

Учреждение Российской академии наук  
Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН

*На правах рукописи*

УДК 524.354.6, 524.3-735, 533.9.01, 538.9

**ПОТЕХИН Александр Юрьевич**

**ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ И КИНЕТИЧЕСКИЕ  
СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА  
В ОБОЛОЧКАХ НЕЙТРОННЫХ ЗВЁЗД**

01.03.02 — астрофизика и радиоастрономия

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург

2009



# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>9</b>
<b>1 Оболочки нейтронных звёзд (вводный обзор)</b>	<b>25</b>
1.1 Основные параметры нейтронной звезды . . . . .	27
1.2 Строение нейтронной звезды . . . . .	28
1.3 Строение оболочек . . . . .	29
1.3.1 Внутренняя кора . . . . .	29
1.3.2 Мантия . . . . .	30
1.3.3 Внешние оболочки . . . . .	31
1.3.3a Внешняя кора . . . . .	32
1.3.3b Океан . . . . .	32
1.3.3c Атмосфера . . . . .	33
1.4 Магнитное поле и его эволюция . . . . .	34
1.5 Тепловая структура и остывание . . . . .	36
1.5.1 Кривые остывания . . . . .	37
1.5.2 Остывание с подогревом . . . . .	38
1.6 Наблюдательные проявления свойств оболочек нейтронных звёзд . . . . .	39
1.6.1 Изолированные нейтронные звёзды . . . . .	40
1.6.1a Изолированные нейтронные звёзды с подогревом . . . . .	41
1.6.2 Нейтронные звёзды в двойных системах . . . . .	41
1.6.2a Рентгеновские вспышки . . . . .	42
1.6.2b Мягкие рентгеновские транзиенты . . . . .	42
1.6.3 Пульсары . . . . .	43
1.6.3a Обычные пульсары . . . . .	44
1.6.3b Миллисекундные пульсары . . . . .	45
1.6.3c Аномальные рентгеновские пульсары . . . . .	45

<b>2</b>	<b>Равновесные свойства плазмы в оболочках нейтронных звёзд</b>	<b>47</b>
2.1	Метод минимизации свободной энергии . . . . .	48
2.2	Параметры плазмы . . . . .	50
2.2.1	Общие параметры . . . . .	50
2.2.2	Электроны . . . . .	51
2.2.3	Ионы . . . . .	52
2.3	Полностью ионизованная кулоновская плазма . . . . .	55
2.3.1	Идеальный электронный газ . . . . .	57
2.3.1a	Приближённые формулы для интегралов Ферми–Дирака	58
2.3.1b	Уравнение состояния как функция плотности . . . . .	60
2.3.2	Ионная кулоновская жидкость . . . . .	62
2.3.2a	Идеальная составляющая свободной энергии . . . . .	62
2.3.2b	Кулоновская составляющая . . . . .	63
2.3.2c	Квантовые поправки . . . . .	64
2.3.3	Кулоновский кристалл . . . . .	65
2.3.3a	Гармоническое приближение . . . . .	66
2.3.3b	Ангармонические поправки . . . . .	67
2.3.4	Структурный фактор. Многофононные процессы . . . . .	68
2.3.4a	Структурный фактор классической изотропной плазмы	69
2.3.4b	Структурный фактор кулоновского кристалла и фак- тор Дебая–Валлера . . . . .	69
2.3.4c	Многофононные процессы . . . . .	71
2.3.5	Плавление . . . . .	73
2.3.6	Поляризация электронов в кулоновской жидкости . . . . .	75
2.3.7	Поляризация электронов в кулоновском кристалле . . . . .	77
2.3.7a	Теория возмущений . . . . .	79
2.3.7b	Аналитическое приближение . . . . .	80
2.3.7c	Влияние поляризации на плавление . . . . .	81
2.3.8	Обменно-корреляционные эффекты . . . . .	82
2.3.9	Ионные смеси . . . . .	83
2.4	Частично ионизованная плотная плазма . . . . .	87
2.4.1	Ионизационное равновесие в химической модели . . . . .	87
2.4.2	Водородная плазма . . . . .	91
2.4.3	Плазма, содержащая многозарядные ионы . . . . .	96
2.4.3a	Модель свободной энергии . . . . .	97

2.4.3b	Поиск термодинамического равновесия . . . . .	102
2.4.3c	Результаты . . . . .	102
2.5	Упругость коры и мантии нейтронной звезды . . . . .	104
2.5.1	Общие соотношения. Модули упругости коры . . . . .	105
2.5.2	Жидкокристаллическая мантия . . . . .	107
2.5.2a	Фаза «лазанья» . . . . .	107
2.5.2b	Фаза «спагетти» . . . . .	108
2.6	Унифицированное уравнение состояния нейтронной звезды . . . . .	110
2.7	Резюме . . . . .	116

### **3 Коэффициенты электронного переноса тепла и заряда в океане и коре нейтронной звезды** **117**

3.1	Основные соотношения для электронных кинетических коэффициентов	118
3.1.1	Уравнение Больцмана. Общие соотношения . . . . .	119
3.1.2	Электрон-электронное рассеяние . . . . .	121
3.1.3	Электрон-ионное рассеяние. Приближение времени релаксации .	122
3.1.4	Общие выражения для невырожденной плазмы . . . . .	123
3.1.5	Сильно вырожденный электронный газ . . . . .	125
3.1.6	Правило Маттиссена . . . . .	126
3.2	Рассеяние электронов на ионах . . . . .	127
3.2.1	Ионный газ . . . . .	127
3.2.2	Ионная жидкость (вырожденные электроны) . . . . .	128
3.2.2a	Эффективный структурный фактор сильносвязанной кулоновской жидкости . . . . .	129
3.2.2b	Формфактор . . . . .	130
3.2.2c	Выход за рамки борновского приближения . . . . .	131
3.2.2d	Учёт поляризуемости электронного фона . . . . .	131
3.2.2e	Аналитическая аппроксимация для кулоновского логарифма . . . . .	131
3.2.3	Ионный кристалл . . . . .	133
3.2.3a	Низкие температуры: случай нормальных процессов . .	135
3.2.4	Общая аппроксимация для внешних оболочек . . . . .	136
3.2.4a	Сильно вырожденные электроны . . . . .	137
3.2.4b	Частично вырожденные электроны . . . . .	141
3.3	Электрон-электронное рассеяние . . . . .	142

3.3.1	Невырожденные электроны . . . . .	142
3.3.2	Сильно вырожденные электроны . . . . .	143
3.3.3	Частично вырожденные электроны . . . . .	145
3.4	Рассеяние на примесях . . . . .	147
3.4.1	Рассеяние на заряженных примесях в кристалле . . . . .	147
3.4.2	Линейное смешивание . . . . .	150
3.5	Резюме . . . . .	150
<b>4</b>	<b>Атом водорода и квантовые переходы в сильном магнитном поле</b>	<b>151</b>
4.1	Предварительные сведения и обозначения . . . . .	151
4.1.1	Основные параметры . . . . .	151
4.1.2	Электрон в квантующем магнитном поле . . . . .	152
4.1.2a	Релятивистский электрон в магнитном поле в калибровке Ландау . . . . .	152
4.1.2b	Нерелятивистский предел. Аксиальная калибровка . . . . .	154
4.1.3	Связанные электрон-ионные состояния в сильном магнитном поле	155
4.1.3a	Покоящийся атом водорода . . . . .	156
4.1.3b	Другие атомы и ионы . . . . .	157
4.1.3c	Молекулы, молекулярные ионы и полимеры . . . . .	158
4.1.3d	Эффекты движения . . . . .	159
4.2	Атом водорода, движущийся в сильном магнитном поле . . . . .	161
4.2.1	Преобразования гамильтониана и волновых функций . . . . .	161
4.2.2	Волновые функции дискретного спектра . . . . .	164
4.2.3	Уровни энергии . . . . .	167
4.2.4	Размеры атома. Дипольный и квадрупольный моменты . . . . .	177
4.2.5	Наибольшая поперечная скорость . . . . .	180
4.2.6	Волновые функции непрерывного спектра . . . . .	181
4.2.6a	Покоящийся атом . . . . .	181
4.2.6b	Резонансы . . . . .	184
4.2.6c	Обобщение на случай движущегося атома . . . . .	186
4.2.6d	Метод расчёта . . . . .	186
4.3	Переходы между ионными уровнями Ландау при кулоновском рассеянии	188
4.3.1	Рассеяние на фиксированном кулоновском центре . . . . .	189
4.3.1a	Вывод сечения для $Z = 1$ . . . . .	189
4.3.1b	Классический предел . . . . .	190

4.3.1c	Сечение и средняя вероятность переходов для произвольного $Z$ . . . . .	191
4.3.1d	Область применимости и поправка . . . . .	192
4.3.2	Рассеяние двух заряженных частиц . . . . .	193
4.3.2a	Рассеяние различных частиц . . . . .	193
4.3.2b	Рассеяние тождественных частиц . . . . .	195
4.3.3	Протон-электронные столкновения . . . . .	195
4.3.4	Протон-протонные столкновения . . . . .	199
4.3.5	Обобщение для других ионов . . . . .	202
4.4	Взаимодействие с излучением . . . . .	202
4.4.1	Взаимодействие атома водорода, движущегося в магнитном поле, с электромагнитным излучением . . . . .	202
4.4.1a	Матричные элементы оператора взаимодействия . . . . .	205
4.4.1b	Альтернативные формы матричных элементов . . . . .	206
4.4.2	Связанно-связанные переходы в атомах водорода . . . . .	208
4.4.3	Фотоионизация . . . . .	213
4.4.3a	Покоящийся атом. Резонансы . . . . .	215
4.4.3b	Атом, движущийся в магнитном поле . . . . .	220
4.4.4	Свободно-свободное поглощение . . . . .	225
4.4.4a	Приближение бесконечной массы протона . . . . .	227
4.4.4b	Поглощение фотонов при протонных столкновениях . . . . .	228
4.4.4c	Поглощение фотонов при столкновениях электронов с протонами . . . . .	231
4.5	Заключение . . . . .	239
<b>5</b>	<b>Влияние сильного магнитного поля на термодинамические и кинетические свойства вещества</b> . . . . .	<b>241</b>
5.1	Полностью ионизованная плазма в сильном магнитном поле при ЛТР . . . . .	242
5.1.1	Идеальный газ ионов в магнитном поле . . . . .	242
5.1.2	Идеальный электронный газ . . . . .	243
5.1.2a	Сильно квантуемое магнитное поле . . . . .	244
5.1.2b	Неквантуемое магнитное поле . . . . .	245
5.1.2c	Невырожденные нерелятивистские электроны . . . . .	245
5.1.2d	Сильно вырожденные электроны . . . . .	245
5.1.3	Обменно-корреляционное взаимодействие электронов . . . . .	247

5.1.4	Ион-ионные и электрон-ионные корреляции . . . . .	249
5.1.5	Магнитные осцилляции; общее обсуждение . . . . .	249
5.2	Заселённости уровней Ландау вне рамок ЛТР . . . . .	252
5.2.1	Вероятности радиативных переходов между уровнями Ландау . . . . .	252
5.2.1a	Предварительные сведения и обозначения . . . . .	252
5.2.1b	Сечение протонного циклотронного резонанса . . . . .	255
5.2.2	Статистическое равновесие . . . . .	256
5.2.2a	Двухуровневая система . . . . .	256
5.2.2b	Многоуровневая система . . . . .	259
5.3	Частично ионизованная плазма в сильном магнитном поле . . . . .	259
5.3.1	Модель свободной энергии . . . . .	259
5.3.2	Условия равновесия . . . . .	261
5.3.3	Особенности расчётов для сверхсильного поля . . . . .	263
5.3.4	Распределение по состояниям . . . . .	264
5.3.4a	Числа заполнения . . . . .	264
5.3.4b	Ионизационное равновесие . . . . .	266
5.3.5	Фазовый переход . . . . .	270
5.3.6	Термодинамические функции . . . . .	272
5.3.7	Расчёт таблиц . . . . .	274
5.4	Электронные кинетические коэффициенты плазмы в сильном магнитном поле . . . . .	276
5.4.1	Введение . . . . .	276
5.4.2	Продольный перенос: формализм матрицы плотности . . . . .	278
5.4.2a	Очерк теории . . . . .	278
5.4.2b	Результаты . . . . .	280
5.4.3	Общий случай. Прикладные формулы . . . . .	282
5.4.3a	Общие соотношения . . . . .	282
5.4.3b	Неквантующее магнитное поле . . . . .	283
5.4.3c	Произвольное магнитное поле . . . . .	284
5.4.3d	Аналитические формулы для $\tau_{\parallel}(\epsilon)$ и $\tau_{\perp}(\epsilon)$ . . . . .	285
5.4.4	Кинетические коэффициенты с учётом теплового усреднения . . . . .	287
5.5	Резюме . . . . .	291
<b>6</b>	<b>Тепловая структура и эволюция нейтронных звёзд</b>	<b>293</b>
6.1	Уравнения тепловой структуры и их решение . . . . .	294



6.2	Тепловая структура и остывание немагнитных нейтронных звёзд . . . . .	298
6.2.1	Тепловая структура железной оболочки . . . . .	299
6.2.2	Тепловая структура аккрецированной оболочки . . . . .	301
6.2.2a	Модели аккрецированной оболочки . . . . .	301
6.2.2b	Результаты . . . . .	302
6.2.2c	Влияние аккрецированной оболочки на остывание . . . . .	306
6.3	Некоторые приложения . . . . .	308
6.3.1	Тепловая релаксация молодых нейтронных звёзд . . . . .	308
6.3.2	Мягкие рентгеновские транзиенты . . . . .	310
6.3.2a	Ограничения сверху и снизу на светимость . . . . .	310
6.3.2b	Кривые остывания выключившихся транзиентов . . . . .	313
6.4	Тепловая структура и остывание нейтронных звёзд с сильным магнитным полем . . . . .	316
6.4.1	Железные оболочки . . . . .	317
6.4.1a	Использованные приближения . . . . .	317
6.4.1b	Тепловая структура магнитной оболочки . . . . .	320
6.4.1c	Влияние сильного магнитного поля на остывание . . . . .	322
6.4.2	Аккрецированные оболочки . . . . .	324
6.5	Тепловой баланс магнитаров . . . . .	329
6.6	Резюме . . . . .	335
<b>7</b>	<b>Атмосферы нейтронных звёзд с сильным магнитным полем</b>	<b>337</b>
7.1	Поляризационные моды и непрозрачности: основные соотношения . . . . .	338
7.2	Непрозрачности полностью ионизованной атмосферы . . . . .	341
7.2.1	Спектральные непрозрачности с учётом протонного циклотронного и вакуумного резонансов . . . . .	341
7.2.2	Коэффициенты поглощения и излучения вне рамок ЛТР . . . . .	344
7.2.2a	Соотношение между коэффициентами поглощения и излучения . . . . .	344
7.2.2b	Протонная циклотронная линия . . . . .	346
7.3	Непрозрачности частично ионизованной водородной атмосферы . . . . .	348
7.3.1	Связанно-связанные переходы . . . . .	348
7.3.1a	Коэффициент поглощения . . . . .	348
7.3.1b	Магнитное уширение . . . . .	349
7.3.1c	Другие виды уширения . . . . .	351

7.3.2	Фотоионизация . . . . .	354
7.3.2a	Квазиконтинуум . . . . .	357
7.3.3	Суммарные непрозрачности для трёх основных поляризаций . .	358
7.3.4	Тензор диэлектрической восприимчивости и векторы поляризации	362
7.3.4a	Диэлектрическая восприимчивость частично ионизованной плазмы . . . . .	362
7.3.4b	Поляризация нормальных волн . . . . .	366
7.3.5	Суммарные непрозрачности . . . . .	368
7.4	Излучение конденсированной поверхности . . . . .	371
7.4.1	Диэлектрический тензор конденсированной фазы . . . . .	371
7.4.2	Закон Кирхгофа для поляризованного излучения . . . . .	373
7.4.3	Излучательная способность конденсированной поверхности . . .	374
7.4.4	Спектр и поляризация излучения . . . . .	377
7.5	Некоторые приложения . . . . .	378
7.5.1	Тонкая атмосфера изолированной нейтронной звезды . . . . .	378
7.5.2	База данных для моделирования частично ионизованных атмосфер с сильными магнитными полями . . . . .	381
7.6	Резюме . . . . .	382
	<b>Заключение</b>	<b>383</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>387</b>

# Введение

## Актуальность работы

Исследование оболочек нейтронных звёзд находится на стыке астрофизики и физики плазмы, являясь актуальной задачей с точки зрения каждой из этих наук.

Важная роль оболочек нейтронных звёзд в их тепловой эволюции и наблюдаемых проявлениях была осознана ещё до открытия пульсаров [1] и исследовалась во многих работах (см., напр., ссылки в обзорах [15, 41]), но в последнее десятилетие их изучение стало особенно актуальным в связи с появлением нового поколения орбитальных рентгеновских обсерваторий (*Chandra* и *XMM-Newton*), впервые позволивших детально изучать остывание и тепловые спектры нейтронных звёзд (напр., [42]). В частности, начиная с 2002 года, стали обнаруживаться линии поглощения в тепловых спектрах нейтронных звёзд [43]. Необходимость достоверной интерпретации новых высокоточных наблюдений остро требует детального моделирования теплопереноса и формирования спектров электромагнитного излучения в поверхностных слоях нейтронных звёзд. При этом часто оказывается необходимым учитывать *сильное магнитное поле*<sup>1</sup>  $B \gtrsim 10^{12}$  Гс, которое способно существенно изменять кинетические, а при определённых условиях – и термодинамические характеристики звёздного вещества. Последнее обстоятельство стало особенно актуальным после открытия нового класса нейтронных звёзд – магнитаров, обладающих *сверхсильными* магнитными полями  $B \sim 10^{14}$ – $10^{15}$  Гс, что на 1–3 порядка превосходит магнитные поля обычных пульсаров. Наблюдательные свидетельства в пользу наличия у некоторых нейтронных звёзд (аномальных рентгеновских пульсаров и источников повторяющихся гамма-всплесков) сверхсильных магнитных полей появились, в основном,

---

<sup>1</sup>Применительно к нейтронным звёздам, магнитное поле обычно называют сильным, если велика его величина в атомных единицах – то есть при магнитной индукции  $B \gg 10^9$  Гс, – и сверхсильным, если существенны релятивистские магнитные эффекты, то есть при  $B \gtrsim 4,4 \times 10^{13}$  Гс (подробнее характерные магнитные параметры будут рассмотрены в главе 4).

в течение последнего десятилетия [44].

Кинетические и термодинамические свойства вещества при давлениях в миллионы атмосфер и температурах в сотни тысяч и миллионы градусов, которые встречаются в атмосферах нейтронных звёзд, можно изучать в реализуемых и планируемых в настоящее время лабораторных экспериментах (в частности, в опытах с использованием создаваемых мощными лазерами ударных волн) [45]. Поэтому изучение вещества с такими параметрами актуально для физики плазмы. Необходимо отметить, что на много порядков более высокое давление, характерное для более глубоких, чем атмосфера, оболочек нейтронных звёзд, как и типичные для пульсаров – и тем более магнитаров – значения магнитной индукции, по-прежнему недостижимы в лабораторных условиях, что делает нейтронные звёзды уникальными «природными лабораториями», позволяющими проверить теоретические предсказания свойств вещества в экстремальных условиях.

## Цели работы

1. Главной целью работы является теоретическое исследование термодинамических и кинетических свойств вещества в оболочках нейтронных звёзд, влияющих на тепловую эволюцию нейтронных звёзд и на формирование спектра выходящего теплового излучения, с учётом современных представлений о нейтронных звёздах и достижений теоретической физики плазмы. Работа ориентирована на использование в астрофизических приложениях, поэтому её целью является приведение всех изучаемых термодинамических функций и коэффициентов переноса к виду, подходящему для такого использования, – либо, где это возможно, путём построения аналитических аппроксимаций, либо путём создания общедоступных компьютерных программ, а также числовых таблиц, включённых в общедоступные астрофизические базы данных.
2. Второй целью работы является применение результатов исследования свойств оболочек нейтронных звёзд и созданных программ и баз данных к моделированию тепловой эволюции и спектров теплового электромагнитного излучения нейтронных звёзд и, в конечном итоге, к изучению конкретных нейтронных звёзд посредством сравнения построенных моделей с наблюдениями. Успешное осуществление такого моделирования применительно к ряду наблюдаемых нейтронных звёзд служит подтверждением актуальности и успешного осуществления главной цели работы.

3. В задачи исследования также входят изучение и расчёт квантовомеханических характеристик атома водорода, движущегося в сильном магнитном поле и взаимодействующего с электромагнитным излучением. Решение этой задачи является необходимым этапом для расчёта уравнения состояния и непрозрачностей атмосфер нейтронных звёзд с сильным магнитным полем и моделирования спектра выходящего из атмосферы теплового излучения, но в то же время оно имеет и самостоятельную значимость с точки зрения теоретической атомной физики.

## Научная новизна

В диссертации проведено систематическое исследование уравнения состояния вещества и электронного переноса тепла и заряда во всех оболочках нейтронных звёзд – от внутренней коры до атмосферы – с произвольными магнитными полями. На этой основе впервые разработан общедоступный комплекс компьютерных программ для расчёта термодинамических и кинетических характеристик плазмы в оболочках нейтронных звёзд и исследована механическая и тепловая структура этих оболочек. Также впервые исследовано взаимодействие с электромагнитным излучением атома водорода, произвольным образом движущегося в сильном магнитном поле, и роль этого взаимодействия в формировании спектров теплового излучения в атмосферах нейтронных звёзд.

В частности, впервые решены следующие задачи.

1. Получены аналитические выражения для вкладов ион-ионного и электрон-ионного взаимодействия в свободную энергию и производные от неё термодинамические функции полностью ионизованной плазмы, применимые при произвольной степени вырожденности электронов плазмы, произвольном ионном зарядовом составе и произвольной величине параметра кулоновской связи.
2. Изучены упругие свойства жидкокристаллической мантии нейтронных звёзд, содержащей экзотические атомные ядра, и найдены аналитические формулы для соответствующих коэффициентов упругости.
3. Учтён вклад многофононных процессов в структурный фактор и в кинетические коэффициенты кулоновского кристалла.
4. Систематически исследованы и рассчитаны квантовомеханические свойства атома водорода, движущегося в сильном магнитном поле, при произвольном

значении обобщённого импульса, характеризующего это движение, включая энергии связи, геометрические размеры, силы осцилляторов основного и возбуждённых состояний, времена жизни метастабильных состояний, свойства волновых функций дискретного и непрерывного спектра.

5. Рассчитаны сечения фотоионизации атома водорода, движущегося в сильном магнитном поле, при произвольном значении обобщённого импульса.
6. Построено уравнение состояния частично ионизованной водородной плазмы в сильном магнитном поле, учитывающее движение атомов поперёк магнитных силовых линий, а также эффекты неидеальности, в том числе ионизацию давлением.
7. Получены удобные аналитические выражения для расчёта вероятностей безызлучательных и радиативных переходов между ионными уровнями Ландау при кулоновских столкновениях ионов и электронов в сильном и сверхсильном магнитном поле.
8. Теплопроводность, электропроводность и термоэлектрический коэффициент полностью ионизованной вырожденной плазмы при переносе вдоль квантующего магнитного поля рассчитаны на основе инвариантного формализма квантомеханической матрицы плотности.
9. Предложены аналитические формулы и создан реализующий их общедоступный комплекс компьютерных программ для расчёта коэффициентов электронного переноса тепла и заряда в полностью ионизованной плазме при произвольной степени кулоновской неидеальности, произвольной степени электронного вырождения и произвольном магнитном поле, в том числе квантующем.
10. Исследована тепловая структура нейтронных звёзд с аккрецированными оболочками без магнитного поля и при наличии сильного или сверхсильного магнитного поля.
11. Рассчитаны коэффициенты тензора диэлектрической восприимчивости и спектральные непрозрачности в частично ионизованных атмосферах нейтронных звёзд с сильными магнитными полями, и на этой основе построены модели частично ионизованных водородных атмосфер нейтронных звёзд с сильными магнитными полями.

## Научная и практическая значимость

Разработанные подходы к описанию уравнения состояния и электронных кинетических коэффициентов полностью ионизованной кулоновской плазмы в произвольном магнитном поле, а также разработанный комплекс компьютерных программ для расчёта основных термодинамических функций и коэффициентов проводимости и теплопроводности такой плазмы применяются при моделировании свойств оболочек нейтронных звёзд, а также оболочек и ядер белых карликов и ядер красных гигантов. Эти подходы могут применяться и при исследованиях иных астрофизических объектов, в которых содержится полностью ионизованная кулоновская плазма. Кроме того, результаты могут служить составляющей для описания частично ионизованной плотной плазмы, использующего «химическую модель» свободной энергии.

Результаты исследования тепловой структуры оболочек нейтронных звёзд, полученные на основе выполненного исследования их тензоров теплопроводности, важны для моделирования тепловой эволюции нейтронных звёзд различных типов и интерпретации их наблюдаемой тепловой светимости. Результаты уже используются с этой целью в секторе теоретической астрофизики ФТИ им. А. Ф. Иоффе.

Построенное уравнение состояния и рассчитанные непрозрачности частично ионизованной водородной плазмы в сильном магнитном поле используются группами Дуна Лая в Корнелльском университете и Клауса Вернера в Тюбингенском университете Эберхарда и Карла, а также Вином Хо в Саутгемптонском университете, при моделировании и интерпретации спектров теплового излучения нейтронных звёзд.

## Апробация результатов, публикации

Результаты работы неоднократно докладывались автором на семинарах сектора теоретической астрофизики ФТИ им. А. Ф. Иоффе, Института астрономии и астрофизики Университета Тюбингена (Германия), Католического университета Чили (Сантьяго де Чили), ИТЭФ им. А. И. Алиханова (Москва), Астрономического отдела физического факультета Корнельского университета (США), представлялись на конкурсе лучших научных работ ФТИ им. А. Ф. Иоффе (первое место на конкурсе 2004 года), на всероссийских совещаниях и конференциях:

- «Физика нейтронных звёзд» (ФТИ им. А. Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, 1992, 1995, 2001, 2005),
- «Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра» (ИКИ РАН, Москва, 2002,

2003),

- «Исследования неидеальной плазмы» (ОИВТ РАН, Москва, 1997, 1998, 2000, 2003, 2004, 2005, 2008),

– а также на международных совещаниях и конференциях:

- “Physics of Supernovae and Neutron Stars” (ЕСТ\* Workshop, Тренто, Италия, 1996),
- “Atoms and Molecules in Strong External Fields” (Бад Хоннеф, Германия, 1997),
- “Physics of Nonideal Plasmas” (PNP-9 – Росток, Германия, 1998; PNP-10 – Грайфсвальд, Германия, 2000),
- “Pulsar Astronomy – 2000 and beyond” (IAU Colloquium 177, Бонн, Германия, 1999),
- “Neutron Stars” (INT-01-2, Сиэтл, США, 2001),
- “Strongly Coupled Coulomb Systems” (Москва, Россия, 2005),
- “Isolated Neutron Stars: from the Interior to the Surface” (Лондон, Великобритания, 2006),
- “Astrophysics of compact objects” (Хуаншань, КНР, 2007),
- “The Neutron Star Crust and Surface” (INT-07-2a, Сиэтл, США, 2007),
- “Defining the Neutron Star Crust: X-ray Bursts, Superbursts and Giant Flares” (Санта-Фе, Нью-Мексико, США, 2009),
- “Microphysics in Computational Relativistic Astrophysics” (Копенгаген, Дания, 2009).

