1}{\pi^{3/2} a_m^2 \lambda_e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma} (1+2bn)^{1/4} \frac{\partial I_{1/2}(\chi_n, \tau_n)}{\partial \chi_n}$$

$$\tau_n = \tau / \sqrt{1 + 2bn}, \quad \chi_n = \chi_e + \tau^{-1} - \tau_n^{-1}$$

Импульс Ферми в **сильно квантующем** магнитном поле $p_F = 2\pi^2 a_m^2 \hbar n_e \quad x_B = 2x_r^3 / 3b$

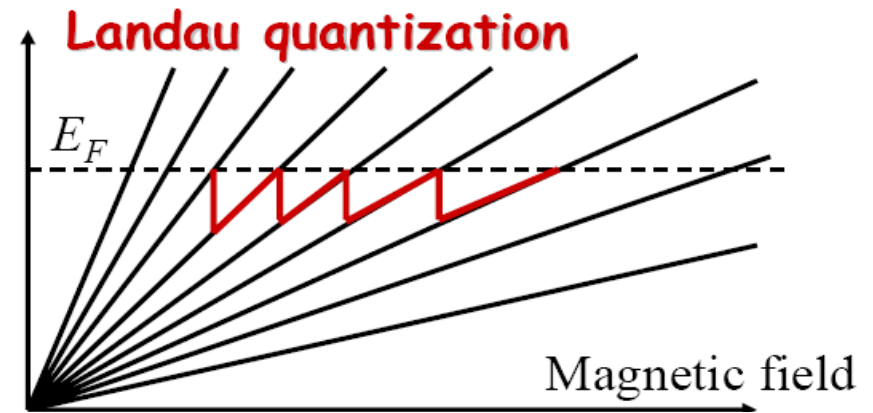
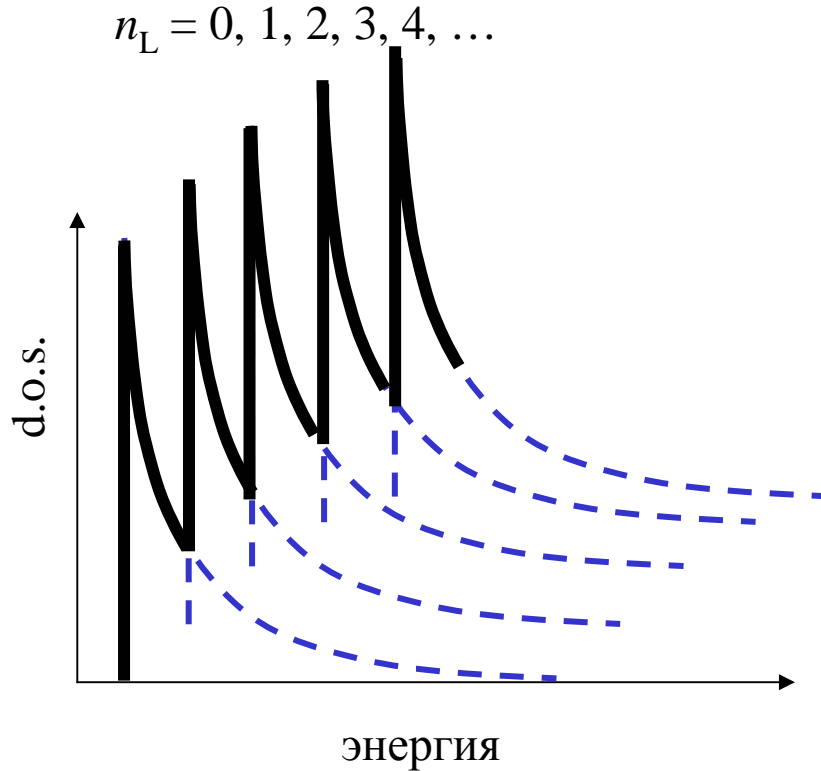
При $B \rightarrow 0$
$$P_{\text{id}}^{(e)} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{k_B T}{\lambda_e^3} \left[I_{3/2}(\chi_e, \tau) + \frac{\tau}{2} I_{5/2}(\chi_e, \tau) \right]$$

$$n_e = \frac{4}{\sqrt{\pi} \lambda_e^3} \left[I_{1/2}(\chi_e, \tau) + \tau I_{3/2}(\chi_e, \tau) \right]$$

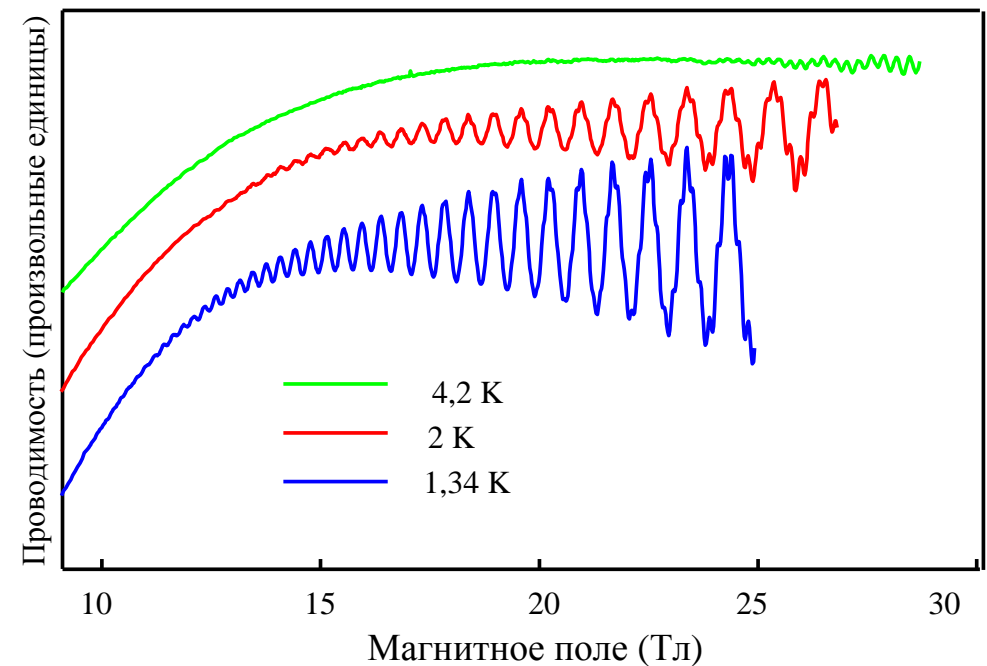
+ **неидеальность (= взаимодействия)** [выходит за рамки лекции]

Заполнение уровней Ландау в вырожденной плазме

«лестница Ландау»: зависимость плотности числа состояний от энергии



Пример: Эффект Шубникова – де Гааза



Термодинамические функции идеальной электрон-ионной плазмы в квантующем магнитном поле