Результаты диссертации, полученные в соавторстве, докладывались соавторами соответствующих работ также и на других всероссийских и международных совещаниях и конференциях.

По теме диссертации автором опубликовано 80 печатных работ (72 из них – с соавторами). В их число входят статьи в международных научных журналах и публикации в сборниках трудов всероссийских и международных конференций, а также одна монография.

Важнейшие результаты содержатся в 48 статьях, опубликованных в журналах, включённых в действующий «Перечень научных журналов и изданий, в которых



могут быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора и кандидата наук», утверждённый решениями Президиума ВАК.

Список публикаций по теме диссертации приведён в конце данного введения.

## Структура диссертации

Диссертация состоит из данного введения, семи глав и заключения.

**Первая глава** в основном выполняет подготовительную роль для последующих и содержит краткое изложение основных сведений об оболочках нейтронных звёзд, на которые автор ориентировался при выполнении работы, а также краткий обзор основных предшествующих работ, посвящённых данной тематике. Оригинальные результаты содержатся в последующих пяти главах.

Во **второй главе** рассмотрены равновесные свойства плазмы в оболочках нейтронных звёзд без учёта влияния магнитного поля, но с учётом кулоновской неидеальности плазмы. При этом основное внимание уделяется кулоновскому взаимодействию во внешних оболочках нейтронных звёзд, однако многие результаты также применимы и для внутренних оболочек. А поскольку физические условия во внешних оболочках нейтронных звёзд сходны с условиями в недрах белых карликов и в ядрах красных гигантов, то результаты полезны также и для этих объектов.

**Третья глава** посвящена расчётам теплопроводности, электропроводности и термоэлектрического коэффициента полностью ионизованной плазмы при физических условиях, встречающихся в океане и коре нейтронных звёзд без сильного магнитного поля.

**Четвёртая и пятая главы** являются центральными для данной работы. Они посвящены тем эффектам, которые вызывает сильное магнитное поле, типичное для большинства нейтронных звёзд. В **четвёртой главе** изучено влияние сильного магнитного поля на квантовомеханические свойства атомов водорода с учётом их движения в атмосфере, а также на квантовые переходы атомов и ионов, связанные с кулоновским взаимодействием и со взаимодействием электронов и ионов с излучением. В **пятой главе** на основе результатов глав 2–4 изучается влияние сильного магнитного поля на свойства вещества в оболочках нейтронных звёзд. При этом подробно рассмотрено уравнение состояния полностью ионизованной неидеальной плазмы; построено и исследовано уравнение состояния частично ионизованной водородной плазмы; изучен электронный перенос тепла и заряда.

В **шестой главе** на основе результатов предшествующих глав строятся модели тепловой структуры и тепловой эволюции нейтронных звёзд и на ряде примеров проводится сравнение результатов такого моделирования с наблюдениями.

В **седьмой главе** на основе результатов второй, четвёртой и пятой глав строятся модели атмосфер и спектров излучения нейтронных звёзд, а также даются примеры сравнения результатов с наблюдениями.

В **Заключении** собраны основные выводы работы и сформулированы благодарности.

## Основные положения, выносимые на защиту

1. Разработка термодинамической модели и расчёт уравнения состояния частично ионизованной неидеальной водородной плазмы в широком диапазоне плотностей при значениях температуры  $T \sim 10^5 - 10^7$  К и магнитной индукции  $B \sim 10^{11} - 10^{15}$  Гс, характерных для внешних оболочек нейтронных звёзд, с учётом модификации квантовомеханических свойств атомов за счёт эффектов сильного магнитного поля и движения атомов в этом поле.
2. Расчёт квантовомеханических свойств атома водорода, произвольным образом движущегося в сильном магнитном поле и взаимодействующего с электромагнитным излучением.
3. Создание общедоступного комплекса компьютерных программ для расчёта коэффициентов переноса тепла и заряда в кулоновской плазме при любой степени вырожденности и релятивизма электронов, любых значениях параметра кулоновской связи и в произвольном магнитном поле, в том числе квантующем.
4. Расчёт тепловой структуры оболочек нейтронных звёзд со слабыми, сильными и сверхсильными магнитными полями для различных моделей химического состава оболочек.
5. Аналитическое описание термодинамических характеристик кулоновской плазмы при произвольных значениях плотности, температуры и магнитной индукции, для произвольного ионного состава, с учётом ион-ионных и электрон-ионных корреляций при любых значениях параметра кулоновской связи; создание общедоступного комплекса компьютерных программ для расчёта термодинамических функций кулоновской плазмы.

6. Расчёт спектральных непрозрачностей частично ионизованных водородных атмосфер нейтронных звёзд с сильными магнитными полями. Создание общедоступной базы модельных спектров таких атмосфер для применения при интерпретации наблюдений.

### Список публикаций по теме диссертации\*

1. Haensel P., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G. *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*. – New York: Springer, 2007. – 643 pages.
2. Bulik T., Pavlov G., Potekhin A. “Ionization equilibrium of hydrogen in strong magnetic field with allowance for pressure effects” // *Bull. Amer. Astron. Soc.*, **24**, 1133 (1992)
- 3.\* Potekhin A.Yu., Pavlov G.G. “Photoionization of the hydrogen atom in strong magnetic fields” // *Astrophys. J.*, **407**, 330–41 (1993)
4. Shibano Yu.A., Zavlin V.E., Pavlov G.G., Ventura J., Potekhin A.Yu. “Model atmospheres of magnetic neutron stars” // *Physics of Isolated Pulsars* / Eds. K. Van Riper, C. Ho, & R. Epstein. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. – P. 174–181
- 5.\* Potekhin A.Y. “Structure and radiative transitions of the hydrogen atom moving in a strong magnetic field” // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **27**, No. 6, 1073–1090 (1994)
- 6.\* Bezchastnov V.G., Potekhin A.Y. “Transitions between shifted Landau states and photoionization of the hydrogen atom moving in a strong magnetic field” // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **27**, 3349–61 (1994)
7. Pavlov G.G., Potekhin A.Yu. “Photoionization of the hydrogen atom in a strong magnetic field” // *Astron. Astrophys. Transactions*, **4**, 261–267 (1994)
8. Bezchastnov V.G., Potekhin A.Y. “Modified adiabatic approximation for a hydrogen atom moving in a magnetic field” // *The Equation of State in Astrophysics* / Eds.

---

\*Звёздочками в списке отмечены статьи, опубликованные в международных рецензируемых научных журналах, входящих в действующий «Перечень научных журналов и изданий, в которых могут быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени доктора и кандидата наук», утверждённый решениями Президиума ВАК.

G. Chabrier and E. Shatzman. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. – P. 555–559.

- 9.\* Pavlov G.G., Potekhin A.Y. “Bound-bound transitions in strongly magnetized hydrogen plasma” // *Astrophys. J.*, **450**, 883–95 (1995)
- 10.\* Potekhin A.Y. “Electron conduction along quantizing magnetic fields in neutron star crusts. I. Theory” // *Astron. Astrophys.*, **306**, 999–1010 (1996)
- 11.\* Potekhin A.Y., Yakovlev D.G. “Electron conduction along quantizing magnetic fields in neutron star crusts. II. Practical formulae” // *Astron. Astrophys.*, **314**, 341–352 (1996)
- 12.\* Potekhin A.Y. “Ionization equilibrium of hot hydrogen plasma” // *Physics of Plasmas*, **3**, 4156–4165 (1996)
- 13.\* Potekhin A.Y., Pavlov G.G., Ventura J. “Ionization of the hydrogen atom in strong magnetic fields” // *Astron. Astrophys.*, **317**, 618–629 (1997)
- 14.\* Chabrier G., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G. “Cooling neutron stars with accreted envelopes” // *Astrophys. J.*, **477**, L99–L102 (1997)
- 15.\* Potekhin A.Y., Pavlov G.G. “Photoionization of hydrogen in atmospheres of magnetic neutron stars” // *Astrophys. J.*, **483**, 414–425 (1997)
- 16.\* Potekhin A.Y., Chabrier G., Yakovlev D.G. “Internal temperatures and cooling of neutron stars with accreted envelopes” // *Astron. Astrophys.*, **323**, 415–428 (1997)
- 17.\* Pethick C.J., Potekhin A.Y. “Liquid crystals in the mantles of neutron stars” // *Phys. Lett. B*, **427**, 7–12 (1998)
- 18.\* Potekhin A.Y. “Hydrogen atom moving across a strong magnetic field: analytical approximations” // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **31**, 49–63 (1998)
- 19.\* Chabrier G., Potekhin A.Y. “Equation of state of fully ionized electron-ion plasmas” // *Phys. Rev. E*, **58**, 4941–4949 (1998)
- 20.\* Baiko D.A., Kaminker A.D., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G. “Ion structure factors and electron transport in dense Coulomb plasmas” // *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 5556–5559 (1998)

21. Shibano Yu.A., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G., Zavlin V.E. “Evolution of thermal structure and radiation spectrum of cooling neutron stars” // *The Many Faces of Neutron Stars* / Eds. M.A. Alpar, R. Buccheri, J. van Paradijs. – Dordrecht: Kluwer, 1998. – P. 553–559.
22. Ventura J., Potekhin A.Y., Pavlov G.G. “Atomic ionization and opacities in pulsar atmospheres” // *The Many Faces of Neutron Stars* / Eds. M.A. Alpar, R. Buccheri, J. van Paradijs. – Dordrecht: Kluwer, 1998. – P. 561–566.
23. Potekhin A.Y. “Hydrogen atoms in neutron star atmospheres: analytical approximations for binding energies” // *Atoms and Molecules in Strong External Fields* / Eds. P. Schmelcher, W. Schweizer. – New York: Plenum, 1998. – P. 49–54.
24. Potekhin A.Y., Shibano Yu.A., Ventura J. “Equation of state and opacities for hydrogen atmospheres of strongly magnetized cooling neutron stars” // *Neutron Stars and Pulsars* / Eds. N. Shibasaki, N. Kawai, S. Shibata, T. Kifune. – Tokyo: Universal Academy Press, 1998. – P. 161–164.
- 25.\* Kaminker A.D., Pethick C.J., Potekhin A.Y., Thorsson V., Yakovlev D.G. “Neutrino-pair bremsstrahlung by electrons in neutron star crusts” // *Astron. Astrophys.*, **343**, 1009–1024 (1999)
- 26.\* Potekhin A.Y., Baiko D.A., Haensel P., Yakovlev D.G. “Transport properties of degenerate electrons in neutron star envelopes and white dwarf cores” // *Astron. Astrophys.*, **346**, 345–353 (1999)
- 27.\* Potekhin A.Y., Chabrier G., Shibano Yu.A. “Partially ionized hydrogen plasma in strong magnetic fields” // *Phys. Rev. E*, **60**, 2193–2208 (1999)
- 28.\* Potekhin A.Y. “Electron conduction in magnetized neutron star envelopes” // *Astron. Astrophys.*, **351**, 787–797 (1999)
29. Potekhin A.Y., Chabrier G., Shibano Yu.A., Ventura J. “Ionization equilibrium and equation of state of hydrogen plasmas in strong magnetic fields” // *Contrib. Plasma Phys.*, **39**, 101–104 (1999)
- 30.\* Potekhin A.Y., Chabrier G. “Equation of state of fully ionized electron-ion plasmas. II. Extension to relativistic densities and to the solid phase” // *Phys. Rev. E*, **62**, 8554–8563 (2000)

31. Potekhin A., Chabrier G., Shibano Yu. “Partially ionized layers of accreted envelopes of weakly and strongly magnetized neutron stars” // *Pulsar Astronomy – 2000 and beyond* / Proc. IAU Coll. № 177 (30.08–03.09.99, Bonn, Germany), eds. M. Kramer, N. Wex, R. Wielebinski. – ASP Conference Series, V. **202**. – San Francisco: ASP, 2000. – P. 619–620.
32. Potekhin A. “Heat and charge transport in envelopes of weakly and strongly magnetized neutron stars” // *Pulsar Astronomy – 2000 and beyond* / Proc. IAU Coll. № 177 (30.08–03.09.99, Bonn, Germany), eds. M. Kramer, N. Wex, R. Wielebinski. – ASP Conference Series, V. **202**. – San Francisco: ASP, 2000. – P. 621–622
- 33.\* Potekhin A.Y., Turbiner A.V. “Hydrogen atom in a magnetic field: The quadrupole moment” // *Phys. Rev. A*, **63**, 065402 [4 pages] (2001)
- 34.\* Gnedin O.Y., Yakovlev D.G., Potekhin A.Y. “Thermal relaxation in young neutron stars” // *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **324**, 725–737 (2001)
- 35.\* Potekhin A.Y., Yakovlev D.G. “Thermal structure and cooling of neutron stars with magnetized envelopes” // *Astron. Astrophys.*, **374**, 213–226 (2001)
- 36.\* Baiko D.A., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G. “Thermodynamic functions of harmonic Coulomb crystals” // *Phys. Rev. E*, **64**, 057402 [4 pages] (2001)
37. Ventura J., Potekhin A.Y. “Neutron star envelopes and thermal radiation from the magnetic surface” // *The Neutron Star – Black Hole Connection* / NATO ASI Ser. C. V. 567. / Eds. C. Kouveliotou, J. Ventura, E. van den Heuvel. – Dordrecht: Kluwer, 2001. – 393–414.
38. Yakovlev D., Gnedin O., Potekhin A. “Strongly coupled Coulomb and nuclear plasma in inner envelopes of neutron stars” // *Contrib. Plasma Phys.*, **41**, 227–230 (2001)
39. Potekhin A.Y., Chabrier G., Yakovlev D.G. “Coulomb plasmas in outer envelopes of neutron stars” // *Contrib. Plasma Phys.*, **41**, 231–234 (2001)
- 40.\* Potekhin A.Y., Chabrier G., Gilles D. “Electric microfield distributions in electron-ion plasmas” // *Phys. Rev. E*, **65**, 036412 [12 pages] (2002)
- 41.\* Chabrier G., Douchin F., Potekhin A.Y. “Dense astrophysical plasmas” // *J. Phys.: Condensed Matter*, **14**, 9133–9139 (2002)

42. Yakovlev D.G., Gnedin O.Y., Kaminker A.D., Potekhin A.Y. “Cooling of superfluid neutron stars” // *Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants* / Proc. 270. Heraeus Seminar (Bad Honnef, Jan. 21–25, 2002) / Eds. W. Becker, H. Lesch, J. Trümper, MPE Report 278. – Garching: MPE, 2002. – P. 287–299
- 43.\* Potekhin A.Y., Chabrier G. “Equation of state and opacities for hydrogen atmospheres of neutron stars with strong magnetic fields” // *Astrophys. J.*, **585**, 955–974 (2003)
- 44.\* Potekhin A.Y., Yakovlev D.G., Chabrier G., Gnedin O.Y. “Thermal structure and cooling of superfluid magnetic neutron stars” // *Astrophys. J.*, **594**, 404–418 (2003)
- 45.\* Ho W.C.G., Lai D., Potekhin A.Y., Chabrier G. “Atmospheres and spectra of strongly magnetized neutron stars – III. Partially ionized hydrogen models” // *Astrophys. J.*, **599**, 1293–1301 (2003)
- 46.\* Potekhin A.Y., Chabrier G. “Equation of state and opacities for hydrogen atmospheres of magnetars” // *Astrophys. J.*, **600**, 317–323 (2004)
- 47.\* Yakovlev D.G., Levenfish K.P., Potekhin A.Y., Gnedin O.Y., Chabrier G. “Thermal states of coldest and hottest neutron stars in soft X-ray transients” // *Astron. Astrophys.*, **417**, 169–179 (2004)
- 48.\* Potekhin A.Y., Lai D., Chabrier G., Ho W.C.G. “Electromagnetic polarization in partially ionized plasmas with strong magnetic fields and neutron star atmosphere models” // *Astrophys. J.*, **612**, 1034–1043 (2004)
- 49.\* Haensel P., Potekhin A.Y. “Analytical representations of unified equations of state of neutron-star matter” // *Astron. Astrophys.*, **428**, 191–197 (2004)
50. Yakovlev D.G., Gnedin O.Y., Kaminker A.D., Levenfish K.P., Potekhin A.Y. “Neutron star cooling: Theoretical aspects and observational constraints” // *Adv. Space Res.*, **33**, 523–530 (2004)
51. Ho W.C.G., Lai D., Potekhin A.Y., Chabrier G. “Atmospheres of magnetized neutron stars: Vacuum polarization and partially ionized models” // *Adv. Space Res.*, **33**, 537–541 (2004)
- 52.\* van Adelsberg M., Lai D., Potekhin A.Y., Arras P. “Radiation from condensed surface of magnetic neutron stars” // *Astrophys. J.*, **628**, 902–913 (2005)

- 53.\* Potekhin A.Y., Massacrier G., Chabrier G. “Equation of state for partially ionized carbon at high temperatures” // *Phys. Rev. E*, **72**, 046402 [8 pages] (2005)
- 54.\* Potekhin A.Y., Urpin V., Chabrier G. “The magnetic structure of neutron stars and their surface-to-core temperature relation” // *Astron. Astrophys.*, **443**, 1025–1028 (2005)
55. Yakovlev D.G., Gnedin O.Y., Gusakov M.E., Kaminker A.D., Levenfish K.P., Potekhin A.Y. “Neutron star cooling” // *Nucl. Phys. A*, **752**, 590–599 (2005)
56. Potekhin A.Y., Lai D., Chabrier G., Ho W.C.G. “Partially ionized atmospheres of neutron stars with strong magnetic fields” // *Adv. Space Res.*, **35**, 1158–1161 (2005)
57. van Adelsberg M., Lai D., Potekhin A. “Radiation from condensed surface of magnetic neutron stars” // *The Electromagnetic Spectrum of Neutron Stars* / Eds. A. Baykal, S.K. Yerli, S.C. Inam, S. Grebenev / NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. – V. 210, pt.IV. – Berlin: Springer, 2005. – P. 141–144
58. Ho W.C.G., Lai D., Potekhin A.Y., Chabrier G. “Modeling Spectral Features from Isolated Neutron Stars” // *The Electromagnetic Spectrum of Neutron Stars* / Eds. A. Baykal, S.K. Yerli, S.C. Inam, S. Grebenev / NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. – V. 210, pt.IV. – Berlin: Springer, 2005. – P. 185–188
- 59.\* Chabrier G., Saumon D., Potekhin A.Y. “Dense plasmas in astrophysics: from giant planets to neutron stars” // *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**, 4411–4419 (2006)
- 60.\* Potekhin A.Y., Chabrier G., Lai D., Ho W.C.G., van Adelsberg M. “Nonideal strongly magnetized plasmas of neutron stars and their electromagnetic radiation” // *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**, 4453–4458 (2006)
- 61.\* Kaminker A.D., Yakovlev D.G., Potekhin A.Y., Shibasaki N., Shternin P.S., Gnedin O.Y. “Magnetars as cooling neutron stars with internal heating” // *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **371**, 477–483 (2006)
62. Barriga-Carrasco M.D., Potekhin A.Y. “Proton stopping in plasmas considering  $e^-e^-$  collisions” // *Laser and Particle Beams*, **24**, 553–558 (2006)
63. Ho W.C.G., Chang P., Kaplan D.L., Mori K., Potekhin A.Y., van Adelsberg M.



- “Modeling atmosphere emission from magnetic neutron stars” // *Adv. Space Res.*, **40**, 1432–1440 (2007)
64. Ho W.C.G., Kaplan D.L., Chang P., van Adelsberg M., Potekhin A.Y. “Thin magnetic hydrogen atmospheres and the neutron star RX J1856.5–3754” // *Astrophys. Space Sci.*, **308**, 279–286 (2007)
- 65.\* Ho W.C.G., Kaplan D.L., Chang P., van Adelsberg M., Potekhin A.Y. “Magnetic hydrogen atmosphere models and the neutron star RX J1856.5–3754” // *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **375**, 821–830 (2007)
- 66.\* Potekhin A.Y., Lai D. “Statistical equilibrium and ion cyclotron absorption/emission in strongly magnetized plasmas” // *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **376**, 895–906 (2007)
- 67.\* Cassisi S., Potekhin A.Y., Pietrinferni A., Catelan M., Salaris M. “Updated electron-conduction opacities: the impact on low-mass stellar models” // *Astrophys. J.*, **661**, 1094–1104 (2007)
- 68.\* Shternin P.S., Yakovlev D.G., Haensel P., Potekhin A.Y., “Neutron star cooling after deep crustal heating in the X-ray transient KS 1731-260” // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **382**, L43–L47 (2007)
69. Kaminker A.D., Yakovlev D.G., Potekhin A.Y., Shibazaki N., Shternin P.S., Gnedin O.Y. “Cooling of magnetars with internal layer heating” // *Astrophys. Space Sci.*, **308**, 423–430 (2007)
70. Potekhin A.Y., Chabrier G., Yakovlev D.G. “Heat blanketing envelopes and thermal radiation of strongly magnetized neutron stars” // *Astrophys. Space Sci.*, **308**, 353–361 (2007)
71. Kaminker A.D., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G., Chabrier G. “Heating and cooling of magnetars with accreted envelopes” // *Physics of Neutron Stars - 2008: Abstracts* / Eds. D.A. Varshalovich, A.I. Chugunov, A.Y. Potekhin, D.G. Yakovlev. – St. Petersburg: SPbSPU, 2008. – P. 46
72. Potekhin A.Y. “Physics of neutron star surface layers and their thermal radiation” // *AIP Conf. Proc.*, **968**, 121–128 (2008)

73. Yakovlev D.G., Gnedin O.Y., Kaminker A.D., Potekhin A.Y. “Theory of cooling neutron stars versus observations” // *AIP Conf. Proc.*, **983**, 379–387 (2008)
74. Shternin P.S., Yakovlev D.G., Haensel P., Potekhin A.Y., ”Neutron star cooling after deep crustal heating in the X-ray transient KS 1731-260” // *Physics of Neutron Stars - 2008: Abstracts* / Eds. D.A. Varshalovich, A.I. Chugunov, A.Y. Potekhin, D.G. Yakovlev. – St. Petersburg: SPbSPU, 2008. – P. 81
- 75.\* Medin Z., Lai D., Potekhin A.Y. “Radiative transitions of the helium atom in highly magnetized neutron star atmospheres” // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **383**, 161–172 (2008)
- 76.\* Ho, W.C.G., Potekhin A.Y., Chabrier G. “Model X-ray spectra of magnetic neutron stars with hydrogen atmospheres” // *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **178**, 102–109 (2008)
77. Suleimanov V., Potekhin A., Werner K. “Models of magnetized neutron stars atmospheres” // *37th COSPAR Scientific Assembly* (13–20 July 2008, Montreal, Canada), abstract E11-0020-08. – Montreal: COSPAR, 2008. – P. 3079
- 78.\* Potekhin A.Y., Chabrier G., Rogers F.J. “Equation of state of classical Coulomb plasma mixtures ” // *Phys. Rev. E*, **79**, 016411 [6 pages] (2009)
- 79.\* Kaminker A.D., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G., Chabrier G., ”Heating and cooling of magnetars with accreted envelopes” // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **395**, 2257–2267 (2009)
- 80.\* Suleimanov V., Potekhin A.Y., Werner K. “Models of magnetized neutron star atmospheres: thin atmospheres and partially ionized hydrogen atmospheres with vacuum polarization” // *Astron. Astrophys.*, **500**, 891–899 (2009)

# Глава 1

## Оболочки нейтронных звёзд (вводный обзор)

Нейтронные звёзды – самые компактные из известных звёзд – названы так потому, что их недра в значительной мере состоят из свободных нейтронов. Хорошо известно (напр., [2]), что нейтронные звёзды были теоретически предсказаны в 1933 году работавшими в США В. Бааде и Ф. Цвикки как вероятный результат взрывов сверхновых<sup>1</sup>, а обнаружены в 1967 году кембриджскими радиоастрономами [6] по импульсному радиоизлучению, которое исходит от *радиопульсаров* – достаточно быстро вращающихся нейтронных звёзд с сильным магнитным полем<sup>2</sup>. Менее широко известно, что в том же 1967 году И. С. Шкловский [9] на основе анализа рентгеновских и оптических наблюдений источника Sco X-1 сделал вывод о том, что излучение этого объекта порождается аккрецией на нейтронную звезду, что впоследствии полностью подтвердилось.

При типичной массе  $M \sim 1-2 M_{\odot}$ , где  $M_{\odot} = 2 \times 10^{33}$  г – масса Солнца, радиус нейтронной звезды составляет  $R \approx 12 - 14$  км. Соответственно, средняя массовая плотность такой звезды составляет  $\sim 10^{15}$  г см<sup>-3</sup>, примерно втрое превышая типичную плотность тяжёлого атомного ядра (*нормальную ядерную плотность*)  $\rho_0 = 2,8 \times 10^{14}$  г см<sup>-3</sup>. Плотность в центре нейтронной звезды может на порядок

---

<sup>1</sup>Доклад Бааде и Цвикки был представлен на собрании Американского физического общества в декабре 1933 года, а аннотация напечатана в январе 1934 года [3]. Версия о предсказании нейтронных звёзд Л. Д. Ландау в 1932 году [2, 4] не вполне точна (см. [5], с. 2).

<sup>2</sup>Впоследствии радиоимпульсы пульсаров были найдены в архивных данных кембриджской группы, восходящих к 1962–1965 годам [7]; правильное объяснение этих наблюдений дал в 1968 году Томас Голд [8]; Нобелевская премия по физике за 1974 год была присуждена Энтони Хьюишу – руководителю кембриджской группы.

превосходить  $\rho_0$ . Такое вещество не встречается больше нигде в природе, его невозможно создать в лаборатории, и его свойства и даже состав не поддаются надёжному теоретическому описанию. Существуют различные теоретические модели для описания такого вещества, и выбор какой-либо из них в обозримом будущем может быть достигнут только путём изучения нейтронных звёзд, то есть путём анализа и интерпретации их наблюдений при помощи теоретических моделей.

Как будет показано ниже, для этого необходимо построение достаточно полных моделей оболочек – сравнительно менее плотных наружных слоёв нейтронных звёзд. Плотность оболочек нейтронных звёзд меньше  $0,5 \rho_0$ , но, тем не менее, она в большей части оболочек намного превосходит плотность плазмы, достижимую при той же температуре в лабораторных условиях. Кроме того, сверхсильные магнитные поля, которыми зачастую обладают нейтронные звёзды, оказывают серьёзное влияние на свойства этих оболочек и происходящие в них процессы, что необходимо учитывать при их теоретическом описании и интерпретации наблюдений. Помимо собственно нейтронных звёзд, исследования их оболочек применимы в другим компактным астрономическим объектам – белым и коричневым карликам, а также ядрам красных гигантов, так как их вещество имеет много общего с веществом в определённых частях оболочек нейтронных звёзд.

В данной главе будут изложены те общие сведения о нейтронных звёздах и их оболочках, которые необходимы для того, чтобы очертить предмет исследований, представленных в диссертации. В каждой из последующих глав будут даваться ссылки на предшествующие исследования по той тематике, которой посвящена глава. Таким образом, данная глава *не претендует* на обзор всех проблем и исследований, относящихся к нейтронным звёздам или даже только к их оболочкам. Поэтому, в частности, в ней не приводятся ссылки на оригинальные работы, в которых ранее рассматривалась та или иная упоминаемая в тексте проблема, за исключением тех случаев, когда наличие подобной ссылки диктуется логикой изложения. В качестве широкодоступного введения в физику нейтронных звёзд можно рекомендовать великолепно написанную книгу Шапиро и Тьюколски [2]. Структура и равновесные свойства нейтронных звёзд подробно рассмотрены в нашей недавней монографии [5]; в ней же содержится общий обзор проблематики и ссылки на другие обзоры и оригинальные работы, отражающие современное состояние исследований нейтронных звёзд.

## 1.1 Основные параметры нейтронной звезды

Для нейтронных звёзд, в отличие от всех прочих, большую роль играют эффекты общей теории относительности (ОТО). Поэтому модели нейтронных звёзд должны рассчитываться только в рамках ОТО (напр., [10]). Структура невращающихся звёзд определяется релятивистским уравнением гидростатического равновесия – уравнением Толмена – Оппенгеймера – Волкова (ТОВ) [11, 12]. Оно даёт очень хорошее приближение и для вращающихся нейтронных звёзд, за исключением тех, которые имеют миллисекундные периоды вращения. Наименьший возможный период вращения составляет 0,7 мс, но наименьший из наблюдавшихся на сегодня периодов составляет 1,396 мс [13], что соответствует «режиму медленного вращения», при котором эффекты вращения можно учесть по теории возмущений (см., напр., [5], гл. 6). Поправки, вносимые магнитным полем, пренебрежимо малы для крупномасштабной структуры нейтронной звезды, кроме полей  $B \gg 10^{16}$  Гс, которые пока не наблюдались. Эффекты, вызываемые известными сегодня магнитными полями  $B \lesssim 10^{14}$  Гс, могут быть существенны в оболочках, о чём пойдёт речь в главах 4–7. Решение уравнения ТОВ для заданного уравнения состояния вещества нейтронной звезды даёт семейство моделей структуры звезды, параметром которого является плотность  $\rho_c$  в центре звезды. Условие устойчивости, требующее, чтобы  $M(\rho_c)$  была возрастающей функцией, выполняется в определённом интервале звёздных масс и радиусов; в зависимости от используемого уравнения состояния теоретически наибольшая масса  $M_{\max}$  может составлять от 1,4 до 2,5  $M_{\odot}$ , а наименьшая –  $M_{\min} \sim 0,1 M_{\odot}$  (см., напр., [5], гл. 6). Для каждой звезды значимость эффектов ОТО определяется параметром компактности  $x_g = r_g/R$ , где

$$r_g = 2GM/c^2 \approx 2,95 M/M_{\odot} \text{ км} \quad (1.1)$$

– радиус Шварцшильда, или гравитационный радиус. Ускорение силы тяжести на поверхности звезды определяется равенством

$$g = GMR^{-2}(1 - x_g)^{-1/2} \approx 1,328 \times 10^{14} (1 - x_g)^{-1/2} (M/M_{\odot}) R_6^{-2} \text{ см с}^{-2}, \quad (1.2)$$

где  $R_6 \equiv R/(10 \text{ км})$ . Частота фотонов у поверхности в локально инерциальной системе отсчёта (обозначим эту частоту  $\omega_0$ ) при удалении от звезды претерпевает гравитационное красное смещение до величины  $\omega_{\infty}$  в соответствии с формулой

$$z_g \equiv \omega_0/\omega_{\infty} - 1 = (1 - x_g)^{-1/2} - 1 \quad (1.3)$$

Наряду с радиусом  $R$ , определяемым длиной экватора  $2\pi R$  в локально инерциальной системе отсчёта, часто вводят в рассмотрение «видимый радиус» для удалённого наблюдателя  $R_\infty = R(1 + z_g)$ .

*Канонической моделью* нейтронной звезды традиционно считается звезда с  $M = 1,4 M_\odot$  и  $R = 10$  км ( $R_\infty = 13$  км,  $g = 2,425 \times 10^{14}$  см с<sup>-2</sup>). Заметим, что сегодня наиболее детальные модели уравнений состояния, считающиеся наилучшими, предсказывают несколько меньшую компактность:  $R \approx 12$  км при  $M = 1,4 M_\odot$  (см., напр., [5], гл. 6).

## 1.2 Строение нейтронной звезды

В типичной нейтронной звезде можно выделить две основные качественно отличные области: ядро и оболочку. Вещество *ядра*, составляющее более 90% массы типичной нейтронной звезды, представляет наибольшую загадку, поскольку в нем атомные ядра под действием огромного давления, по существу, слились в одно гигантское ядро [14].

Часто различают внешнее и внутреннее ядро. *Внешнее ядро* нейтронной звезды обычно имеет толщину порядка нескольких километров и плотность вещества в диапазоне  $0,5\rho_0 \lesssim \rho \lesssim 2\rho_0$ . О веществе внешнего ядра существуют достаточно чёткие качественные теоретические представления (см., напр., главы 5 и 6 книги [5]). *Внутреннее ядро* занимает центральную область с  $\rho \gtrsim 2\rho_0$ , радиус которой может достигать до нескольких километров в достаточно массивных нейтронных звёздах ( $M \gtrsim \frac{3}{2} M_\odot$ ; в нейтронных звёздах меньшей массы плотность не достигает  $2\rho_0$ ). Состав и свойства вещества во внутреннем ядре нейтронной звезды неизвестны, так как результат их расчёта сильно зависит от используемого теоретического описания коллективных фундаментальных взаимодействий. Именно это делает нейтронные звёзды интересными объектами исследований для фундаментальной физики ядра и элементарных частиц, а не только для астрофизики. Известные теоретические модели допускают следующие гипотетические возможности:

1. гиперонизацию вещества – появление различных гиперонов (прежде всего  $\Lambda$ - и  $\Sigma^-$ -гиперонов);
2. пионную конденсацию – образование бозе-конденсата из коллективных возбуждений, имеющих свойства  $\pi$ -мезонов;
3. каонную конденсацию – образование аналогичного конденсата из К-мезонов;
4. деконфайнмент – фазовый переход к кварковой материи.

Последние три варианта, в отличие от первого, возможны не для всех современных теоретических моделей вещества сверхъядерной плотности, поэтому их часто называют *экзотическими*; обзор таких моделей дан, например, в главе 7 книги [5].

Согласно современным теоретическим представлениям, барионное вещество в ядре звезды является сверхтекучим. Сверхтекучесть уменьшает теплоёмкость вещества и скорость нейтринных реакций, однако приводит и к дополнительному нейтринному излучению при куперовском спаривании. Обзор этих эффектов и их влияния на скорость остывания нейтронной звезды дан в работе [15].

В *оболочке* звезды (рис. 1.1) вещество не столь необычно: в нём атомные ядра присутствуют раздельно. Тем не менее, это вещество тоже находится в экстремальных с точки зрения «земной» физики условиях, как правило, недостижимых в лаборатории. Последнее обстоятельство делает такое вещество весьма интересным объектом исследования с точки зрения физики плазмы. Не менее важно и то, что адекватная теоретическая модель оболочки необходима для правильной интерпретации характеристик исходящего от звезды электромагнитного излучения, а значит, и для изучения ядра нейтронной звезды посредством сравнения теоретических моделей с астрономическими наблюдениями.

## 1.3 Строение оболочек

### 1.3.1 Внутренняя кора

*Внутренняя кора* обычно имеет толщину  $\sim 1-2$  км. Её плотность растёт от значения  $\rho_{\text{drip}} \approx (4-6) \times 10^{11} \text{ г см}^{-3}$ , при котором нейтроны начинают «просачиваться» из ядер, до плотности  $\sim 0,5\rho_0$ , при которой атомные ядра сливаются в однородную массу. Во внутренней коре ядерное химическое равновесие по отношению к реакциям бета-захвата и бета-распада приводит к составу вещества, не встречающемуся в лабораторных условиях: это тяжёлые ядра с большим избытком нейтронов, погружённые в жидкость, состоящую из свободных нейтронов и электронов. Нейтроны в значительной части внутренней коры являются сверхтекучими: теоретические оценки показывают, что соответствующая критическая температура сверхтекучести, изменяясь с плотностью, составляет в значительной части коры несколько миллиардов градусов, что примерно на порядок выше, чем типичная кинетическая температура вещества во внутренней коре нейтронной звезды.

Давление во внутренней коре нейтронной звезды создаётся в основном вырожден-

ными нейтронами. В то же время, сверхтекучесть может приводить к подавлению их теплоёмкости, и как результат – к тому, что вклад атомных ядер в теплоёмкость внутренней коры становится определяющим. Ядра образуют кристаллическую решётку, поддерживаемую в основном силами кулоновского взаимодействия – кулоновский (или вигнеровский) кристалл. Поэтому адекватное описание их вклада можно получить путём рассмотрения газа коллективных колебательных возбуждений – фононов. Электроны, являясь релятивистскими и чрезвычайно вырожденными, не дают существенного вклада в теплоёмкость внутренней коры при не слишком низких температурах. Однако их вклад может стать определяющим, когда температура кулоновского кристалла падает намного ниже дебаевской температуры, что приводит к «вымораживанию» фононных возбуждений.

Электропроводность во внутренней коре нейтронной звезды обеспечивается в основном электронами. При этом существенным является как рассеяние электронов на фононах ионной кристаллической решётки, доминирующее при сравнительно высокой температуре, так и их рассеяние на дефектах кристаллической решётки и примесях, дающее остаточное сопротивление при низких температурах. Ионы (атомные ядра) не дают ощутимого вклада в электропроводность, будучи вмонтированными в кулоновскую кристаллическую решётку. В то же время теплопроводность обеспечивается как электронами (при этом основные механизмы рассеяния те же, что и для электропроводности, но вдобавок к ним могут быть существенными и электрон-электронные столкновения), так и фононами и нейтронами. При наличии дефектов и примесей решётки, затрудняющих электронный теплоперенос, фононы могут стать основными агентами передачи тепла [16]. Существенными переносчиками тепла во внутренней коре могут быть и нейтроны, особенно сверхтекучие [17].

### 1.3.2 Мантия

Между дном внутренней коры и ядром нейтронной звезды может находиться слой, названный в работе [18] *мантией*, где равновесные атомные ядра принимают экзотические формы. Мантия, если она существует, состоит из нескольких слоёв, содержащих такие фазы вещества, в которых атомные ядра близки по своей форме не к сфере, а к цилиндру (так называемая фаза «спагетти»), к плоскопараллельному слою (фаза «лазанья»), а также «инверсные» фазы, состоящие из ядерного вещества с вкраплёнными в него нейтронными цилиндрами («трубчатая» фаза) и шарами (фаза «швейцарский сыр»). В то время как шарообразные ядра образуют трёхмерную



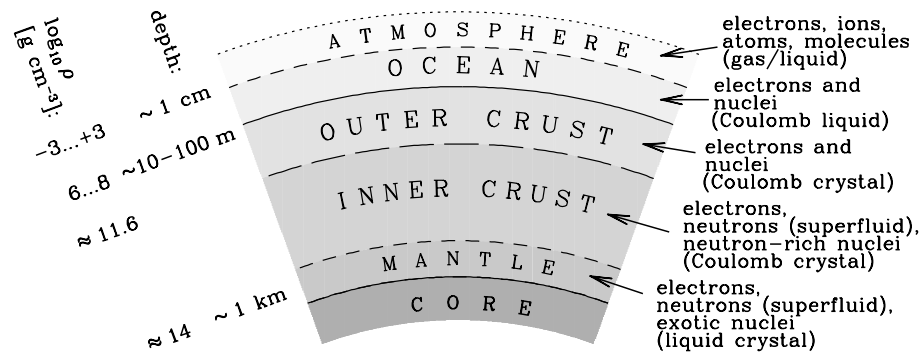


Рис. 1.1: Схематическая структура оболочек нейтронной звезды [5]. Снизу вверх: ядро, мантия, внутренняя кора, внешняя кора, океан, атмосфера. Справа указан состав этих слоёв, слева – характерные значения логарифма плотности и глубины от поверхности.

кристаллическую решётку, фазы вещества, содержащие цилиндрические или плоскопараллельные квазиядра, близки по своим свойствам к жидким кристаллам.

Наличие мантии предсказывается не всеми современными уравнениями состояния ядерной материи: для некоторых моделей такое состояние вещества оказывается энергетически невыгодным. Как показано в работе [19], в мантии могут оказаться разрешёнными прямые урка-процессы нейтринного излучения, невозможные в других оболочках нейтронной звезды и обладающие высокой интенсивностью. Поэтому наличие мантии может ускорить остывание нейтронной звезды и тем самым проявиться в наблюдениях.

### 1.3.3 Внешние оболочки

Внешние оболочки нейтронных звёзд имеют толщину в несколько сотен метров и состоят из электрон-ионной плазмы, причем почти везде (за исключением, возможно, наружного слоя толщиной в несколько метров, где плотность не превышает  $10^6$  г см<sup>-3</sup>), ионизация является полной, то есть ионы представляют собой атомные ядра, а свободные электроны сильно вырождены. При этом полное давление определяется, главным образом, давлением вырожденных электронов. При  $\rho \gtrsim 10^6$  г см<sup>-3</sup> электроны становятся релятивистскими (то есть их импульс Ферми  $p_F$  становится сравнимым с  $m_e c$ , где  $m_e$  – масса электрона, а  $c$  – скорость света в вакууме), а при  $\rho \gg 10^6$  г см<sup>-3</sup> – ультрарелятивистскими ( $p_F \gg m_e c$ ). При таких плотностях ионы образуют сильносвязанную кулоновскую жидкость (то есть жидкость, свойства которой регулируются в основном кулоновским взаимодействием между ионами) или кулоновский кристалл. Обычно бо́льшая часть внешней оболочки представляет со-

бою твёрдое тело, и поэтому часто её целиком называют *внешней корой*. В настоящей работе, однако, название «внешняя кора» зарезервировано исключительно за твёрдой внешней оболочкой.

В глубоких слоях внешних оболочек электронная энергия Ферми возрастает настолько, что ядра обогащаются нейтронами за счет бета-захватов, и наконец, при  $\rho = \rho_{\text{drip}}$ , где появляются свободные нейтроны, проходит граница между внешней и внутренней корой нейтронной звезды.

### 1.3.3a Внешняя кора

Внешняя кора нейтронной звезды имеет плотность, достигающую  $\rho_{\text{drip}}$ . Наружная граница внешней коры обычно располагается в точке кристаллизации кулоновской жидкости, из которой состоит океан нейтронной звезды. Положение этой точки определяется зависимостью температуры плавления кулоновского кристалла  $T_m$  от плотности. В зависимости от *тепловой структуры* звезды (то есть от изменения температуры с глубиной, в свою очередь зависящего от возраста и предыстории нейтронной звезды), такая точка плавления для типичной оболочки нейтронной звезды находится при плотности  $\rho_m \sim 10^6 - 10^9$  г см<sup>-3</sup>. Однако при наличии сверхсильного магнитного поля достаточно холодная нейтронная звезда может потерять атмосферу и океан (необходимые для этого условия будут конкретизированы в главе 5), и в таком случае внешняя граница коры совпадает с поверхностью звезды.

Вещество внешней коры представляет собой кристаллическую решётку, образованную атомными ядрами, погружённую в слабонеидеальный газ вырожденных электронов. В большей части коры электроны являются релятивистскими (то есть имеют скорости, близкие к скорости света  $c$ ).

### 1.3.3b Океан

Дно океана нейтронной звезды располагается в точке плавления, имеющей плотность  $\rho_m$ , а его внешняя граница довольно условна, так как в типичной нейтронной звезде океан переходит в атмосферу плавно, без границы раздела фаз. Исключение, как и в случае твёрдой коры, представляют нейтронные звёзды с достаточно сильным магнитным полем, которое может привести к отсутствию оптически толстой атмосферы и её замещению жидкой границей. В большей части океана вещество состоит из «голых» атомных ядер в окружении вырожденных электронов. В приповерхностных слоях океана, однако, ядра с достаточно большим зарядом могут

связывать часть электронов (как будет аргументировано в § 2.3, это происходит при  $\rho \ll \rho_{\text{rigid}} \approx 22Z^2A$ , где  $Z$  и  $A$  – зарядовое и массовое числа ядер). Поэтому в общем случае мы будем говорить о *ионах* в окружении электронов, подразумевая под ионами как полностью, так и частично ионизованные атомы.

Вещество океана представляет собой кулоновскую жидкость. В значительной части океана кулоновская жидкость является *сильносвязанной*, то есть характерная потенциальная энергия кулоновского взаимодействия ядер намного превышает их кинетическую энергию. В результате этого, одной из наиболее существенных проблем в теоретическом исследовании такого вещества становится адекватный учёт влияния микроскопических корреляций положений ионов на изучаемые макроскопические физические характеристики вещества.

### 1.3.3с Атмосфера

*Атмосфера* нейтронной звезды представляет собой тонкий слой плазмы, в котором формируется спектр теплового электромагнитного излучения. Спектр, диаграмму направленности и поляризацию излучения можно определить путём решения уравнения переноса излучения в атмосфере. Это излучение содержит ценную информацию о поверхностных слоях (об эффективной температуре поверхности, гравитационном ускорении, химическом составе, силе и геометрии магнитного поля), а также о массе и радиусе звезды. Геометрическая толщина атмосферы варьируется от нескольких миллиметров в относительно холодных нейтронных звёздах (с эффективной температурой поверхности  $T_{\text{eff}} \sim 10^{5,5}$  К) до десятков сантиметров в сравнительно горячих звёздах ( $T_{\text{eff}} \sim 10^{6,5}$  К). В большинстве случаев плотность в атмосфере нарастает с глубиной постепенно, без скачка, однако, как было указано выше, звёзды с очень низкой эффективной температурой или со сверхсильным магнитным полем могут иметь твердую или жидкую конденсированную поверхность.

Наиболее глубокие слои атмосферы (её «дно», определяемое как слой, в котором оптическая толща для большинства исходящих лучей достигает единицы) могут иметь плотность  $\rho$  от  $\sim 10^{-4}$  до  $\sim 10^6$  г см $^{-3}$ , в зависимости от магнитного поля  $B$ , температуры  $T$ , ускорения свободного падения  $g$  и химического состава поверхности.

Если поток излучения слишком силён, то давление излучения на вещество превышает силу тяжести, что делает атмосферу неустойчивой по отношению к истечению плазмы. В горячей немагнитной атмосфере, в которой давление излучения определяется томсоновским рассеянием, неустойчивость наступает тогда, когда светимость

$L$  превышает *эддингтоновский предел* [20]

$$L_{\text{Edd}} = 4\pi c G M m_p / \sigma_T \approx 1,3 \times 10^{38} (M/M_\odot) \text{ эрг с}^{-1}, \quad (1.4)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,

$$\sigma_T = \left( \frac{8\pi e^2}{m_e c^2} \right)^2 \quad (1.5)$$

– томсоновское сечение рассеяния,  $m_p$  – масса протона,  $m_e$  и  $(-e)$  – масса и заряд электрона. Здесь и далее используется традиционная для астрофизики система единиц СГС (нерационализованный).

Несмотря на то, что атмосферы нейтронных звёзд изучались многими исследователями на протяжении десятков лет, эти исследования далеки от завершения. Особенно это касается нейтронных звезд с сильным магнитным полем  $B \gtrsim 10^{11}$  Гс.

## 1.4 Магнитное поле и его эволюция

Большинство известных сегодня нейтронных звёзд обладают магнитными полями, недостижимыми в лаборатории, с типичными значениями на поверхности (см. § 1.6.3)  $B \sim 10^8 - 10^9$  Гс для миллисекундных пульсаров,  $B \sim 10^{10} - 10^{13}$  Гс для «обыкновенных» радиопулсаров [21],  $B \sim 10^{14}$  Гс для аномальных рентгеновских пульсаров (AXP – *anomalous X-ray pulsar*) и, согласно наиболее широко принятым сегодня моделям,  $B \sim 10^{14} - 10^{15}$  Гс для источников мягких повторяющихся гамма-всплесков (SGR – *soft gamma repeater*) [22, 23]. Напряжённость поля внутри звезды может быть ещё выше. Так, для объяснения энергетики AXP и SGR привлекаются магнитные поля, достигающие в ядре нейтронной звезды при её рождении значений  $B \sim 10^{16} - 10^{17}$  Гс (см. работу [24] и ссылки в ней). Теоретический предел, полученный численно, составляет  $\max(B) \sim 10^{18} - 10^{19}$  Гс [25], что согласуется с оценкой, основанной на теореме вириала [26, 27]. Как возникают эти поля, до сих пор достоверно не известно. Порядок величины магнитного поля нейтронной звезды  $B \sim 10^{12}$  Гс был предсказан В. Л. Гинзбургом в 1964 году (ещё до открытия пульсаров) на основе предположения о сохранении магнитного потока звезды-предшественницы сверхновой при её коллапсе [28]. Впоследствии предлагались различные теоретические модели генерации поля с участием дифференциального вращения, конвекции, магнито-вращательной неустойчивости и термомагнитных эффектов либо при взрыве и коллапсе сверхновой, либо в молодых нейтронных звёздах (см., например, обзор [29]). В частности,

согласно «модели  $\alpha$ - $\Omega$ -динамо» [30–32], ядро нейтронной звезды, рождённой с достаточно коротким (миллисекундным) периодом вращения, приобретает за счёт своего дифференциального вращения тороидальное магнитное поле до  $B \sim 10^{16}$  Гс, а при начальных периодах вращения  $\gtrsim 30$  мс магнитное поле пульсара создаётся за счёт конвекции. Однако каждая из предлагавшихся моделей сталкивается с определёнными трудностями при сопоставлении со всей совокупностью данных о нейтронных звёздах.

Электрические токи, поддерживающие магнитное поле звезды, могут протекать либо во внутренней коре, либо в ядре звезды, то есть там, где электропроводность достаточно высока, чтобы поле существенно не распадалось в течение времени, сопоставимого с возрастом известных пульсаров. Ещё в 1969 году было показано [33], что характерное время омического распада магнитного поля в ядре нейтронной звезды может превосходить возраст Вселенной. Если магнитное поле имеет источник в ядре звезды, то сверхпроводимость протонов в ядре должна привести к тому, что это поле существует в виде квантованных магнитных трубок – вихрей Абрикосова, имеющих микроскопические поперечные размеры.

В процессе эволюции нейтронной звезды её магнитное поле меняется. Эти изменения зависят от многих параметров и взаимосвязанных физических процессов (см., напр., статью [34] и ссылки в ней). Происходит омический распад поля, изменение его конфигурации вследствие холловского дрейфа, возможны пересоединения магнитных силовых линий при звездотрясениях. Термоэлектрические эффекты, а также существенная зависимость компонент тензоров теплопроводности, электропроводности и термоэлектрических коэффициентов плазмы от температуры и магнитного поля приводят к взаимозависимости магнитной и тепловой эволюции. Аккреция также может сильно влиять на магнитное поле вблизи поверхности.

Если же магнитное поле имеет своим источником вихри Абрикосова в ядре нейтронной звезды, то его эволюция во многом определяется их взаимодействием с другими составляющими ядра, в частности – с вихрями Фейнмана–Онзагера в нейтронной сверхтекучей жидкости [33, 35], а также условиями на границе ядра, то есть взаимодействием этих вихрей с веществом коры.

Итак, для теоретического изучения и моделирования процессов возникновения и эволюции магнитного поля нейтронных звёзд необходимо знать тензоры электропроводности и термоэлектрических коэффициентов. Их расчёт в оболочках нейтронных звёзд представлен в главах 3 и 5 настоящей работы.

## 1.5 Тепловая структура и остывание

Примерно через 20 секунд после своего рождения нейтронная звезда становится прозрачной для нейтринного излучения [36], уносящего энергию в мировое пространство и охлаждающего звезду. Вскоре после этого ядро звезды, имеющее высокую теплопроводность, становится изотермичным и остаётся таковым в течение всей последующей жизни звезды (за исключением, возможно, кратких промежутков времени после катастрофических фазовых переходов в ядре, предполагаемых некоторыми гипотетическими моделями). С учётом ОТО, в равновесии температура растёт к центру звезды пропорционально  $e^{-\Phi}$ , где  $\Phi$  – метрическая функция, определяемая гидростатической моделью звезды и связанная с временной компонентой метрического тензора  $g_{00} = e^{2\Phi}$ , уменьшающейся от поверхности к центру (см., напр., [5], § 6.1)<sup>3</sup>. Кора звезды поначалу остаётся более горячей, чем ядро. Волна охлаждения достигает поверхности звезды через 10–100 лет [37], после чего звезда остывает в квазистационарном режиме: распределение температуры в теплоизолирующей оболочке в каждый момент времени однозначно зависит от температуры в ядре. Заметим, что все наблюдаемые сегодня нейтронные звёзды имеют возраст не меньше нескольких веков. Следовательно, они находятся в квазистационарном режиме остывания при отсутствии быстрых процессов энерговыделения в оболочках. Процессами, нарушающими квазистационарность, может быть взрывное термоядерное горение аккрецированного вещества (см., напр., обзор [38]) или выделение энергии в коре при звездотрясениях (напр., [39, 40]).

Остывание в квазистационарном режиме, в свою очередь, делится на следующие основные стадии (см., напр., обзор [41]).

1. Стадия *нейтринного остывания* длится  $\sim 10^5$  лет. В этот промежуток времени ядро звезды остывает главным образом за счёт излучения нейтрино, выделяющихся в разнообразных физических реакциях, протекающих в ядре звезды. Всеобъемлющий обзор таких реакций дан в работе [46]. Главными из них являются несколько разновидностей (в зависимости от участвующих в них частиц) прямого (в случаях, когда он имеет место) и модифицированного урка-процессов, а также тормозного нейтринного излучения.

---

<sup>3</sup>Основание натуральных логарифмов мы обозначаем прямой буквой «e», в отличие, например, от элементарного заряда  $e$  и индекса  $e$ , обозначающего электрон, для которых мы используем наклонный шрифт.

2. Стадия *фотонного остывания* – завершающая. Она начинается при возрасте звезды  $t \gtrsim 10^5$  лет, когда реакции с выделением нейтрино (сильно зависящие от температуры) из-за понизившейся температуры ядра становятся несущественными по сравнению с остыванием за счёт переноса тепла через оболочки и его преобразования в электромагнитное излучение с поверхности (из атмосферы).

В качестве исходных данных для расчёта тепловой структуры и взаимосвязанных с ней тепловых потоков (как в квазистационарном, так и в динамическом режиме) необходимо знание теплопроводности в коре и океане звезды. Она будет рассмотрена в главах 3 (без учёта квантующего магнитного поля) и 5 (с его учётом).

В квазистационарном режиме температура возрастает монотонно от внешних слоёв атмосферы вглубь оболочки, пока не достигнет равновесного значения (обычно оно достигается во внешней коре). Это распределение – тепловая структура звезды – рассчитано в главе 6 настоящей работы.

### 1.5.1 Кривые остывания

Для каждой теоретической модели нейтронной звезды можно построить *кривую остывания* – зависимость полной тепловой фотонной светимости  $L_\gamma$  от времени  $t$ , прошедшего с момента рождения звезды (см., например, главу 11 книги [2] и более свежий обзор [41]). Зачастую вместо зависимости  $L_\gamma(t)$  удобнее рассматривать  $T_{\text{eff}}(t)$ , где  $T_{\text{eff}}$  – это интегральная эффективная поверхностная температура, которая определяется равенством

$$L_\gamma = 4\pi R^2 \sigma_{\text{SB}} T_{\text{eff}}^4, \quad (1.6)$$

где  $\sigma_{\text{SB}} = \pi^2 k_{\text{B}}^4 / (60 \hbar^3 c^2) = 5,67 \times 10^{-5}$  эрг см<sup>-2</sup> с<sup>-1</sup> К<sup>-4</sup> – постоянная Стефана – Больцмана, а  $k_{\text{B}} = 1,38065 \times 10^{-16}$  эрг К<sup>-1</sup> – постоянная Больцмана. Равенство (1.6) можно записать как  $L_{\gamma 33} = 0,712\,565 R_6^2 T_{\text{eff},6}^4$ , где  $L_{\gamma 33} \equiv L_\gamma / (10^{33} \text{ эрг с}^{-1})$ ,  $R_6 = R / (10 \text{ км})$  и  $T_{\text{eff},6} = T_{\text{eff}} / (10^6 \text{ К})$ .

Кривая остывания зависит от

1. массы звезды  $M$ ;
2. модели сверхплотного вещества в ядре звезды, определяющего уравнение состояния (а следовательно, «соотношение  $M - R$ » – связь между массой  $M$  и радиусом  $R$ ) и состав ядра (а следовательно, интенсивность нейтринного излучения из него при заданной массе);

3. свойств оболочек: (а) теплопроводности, определяющей  $L_\gamma$  при заданной температуре ядра звезды, (б) нейтринной светимости в коре, (в) наличия источников подогрева и их интенсивности.

В свою очередь, характерная теплопроводность и нейтринная светимость оболочек в каждый момент времени  $t$  (то есть при заданном моделью остывания распределении температуры  $T$  в оболочках) зависят от массы звезды  $M$ , её радиуса  $R$ , а также от магнитного поля  $\mathbf{B}$  (при этом существенным могут оказаться как значения магнитной индукции  $B$  в оболочках, так и конфигурация магнитных силовых линий).

### 1.5.2 Остывание с подогревом

Помимо процессов остывания, в нейтронной звезде действуют также процессы нагрева различной природы.

Самые мощные из таких процессов происходят в двойных системах с перетеканием вещества со звезды-компаньона на нейтронную звезду. При аккреции на нейтронную звезду выделяется гравитационная энергия, которая может составлять десятки процентов от массы покоя падающего вещества, соразмерно параметру компактности звезды. Значительная доля этой энергии излучается в аккреционном диске или (в случае аккреции на сильно замагниченную звезду) в аккреционной колонке и до звезды не доходит, однако другая часть выделяется при торможении падающей плазмы во внешней оболочке звезды и нагревает её. Кроме этого поверхностного нагрева, имеет место и более глубокий прогрев океана и коры благодаря выделению тепла в термоядерных реакциях [38], которые происходят при погружении лёгких аккрецировавших атомных ядер в толщу внешних оболочек нейтронной звезды. Ещё глубже тепло выделяется в пикноядерных реакциях, протекающих при погружении вещества коры и увеличении локального давления в нём под весом аккрецировавшей материи [47, 48].

Изолированные нейтронные звёзды также имеют внутренние источники нагрева различных типов (напр., [49]).

Во-первых, это тепло, выделяющееся при распаде магнитного поля звезды. При достаточно сильном магнитном поле такое тепловыделение может конкурировать с остыванием не только старых и холодных, но и молодых нейтронных звёзд. Наиболее изученная разновидность из этого класса источников подогрева – джоулево тепло, выделяющееся за счёт протекания в коре звезды токов, поддерживающих магнитное поле (см. статьи [50, 51] и ссылки в них). Возможны и другие механизмы – например,



тиринг-моды, возникающие при пересоединении магнитных силовых линий в коре [52].

Во-вторых, это тепло, выделяющееся при уже упомянутых выше звездотрясениях.

В-третьих, это «ротохимическое нагревание», происходящее за счёт реакций, протекающих в звезде при замедлении её вращения, неизбежном вследствие потерь углового момента, например, на магнито-дипольное излучение. Это замедление приводит к уменьшению центробежного потенциала и, соответственно, к увеличению локального давления и смещению химического равновесия, которое восстанавливают протекающие в звезде реакции, регулирующие концентрации частиц разных сортов. Из-за конечной скорости таких реакций восстановление равновесия происходит с некоторым запаздыванием и, следовательно, с некоторой диссипацией, которая происходит частично в виде дополнительного нейтринного излучения, а частично в виде тепла [53, 54].

## 1.6 Наблюдательные проявления свойств оболочек нейтронных звёзд

Нейтронные звёзды наблюдаются во всех диапазонах электромагнитного спектра. Большинство из них (на 2009 год – около 1800), как и 40 лет назад, наблюдаются как радиопульсары, которые подразделяются на обычные (с периодами  $P \sim 0,03 - 10$  с) и миллисекундные ( $P \lesssim 30$  мс). Полторы сотни известных нейтронных звёзд входят в состав двойных систем с аккрецией и проявляют себя главным образом рентгеновским излучением аккреционного диска, а также вспышками, возникающими вследствие взрывного термоядерного горения аккрецированного вещества во внешних слоях звезды. Некоторые из таких систем образуют рентгеновские транзиенты, у которых периоды активной аккреции (обычно в течение дней или недель) перемежаются с более длительными (обычно длительностью в несколько месяцев, а иногда – лет) «периодами спокойствия», когда регистрируется рентгеновское излучение нагретой поверхности звезды. Зарегистрировано и рентгеновское излучение от более чем ста изолированных нейтронных звёзд.

Значительная доля излучения изолированных нейтронных звёзд и рентгеновских транзиентов в спокойном состоянии, по-видимому, приходит с поверхности звезды. Для интерпретации такого излучения крайне важны свойства оболочек, участвующих в формировании спектра. И наоборот, сравнивая теоретические предсказания

с наблюдениями такого излучения, можно определить свойства оболочек и заодно проверить теоретические модели плотной замагниченной плазмы. В свою очередь, по свойствам оболочек можно сделать определённые выводы о параметрах звезды в целом и, как следствие, получить наблюдательные ограничения на модели сверхплотного вещества.

### 1.6.1 Изолированные нейтронные звёзды

Определяя  $L_\gamma$  и  $t$  для нейтронных звёзд из наблюдений и сравнивая с кривыми остывания, можно оценить параметры  $M$  и  $R$  и установить ограничения на теоретические модели сверхплотного вещества. Этот способ оценки параметров применим главным образом к *изолированным нейтронным звёздам*, так как для большинства нейтронных звёзд в двойных системах имеется дополнительный источник энергии – аккреция – и дополнительный (часто гораздо более мощный, чем  $L_\gamma$ ) источник рентгеновского излучения – аккреционный диск.

Возраст звезды  $t$  оценивается обычно либо по возрасту связанного с данной звездой остатка сверхновой, если таковой имеется (этот способ обычно более точен, но он применим только к небольшой доле нейтронных звёзд), либо, если звезда является пульсаром с измеренным периодом  $P$  и его производной по времени  $\dot{P}$ , то по характеристическому возрасту пульсара (§ 1.6.3).

Простейший способ оценки светимости – на основе наблюдаемого потока и расстояния до звезды. Однако этот способ ненадёжен из-за того, что в большинстве случаев тепловая светимость составляет лишь малую долю полной светимости звезды в электромагнитном диапазоне, которая обычно включает электромагнитное излучение, порождённое процессами, протекающими в магнитосфере звезды (в частности, движением заряженных частиц в магнитном поле и их столкновениями между собой и с поверхностью звезды). Этот способ ненадёжен ещё и потому, что расстояние до большинства нейтронных звёзд плохо известно.

Другой способ состоит в том, чтобы измерить спектр излучения, выделить из него тепловую составляющую и интерпретировать её при помощи модели формирования спектра на поверхности звезды. Этот способ также может быть ненадёжен по причине неоднозначного разделения рентгеновского спектра звезды на составляющие. Кроме того, конечный результат зависит от модели формирования спектра. Наиболее простая, но и наименее реалистичная модель – чернотельное излучение (планковский спектр). Её можно использовать как начальное грубое приближение.

Более реалистичные модели включают либо формирование излучения на конденсированной поверхности, либо перенос излучения в атмосфере звезды. Для осуществления такой «тонкой подгонки» необходимо детальное знание свойств самых внешних оболочек, и прежде всего атмосферы, а они опять-таки зависят от  $M$ ,  $R$  и  $B$ . Эти свойства будут рассмотрены в главах 2 и 5, а модели атмосфер с магнитным полем – в главе 7.

### 1.6.1a Изолированные нейтронные звёзды с подогревом

Как отмечено в § 1.5.2, нейтронные звёзды обладают внутренними источниками нагрева. В ряде случаев эти источники способны конкурировать с теплом, поставляемым на поверхность звезды из её ядра, и должны учитываться. К таким случаям относятся:

- очень старые нейтронные звёзды ( $t \gtrsim 10^6$  лет), для которых кривые остывания без учёта подогрева уходят в область низких температур  $T_{\text{eff}} \lesssim 10^5$  К;
- *магнитары* – сравнительно молодые ( $t \lesssim 10^4$  лет) нейтронные звёзды со сверхсильными магнитными полями, проявляющие себя в наблюдениях как аномальные рентгеновские пульсары (АХР) и источники мягких повторяющихся гамма-всплесков (SGR). Высокая рентгеновская светимость последних соответствует  $T_{\text{eff}} \gtrsim 10^{6,5}$  К, что нельзя объяснить «стандартной кривой остывания» [41], но может, согласно предположению К. Томпсона [55], подкреплённому недавними работами [50, 51, 56], обеспечиваться распадом магнитного поля, как мы уже отмечали в § 1.5.2 (см. далее § 6.5).

### 1.6.2 Нейтронные звёзды в двойных системах

Нейтронные звёзды наблюдаются в двойных системах с другими нейтронными звёздами, с белыми карликами и с обычными (невырожденными) звёздами. Если в такой двойной системе отсутствует перенос вещества со звезды-компаньона на нейтронную звезду, то нейтронная звезда в ней ведёт себя в принципе так же, как и изолированная. Измерение параметров орбиты позволяет получить дополнительную информацию о параметрах нейтронной звезды, но не открывает дополнительных возможностей для проявления её оболочек по сравнению с уже рассмотренными в § 1.6.1.

Другое дело, если вещество перетекает на нейтронную звезду. Выделяющаяся при этом энергия делает такую систему подчас весьма ярким источником рентгеновских лучей. Маломассивные рентгеновские двойные системы (LMXB – *low-mass*

*X-ray binary*), в которых компаньон – звезда-карлик (белый или красный) с массой  $\lesssim 2M_{\odot}$ , представляют здесь особый интерес, что обусловлено, в частности, сравнительно большим временем жизни таких звёздных систем.

### 1.6.2a Рентгеновские вспышки

Рентгеновские вспышки I типа в рентгеновских двойных системах, при которых рентгеновская светимость источника  $L_X$  может достигать эддингтоновской (1.4), объясняются, согласно [57, 58], взрывным термоядерным горением аккрецировавшего вещества на поверхности нейтронной звезды с относительно слабым магнитным полем  $B \lesssim 10^8 - 10^9$  Гс. Предпринимался ряд попыток моделирования спектра излучения этих вспышек с целью определения параметров нейтронной звезды – например, серия работ Н. Шапошникова и Л. Титарчука (статья [59] и ссылки в ней). При этом одновременно с массой, радиусом и расстоянием до объекта играют роль и могут быть оценены химический состав атмосферы и анизотропия формирующегося в ней излучения.

### 1.6.2b Мягкие рентгеновские транзиенты

В спектре некоторых мягких рентгеновских транзиентов в «спокойные» периоды удаётся выделить тепловую составляющую излучения от поверхности нейтронной звезды, входящей в состав системы. В таких случаях появляется возможность сравнить, как и для изолированных нейтронных звёзд, кривые остывания с наблюдениями. Различие состоит в том, что при этом необходимо учитывать энерговыделение за счёт аккреции. С одной стороны, это добавляет степень неопределённости в модель, но с другой – даёт возможность проверить теоретические представления о процессах аккреции на нейтронную звезду и термоядерных превращений аккрецировавшего вещества в её оболочках.

Кроме того, такие транзиенты предоставляют уникальную возможность напрямую протестировать свойства оболочек. Согласно модели [60], в спокойные периоды тепловое излучение обусловлено остыванием коры после глубокого прогрева при аккреции (см. § 1.5.2). На такое остывание не влияют детали строения и состава ядра, поэтому его анализ позволяет получить более непосредственную информацию о физике оболочек (их составе, эффективной теплопроводности и теплоёмкости коры, формировании спектра в атмосфере), а зная их, в свою очередь, – о макроскопических параметрах нейтронной звезды (в частности, её радиусе). Например, такие

исследования проводились для источников Aql X-1 [61, 62] и KS 1731–260 [63].

Особый интерес представляют *квазипостоянные транзиенты*, то есть такие, у которых периоды активности и спокойствия составляют несколько лет и более (на время написания данной работы известно три таких источника: KS 1731–260, MXB 1659–29 и AX J1754.2–2754 – см. статью [64] и ссылки в ней). В течение столь длительного периода активности кора нейтронной звезды успеваеет заметно нагреться, а в последующий период «спокойствия» она релаксирует к квазиравновесному состоянию, и поэтому в эволюции теплового спектра заключена информация о свойствах коры нейтронной звезды. Таким образом, анализ тепловой светимости такого объекта позволяет сделать выводы о теплоёмкости и эффективной теплопроводности коры, а также о квазиравновесном распределении тепла в коре в период активности, предшествовавший релаксации, и о равновесной светимости в спокойном состоянии. Из этих данных, в свою очередь, можно извлечь информацию и о параметрах звезды в целом.

### 1.6.3 Пульсары

Пульсирующее излучение, связанное с собственным вращением нейтронных звёзд, содержит важную дополнительную информацию, которую можно использовать для сравнения теории с наблюдениями. Так, одновременное измерение радиоизлучения на нескольких частотах позволяет по сдвигу фаз определить *меру дисперсии*, по которой приблизительно оценивается расстояние до пульсара (напр., [2], § 10.4; [65]). Измерение амплитуды пульсаций тепловой компоненты спектра позволяет получить представление о степени неоднородности распределения температуры по поверхности. У изолированных (не аккрецирующих<sup>4</sup>) пульсаров измерение периода пульсаций  $P$  и его производной по времени  $\dot{P}$  позволяет оценить порядок величины магнитного поля (точнее, его дипольной составляющей) и возраста звезды (напр., [5], с. 37):

$$B \sim 10^{19,5} \sqrt{P\dot{P}} \text{ Гс}, \quad t \sim t_{\text{PSR}} \equiv 0,5P/\dot{P}, \quad (1.7)$$

где  $t_{\text{PSR}}$  – так называемый *характеристический возраст* пульсара.

Одновременное измерение магнитного поля и возраста даёт возможность поставить ограничения на скорость распада магнитного поля звезды. Соответствующие

---

<sup>4</sup>Для аккрецирующих пульсаров такая оценка не имеет смысла, потому что период их вращения может определяться взаимодействием магнитного поля с аккреционным диском. В частности, вращение может ускоряться за счёт передачи углового момента с падающей материи на пульсар, и тогда  $\dot{P} < 0$ .

теоретические оценки сильно разнятся в зависимости от предположений о конфигурации поля в толще коры или в ядре (в зависимости от модели или от гипотезы о природе поля) и от закладываемой в модель электропроводности, которая, в свою очередь, сильно зависит от малоизвестного химического состава оболочек, а также от микроскопической структуры коры и от содержания в ней примесей и дефектов кристаллической решётки. Следовательно, наблюдения пульсаров помогают, в принципе, решить вопросы о составе и структуре оболочек, особенно внутренней коры, а также о природе сильного магнитного поля нейтронных звёзд и местонахождении поддерживающих его электрических токов. Для этого необходимо использовать достаточно точную теоретическую модель тензора электропроводности (главы 3 и 5 настоящей работы).

Наряду с радиоизлучением, рентгеновское излучение пульсаров также несёт важную информацию. В целом рентгеновский спектр пульсаров содержит как тепловую, так и нетепловую составляющие. Последняя может порождаться в магнитосфере пульсара, например, синхротронным излучением или обратным комптоновским рассеянием заряженных частиц, ускоренных до релятивистских энергий магнитосферными электромагнитными полями. Эта составляющая обычно описывается степенным спектром. Но в спектрах ряда пульсаров удаётся выделить и тепловую компоненту. Иногда она, в свою очередь, разделяется на «жёсткую» и «мягкую» составляющие. Первая из них предположительно соответствует излучению горячих *полярных шапок* пульсара, нагретых до температур  $\gtrsim 10^6$  К. Это те области, в которых магнитное поле на поверхности не сильно отклоняется от нормали. В модели дипольного поля [66] их радиус оценивается как

$$R_{\text{cap}} \approx \left( \frac{2\pi R^3}{cP} \right)^{1/2} \approx 0,145 R_6^{3/2} (P/1 \text{ с})^{-1/2} \text{ км.} \quad (1.8)$$

Вторая же составляющая соответствует излучению остальной, менее горячей поверхности, которое может отвечать тепловому потоку, проходящему через теплоизолирующую оболочку из ядра звезды или из её внутренней коры.

### 1.6.3а Обычные пульсары

«Обычными» считаются изолированные радиопульсары с периодами от нескольких десятков миллисекунд до нескольких секунд. Их характерное магнитное поле, определённое по формуле (1.7), составляет от нескольких гигагаусс до  $10^{14}$  Гс с типичными значениями  $B \sim 10^{11} - 10^{13}$  Гс, а характеристический возраст – от нескольких ве-

ков до  $10^{10}$  лет с типичными значениями  $t_{\text{PSR}} \sim 10^5 - 10^8$  лет [21]. У некоторых из них измерен рентгеновский спектр теплового излучения, и, таким образом, к ним применимы методы исследования с использованием кривых остывания, рассмотренные в § 1.6.1. При этом, в отличие от случая нейтронных звёзд без пульсаций, возможно использование характеристического возраста для оценки  $t$ , а оценка магнитного поля делает более определённым класс моделей тепловой структуры и, следовательно, сужает разброс возможных кривых остывания.

Очевидно, что для интерпретации наблюдений мягкой компоненты теплового спектра необходимо учитывать особенности формирования спектра излучения нагретой поверхности нейтронной звезды в сильном магнитном поле – в частности, в магнитной атмосфере (главы 5, 7).

### 1.6.3b Миллисекундные пульсары

Миллисекундные пульсары<sup>5</sup> имеют характерные  $B \sim 10^8 - 10^{10}$  Гс и возраст от десятков миллионов до сотен миллиардов лет с типичными значениями  $t_{\text{PSR}} \sim 10^9 - 10^{10}$  лет [21]. Нейтронные звёзды такого возраста слишком стары для того, чтобы их излучение могло объясняться на основе кривых остывания без подогрева. У некоторых изолированных миллисекундных пульсаров, видимых в рентгеновском диапазоне, из спектра удаётся выделить тепловую составляющую, обусловленную излучением горячих полярных шапок. Для миллисекундных пульсаров формулу (1.8) удобно записать в виде  $R_{\text{сар}} \approx R_6^{3/2} (P/21 \text{ мс})^{-1/2}$  км, откуда видно, что горячая область может покрывать значительную долю поверхности миллисекундного пульсара.

При интерпретации наблюдений теплового спектра миллисекундных пульсаров (см., напр., обзор [67]) могут быть полезны модели атмосфер нейтронных звёзд. Благодаря относительно слабым магнитным полям таких пульсаров, для этого в первом приближении подходят модели немагнитных атмосфер. Так, В. Е. Завлин и др. [68] использовали модели водородной и железной атмосфер нейтронной звезды при интерпретации рентгеновского спектра миллисекундного пульсара PSR J0437–4715.

### 1.6.3c Аномальные рентгеновские пульсары

Среди пульсаров есть немало таких, которые проявляют себя пульсирующим излучением в рентгеновской части спектра. Некоторые из них входят в состав двойных

---

<sup>5</sup>Исключение составляет PSR J0537–6910 с аномально высоким значением  $\dot{P}$ .

звёздных систем, обсуждавшихся в § 1.6.2. Очевидно, что рентгеновскими пульсарами являются и те только что обсуждавшиеся радиопульсары, у которых наблюдается тепловое излучение от горячих полярных шапок.

В отличие от этих «нормальных» рентгеновских пульсаров, *аномальные* (АХР) обладают необычно долгим периодом  $P \approx 6 - 12$  с и высокой светимостью  $L_X \sim 10^{33} - 10^{35}$  эрг  $\text{с}^{-1}$ , являясь при этом изолированными (см. обзоры [22, 23]). Их магнитные поля и характеристический возраст, оцененные по формуле (1.7), указывают на то, что эти объекты, возможно, являются магнитарами (см. § 1.6.1), так же как и источники SGR, с которыми они имеют много общего. Если справедливо это объяснение их наблюдательных свойств, то на них особенно большое влияние должны оказывать сверхсильные магнитные поля в оболочках. Это делает особенно актуальным построение моделей оболочек нейтронных звёзд со сверхсильными магнитными полями и в то же время открывает уникальную возможность проверки подобных моделей путём сравнения с наблюдениями.

Для полноты картины отметим, что выдвигалось и альтернативное объяснение свойств АХР, основанное на предположении, что они являются нейтронными звёздами с «нормальными» магнитными полями  $B \sim 10^{12}$  Гс, медленно аккрецирующими вещество из сопутствующего диска, оставшегося после взрыва сверхновой [69].



## Глава 2

# Равновесные свойства плазмы в оболочках нейтронных звёзд

В данной главе мы рассмотрим равновесные свойства плазмы в оболочках нейтронных звёзд без учёта влияния магнитного поля. Согласно теореме Бора–ван Лейвен, такое рассмотрение термодинамических свойств вещества применимо при условии, что магнитное поле не является квантующим<sup>1</sup>. Соответствующие количественные критерии, которые будут представлены в главе 4, показывают, что магнитное поле не влияет на термодинамику всех оболочек миллисекундных пульсаров ( $c B \lesssim 10^{10}$  Гс), всей коры нейтронных звёзд с полем  $B \lesssim 10^{12}$  Гс, а также внутренней коры нейтронных звёзд с полем  $B \lesssim 10^{14}$  Гс.

При изучении оболочек нейтронных звёзд следует учитывать кулоновское взаимодействие заряженных частиц (электронов и ионов) и сильное взаимодействие нуклонов. Роль последнего возрастает с ростом плотности. Мы уделим здесь основное внимание кулоновскому взаимодействию во внешних оболочках нейтронных звёзд, однако заметим, что многие результаты также применимы и для внутренних оболочек. А поскольку физические условия во внешних оболочках нейтронных звёзд сходны с условиями в недрах белых карликов и в ядрах красных гигантов, то результаты будут полезны также и для этих объектов.

---

<sup>1</sup>Эта теорема, доказанная независимо в диссертациях Нильса Бора (1911) и мадемуазель ван Лейвен (1919, [70]) сводится к утверждению, что свободная энергия классической системы точечных зарядов не зависит от магнитного поля. Она следует из того, что классический гамильтониан не изменится, если в нём произвести замену переменных интегрирования  $\mathbf{p}_i$  на  $\mathbf{p}_i - (q_i/c)\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)$ , где  $\mathbf{p}_i$  – импульсы частиц,  $\mathbf{r}_i$  – их координаты,  $q_i$  – заряды, а  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  – векторный потенциал магнитного поля.

Разделы 2.1 и 2.2 носят вводный характер: в § 2.1 описан метод минимизации свободной энергии, на основе которого получена основная часть последующих результатов, а в § 2.2 описаны параметры плазмы. В § 2.3 получен набор приближённых формул, охватывающий все внешние и внутренние полностью ионизованные оболочки нейтронных звёзд без сильного магнитного поля, а также в значительной мере применимый к другим плотным астрофизическим объектам – таким как белые карлики и ядра красных гигантов. Здесь и далее мы называем «полностью ионизованной» такую плазму, в которой практически отсутствуют связанные состояния ядер с электронами, а «частично ионизованной» – такую, где связанными состояниями нельзя пренебрегать (такая терминология традиционна в астрофизике, в отличие от физики плазмы, где под полной или частичной ионизацией чаще понимают отсутствие или наличие нейтральных атомов или молекул). В § 2.4 представлены два метода расчёта ионизационного равновесия и термодинамических функций в частично ионизованной плазме, содержащей в первом случае лёгкие, а во втором – тяжёлые ионы, и приведены некоторые результаты, полученные на основе этих методов. В § 2.5 рассмотрены модули упругости вещества в коре и мантии нейтронной звезды. В § 2.6 приведены унифицированные аналитические приближённые формулы для оценки уравнения состояния во всей внутренней области нейтронной звезды, включая её ядро и внутреннюю кору.

## 2.1 Метод минимизации свободной энергии

При рассмотрении равновесных свойств плазмы в оболочках нейтронных звёзд в данной работе мы опираемся на метод минимизации свободной энергии Гельмгольца, введённый в практику модельных расчётов уравнений состояния плазмы в статье [71]. Здесь и всюду в дальнейшем мы понимаем под уравнением состояния значение данного термина в широком смысле, то есть не только зависимость давления вещества от плотности, но и значения других термодинамических функций, которые могут понадобиться для моделирования звёздной структуры и эволюции. В отличие от некоторых других подходов, метод минимизации свободной энергии обеспечивает взаимную согласованность расчётов различных термодинамических функций – в частности, выполнение соотношений Максвелла. Метод состоит в конструировании свободной энергии  $F(V, T, \{N_j\})$ , где  $\{N_j\}$  – набор чисел различных частиц, составляющих плазму, в объёме  $V$ , и в нахождении минимума  $F$  при фиксированном  $V$  с учётом стехиометрических связей: например, если в системе может протекать реак-

ция вида  $A \rightleftharpoons B + C$ , то в равновесии должно выполняться соотношение

$$\partial F / \partial N_A = \partial F / \partial N_B + \partial F / \partial N_C. \quad (2.1)$$

Как хорошо известно [72], если свободная энергия задана как функция  $V$  и  $T$ , то все прочие термодинамические функции можно получить её дифференцированием. Давление  $P$ , внутренняя энергия  $U$  и энтропия  $S$  задаются первыми производными:

$$P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, \{N_j\}}, \quad U = \left( \frac{\partial(F/T)}{\partial(1/T)} \right)_{V, \{N_j\}}, \quad S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, \{N_j\}}. \quad (2.2)$$

Функции второго порядка получают дифференцированием функций (2.2). В частности, при астрофизическом моделировании важную роль играют логарифмические производные давления по плотности и температуре –

$$\chi_T = (\partial \ln P / \partial \ln T)_V, \quad \chi_\rho = -(\partial \ln P / \partial \ln V)_T, \quad (2.3)$$

– теплоёмкости при фиксированном объёме и при фиксированном давлении –

$$C_V = (\partial S / \partial \ln T)_V, \quad C_P = (\partial S / \partial \ln T)_P, \quad (2.4)$$

– а также адиабатический градиент температуры

$$\nabla_{\text{ad}} = (\partial \log T / \partial \log P)_S. \quad (2.5)$$

В принципе, все термодинамические функции второго порядка можно получить из  $\chi_T$ ,  $\chi_\rho$  и  $C_V$  на основе соотношений Максвелла. В частности,

$$C_P = C_V + \frac{PV}{T} \frac{\chi_T^2}{\chi_\rho}, \quad \nabla_{\text{ad}} = \frac{\chi_T}{\chi_T^2 + \chi_\rho C_V T / (PV)}. \quad (2.6)$$

Принципиальная трудность состоит в том, что во многих практически важных случаях  $F$  не известна в явном виде, а её отыскание требует либо построения приближённых моделей, либо сложных численных расчётов. В технических и особенно астрофизических приложениях, где требуется знание уравнения состояния в широком диапазоне параметров плазмы, практически невозможно осуществлять подобные численные расчёты в каждой требуемой точке. В данной главе развиты приближённые методы вычисления свободной энергии и, на их основе, всех необходимых термодинамических функций плазмы, максимально согласованные с современным состоянием теории и, в частности, с имеющимися в литературе результатами численного моделирования из первых принципов. В следующем параграфе мы введём основные параметры плазмы, а далее последовательно рассмотрим её термодинамические функции в различных приближениях, справедливых при разных соотношениях между этими параметрами, выполняющихся в различных подболочках нейтронных звёзд.

## 2.2 Параметры плазмы

### 2.2.1 Общие параметры

Пусть  $n_e$  – концентрация электронов, а  $n_j$  – концентрация ионов сортов  $j = 1, 2, \dots$  с зарядами  $Z_j e$  и массами  $m_{\text{ion}}^{(j)} = A_j m_u$ , где  $m_u = 1,6605 \times 10^{-24}$  г – атомная единица массы,  $e$  – элементарный заряд. Индекс  $j$  нумерует как разные химические элементы, присутствующие в смеси, так и ионы разных стадий ионизации одного и того же элемента. Полная концентрация атомных ядер (ионов) равна  $n_{\text{ion}} = \sum_j n_j$ . Электронейтральность предполагает

$$n_e = \langle Z \rangle n_{\text{ion}}. \quad (2.7)$$

Здесь и далее угловые скобки без индексов,  $\langle \dots \rangle$ , обозначают усреднение по сортам ионов  $j$ :

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{n_{\text{ion}}} \sum_j n_j f_j. \quad (2.8)$$

В случаях, когда рассматривается только один сорт ионов, мы будем опускать угловые скобки и либо опускать индекс  $j$ , либо заменять его на индекс «ion» или «i», обозначающий ионы.

Полная концентрация барионов в оболочках нейтронных звёзд,  $n_b$ , приблизительно равна  $A' n_{\text{ion}}$ , где  $A' \equiv \langle A \rangle + A''$ , а  $A''$  – это число свободных нейтронов, приходящихся на одно атомное ядро:  $A'' n_{\text{ion}} = n_n (1 - w)$ , где  $n_n$  – локальная концентрация свободных нейтронов (очевидно, что во внешних оболочках  $A'' = 0$  и  $A' = \langle A \rangle$ , но во внутренних оболочках  $A' > \langle A \rangle$ ).

Вообще говоря, массовая плотность релятивистских объектов определяется как  $\rho = \mathcal{E}/c^2$ , где  $\mathcal{E}$  – полная плотность энергии. Однако в оболочках нейтронных звёзд достаточно точным является приближение  $\rho \approx m_u n_b$ .

При достаточно низкой плотности или высокой температуре равновесный состав вещества включает позитроны и фотоны в количествах, которые могут повлиять на термодинамические свойства. Для простоты мы будем пренебрегать их вкладом, так как он несущественен для большинства рассматриваемых в данной работе задач. При необходимости вклад позитронов может быть легко учтён на основе нижеприведённых формул для электронов путём замены в них химического потенциала электронов  $\mu_e$  на химический потенциал позитронов, в равновесии равный  $-2m_e c^2 - \mu_e$ , а вклад фотонного газа даётся формулой для его свободной энергии

$$F_{\text{rad}} = -(4\sigma_{\text{SB}}/3c) VT^4. \quad (2.9)$$

## 2.2.2 Электроны

Состояние электронного газа в термодинамическом равновесии определяется концентрацией электронов  $n_e$  и температурой  $T$ . В физике плазмы вместо  $n_e$  часто вводят безразмерный параметр плотности  $r_s = a_e/a_B$ , где  $a_B$  – борковский радиус, а  $a_e = (\frac{4}{3}\pi n_e)^{-1/3}$ . Параметр  $r_s$  легко оценить из соотношения  $r_s = 1,1723 n_{24}^{-1/3}$ , где  $n_{24} \equiv n_e/10^{24} \text{ см}^{-3}$ , или  $r_s = (\rho_{0s}/\rho)^{1/3}$ , где  $\rho_{0s} = 2,6752 (A'/\langle Z \rangle) \text{ г см}^{-3}$ . В астрофизике вместо  $r_s$  бывает удобно ввести *параметр релятивизма*

$$x_r \equiv \frac{p_F}{m_e c} \approx 1,00884 \left( \frac{\rho_6 \langle Z \rangle}{A'} \right)^{1/3} \approx 0,014005 r_s^{-1}, \quad (2.10)$$

где  $p_F = \hbar k_F = \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3}$  – импульс Ферми, а  $\rho_6 \equiv \rho/10^6 \text{ г см}^{-3}$  – массовая плотность в тоннах на миллилитр. Импульсу  $p_F$  соответствует кинетическая энергия Ферми  $\epsilon_F = c \sqrt{(m_e c)^2 + p_F^2} - m_e c^2$ , равная химическому потенциалу  $\mu_e$  при  $T \rightarrow 0$ , и температура Ферми  $T_F \equiv \epsilon_F/k_B = T_r (\gamma_r - 1)$ , где  $T_r \equiv m_e c^2/k_B = 5,93 \times 10^9 \text{ К}$  – релятивистская единица температуры, а  $\gamma_r \equiv \sqrt{1 + x_r^2}$  – лоренц-фактор электронов на поверхности Ферми. Если  $x_r \ll 1$ , то  $T_F \approx 1,163 \times 10^6 r_s^{-2} \text{ К}$ . Эффекты специальной теории относительности контролируются параметром  $x_r$  в вырожденной плазме (при  $T \ll T_F$ ) и параметром  $t_r \equiv T/T_r$  в невырожденной плазме (при  $T \gg T_F$ ).

*Параметр невырожденности* определяется как

$$\theta \equiv T/T_F. \quad (2.11)$$

В нерелятивистском случае ( $x_r \ll 1$ ) он равен  $\theta = 0,543 r_s/\Gamma_e = 3,411 837 (a_e/\lambda_e)^2$ . Здесь введены ещё два параметра:

$$\Gamma_e = \frac{e^2}{a_e k_B T} \approx \frac{22,75}{T_6} \left( \rho_6 \frac{\langle Z \rangle}{A'} \right)^{1/3}, \quad (2.12)$$

где  $T_6 \equiv T/10^6 \text{ К}$ , характеризует кулоновское взаимодействие между невырожденными электронами, а

$$\lambda_e = \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m_e k_B T} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

– это тепловая длина волны де Бройля. В противоположном, ультрарелятивистском, случае ( $x_r \gg 1$ ) имеем  $\theta = (263 \Gamma_e)^{-1}$ . Другим удобным параметром, характеризующим вырождение, является отношение

$$\chi_e \equiv \frac{\mu_e}{k_B T}. \quad (2.14)$$

Бывает также полезно ввести электронную плазменную температуру  $T_{pe}$ , соответствующую энергии  $\hbar\omega_{pe}$ :

$$T_{pe} = \frac{\hbar\omega_{pe}}{k_B} \approx 3,3 \times 10^8 x_r \sqrt{x_r/\gamma_r} \text{ К}, \quad \hbar\omega_{pe} \approx 28,8 \left( \frac{\rho}{1 \text{ г см}^{-3}} \frac{\langle Z \rangle}{A'\gamma_r} \right)^{1/2} \text{ эВ}. \quad (2.15)$$

Здесь

$$\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_e / m_e^*)^{1/2} \quad (2.16)$$

– *плазменная частота* электронов, типичная для их коллективных колебаний, а  $m_e^* \equiv m_e \gamma_r$  – эффективная динамическая масса электрона на поверхности Ферми. Электромагнитные колебания с круговой частотой  $\omega < \omega_{pe}$  не могут свободно распространяться в немагнитной плазме, а значит, тепловой спектр звезды формируется в основном в той области, где  $T \gtrsim T_{pe}$ .

В дальнейшем нам понадобятся величины, характеризующие отклик электронного газа на кулоновское воздействие. Соответствующие параметры – это радиус электронного экранирования  $r_e$  и обратный ему волновой вектор Томаса–Ферми  $k_{TF}$ :

$$k_{TF} = r_e^{-1} = (4\pi e^2 \partial n_e / \partial \mu_e)^{1/2}. \quad (2.17)$$

В невырожденном газе ( $T \gg T_F$ )  $\partial n_e / \partial \mu_e = n_e / (k_B T)$ , поэтому  $r_e \approx a_e / \sqrt{3\Gamma_e}$ . В противоположном предельном случае сильно вырожденного газа ( $T \ll T_F$ ) имеем

$$k_{TF} = 2 \sqrt{\alpha_f \gamma_r / (\pi x_r)} k_F = 0,185 a_e^{-1} \sqrt{\gamma_r / x_r}, \quad (2.18)$$

где  $\alpha_f = e^2 / (\hbar c) = 1/136,037$  – постоянная тонкой структуры.

### 2.2.3 Ионы

В оболочках нейтронных звёзд ионы всегда являются нерелятивистскими, поэтому только этот случай мы и будем рассматривать. Кулоновское взаимодействие ионов сорта  $j$  характеризуется параметром

$$\Gamma_j = \Gamma_e Z_j^{5/3} = \frac{(Z_j e)^2}{a_{\text{ion}}^{(j)} k_B T}, \quad (2.19)$$

где

$$a_{\text{ion}}^{(j)} = a_e Z_j^{1/3} \quad (2.20)$$

называется *радиусом ионной сферы*. Другой характерный параметр длины – это тепловая длина волны ионов сорта  $j$ ,

$$\lambda_j = \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m_j k_B T} \right)^{1/2}, \quad (2.21)$$

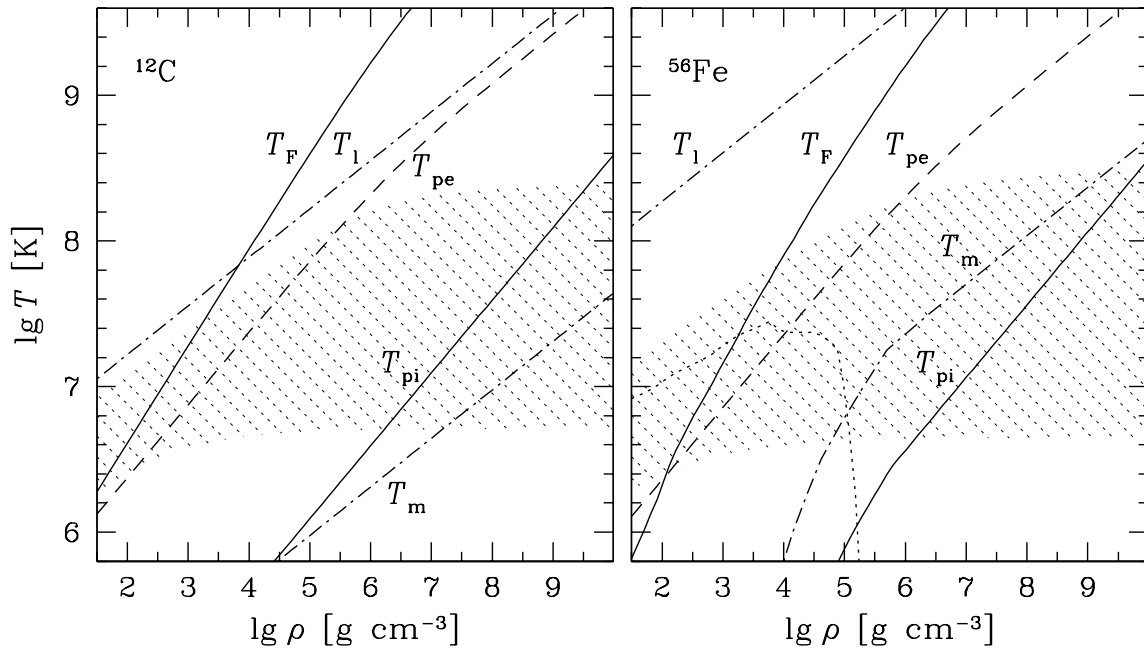


Рис. 2.1: Различные характерные температуры в зависимости от плотности для внешних оболочек нейтронной звезды, состоящих из углерода (слева) и железа (справа) [5]. Показаны электронная температура Ферми  $T_F$ , электронная ( $T_{pe}$ ) и ионная ( $T_{pi}$ ) плазменные температуры, примерная температура плавного перехода газ–жидкость  $T_l$  и температура плавления ионного кристалла  $T_m$ . Точками затемнены области, соответствующие типичным характерным плотностям и температурам остывающих нейтронных звёзд среднего возраста ( $t \sim 10^4 - 10^6$  лет). Нижняя левая область на правом рисунке, отделённая пунктирной кривой, соответствует той области, где электрон-ионное взаимодействие не может считаться слабым и происходит образование связанных состояний.

аналогичная  $\lambda_e$ . В многокомпонентной плазме сила кулоновской связи характеризуется средним параметром

$$\Gamma = \Gamma_e \langle Z^{5/3} \rangle. \quad (2.22)$$

Этот параметр определяет, в частности, агрегатное состояние вещества: при  $\Gamma \ll 1$  ионы образуют классический больцмановский газ; с ростом  $\Gamma$  при увеличении плотности или понижении температуры до  $T \approx T_l$ , где  $T_l$  отвечает значению  $\Gamma = 1$ , газ постепенно приобретает свойства жидкости: при дальнейшем росте  $\Gamma$  происходит фазовый переход кулоновской жидкости в кулоновский кристалл (при температуре  $T = T_m$ , где  $T_m$  соответствует  $\Gamma = \Gamma_m$ ; см. § 2.3.5).

В газовой фазе ионное экранирование характеризуется дебаевским радиусом  $r_D$  или обратным ему числом  $q_D$ :

$$r_D = q_D^{-1} = \left[ \frac{4\pi}{k_B T} \sum_j n_j (Z_j e)^2 \right]^{-1/2}, \quad (2.23)$$

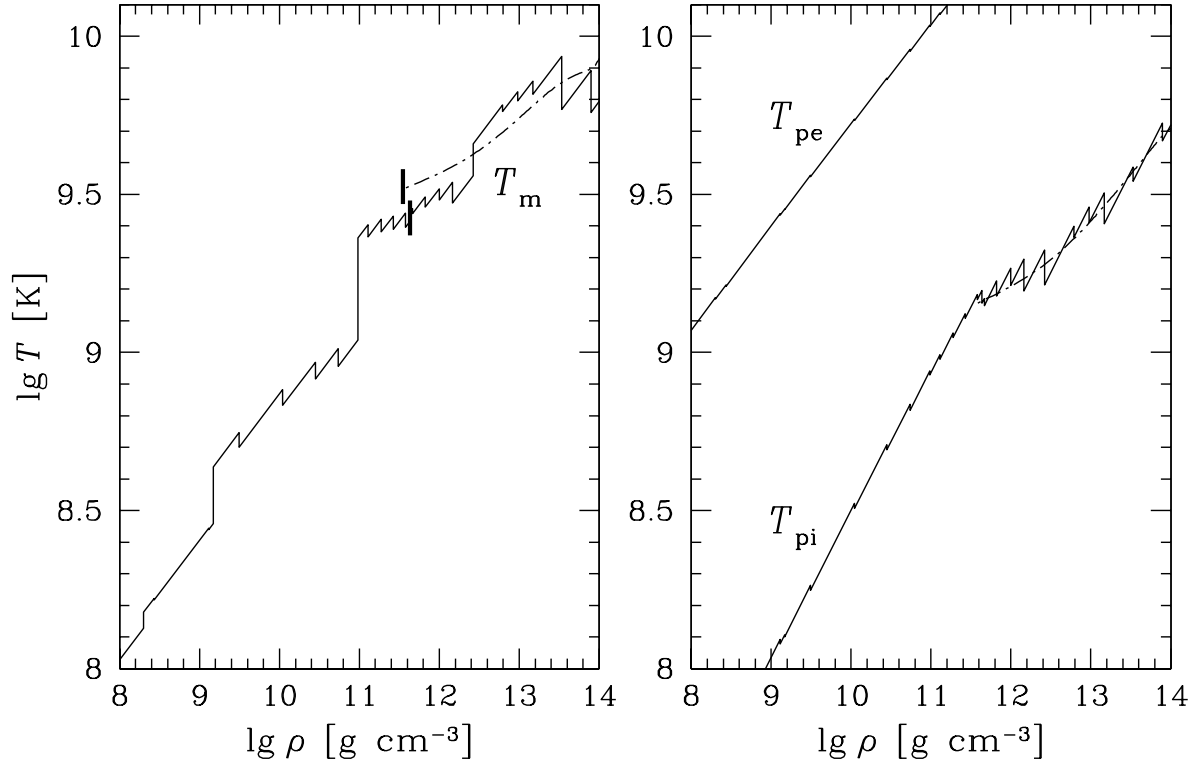


Рис. 2.2: Температура плавления (слева) и плазменная температура (справа) в коре нейтронной звезды в основном состоянии, в зависимости от плотности [5]. Скачки на кривых соответствуют границам между слоями, содержащими разные атомные ядра. Жирные вертикальные отрезки на левом рисунке показывают положение границы между внешней и внутренней корой при плотности  $\rho_{\text{drip}}$ . Штрихпунктирные кривые соответствуют уравнению состояния SLy [74] для внутренней коры, в котором фазовые скачки сглажены.

– а суммарное плазменное экранирование – волновым числом

$$k_s = (q_D^2 + k_{\text{TF}}^2)^{1/2}. \quad (2.24)$$

Влияние квантовых эффектов на динамику и термодинамику ионов становится определяющим при  $T \ll T_{\text{pi}}$ , где

$$T_{\text{pi}} \equiv \frac{\hbar \omega_{\text{pi}}}{k_B} \approx 7,832 \times 10^6 \left( \frac{\rho_6}{A'} \left\langle \frac{Z^2}{A} \right\rangle \right)^{1/2} \text{ К} \quad (2.25)$$

– ионная плазменная температура, а

$$\omega_{\text{pi}} = (4\pi e^2 n_{\text{ion}} \langle Z^2/m_{\text{ion}} \rangle)^{1/2} \quad (2.26)$$

– ионная плазменная частота. Квантовый ионный параметр равен  $\eta \equiv T_{\text{pi}}/T$ . В однокомпонентной плазме ионов (ОСР – *one-component plasma*) можно записать

$$\eta = \Gamma \sqrt{3/R_S}, \quad (2.27)$$



где  $R_S = a_{\text{ion}} m_{\text{ion}} (Ze)^2 / \hbar^2 = r_s (m_{\text{ion}} / m_e) Z^{7/3}$  – ионный параметр плотности.

Ход введённых в данном разделе характерных температур в зависимости от плотности для углеродной и железной плазмы во внешних оболочках нейтронных звёзд показан на рис. 2.1, а для вещества внешних и внутренних оболочек звезды в основном состоянии (состав взят согласно классической модели Нежеля–Вотрена [75]) – на рис. 2.2.

### 2.3 Полностью ионизованная кулоновская плазма

Большая часть оболочек нейтронных звёзд полностью ионизована. Режим полной ионизации определяется требованием, чтобы характерное расстояние между ионами  $a_{\text{ion}}$  было мало по сравнению с томас-фермиевским радиусом атомного остова,  $r_a \sim a_B / Z^{1/3}$ , что эквивалентно условию  $\rho \gg \rho_{\text{eip}} = (m_u / a_B^3) AZ \approx 11 AZ \text{ г см}^{-3}$ . При  $\rho \gg \rho_{\text{eip}}$  во внешних оболочках нейтронной звезды применима *модель электрон-ионной плазмы*, в которой рассматриваются точечные ионы в электронной жидкости. В общем случае электронная жидкость является сжимаемой, а ионы и электроны взаимодействуют посредством кулоновских сил, и поэтому являются коррелированными. Кулоновские корреляции ионов между собой, ионов с электронами и электронов друг с другом, как правило, намного различаются по своей силе, поэтому имеет смысл изучать их последовательно на основе разложения свободной энергии вида

$$F = F_{\text{id}}^{(i)} + F_{\text{id}}^{(e)} + F_{\text{ii}} + F_{\text{ie}} + F_{\text{ee}}. \quad (2.28)$$

Здесь  $F_{\text{id}}^{(i)}$  и  $F_{\text{id}}^{(e)}$  – свободные энергии идеального больцмановского газа ионов и ферми-газа электронов, соответственно, без учёта корреляций; в  $F_{\text{ii}}$  включены кулоновские взаимодействия между ионами без учёта их корреляций с электронами, но с учётом кулоновской энергии их взаимодействия с «несжимаемым» электронным фоном, обеспечивающим электронейтральность плазмы;  $F_{\text{ie}}$  включает взаимодействия между ионами и *поляризуемым* электронным фоном, связанные с *отклонениями* от приближения несжимаемого фона; и, наконец, член  $F_{\text{ee}}$  учитывает обменно-корреляционные взаимодействия в электронной подсистеме. Последние три слагаемых в сумме дают вклад в свободную энергию за счёт взаимодействий

$$F_{\text{ex}} = F_{\text{ii}} + F_{\text{ie}} + F_{\text{ee}}. \quad (2.29)$$

Разложение (2.28) индуцирует соответствующие разложения других термодина-

Таблица 2.1: Составляющие давления по порядку величины в уравнении (2.30) для вещества, состоящего из сильно вырожденных электронов и точечных сильно взаимодействующих ионов. Параметр  $\alpha_B = \alpha_f \gamma_r / x_r$  является малым при  $\rho \gg 1$  г см<sup>-3</sup>.

$P_{\text{part}}$	$ P_{\text{part}}/P $	Комментарий
$P_{\text{id}}^{(e)}$	$\approx 1$	идеальный электронный газ (главный вклад)
$P_{ee}$	$\lesssim \alpha_B$	обменно-корреляционные поправки в электронном газе
$P_{\text{id}}^{(i)}$	$\sim \alpha_B Z^{2/3} / \Gamma$	вклад идеального газа ионов ( $\sim \theta / Z$ )
$P_{ii}$	$\sim \alpha_B Z^{2/3}$	кулоновские корреляции между ионами
$P_{ie}$	$\sim \alpha_B^2 Z^{4/3}$	электронная поляризация

мических функций. В частности, давление предстаёт в виде

$$P = P_{\text{id}}^{(i)} + P_{\text{id}}^{(e)} + P_{ee} + P_{ii} + P_{ie}. \quad (2.30)$$

Таблица 2.1 даёт представление о характерных соотношениях по порядку величины между разными слагаемыми в сильно вырожденной плазме. Соответствующие вклады во внутреннюю энергию имеют те же порядки малости, что и вклады в давление, однако вклады в функции второго порядка могут ранжироваться по-иному (например, как будет показано ниже, теплоёмкость кулоновского кристалла может определяться не электронами, а ионами).

В слабо вырожденной плазме иерархия вкладов, приведённая в таблице 2.1, нарушается: разные слагаемые могут стать сравнимыми по величине.

Если плотность настолько велика, что среднее расстояние между электронами намного меньше радиуса К-оболочки атома, или (что равнозначно) притяжение электрона к ядру намного меньше электронной энергии Ферми, то удовлетворительным является приближение «жёсткого», или «несжимаемого», электронного фона. Эти условия выполняются при  $\rho \gg \rho_{\text{rigid}}$ , где  $\rho_{\text{rigid}} = 22 Z^2 A$  г см<sup>-3</sup> [5]. В §§ 2.3.1–2.3.5 мы будем предполагать их выполненными и пренебрегать взаимодействиями электронов с ионами и друг с другом. Различные способы учёта таких взаимодействий будут затем рассмотрены в §§ 2.3.6–2.3.8.

### 2.3.1 Идеальный электронный газ

Свободная энергия идеального электронного газа может быть получена из общего термодинамического соотношения

$$F_{\text{id}}^{(e)} = \mu_e N_e - P_{\text{id}}^{(e)} V, \quad (2.31)$$

а давление  $P_{\text{id}}^{(e)}$  и концентрация электронов  $n_e$ , в свою очередь, выражаются через  $\mu_e$  и  $T$  как

$$P_{\text{id}}^{(e)} = 2k_B T \int \ln \left[ 1 + \exp \left( \frac{\mu_e - \epsilon_e}{k_B T} \right) \right] \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{k_B T}{\lambda_e^3} \left[ I_{3/2}(\chi_e, t_r) + \frac{t_r}{2} I_{5/2}(\chi_e, t_r) \right], \quad (2.32)$$

$$n_e = 2 \int \frac{1}{\exp[(\epsilon_e - \mu_e)/k_B T] + 1} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4}{\sqrt{\pi} \lambda_e^3} \left[ I_{1/2}(\chi_e, t_r) + t_r I_{3/2}(\chi_e, t_r) \right], \quad (2.33)$$

где  $\epsilon_e = c \sqrt{(m_e c)^2 + p^2} - m_e c^2$  – кинетическая энергия электрона с импульсом  $p$ , а

$$I_\nu(\chi_e, \tau) \equiv \int_0^\infty \frac{x^\nu (1 + \tau x/2)^{1/2}}{\exp(x - \chi) + 1} dx \quad (2.34)$$

– интегралы Ферми–Дирака. Внутренняя энергия равна

$$U_{\text{id}}^{(e)} = \frac{4k_B T}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda_e^3} \left[ I_{3/2}(\chi, t_r) + t_r I_{5/2}(\chi, t_r) \right]. \quad (2.35)$$

Поскольку уравнение состояния исчерпывающе описывается при помощи функций Ферми–Дирака, то казалось бы, что в дополнительном его изучении нет необходимости. Однако на практике при вычислениях термодинамических функций электронного газа нередки ситуации, когда происходит потеря точности за счёт округления и малости некоторых частных производных, а вычисление интегралов Ферми–Дирака с точностью, которая могла бы это предотвратить, не только нетривиально, но и, ввиду больших затрат численных ресурсов, неприемлемо для астрофизических приложений, в которых требуются массивованные расчёты уравнения состояния.

Один из путей преодоления этой трудности – создание подробных таблиц и интерполяция по ним при астрофизических расчётах. Следует отметить, что интерполяция сама по себе – тоже нетривиальная задача, поскольку требуются специальные методы, чтобы при ней не нарушалась термодинамическая самосогласованность интерполированных функций. Такой подход реализовал Д. К. Надёжин [76], а недавно на современном уровне вычислительной техники – Ф. Тиммес и др. в работах [77, 78], первая из которых посвящена разработке компьютерной программы для вычисления термодинамических функций идеального электронного газа с наивысшей возможной точностью, а вторая – для самосогласованной интерполяции полученных данных.

Альтернативный подход состоит в создании и использовании асимптотических и приближённых выражений. Аналитические выражения для давления и внутренней энергии полностью вырожденного релятивистского электронного газа были впервые получены Я. Б. Френкелем [79]. Разложения термодинамических функций по чётным степеням температуры при  $\theta \ll 1$  были выведены А. Зоммерфельдом и С. Чандрасекаром [80]. Различные приближения и интерполяции конструировались в десятках работ, среди которых стоит отметить широко использовавшуюся статью [81] и монографию [82]. В статье Блиникова с соавторами [83] перечислены все такие работы и дан обзор приближений, полученных авторами.

В статье [84] из многообразия аппроксимаций [83] выбран минимальный набор, достаточный для описания интегралов Ферми–Дирака, входящих в уравнения (2.32)–(2.35), и на этой основе создана программа для численного расчёта термодинамических функций первого порядка для электронного газа. Эта программа модифицирована в статье [85], где, в частности, реализован расчёт термодинамических функций второго порядка на основе аналитического дифференцирования свободной энергии и использовано описанное ниже разложение релятивистских интегралов Ферми–Дирака по нерелятивистским, что значительно уменьшило погрешность вычислений в вырожденной области.

### 2.3.1a Приближённые формулы для интегралов Ферми–Дирака

Приближения, о которых идёт речь, при  $\chi_e \leq 14$  можно представить в виде

$$I_{k+1/2}(\chi, t_r) = \sum_{i=1}^5 c_i^{(k)} \frac{\left(1 + \chi_i^{(k)} t_r / 2\right)^{1/2}}{\exp(-\chi_i^{(k)}) + \exp(-\chi)} \quad \text{при } \chi \leq 0,6, \quad (2.36)$$

$$I_{k+1/2}(\chi, t_r) = \sum_{i=1}^5 \left[ h_i x_i^k \frac{\chi^{k+3/2} (1 + \chi x_i t_r / 2)^{1/2}}{1 + \exp(\chi x_i - \chi)} v_i (\xi_i + \chi)^{k+1/2} (1 + (\xi_i + \chi) t_r / 2)^{1/2} \right] \quad \text{при } 0,6 < \chi \leq 14, \quad (2.37)$$

а входящие сюда числовые коэффициенты приведены в Табл. 2.2.

При  $\chi_e \geq 14$  используется разложение Зоммерфельда (см. [80, 86])

$$\int_0^\infty \frac{f(\epsilon) d\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/\tau} + 1} = \int_0^\mu f(\epsilon) d\epsilon + \sum_{n=1}^\infty \frac{|B_{2n}|}{(2n)!} (2\pi\tau)^{2n} (1 - 2^{1-2n}) \frac{d^{2n-1} f(\mu)}{d\mu^{2n-1}}, \quad (2.38)$$

где  $B_{2n}$  – числа Бернулли, что даёт

$$I_\nu(\chi_e, t_r) = \frac{1}{\sqrt{2} t_r^{\nu+1}} \left[ \mathcal{I}_\nu^{(0)}(\tilde{\mu}) + \frac{\pi^2}{6} t_r^2 \mathcal{I}_\nu^{(2)}(\tilde{\mu}) + \frac{7\pi^4}{360} t_r^4 \mathcal{I}_\nu^{(4)}(\tilde{\mu}) + \dots \right], \quad (2.39)$$

Таблица 2.2: Параметры уравнений (2.36) и (2.37) (степени 10 даны в квадратных скобках).

$i$	1	2	3	4	5
$c_i^{(0)}$	0,370 450 57	0,412 584 37	0,097 779 82	5,373 4153 [-3]	3,8746281 [-5]
$c_i^{(1)}$	0,396 031 09	0,694 687 95	0,223 227 60	1,526 2934 [-2]	1,308 1939 [-4]
$c_i^{(2)}$	0,769 346 19	1,789 1437	0,707 549 74	5,675 5672 [-2]	5,557 1480 [-4]
$\chi_i^{(0)}$	0,431 398 81	1,759 7537	4,104 4654	7,746 7038	13,457 678
$\chi_i^{(1)}$	0,817 631 76	2,4723339	5,116 0061	9,044 1465	15,049 882
$\chi_i^{(2)}$	1,255 8461	3,2070406	6,123 9082	10,316 126	16,597 079
$x_i$	0,072 653 51	0,2694608	0,533 122	0,786 8801	0,956 9313
$\xi_i$	0,263 560 32	1,413 4031	3,596 4258	7,085 8100	12,640 801
$h_i$	0,038 187 35	0,125 6732	0,198 6308	0,197 6334	0,106 5420
$v_i$	0,295 058 69	0,320 648 56	0,073 915 57	3,608 7389 [-3]	2,336 9894 [-5]

где мы определили  $\tilde{\mu} = \chi_e t_r = \mu_e / m_e c^2$ ,

$$\mathcal{I}_\nu^{(0)}(\epsilon) = \int_0^\epsilon \mathcal{I}_\nu^{(1)}(\epsilon') d\epsilon' = \int_0^{x_0} \left( \sqrt{1+x^2} - 1 \right)^{\nu-1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \mathcal{I}_\nu^{(n+1)}(\tilde{\mu}) = \frac{d\mathcal{I}_\nu^{(n)}(\tilde{\mu})}{d\tilde{\mu}}, \quad (2.40)$$

$\mathcal{I}_\nu^{(1)}(\epsilon) = \epsilon^\nu \sqrt{2+\epsilon}$ ,  $x_0 \equiv \sqrt{\tilde{\mu}(2+\tilde{\mu})}$  и  $\gamma_0 \equiv \sqrt{1+x_0^2} = 1 + \tilde{\mu}$  (если  $\tilde{\mu} = \tilde{\epsilon}_F \equiv \epsilon_F / (m_e c^2)$ , то  $x_0 = x_r$  и  $\gamma_0 = \gamma_r$ ). В частности,

$$\mathcal{I}_{1/2}^{(0)}(\tilde{\mu}) = [x_0 \gamma_0 - \ln(x_0 + \gamma_0)]/2, \quad (2.41)$$

$$\mathcal{I}_{3/2}^{(0)}(\tilde{\mu}) = x_0^3/3 - \mathcal{I}_{1/2}^{(0)}(\tilde{\mu}), \quad (2.42)$$

$$\mathcal{I}_{5/2}^{(0)}(\tilde{\mu}) = x_0^3 \gamma_0 / 4 - 2x_0^3 / 3 + 1,25 \mathcal{I}_{1/2}^{(0)}(\tilde{\mu}). \quad (2.43)$$

При  $\tilde{\mu} \ll 1$  в выражении (2.39) и соответствующих частных производных происходит численная потеря точности из-за компенсации слагаемых разного знака. Например, уравнения (2.41)–(2.43) при  $x_0 \ll 1$  переходят в  $\mathcal{I}_\nu^{(0)}(\tilde{\mu}) \approx 2^{1/2-\nu} x_0^{4\nu+1} / (4\nu+1)$ . В этом случае мы восстанавливаем точность при помощи разложения

$$I_\nu(\chi, \tau) = I_\nu^{\text{nr}}(\chi) + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!! t_r^{m+1}}{4^{m+1} m!} I_{\nu+m+1}^{\text{nr}}(\chi), \quad (2.44)$$

где вместо  $(2m-1)!! \equiv \prod_{k=1}^m (2k-1)$  следует подставить 1 при  $m=0$ , а

$$I_\nu^{\text{nr}}(\chi) = \int_0^\infty \frac{x^\nu dx}{e^{x-\chi} + 1} = \frac{\chi^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{\pi^2}{6} \nu \chi^{\nu-1} + \frac{7\pi^4}{360} \nu(\nu-1)(\nu-2) \chi^{\nu-3} + O(\chi^{\nu-5}) \quad (2.45)$$

Таблица 2.3: Параметры уравнения (2.47).

$l$	$a_l^{(1)}$	$b_l^{(1)}$	$a_l^{(2)}$	$b_l^{(2)}$
0	19 992,668 808 33	17 718,041 404 88	-0,01 277 060 388 085	0,009 745 794 806 288
1	5702,479 099 336	-2014,785 161 019	0,07 187 946 804 945	0,05 485 432 756 838
2	661,013 284 3877	91,303 553 927 17	-0,4 262 314 235 106	-0,3 299 466 243 260
3	38,188 381 294 86	-1,670 718 177 489	0,4 997 559 426 872	0,4 077 841 975 923
4	1	...	-1,285 579 118 012	-1,145 531 476 975
5	...	...	-0,3 930 805 454 272	-0,06 067 091 689 181
6	...	...	1	...

– это нерелятивистские интегралы Ферми. Достаточная гладкость и точность приближений для  $I_\nu(\chi_e, \tau)$  с  $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2},$  и  $\frac{5}{2}$  достигается использованием уравнений (2.44) и (2.45) при  $\chi_e \geq 14$  и  $\tilde{\mu} < 0,1$  с удержанием в (2.44) членов до  $m = 3$ .

### 2.3.1b Уравнение состояния как функция плотности

Приведённые формулы позволяют вычислить термодинамические функции электронного газа в зависимости от  $T$  и  $\mu_e$ . На практике часто нужно знать их как функции  $T$  и  $\rho$ . Этого можно достичь путём численного обращения уравнения (2.33), но удобнее пользоваться аналитическими формулами. В нерелятивистской области (при  $\mu_e \ll m_e c^2$  и  $T \ll T_r$ ) действует формула

$$\chi_e = X_{1/2} \left( \frac{2}{3} \theta^{-3/2} \right), \quad (2.46)$$

где  $X_{1/2}$  – функция, обратная к  $I_{1/2}$ . Для этой обратной функции имеется высоко-точная аналитическая аппроксимация [87]

$$X_{1/2}(z) = \begin{cases} \ln(z R_{43}^{(1)}(z)) & \text{при } z < 4 \\ z^{2/3} R_{65}^{(2)}(z^{-2/3}) & \text{при } z \geq 4 \end{cases}, \quad \text{где } R_{m_n k_n}^{(n)}(x) \equiv \frac{\sum_{l=0}^{m_n} a_l^{(n)} x^l}{\sum_{l=0}^{k_n} b_l^{(n)} x^l}, \quad (2.47)$$

а коэффициенты  $a_l^{(n)}$  и  $b_l^{(n)}$  приведены в Табл. 2.3.

Точность нерелятивистских формул быстро убывает когда  $T$  начинает превышать  $10^7$  К. Для произвольной степени релятивизма мы построили аппроксимационное выражение [84]

$$\chi_e = \chi_{\text{nonrel}} - \frac{3}{2} \ln \left[ 1 + \frac{t_r (1 + q_1 \sqrt{t_r} + q_2 q_3 t_r)}{[1 + t_r / (2\theta)](1 + q_2 t_r)} \right]. \quad (2.48)$$

Здесь  $\chi_{\text{nonrel}}$  даётся нерелятивистской формулой (2.46), а коэффициенты  $q_i$  являются функциями параметра невырожденности  $\theta$ :

$$q_1 = \frac{3}{2e^\theta - 2}, \quad q_2 = 12 + 8\theta^{-3/2}, \quad (2.49)$$

$$q_3 = \frac{2}{\pi^{1/3}} - \frac{e^{-\theta} + 1,612e^\theta}{6,192\theta^{0,0944}e^{-\theta} + 5,535\theta^{0,698}e^\theta}. \quad (2.50)$$

Относительная ошибка  $\delta\chi_e/\chi_e$  обращается в бесконечность при  $\chi_e = 0$ . Но так как термодинамические функции выражаются через  $\chi_e$  при посредстве теплового усреднения (типа уравнения (2.34)), естественной мерой ошибки аппроксимации становится  $\delta\chi_e/\max(|\chi_e|, 1)$ . Определённая таким образом, относительная погрешность нерелятивистской аппроксимации (2.47) не превышает  $5 \times 10^{-9}$ ,  $6 \times 10^{-7}$  и  $5 \times 10^{-5}$  для  $X_{1/2}(z)$ ,  $X'_{1/2}(z)$  и  $X''_{1/2}(z)$ , соответственно, а ошибка релятивистской формулы (2.48) лежит в пределах 0,4% (достигается в интервале  $0,7 < \theta < 1,5$  при  $T > T_r$ ) и не превышает 0,2% при  $T < T_r$ . Другой мерой погрешности может быть различие величин  $n_e$ , рассчитанных в соответствии с (2.33) по точным и приближённым значениям  $\mu_e$ . Это различие не превышает 0,4% при  $T > T_r$  и 0,1% при  $T \leq T_r$ .

После того как найден химический потенциал как функция плотности, термодинамические функции второго порядка вычисляются на основе соотношений вида

$$\left(\frac{\partial f(\chi_e, T)}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{\chi_e} - \left(\frac{\partial f}{\partial \chi_e}\right)_T \frac{(\partial n_e/\partial T)_{\chi_e}}{(\partial n_e/\partial \chi_e)_T}, \quad (2.51)$$

$$\left(\frac{\partial f(\chi_e, T)}{\partial V}\right)_T = -\frac{n_e}{V} \left(\frac{\partial f}{\partial n_e}\right)_T = -\frac{n_e}{V} \frac{(\partial f/\partial \chi_e)_T}{(\partial n_e/\partial \chi_e)_T}. \quad (2.52)$$

При  $\chi \gg 1$  можно использовать разложение Зоммерфельда. Чтобы вычислить химический потенциал при заданной плотности с точностью до  $\sim \chi_e^{-2}$ , достаточно подставить (2.39) в (2.33), использовать приближение

$$\mathcal{I}_\nu^{(n)}(\tilde{\mu}) \approx \mathcal{I}_\nu^{(n)}(\tilde{\epsilon}_F) + \mathcal{I}_\nu^{(n+1)}(\tilde{\epsilon}_F)(\tilde{\mu} - \tilde{\epsilon}_F) \quad (2.53)$$

и пренебречь слагаемыми, содержащими  $(\tilde{\mu} - \tilde{\epsilon}_F)t_r^2$ . Тогда

$$\Delta\tilde{\epsilon}_F \equiv \tilde{\epsilon}_F - \tilde{\mu} \approx \frac{\pi^2 t_r^2}{6\tilde{\epsilon}_F} \frac{1 + 2x_r^2}{\gamma_r(1 + \gamma_r)}, \quad (2.54)$$

так что свободная энергия при  $T \ll T_F$  может быть записана как  $F_{\text{id}}^{(e)} \approx F_0^{(e)} + \Delta F$ , где

$$F_0^{(e)} = \frac{P_r V}{8\pi^2} \left[ x_r (1 + 2x_r^2) \gamma_r - \ln(x_r + \gamma_r) \right] - N_e m_e c^2 \quad (2.55)$$

– это предел  $F_{\text{id}}^{(e)}$  при  $T \rightarrow 0$  [79] за вычетом энергии покоя  $N_e m_e c^2$ ,  $P_r \equiv m_e c^2 (m_e c / \hbar)^3 = 1,4218 \times 10^{25}$  дин см $^{-2}$  – релятивистская единица давления, а температурная поправка низшего порядка равна

$$\Delta F = -T S_{\text{id}}^{(e)} / 2 = -P_r V x_r \gamma_r t_r^2 / 6. \quad (2.56)$$

Соответственно,  $P_{\text{id}}^{(e)} \approx P_0^{(e)} + \Delta P$ , где

$$P_0^{(e)} = \frac{P_r}{8\pi^2} \left[ x_r \left( \frac{2}{3} x_r^2 - 1 \right) \gamma_r + \ln(x_r + \gamma_r) \right] \quad (2.57)$$

и  $\Delta P = (P_r/18) t_r^2 x_r (2 + x_r^2) / \gamma_r$ . В таком случае  $\chi_\rho^{(e)} \approx P_r x_r^5 / (9\pi^2 \gamma_r P_{\text{id}}^{(e)})$ ,

$$\chi_T^{(e)} \approx 2\Delta P / P_{\text{id}}^{(e)}, \quad C_V^{(e)} \approx \pi^2 k_B N_e \gamma_r t_r / x_r^2. \quad (2.58)$$

Чтобы минимизировать численные разрывы при переходе от аппроксимации при  $\chi_e < 14$  к разложению Зоммерфельда при  $\chi_e > 14$ , мы умножаем правые части (2.56) и (2.58) на эмпирические поправочные факторы  $(1 + \Delta\tilde{\epsilon}_F / \tilde{\epsilon}_F)^{-1}$  и  $[1 + (4 - 2x_r / \gamma_r) \Delta\tilde{\epsilon}_F / \tilde{\epsilon}_F]^{-1}$ , соответственно.

При  $x_r < 10^{-5}$  мы заменяем уравнения (2.55) и (2.57) их нерелятивистскими пределами  $F_{\text{id}}^{(e)}(T=0)/V = P_r x_r^5 / 10\pi^2$  и  $P_0^{(e)} = P_r x_r^5 / 15\pi^2 \propto n_e^{5/3}$ . В противоположном предельном случае  $x_r \gg 1$  имеем  $P_0^{(e)} = P_r x_r^4 / 12\pi^2 \propto n_e^{4/3}$ . Оба предела можно записать в единой форме:

$$P_0^{(e)} = \frac{P_r x_r^{3\chi_\rho}}{9\chi_\rho \pi^2}, \quad (2.59)$$

где  $\chi_\rho = 5/3$  для нерелятивистских и  $4/3$  для ультрарелятивистских электронов.

## 2.3.2 Ионная кулоновская жидкость

### 2.3.2а Идеальная составляющая свободной энергии

Принято разделять свободную энергию кулоновской жидкости на составляющую, описывающую бoльцмановский газ ионов, и слагаемое, описывающее кулоновское взаимодействие, как в уравнении (2.28). В данном параграфе мы будем рассматривать однокомпонентную ионную плазму на несжимаемом фоне – ОСР (ионные смеси будут рассмотрены в § 2.3.9). В этом случае

$$F_{\text{id}}^{(i)} = N_{\text{ion}} k_B T \left[ \ln(n_{\text{ion}} \lambda_{\text{ion}}^3 / g_{\text{spin}}^{(i)}) - 1 \right], \quad (2.60)$$

где  $g_{\text{spin}}^{(i)}$  – мультипликативность иона по спину. Соответственно,  $U_{\text{id}}^{(i)} = \frac{3}{2} N_{\text{ion}} k_B T$ ,  $P_{\text{id}}^{(i)} = n_{\text{ion}} k_B T$ ,  $C_{V,\text{id}}^{(i)} = \frac{3}{2} N_{\text{ion}} k_B$  и  $\chi_{T,\text{id}}^{(i)} = \chi_{\rho,\text{id}}^{(i)} = 1$ .



Уравнение (2.60) для ОСР можно записать через безразмерные параметры (§ 2.2) как

$$\frac{F_{\text{id}}^{(i)}}{N_{\text{ion}}k_{\text{B}}T} = 3 \ln \eta - \frac{3}{2} \ln \Gamma - \frac{1}{2} \ln \frac{6}{\pi} - \ln g_{\text{spin}}^{(i)} - 1. \quad (2.61)$$

### 2.3.2b Кулоновская составляющая

Слагаемое, отвечающее за кулоновское взаимодействие, параметризуется величиной  $\Gamma$ :  $F_{\text{ii}}/N_{\text{ion}}k_{\text{B}}T = f_{\text{ii}}(\Gamma)$ . В пределе малых  $\Gamma$  (слабая кулоновская связь) применимо приближение Дебая–Хюккеля (напр., [72]). Но уже при  $\Gamma \gtrsim 0,01$  отклонения от этого приближения превышают несколько процентов и быстро растут с ростом  $\Gamma$ . При  $\Gamma \lesssim 0,3$  эти отклонения хорошо описываются аналитическими поправками к формуле Дебая–Хюккеля, выведенными Абе [88] и Коэном и Мерфи [89]. При  $\Gamma > 1$  функция  $f_{\text{ii}}(\Gamma)$  может быть получена только путём вычислений на ЭВМ, для которых обычно используют гиперцепное (HNC – *hypernetted chain*) приближение или моделирование по методу Монте-Карло (см., напр., обзор [90]). Наиболее точные результаты получены Ж.-М. Кайолем [91] при  $1 \leq \Gamma \leq 190$ ; близкие результаты получены также в [92–94]. При  $\Gamma < 1$  моделирование по методу Монте-Карло трудоёмко, и в этом случае мы опираемся на расчёты в гиперцепном приближении [84, 94–96].

В статье [95] получена аналитическая формула, описывающая все вышеперечисленные результаты в пределах их численной погрешности и, таким образом, применимая при любых значениях параметра  $\Gamma$  (в классической жидкости, то есть при  $T \gg T_{\text{pi}}$ ). Для внутренней энергии имеем

$$u_{\text{ii}} \equiv \frac{U_{\text{ii}}}{k_{\text{B}}TN_{\text{ion}}} = \Gamma^{3/2} \left( \frac{A_1}{\sqrt{A_2 + \Gamma}} + \frac{A_3}{1 + \Gamma} \right) + \frac{B_1 \Gamma^2}{B_2 + \Gamma} + \frac{B_3 \Gamma^2}{B_4 + \Gamma^2}, \quad (2.62)$$

где  $A_1 = -0,907347$ ,  $A_2 = 0,62849$ ,  $B_1 = 0,0045$ ,  $B_2 = 170$ ,  $B_3 = -8,4 \times 10^{-5}$ ,  $B_4 = 0,0037$ ,  $A_3 = -\sqrt{3}/2 - A_1/\sqrt{A_2}$ . При этом формула Дебая–Хюккеля при  $\Gamma \rightarrow 0$  воспроизводится точно, а результаты Кайоля – в пределах численного разброса ( $< 0,01\%$ ; см. рис. 2.3). Так как  $F_{\text{ii}} \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$ , то

$$F_{\text{ii}}(\Gamma, r_s) = \int_0^\Gamma \frac{U_{\text{ii}}(\Gamma')}{\Gamma'} d\Gamma', \quad (2.63)$$

что даёт

$$\begin{aligned} f_{\text{ii}} = & A_1 \left[ \sqrt{\Gamma(A_2 + \Gamma)} - A_2 \ln \left( \sqrt{\Gamma/A_2} + \sqrt{1 + \Gamma/A_2} \right) \right] + \\ & + 2A_3 \left[ \sqrt{\Gamma} - \arctg \sqrt{\Gamma} \right] + B_1 \left[ \Gamma - B_2 \ln \left( 1 + \frac{\Gamma}{B_2} \right) \right] + \frac{B_3}{2} \ln \left( 1 + \frac{\Gamma^2}{B_4} \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

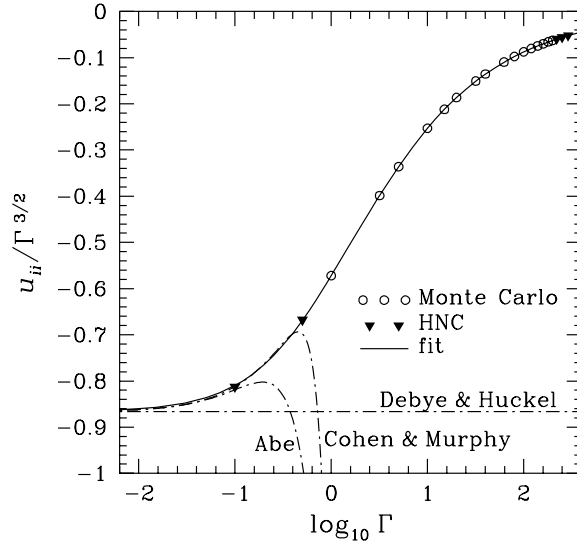


Рис. 2.3: Сравнение аналитической формулы (2.62) с асимптотиками Дебая–Хюккеля, Абе и Коэна–Мерфи при малых  $\Gamma$ , а также с результатами расчётов методами Монте-Карло (MC) и HNC.

с погрешностью не более 0,02% при любых  $\Gamma$ , а дифференцированием находим  $P_{ii} = U_{ii}/(3V)$  и

$$c_{V,ii} \equiv \frac{C_{V,ii}}{N_{\text{ion}}k_B} = \frac{\Gamma^{3/2}}{2} \left( -\frac{A_1 A_2}{(A_2 + \Gamma)^{3/2}} + \frac{A_3 (\Gamma - 1)}{(1 + \Gamma)^2} \right) - \frac{B_1 B_2 \Gamma^2}{(B_2 + \Gamma)^2} + \frac{B_3 (\Gamma^4 - B_4 \Gamma^2)}{(B_4 + \Gamma^2)^2}. \quad (2.65)$$

### 2.3.2с Квантовые поправки

Условие применимости формул (2.62)–(2.65) –  $T \gg T_{pi}$  – можно ослабить до  $T \gtrsim T_{pi}$ , если добавить квантовые поправки, получаемые из вигнеровского разложения по степеням  $\hbar^2$  [97] ([72]). Первая поправка к  $f_{ii}$  равна [98]

$$f_q^{(2)} = \eta^2/24, \quad (2.66)$$

где  $\eta = T_{pi}/T$ . Поправку следующего порядка  $\propto \hbar^4$ , вычисленную в [99], можно записать в виде

$$f_q^{(4)} \approx \left( -2,085 \times 10^{-4} - \frac{2,411 \times 10^{-4}}{\Gamma^{1/2}} - \frac{0,001288}{\Gamma} + \frac{1,353 \times 10^{-4}}{\Gamma^{3/2}} - \frac{0,002476}{\Gamma^2} - \frac{0,00276}{\Gamma^{5/2}} \right) \eta^4. \quad (2.67)$$

Таблица 2.4: Параметры кулоновских кристаллов – постоянная Маделунга  $C_0$ , моменты частоты  $u_p$  и значение  $\bar{l} = \langle \ln(\omega_{\mathbf{k}s}/\omega_{\text{pi}}) \rangle_{\text{ph}}$  [101].

Тип решётки	$C_0$	$u_{-2}$	$u_{-1}$	$u_1$	$u_3$	$\bar{l}$
bcc	0,895 929 255 682	12,972	2,798 55	0,511 3875	0,250 31	−0,831 298
fcc	0,895 873 615 195	12,143	2,719 82	0,513 1940	0,249 84	−0,817 908
hcp	0,895 838 120 459	12,015	2,702 6	0,513 33	0,249 84	−0,815 97

Нельзя забывать, что эти поправки неприменимы, когда параметр  $\eta$  становится большим. В этом случае аналитическое выражение свободной энергии кулоновской жидкости неизвестно.

### 2.3.3 Кулоновский кристалл

При  $T < T_m$  ионы в состоянии равновесия осциллируют вблизи центров кристаллической решётки. В основном состоянии для ОСР это объёмноцентрированная кубическая (bcc – *body-centered cubic*) решётка. Её мы и будем в основном рассматривать, хотя определённое внимание уделим также гранецентрированной кубической (fcc – *face-centered cubic*) и гексагональной плотноупакованной (hcp – *hexagonal close-packed*) решёткам, которые могут стать энергетически более выгодными при учёте электронного экранирования или магнитного поля.

Напомним некоторые стандартные определения [100], которые пригодятся в дальнейшем. Примитивная ячейка кристаллической решётки, центр которой совпадает с положением равновесия иона, называется ячейкой Вигнера–Зейца. В *модели ионной сферы*, в которой реальную ячейку приближённо заменяют шаром того же объёма, радиус ячейки Вигнера–Зейца для рассматриваемого здесь случая ионов одного сорта равен  $a_{\text{ion}}$ . Обратная решётка определяется примитивными векторами трансляции  $\mathbf{b}_l$ , определёнными равенствами  $\mathbf{b}_l \cdot \mathbf{a}_m = 2\pi\delta_{lm}$ , где  $\mathbf{a}_m$  – примитивные векторы трансляции прямой (исходной) кристаллической решётки. Ячейка Вигнера–Зейца для обратной решётки называется зоной Бриллюэна; её объём равен

$$V_{\text{BZ}} = \frac{4\pi}{3} a_{\text{BZ}}^3 = (2\pi)^3 n_{\text{ion}}. \quad (2.68)$$

Для изучения кулоновских (вигнеровских) кристаллов успешно используется (см., напр., [101–103] и ссылки там) *гармоническое приближение*, в рамках которого

потенциальная энергия каждого иона в кристалле описывается моделью потенциала гармонического осциллятора (напр., [72, 86]). В этом приближении свободная энергия решётки равна

$$F_{\text{lat}} = U_0 + U_{\text{quant}} + 3N_{\text{ion}}k_B T \langle \ln[1 - \exp(-z_{\mathbf{k}s})] \rangle_{\text{ph}}, \quad (2.69)$$

где  $U_0 = N_{\text{ion}}C_0(Ze)^2/a_{\text{ion}}$  – классическая энергия статической решётки,  $C_0 \approx -0,9$  – постоянная Маделунга,  $U_{\text{quant}} = \frac{3}{2}N_{\text{ion}}\hbar\omega_{\text{pi}}u_1$  – энергия нулевых квантовых осцилляций,  $u_1$  – частотный момент фононов из семейства

$$u_p \equiv \langle \omega_{\mathbf{k}s}^p \rangle_{\text{ph}} / \omega_{\text{pi}}^p, \quad (2.70)$$

$\omega_{\mathbf{k}s}$  – частота акустических колебаний,

$$z_{\mathbf{k}s} \equiv \hbar\omega_{\mathbf{k}s}/k_B T, \quad (2.71)$$

а  $\langle \dots \rangle_{\text{ph}}$  обозначает среднее по волновым векторам фононов  $\mathbf{k}$  в первой зоне Бриллюэна и по поляризациям акустических мод  $s$ :

$$\langle f_s(\mathbf{k}) \rangle_{\text{ph}} = \frac{1}{3V_{\text{BZ}}} \sum_s \int_{V_{\text{BZ}}} f_s(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (2.72)$$

Значения  $C_0$  и  $u_p$  приведены в Табл. 2.4. В кристалле мы не выделяем энергию идеального газа, поэтому  $F_{\text{lat}}$  заменяет  $F_{\text{id}}^{(i)} + F_{\text{ii}}$  в уравнении (2.28).

В общем случае, не ограничиваясь рамками гармонического приближения, имеем

$$f_{\text{lat}} \equiv F_{\text{lat}}/N_{\text{ion}}k_B T = C_0\Gamma + \frac{3}{2}u_1\eta + f_{\text{th}} + f_{\text{ah}}, \quad (2.73)$$

где первые три слагаемых в правой части соответствуют трём слагаемым в правой части уравнения (2.69), а  $f_{\text{ah}}$  – поправка на ангармонизм.

### 2.3.3а Гармоническое приближение

Свободную энергию кулоновского кристалла, рассчитанную Д. А. Байко [102] в гармоническом приближении, мы аппроксимируем выражением [101]

$$f_{\text{th}} = \sum_{k=1}^3 \ln(1 - e^{-\alpha_k \eta}) - \frac{\sum_{n=0}^8 a_n \eta^n}{\sum_{n=0}^7 b_n \eta^n + c_6 a_6 \eta^9 + c_8 a_8 \eta^{11}}, \quad (2.74)$$

параметры которого ( $\alpha_n$ ,  $a_n$  и  $b_n$ ) приведены в Табл. 2.5. Относительная погрешность приближения (2.74) не превосходит  $5 \times 10^{-6}$ , а его первая и вторая производные для

Таблица 2.5: Параметры выражения (2.74) для термодинамических функций трёх типов кулоновской решётки. Степени 10 даны в квадратных скобках.

	bcc lattice		fcc lattice	
$\alpha_1$	0,932 446		0,916 707	
$\alpha_2$	0,334 547		0,365 284	
$\alpha_3$	0,265 764		0,257 591	
$c_6$	4,757 0140 [-3]		4,923 87 [-3]	
$c_8$	4,777 0935 [-3]		4,375 06 [-3]	
$n$	$a_n$	$b_n$	$a_n$	$b_n$
0	1	261,66	1	303,20
1	0,1839	0	0	0
2	0,593 586	7,079 97	0,532 535	7,7255
3	5,4814 [-3]	0	0	0
4	5,018 13 [-4]	0,040 9484	3,765 45 [-4]	0,043 9597
5	0	3,973 55 [-4]	0	1,142 95 [-4]
6	3,9247 [-7]	5,111 48 [-5]	2,630 13 [-7]	5,634 34 [-5]
7	0	2,197 49 [-6]	0	1,364 88 [-6]
8	5,8356 [-11]	—	6,6318 [-11]	—

вычисления внутренней энергии и теплоёмкости (также реализованные в программе [85]) имеют погрешности не более нескольких тысячных долей процента.

При  $T \ll T_{pi}$ , из (2.74) получаем  $f_{th} \simeq 209,332 \eta^{-3}$ . В противоположном предельном случае —  $\eta \ll 1$  — имеем  $f_{th} \simeq 3 \ln \eta - 2,49389 - \frac{3}{2} u_1 \eta + \eta^2/24$ , где слагаемое с  $u_1$  компенсирует такое же слагаемое противоположного знака в (2.73), а последний член воспроизводит квантовую поправку  $f_q^{(2)}$  (2.66), одинаковую в жидкой и твёрдой фазах [103]. Поправку следующего порядка  $\propto \hbar^4$  [99] можно записать в виде  $f_{harm}^{(4)} \approx -2,1157 \times 10^{-4} \eta^4$ . Тейлоровское разложение приближённого выражения (2.74) содержит член  $\sim \eta^3$  и поэтому не воспроизводит  $f_{harm}^{(4)}$ , что не мешает этому приближению иметь высокую численную точность.

### 2.3.3b Ангармонические поправки

Ангармонические поправки для *классических* кулоновских кристаллов изучались в работах [103–108] и других. Фароуки и Хамагучи [108] предложили 11 различных аналитических аппроксимаций их численных результатов, из которых мы выбрали

$u_{\text{ah}} = a_1/\Gamma + a_2/\Gamma^2 + a_3/\Gamma^3$ , где  $a_1 = 10,9$ ,  $a_2 = 247$ ,  $a_3 = 1,765 \times 10^5$ . Данный выбор продиктован требованием максимальной согласованности с теорией возмущений [106, 107], согласно которой  $u_{\text{ah}} = 10,84/\Gamma + O(\Gamma^{-2})$ . Соответственно, классический ангармонический вклад в нормированную свободную энергию равен

$$f_{\text{ah}}^{(0)}(\Gamma) = - \sum_{k=1}^3 \frac{a_k}{k\Gamma^k}. \quad (2.75)$$

Для приложений, однако, необходимо расширить это приближение на неклассическую область  $\eta \neq 0$ . Ведущая квантовая поправка при малых значениях  $\eta$ , полученная из вигнеровского разложения  $\sim \hbar^4$  [99], приближённо (с погрешностью до 5% для суммы  $f_{\text{harm}}^{(4)} + f_{\text{ah}}^{(4)}$ ) равна

$$f_{\text{ah}} \approx f_{\text{ah}}^{(0)}(\Gamma) + f_{\text{ah}}^{(4)}(\Gamma, \eta), \quad (2.76)$$

где

$$f_{\text{ah}}^{(4)}(\Gamma, \eta) \approx -(0,0018/\Gamma + 0,085/\Gamma^2) \eta^4. \quad (2.77)$$

При  $T \rightarrow 0$  квантовые ангармонические поправки изучались в работах [104–106], в которых авторы строили разложение по степеням  $R_S^{-1/2}$  при условии  $R_S \gg 1$ . Ведущий член этого разложения может быть представлен как  $u_{\text{ah}, T \rightarrow 0} = -b_1 \eta^2/\Gamma$ . В разных работах даются несколько различающиеся оценки  $b_1$  (см. ссылки в [85]); мы используем типичное значение  $b_1 = 0,12$ . Свободная и внутренняя энергии квантового кристалла *при конечной температуре* вычислялись на основе методов Монте-Карло в работах [109–111]. Эти работы не дают сколько-нибудь точного приближения для *ангармонической* составляющей энергии. Для практических применений мы используем выражение

$$f_{\text{ah}} = f_{\text{ah}}^{(0)}(\Gamma) e^{-b_1 \eta^2/a_1} - b_1 \eta^2/\Gamma. \quad (2.78)$$

Его преимуществом является быстрое убывание в квантовой области, не нарушающее, в отличие от некоторых ранее предлагавшихся приближений, гармонической асимптотики для теплоёмкости и энтропии кристалла [85].

### 2.3.4 Структурный фактор. Многофононные процессы

В дальнейшем нам понадобится характеристика парных корреляций ионов, называемая структурным фактором. *Динамический* структурный фактор ионов описывает корреляцию их положений в пространстве и во времени:

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i\omega t} \langle \tilde{n}(\mathbf{x}, t) \tilde{n}(\mathbf{x}', 0) \rangle_{\text{th}}, \quad (2.79)$$

где  $i$  – мнимая единица,

$$\tilde{n}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{r}_q} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_q) - n_{\text{ion}}$$

– мгновенное распределение плотности заряда в единицах  $Ze$ , а  $\langle \dots \rangle_{\text{th}}$  обозначает гиббсово среднее по ансамблю частиц (*тепловое усреднение*; его следует отличать от усреднения по фононному спектру, определённого уравнением (2.72)).

*Статический* структурный фактор, описывающий мгновенную пространственную корреляцию положений зарядов, равен

$$S(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\mathbf{q}, \omega) d\omega. \quad (2.80)$$

### 2.3.4a Структурный фактор классической изотропной плазмы

Для изотропной плазмы статический структурный фактор (2.80) равен

$$S(q) = 1 + \frac{3\Gamma}{a_{\text{ion}}^3} \int_0^{\infty} \frac{\sin(qr)}{qr} [g(r) - 1] r^2 dr, \quad (2.81)$$

где  $g(r)$  – парная корреляционная функция.

В пределе  $q \rightarrow 0$  имеем  $S(q) \rightarrow (qa_{\text{ion}})^2 / (3\Gamma)$  (напр., [98]). Приближение Дебая – Хюккеля соответствует формуле

$$S(q) = q^2 / (q^2 + 3\Gamma a_{\text{ion}}^{-2}). \quad (2.82)$$

В общем случае  $S(q)$  находят численно из уравнения (2.79) (см., напр., обзор [90]). Вклад ион-ионного взаимодействия во внутреннюю энергию выражается через  $g(r)$  или  $S(q)$  как

$$U_{\text{ii}} = \frac{N^2}{2V} \int \frac{(Ze)^2}{r} [g(r) - 1] d\mathbf{r} = Nk_{\text{B}}T \frac{\Gamma a_{\text{ion}}}{\pi} \int_0^{\infty} [S(q) - 1] dq. \quad (2.83)$$

### 2.3.4b Структурный фактор кулоновского кристалла и фактор Дебая–Валлера

Как известно (напр., [100, 112, 113]), в общем случае, с учётом квантования движения ионов, их локальная плотность  $n(\mathbf{x}, t) = \sum_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_j - \mathbf{u}_j(t))$  заменяется оператором плотности<sup>2</sup>  $\hat{\rho}(\mathbf{x}, t)$ , который действует в пространстве квантовых состояний, характеризующихся фононными числами, а вектор смещения  $\mathbf{u}_j$  заменяется оператором

<sup>2</sup>Точнее, мы определяем  $\hat{\rho}(\mathbf{x}, t)$  как оператор плотности заряда в единицах  $Ze$ .

смещения  $\hat{\mathbf{u}}_j$ . При этом уравнение (2.79) для динамического структурного фактора обобщается следующим образом:

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{2\pi N_{\text{ion}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')-i\omega t} \langle \hat{\rho}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\rho}(\mathbf{x}', 0) \rangle_{\text{th}}. \quad (2.84)$$

Используя только что описанное квантование плотности, из уравнения (2.84) легко получить

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{2\pi N_{\text{ion}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \left\langle \sum_{i,j} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{R}_i-\mathbf{R}_j)} [e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{u}}_i(t)} - 1] [e^{-i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{u}}_j(0)} - 1] \right\rangle_{\text{th}} dt. \quad (2.85)$$

Разлагая оператор  $\hat{\mathbf{u}}_i$  по операторам рождения и уничтожения фононов и используя тождество  $e^A e^B = e^{A+B} e^{(AB-BA)/2}$  (см. [112]), можно разбить структурный фактор на два слагаемых:

$$S(\mathbf{q}, \omega) = S'(\mathbf{q}) \delta(\omega) + S''(\mathbf{q}, \omega), \quad (2.86)$$

где слагаемое  $S'(\mathbf{q})$  ассоциировано с упорядоченной решёткой (т.н. брэгговское слагаемое), тогда как «неупругое» слагаемое  $S''(\mathbf{q}, \omega)$  обусловлено ионными флуктуациями около положений равновесия. В гармоническом приближении будем иметь (напр., [100])

$$S'(\mathbf{q}) = (2\pi)^3 n_{\text{ion}} e^{-2W(\mathbf{q})} \sum_{\mathbf{G} \neq 0} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{G}), \quad (2.87)$$

где

$$\exp(-2W(\mathbf{q})) \equiv \langle \exp(i\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{u}}_j) \rangle_{\text{th}}^2 \quad (2.88)$$

– *фактор Дебая–Валлера*. В уравнении (2.87)  $\sum_{\mathbf{G} \neq 0}$  обозначает суммирование по всем векторам обратной решётки  $\mathbf{G}$  за исключением  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ .

В изотропных (например, кубических) кристаллах (ср. [112])

$$W(\mathbf{q}) = r_T^2 q^2 / 6, \quad (2.89)$$

где  $r_T^2 = \langle \hat{\mathbf{u}}^2 \rangle_{\text{th}}$  – среднеквадратическое отклонение положения иона от равновесия. В гармоническом приближении,

$$r_T^2 = \frac{3\hbar}{2m_{\text{ion}}} \left\langle \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}s} \text{th}(z_{\mathbf{k}s}/2)} \right\rangle_{\text{ph}}, \quad (2.90)$$

где  $z_{\mathbf{k}s}$  определено уравнением (2.71). В классическом кристалле (при  $T \gtrsim T_{\text{pi}}$ ) характерные значения  $z_{\mathbf{k}s}$  малы, и уравнение (2.90) упрощается:

$$r_T^2(\eta \lesssim 1) \approx \frac{3k_B T u_{-2}}{4\pi n_{\text{ion}} Z^2 e^2} = \frac{u_{-2} a_{\text{ion}}^2}{\Gamma}. \quad (2.91)$$



Формально в этом случае можно записать  $r_T^2 = 3u_{-2}r_D^2$ , где  $r_D$  – дебаевский радиус (2.23). В противоположном случае, когда  $T \ll T_{pi}$ ,

$$r_T^2(\eta \gg 1) \approx \frac{3\hbar u_{-1}}{2m_{ion}\omega_{pi}} = \frac{u_{-1} a_{ion}^2 \eta}{\Gamma}. \quad (2.92)$$

Для произвольного  $\eta$  величину  $r_T^2$  можно оценить по следующей формуле [95]:

$$r_T^2 \approx \frac{a_{ion}^2 \eta}{\Gamma} \left[ \frac{u_{-1}}{2} + \frac{\eta}{3\alpha_l(e^{\alpha_l \eta} - 1)} + \frac{2}{\alpha_t^2} D_1(\alpha_t \eta) \right]. \quad (2.93)$$

Здесь  $\alpha_t = 0,426548$  и  $\alpha_l = 0,88412$  для бсс,  $\alpha_t = 0,436671$  и  $\alpha_l = 0,87817$  для фсс,  $\alpha_t = 0,436671$  и  $\alpha_l = 0,87817$  для hcr решётки, а  $D_1(x)$  – функция Дебая, для которой в [95] нами построена аппроксимация

$$D_1(x) \approx \frac{1 + R_1(x)/x}{1 + \frac{1}{4}x + \frac{5}{144}x^2 + 0,00139x^4 + (6/\pi^2)R_1(x)}, \quad (2.94)$$

$$R_1(x) = (440x + 9e^x)(0,1x)^6.$$

Относительная погрешность этой аппроксимации составляет сотые доли процента.

### 2.3.4с Многофононные процессы

В работе [114] нами показано, что неупругую часть структурного фактора можно представить в виде

$$S''(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{2\pi N_{ion}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t - 2W(\mathbf{q})} \sum_{ij} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\hbar}{2m_{ion} N_{ion}} \sum_{\mathbf{k}s} \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s})^2}{\omega_{\mathbf{k}s}} [\alpha_{ij\mathbf{k}s}(\bar{n}_{\mathbf{k}s} + 1) + \alpha_{ij\mathbf{k}s}^* \bar{n}_{\mathbf{k}s}] \right\}^n, \quad (2.95)$$

где  $\alpha_{ij\mathbf{k}s} \equiv \exp[m_{ion}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) - m_{ion}\omega_{\mathbf{k}s}t]$ , а

$$\bar{n}_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{e^{z_{\mathbf{k}s}} - 1} \quad (2.96)$$

– число заполнения фононной моды  $(\mathbf{k}, s)$ . Выражение (2.95) учитывает вклад многофононных корреляций в структурный фактор кристалла. Каждое  $n$ -е слагаемое в сумме по  $n$  соответствует вкладу  $n$ -фононных процессов при рассеянии пробной частицы в кристалле. Суммирование по  $i, j$  даёт дельта-функцию, устраняющую одно из суммирований по  $\mathbf{k}$ . Таким образом, мы имеем  $n$  суммирований по  $s$  и  $n - 1$  суммирование по  $\mathbf{k}$  в каждом  $n$ -м слагаемом формулы (2.95).

Выражение для статического структурного фактора (2.80) приобретает вид

$$S(\mathbf{q}) = \frac{1}{N_{\text{ion}}} \sum_{i,j} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)} \langle e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{u}}_i} e^{-i\mathbf{q}\cdot\hat{\mathbf{u}}_j} \rangle_{\text{th}}. \quad (2.97)$$

Его точно так же можно разбить на «упругую» (брэгговскую) и неупругую компоненты,  $S(\mathbf{q}) = S'(\mathbf{q}) + S''(\mathbf{q})$ , где

$$S''(\mathbf{q}) = e^{-2W(q)} \sum_{\mathbf{R}_j} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}_j} \left[ e^{v(\mathbf{q}, \mathbf{R}_j)q^2} - 1 \right] \quad (2.98)$$

и

$$v(\mathbf{q}, \mathbf{R}) = \frac{3\hbar}{2m_{\text{ion}}} \left\langle \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s})^2}{q^2} \frac{\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}{\omega_{\mathbf{k}s} \text{th}(z_{\mathbf{k}s}/2)} \right\rangle_{\text{ph}}. \quad (2.99)$$

Вообще говоря, функция  $S''(\mathbf{q})$  имеет острые пики, вычисление которых затруднительно (напр., [115]). Но в интегралах по  $\mathbf{q}$  при  $q \gg q_{\text{BZ}}$  эти пики усредняются, и тогда оказывается применимым способ вычислений [116], использующий тот факт, что в подобных интегралах вектор  $\mathbf{q}$  пробегает по многим зонам Бриллюэна, каждая из которых имеет свои нормальные векторы поляризации  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}s}$ . Поэтому вектор поляризации быстро меняется на масштабе  $q \sim q_{\text{BZ}}$ , и для  $q \gg q_{\text{BZ}}$  можно использовать приближённую подстановку

$$\sum_s (\mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s})^2 f(\omega_{\mathbf{k}s}) \rightarrow q^2 \langle f(\omega_{\mathbf{k}s}) \rangle_{\text{ph}}, \quad (2.100)$$

при условии, что  $f(\omega)$  – достаточно гладкая функция. Тогда из (2.95) после усреднения по ориентациям векторов  $\mathbf{q}$  получаем [114, 117]

$$S''(q, \omega) = \exp \left[ -2W(q) - \frac{\hbar\omega}{2k_{\text{B}}T} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} K(q, T, t) \frac{dt}{2\pi}, \quad (2.101)$$

где

$$K(q, T, t) = \exp \left[ \frac{\hbar q^2}{2m_{\text{ion}}} \left\langle \frac{\cos \omega_{\mathbf{k}s} t}{\omega_{\mathbf{k}s} \text{sh}(z_{\mathbf{k}s}/2)} \right\rangle_{\text{ph}} \right] - 1. \quad (2.102)$$

Уравнение (2.101) учитывает корреляции ионов, обусловленные поглощением и испусканием любого числа фононов. В литературе квантово-механические амплитуды взаимодействий часто линеаризуют относительно  $\hat{\mathbf{u}}$ , таким образом пренебрегая многофононными процессами. В таком *однофононном приближении* (напр., [118]) структурный фактор приводится к виду

$$S''_{\text{1ph}}(q, \omega) = e^{-2W(q)} \frac{\hbar q^2}{2m_{\text{ion}}} \left\langle \frac{\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}s}) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}s})}{\omega_{\mathbf{k}s} |\exp(\hbar\omega/k_{\text{B}}T) - 1|} \right\rangle_{\text{ph}}, \quad (2.103)$$

что равносильно замене  $\{\exp[.] - 1\} \rightarrow [.]$  в уравнении (2.102). Это приближение оправдано только при  $T \ll T_{\text{pi}}$ . В плотной астрофизической плазме *многофононные процессы* оказываются важны вблизи границы плавления кулоновского кристалла [114].

В работе [114] мы вывели приближённое выражение для неупругой части статического структурного фактора, соответствующее уравнению (2.101):

$$S_0''(q) = 1 - e^{-2W(q)}. \quad (2.104)$$

Это приближение, как проверено в [115], оказывается весьма точным при  $q \gtrsim 3/a_{\text{ion}}$ .

В статье [117] динамический структурный фактор (2.101) был применён к расчёту вклада рассеяния электронов в коре нейтронной звезды в нейтринную светимость коры. Было показано, что учёт многофононных процессов заметно (на десятки процентов) увеличивает полную нейтринную светимость во внешней области коры, вблизи её границы с океаном. Как мы увидим в § 3.2.3, ещё более существенное влияние оказывают многофононные процессы на проводимость и теплопроводность этой части коры.

### 2.3.5 Плавление

Фазовый переход между кулоновской жидкостью и кулоновским кристаллом происходит при  $\Gamma = \Gamma_m$ , где свободные энергии  $F(\Gamma)$  жидкой и твёрдой фазы сравниваются. Эту точку трудно определить с большой точностью, так как кривые  $F(\Gamma)$  близки к параллельным, и поэтому положение точки их пересечения  $\Gamma_m$  сильно зависит от малых поправок. Например, изменение  $F_{\text{ii}}$  на 0,1% сдвигает  $\Gamma_m$  на  $\Delta\Gamma \approx 15$ , то есть на  $\approx 9\%$  [103] (ср. рис. 2.4, где показана разность между различными оценками свободной энергии ОСР в жидкой и твёрдой фазах согласно разным приближениям).

Как видно из рис. 2.1, кора типичной нейтронной звезды плавится при  $\rho \gtrsim 10^6$  г см<sup>-3</sup>. Хорошим начальным приближением для определения  $\Gamma_m$  можно считать приближение несжимаемого фона. Первую реалистичную оценку  $\Gamma_m = 170 \pm 10$ , получил Ван Хорн [119] на основе *критерия Линдемманна*, согласно которому кристалл плавится, когда среднеквадратичная амплитуда ионных колебаний  $r_T$  (2.91) становится сравнимой с расстояниями между соседними ионами. При этом Ван Хорн использовал экспериментальное значение для щелочных металлов  $(r_T/a_{\text{ion}})^2 = 0,070 \pm 0,004$ . В последующих оценках использовались расчёты классической энергии классических кулоновских кристаллов и жидкостей квантовые разложения термодинамических функций ОСР.

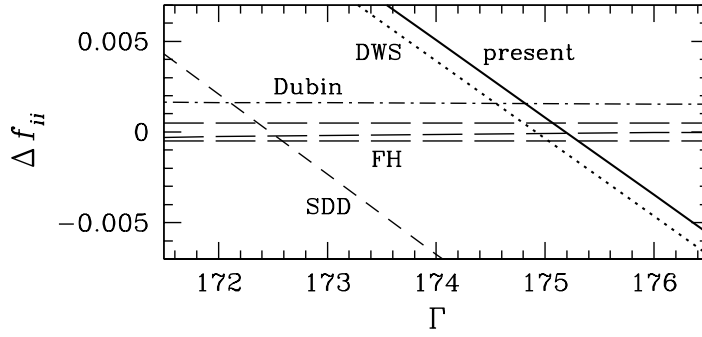


Рис. 2.4: Разность между свободной энергией классического кулоновского кристалла согласно § 2.3.3 и значениями свободной энергии модели ОСП согласно различным параметризациям, показанным разными типами линий [95]. Почти горизонтальные линии (с пометками «Dubin», «FH»), соответствуют другим параметризациям для кристалла, а наклонные («SDD», «DWS») – параметризациям для жидкости в модели ОСП, использовавшимся в литературе 1990-х годов. Сплошная кривая соответствует формуле (2.64).

С работе [95] мы обратили внимание на тот факт, что исследователи, достигшие наивысшей численной точности в определении энергии кулоновского кристалла [108] и жидкости [92], для определения  $\Gamma_m$  использовали устаревшие данные для жидкости и кристалла, соответственно, и исправили этот недостаток. Приравнивая  $F_{ii,liq}$ , вычисленному согласно уравнению (2.64) к  $F_{ii,solid}$ , вычисленному согласно § 2.3.3 при  $\eta \rightarrow 0$ , мы определили  $\Gamma_m = 175,0 \pm 0,4$  (рис. 2.4). Это – наиболее точный на сегодня результат в модели несжимаемого фона. Заметим, однако, что эта точность оказывается иллюзорной для реальной плазмы, так как значение  $\Gamma_m$  существенно зависит от менее точно рассчитанных эффектов поляризации электронов (см. ниже § 2.3.7). Зависит оно и от квантовых эффектов. При столь высоких плотностях, при которых в точке плавления нарушается условие  $\eta \ll 1$  (т.е. параметр  $R_S$  становится сравнимым с  $\Gamma_m^2$ , ср. уравнение (2.27)), нулевые колебания ионов становятся сравнимыми с постоянной решётки и препятствуют кристаллизации – происходит квантовое плавление. Этот эффект изучался многими авторами, начиная со статьи [120]. Для этого в работах [109–111, 121] применялось численное моделирование по методам Монте-Карло и интегралов по траекториям. При  $T = 0$  квантовое плавление наступает при  $R_S \approx 140–160$  для бозонов и  $R_S \approx 90–110$  для фермионов [110, 121]. При конечной температуре в работах [120, 122] использовалась интерполяция критерия Линдемана между классическим значением  $r_T/a_{ion} \approx 0,27$  и значениями, соответствующими  $T = 0$  ( $r_T/a_{ion} \approx 0,49$  для фермионов и  $r_T/a_{ion} \approx 0,44$  для бозонов). Кривая плавления на диаграмме «плотность–температура» определялась также на основе численного

моделирования [109–111]. Результаты последних работ противоречивы: так, кривая плавления, полученная в статье [110], заметно отличается от интерполяционной кривой [122], а предварительные численные результаты, опубликованные нами в [111], приближаются к ней. В приложениях к нейтронным звёздам эта неопределённость несущественна для углерода и более тяжёлых элементов, так как условие квантового плавления не достигается во внешних оболочках, но она может быть важна для водорода и гелия в достаточно холодных аккрецированных оболочках [5], а также для остывающих белых карликов [122, 123].

### 2.3.6 Поляризация электронов в кулоновской жидкости

В электрон-ионной плазме взаимодействие ионов частично экранировано поляризацией электронного фона. Влияние этой поляризации на термодинамические функции кулоновской жидкости вычислялось методами теории возмущений [123, 124] и HNC [84, 95, 125]. При этом в статьях [123] и [95] учитывались релятивистские эффекты.

Когда электрон-ионное взаимодействие мало по сравнению с кинетической энергией электронов (например, при  $Ze^2/a_e \ll \epsilon_F$  для вырожденных электронов), это взаимодействие можно учитывать по теории линейного отклика. При этом точный гамильтониан электрон-ионной плазмы можно разбить на две части, первая из которых описывает ионы, экранированные электронами, а вторая – гамильтониан несжимаемого электронного фона, т.н. «желе» [124].

Поляризационные свойства электронного газа описываются динамическим диэлектрическим тензором, а в случае изотропного газа (в частности, в отсутствие магнитного поля) – диэлектрической функцией  $\varepsilon(k, \omega)$ , где  $k$  – это волновой вектор, а  $\omega$  – частота. Для процессов, имеющих характерную длительность  $\gg \omega_{pe}^{-1}$ , можно заменить  $\varepsilon(k, \omega)$  на статическую диэлектрическую функцию  $\varepsilon(k) \equiv \varepsilon(k, 0)$ . Для неё в вырожденном релятивистском газе наиболее употребительным является аналитическое выражение [73], полученное в приближении случайных фаз (RPA – *random-phase approximation*), которое справедливо при  $r_s \ll 1$  и  $T \ll T_F$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) = & 1 + \frac{k_{TF}^2}{k^2} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{y^2 x_r}{\gamma_r} \ln(x_r + \gamma_r) + \frac{x_r^2 + 1 - 3x_r^2 y^2}{6y x_r^2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| \right. \\ & \left. + \frac{2y^2 x_r^2 - 1}{6y x_r^2} \frac{\sqrt{1 + x_r^2 y^2}}{\gamma_r} \ln \left| \frac{y\gamma_r + \sqrt{1 + x_r^2 y^2}}{y\gamma_r - \sqrt{1 + x_r^2 y^2}} \right| \right\}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

где  $y = k/(2k_F)$ .

Статическая диэлектрическая функция удовлетворяет важному соотношению

$$\varepsilon(k) = 1 + \frac{k_{\text{TF}}^2}{k^2} \quad \text{при } k \ll k_{\text{TF}}, \quad (2.106)$$

справедливому и вне рамок RPA.

Если  $r_s \lesssim 1$  и  $T \lesssim T_{\text{F}}$ , то следует принимать во внимание также конечную температуру и нелинейные эффекты, которые в нерелятивистском случае могут быть включены в диэлектрическую функцию согласно [126]

$$\varepsilon(k) = 1 + \frac{\varepsilon_{\text{RPA}}(k) - 1}{1 - [\varepsilon_{\text{RPA}}(k) - 1]G(k)}, \quad (2.107)$$

где  $\varepsilon_{\text{RPA}}(k)$  – диэлектрическая функция, полученная в приближении случайных фаз, а  $G(k)$  – поправка локального поля (LFC – *local field correction*), которая оценивается численно.

Экранирование можно оценить также по методу эффективного потенциала (напр., [127]). В этом методе кулоновский потенциал в выражении для электростатической энергии заменяется эффективным потенциалом, Фурье-образ которого равен  $V_{\text{eff}}(k) = 4\pi(Ze)^2/(k^2\varepsilon(k))$ , где  $\varepsilon(k)$  – статическая диэлектрическая функция электронного газа (2.105) или жидкости (2.107).

Численная схема, основанная на методах эффективного потенциала и HNC, была развита в статье [126], где вычисления проводились для водородной плазмы в широком диапазоне значений параметров невырожденности  $\theta$  и кулоновской связи  $\Gamma$ . В работах [84, 95] мы распространили такие вычисления на ионы с разными зарядами вплоть до  $Z = 60$  и построили для этих численных результатов аппроксимацию

$$f_{ie} \equiv \frac{F_{ie}}{N_{\text{ion}}k_{\text{B}}T} = -\Gamma_e \frac{c_{\text{DH}}\sqrt{\Gamma_e} + c_{\text{TF}}\Gamma_e^\nu g_1(r_s)g_3(x_r)}{1 + [b\sqrt{\Gamma_e} + ag_2(r_s)\Gamma_e^\nu/r_s] \gamma_r^{-1}}. \quad (2.108)$$

Здесь параметр

$$c_{\text{DH}} = \frac{Z}{\sqrt{3}} [(1+Z)^{3/2} - 1 - Z^{3/2}] \quad (2.109)$$

обеспечивает переход к приближению Дебая–Хюккеля при малых  $\Gamma$ , а параметр

$$c_{\text{TF}} = c_\infty Z^{7/3} (1 - Z^{-1/3} + 0,2 Z^{-1/2}) \quad (2.110)$$

определяет вклад в свободную энергию за счёт экранирования при больших  $\Gamma_e$  и малых  $r_s$ . При этом множитель  $c_\infty = (18/175)(12/\pi)^{2/3} = 0,2513$  согласуется с приближением Томаса–Ферми [128],

$$F_{ie}^{\text{TF}}/N_e = U_{ie}^{\text{TF}}/N_e = -2c_\infty \gamma_r Z^{7/3} \text{Ry}, \quad (2.111)$$

которое становится точным при малых  $r_s$  и больших  $Z$  (здесь  $Ry = \frac{1}{2}m_e e^4 / \hbar^2 = 13,605$  эВ – единица энергии Ридберга). Параметры

$$a = 1,11 Z^{0,475}, \quad b = 0,2 + 0,078 (\ln Z)^2, \quad \nu = 1,16 + 0,08 \ln Z \quad (2.112)$$

обеспечивают начальную грубую оценку  $F_{ie}$  (с максимальной погрешностью до 30%), а функции

$$g_1(r_s) = 1 + \frac{0,78}{21 + \Gamma_e (Z/r_s)^3} \left( \frac{\Gamma_e}{Z} \right)^{1/2}, \quad (2.113)$$

$$g_2(r_s) = 1 + \frac{Z-1}{9} \left( 1 + \frac{1}{0,001 Z^2 + 2\Gamma_e} \right) \frac{r_s}{4 + r_s^{-2}} \quad (2.114)$$

улучшают аппроксимацию при сравнительно больших  $r_s$  и снижают максимальную погрешность оценки  $F_{ie}$  до 4,3%.

Асимптотическое поведение выражения (2.108) при  $\Gamma \rightarrow \infty$  меняется от  $f_{ie} \propto \Gamma r_s$  до  $f_{ie} \propto \Gamma r_s \gamma_r$  для релятивистских электронов. Такое поведение обеспечивает множитель  $\gamma_r$  в знаменателе (2.108). Множитель  $g_3$  улучшает аппроксимацию при сравнительно малых  $Z$  в релятивистской области,

$$g_3(x_r) = \frac{1 + x_r^2/5}{1 + 0,18 Z^{-1/4} x_r + 0,37 Z^{-1/2} x_r^2 + x_r^2/5}. \quad (2.115)$$

Рассчитанные и аппроксимированные значения  $F_{ie}$  показаны на рис. 2.5. Для сравнения представлены также результаты [123], полученные по формуле

$$f_{ie} = -\frac{\Gamma a_{\text{ion}}}{\pi} \int_0^\infty S(q) [\varepsilon(q, x_r) - 1] dq. \quad (2.116)$$

Эта формула выведена в работе [124] на основе формализма теории линейного отклика и трактовки поляризационных поправок по теории возмущений, которую можно представить в виде разложения по степеням  $k_{TF}$  (ср. ниже § 2.3.7).

Выражения (2.64) и (2.108) обеспечивают удержание относительной погрешности оценки  $F_{ii} + F_{ie}$  в пределах 2% при сравнении с нашими нерелятивистскими расчётами [84] (проведёнными при  $\Gamma < 170$  и  $0,0625 \leq r_s \leq 2$ ), а также согласуются с релятивистскими результатами для нулевой температуры [123] (при  $r_s \ll 1$  и  $T \ll T_F$ ).

### 2.3.7 Поляризация электронов в кулоновском кристалле

Корреляции между ионами – а следовательно, и кристаллизация – влияют на электронное экранирование. Вычисление термодинамических функций для кулоновского

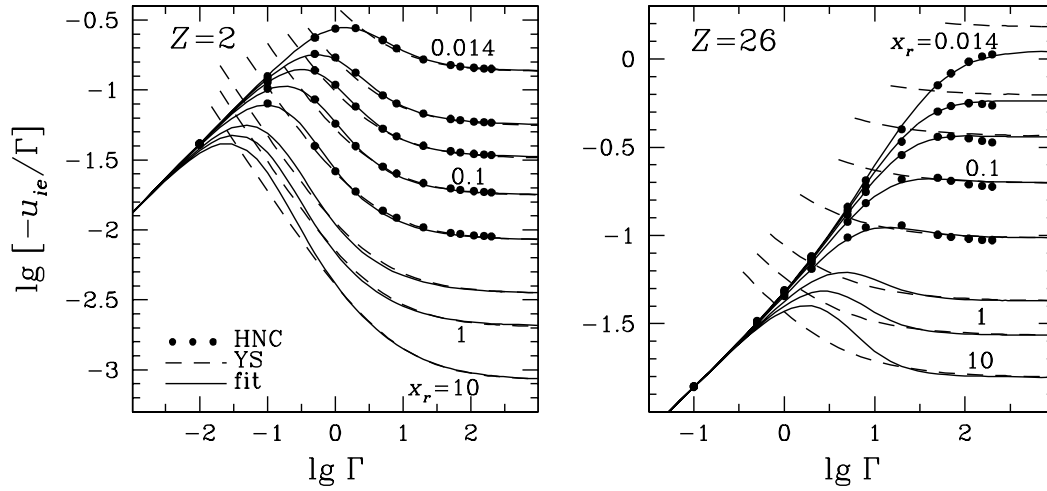


Рис. 2.5: Вклад за счёт экранирования в свободную энергию электрон-ионной плазмы с  $Z = 2$  (слева) и  $Z = 26$  (справа) в зависимости от  $\Gamma$  [5, 95]. Показано сравнение результатов численных нерелятивистских расчётов в приближении HNC [84] (жирные точки) и релятивистской теории возмущений [123], справедливой при малых  $r_s$  и больших  $\Gamma$  (штриховые линии), с аналитическим приближением (2.108) (сплошные кривые). Числа у кривых указывают значения  $x_r = 0,014/r_s$  (сверху вниз,  $x_r = 0,014, 0,034, 0,058, 0,1, 0,22, 0,55, 1, 10$ ).

кристалла с учётом электронной поляризации является задачей, ещё не решённой до конца. Для классических ионов простейшая модель экранирования состоит в замене кулоновского потенциала на потенциал Юкавы. Моделирование такой системы по методу молекулярной динамики было осуществлено в статье [129], где было найдено, что  $\Gamma_m$  увеличивается с уменьшением радиуса экранирования. Более того, может происходить переход от бсс к fcc структуре. Впоследствии такая же модельная система изучалась с помощью метода интегрирования по траекториям [130].

Однако потенциал Юкавы не является точной моделью для экранирования, так как его использование равносильно ограничению длинноволновой асимптотикой диэлектрической функции (2.106). Точное решение задачи требует вычисления динамической матрицы кристалла с учётом электрон-ионного взаимодействия и решения соответствующего дисперсионного соотношения для спектра фононов. В первом порядке теории возмущений динамическая матрица классического кулоновского кристалла была получена в статье [103], а фононный спектр квантового кулоновского кристалла с учётом поляризации был рассчитан в гармоническом приближении в статье [131]. Заметим, что гармоническое приближение лишь ограниченно применимо к проблеме экранирования в кулоновском кристалле: например, в классическом



пределе ( $T \gg T_{\text{pi}}$ ) оно заведомо даёт нулевой вклад электрон-ионного взаимодействия в теплоёмкость.

В статье [95] мы применили к данной задаче квазиклассический подход, описанный ниже.

### 2.3.7а Теория возмущений

Ионный кристалл с несжимаемым электронным фоном представляет естественное начальное приближение. Эффективный потенциал взаимодействия между ионами в адиабатической теории возмущений [103] представляет собой электростатический потенциал, одинаковый для твёрдой и жидкой фазы. Его отличие от кулоновского потенциала можно трактовать как возмущение по методу [124], основанному на *точном* выражении для свободной энергии в виде интеграла по параметру, определяющему «силу» возмущения. В результате мы приходим к выражению вида (2.116) с  $S(q) = (4\pi)^{-1} \int S(\mathbf{q}) d\Omega_{\mathbf{q}}$ , где  $d\Omega_{\mathbf{q}}$  – это элемент телесного угла в направлении  $\mathbf{q}$  (структурные факторы  $S(\mathbf{q})$  и  $S(q)$  зависят также от  $\Gamma$  и  $\eta$ ).

Используя разложение структурного фактора на упругую и неупругую части (§ 2.3.4), можно переписать выражение (2.116) в виде

$$f_{ie} = f'_{ie} + f''_{ie}, \quad (2.117)$$

$$f'_{ie} = -\frac{3\Gamma}{2} \sum_{G \neq 0} \frac{\varepsilon(G, x_r) - 1}{(Ga_i)^2} e^{-2W(G)}, \quad (2.118)$$

$$f''_{ie} = -\frac{\Gamma a_i}{\pi} \int_0^{\infty} S''(q) [\varepsilon(q, x_r) - 1] dq. \quad (2.119)$$

Для неупругой части структурного фактора использовать выражение (2.98) практически невозможно по причине медленной сходимости присутствующего в нём суммирования. Поэтому мы ограничимся оценками на основе приближения (2.104). Согласно § 2.3.4, это приближение можно использовать для вычисления интегралов по  $\mathbf{q}$  при  $q > q_{\text{BZ}}$ . Однако в (2.119) важно обеспечить правильное поведение  $S''(q)$  в пределе  $q \rightarrow 0$ , потому что  $(\varepsilon - 1) \propto q^{-2}$  в этом пределе становится большим. С этой целью в [95] мы применили кусочную аппроксимацию:  $S''(q) = S''_0(q)$  при  $q > q_1$  и  $S''(q) = S''_1(q)$  при  $q \leq q_1$ , где  $S''_1(q) = [\partial^2 S'' / \partial q^2]_{q \rightarrow 0} (q^2/2)$ . Свободный параметр  $q_1$  был положен равным  $q_1 = 0,94 q_{\text{BZ}}$ . Для классической кулоновской плазмы при  $qa_{\text{ion}} \ll 1$  имеется точный результат  $S''_1(q) = (qa_{\text{ion}})^2 / (3\Gamma)$  [132]. В более общем случае  $S''_1(q)$  можно получить из (2.98):

$$S''_1(q) = \frac{(qa_{\text{ion}})^2}{6\Gamma} \frac{\eta}{\text{th}(\eta/2)}. \quad (2.120)$$

Таблица 2.6: Параметры для поправки на экранирование в кулоновском кристалле (2.121).

Тип решётки	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$q$
bcc	1,1866	0,684	17,9	41,5	0,205
fcc	1,1857	0,663	17,1	40,0	0,212

В статье [95], используя формулы (2.104) и (2.117)–(2.120), мы рассчитали поляризационную поправку  $f_{ie}$  в широком диапазоне параметров  $\Gamma$ ,  $x_r$  и  $Z$ .

При  $\eta \gtrsim 1$  квантование ионных осцилляций влияет на структурный фактор. Этот эффект учтён при помощи множителя  $\eta/\text{th}(\eta/2)$  в (2.120). Благодаря нему, в частности, поляризационный вклад в теплоёмкость  $C_{V,ie}$  стремится к нулю при  $T \rightarrow 0$ .

### 2.3.7b Аналитическое приближение

Численные результаты можно описать при помощи формулы

$$f_{ie} = -f_{\infty}(x_r) \Gamma [1 + A(x_r) (Q(\eta)/\Gamma)^s], \quad (2.121)$$

где

$$\begin{aligned} f_{\infty}(x) &= a_{\text{TF}} Z^{2/3} b_1 \sqrt{1 + b_2/x^2}, \\ A(x) &= \frac{b_3 + a_3 x^2}{1 + b_4 x^2}, \quad s = [1 + 0,01 (\ln Z)^{3/2} + 0,097 Z^{-2}]^{-1}, \\ b_1 &= 1 - a_1 Z^{-0,267} + 0,27 Z^{-1}, \quad b_2 = 1 + \frac{2,25}{Z^{1/3}} 1 + a_2 Z^5 + 0,222 Z^6 1 + 0,222 Z^6, \\ b_3 &= a_4/(1 + \ln Z), \quad b_4 = 0,395 \ln Z + 0,347 Z^{-3/2}. \end{aligned}$$

Параметр  $a_{\text{TF}}$  [как и  $c_{\text{TF}}$  в (2.108)] выбран таким образом, чтобы воспроизвести предел Томаса–Ферми (2.111) при  $Z \rightarrow \infty$ :

$$a_{\text{TF}} = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{\alpha_f}{Z^{7/3}} c_{\infty} = \frac{54}{175} \left(\frac{12}{\pi}\right)^{1/3} \alpha_f \approx 0,00352. \quad (2.122)$$

Наконец,  $Q(\eta)$  – множитель, введённый для описания подавления зависимости  $F_{ie}$  от  $T$  при  $T \ll T_{\text{pi}}$ . Для классического кристалла  $Q(0) = 1$ . В противоположном пределе ( $\eta \rightarrow \infty$ )  $Q(\eta) \simeq q\eta$ , так что отношение  $Q/\Gamma$  в (2.121) перестаёт зависеть от  $T$ .

Коэффициенты  $a_1$ – $a_4$  и  $q$  даны в Табл. 2.6. Погрешность аппроксимации лежит в пределах 3%.

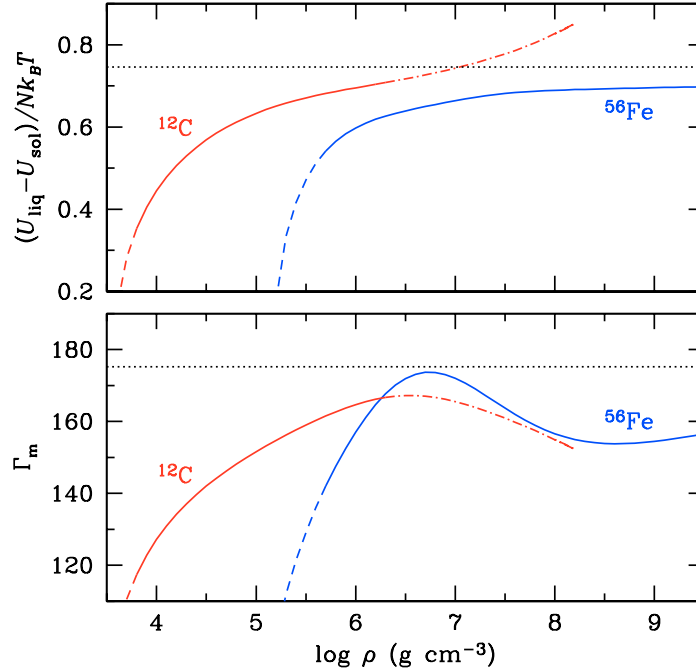


Рис. 2.6: Нижний рисунок – значение параметра  $\Gamma_m$  в зависимости от плотности; верхний рисунок – теплота плавления, делённая на  $N_{\text{ion}} k_B T$ . Штрихпунктирные кривые соответствуют области сильных квантовых эффектов ( $T < \frac{1}{2} T_{\text{pi}}$ ), а штриховые пунктирные – области сильного электрон-ионного взаимодействия ( $Z^2 R_y > 0,1 \epsilon_F$ ), когда использованная теория возмущений становится неприменимой. Точечный пунктир соответствует ОСП.

Вид зависимости  $Q(\eta)$ , предложенный в [95], приводил к слишком медленному убыванию  $C_{V,ie}$  при  $\eta \rightarrow \infty$ , что, по-видимому, связано с использованием приближённого вида структурного фактора, как обсуждалось в [5, 95]. В статье [85] предложена альтернативная аппроксимация, устраняющая указанную проблему:

$$Q(\eta) = \left( \frac{\ln(1 + e^{(\eta)^2})}{\ln(e - (e - 2)e^{-(\eta)^2})} \right)^{1/2}. \quad (2.123)$$

Она и реализована в обновлённом комплекте программ.

### 2.3.7с Влияние поляризации на плавление

Поляризация электронов, несмотря на свою малость по сравнению с другими взаимодействиями в плотной плазме, может заметно влиять на положение точки плавления кулоновского кристалла и на теплоту плавления. Примеры приведены на рис. 2.6. Нижний рисунок показывает зависимость параметра  $\Gamma_m$  для полностью ионизован-

ных  $^{12}\text{C}$  и  $^{56}\text{Fe}$ ; верхний рисунок демонстрирует разность внутренних энергий двух фаз (т.е. теплоту плавления  $Q_m = U_{\text{liq}} - U_{\text{sol}}$ ) на один ион в единицах  $k_B T$ .

Штрихпунктирные участки кривых соответствуют выполнению условия  $T < \frac{1}{2}T_{\text{pi}}$ , при котором использованная трактовка квантовых эффектов в жидкости по теории возмущений теряет точность. Штриховыми линиями показаны участки, на которых энергия связи водородоподобного иона превосходит 10% энергии Ферми,  $Z^2 R_y > 0,1 \epsilon_F$ . В последнем случае, соответствующем условию  $a_e \gtrsim 0,6a_B/Z$ , использование теории возмущений для описания электрон-ионного взаимодействия перестаёт быть оправданным.

Мы видим, что  $Q_m \sim 0,7N_{\text{ion}}k_B T$ , в общем согласии со значением  $Q_{m,i}^{\text{cl}} = 0,746N_{\text{ion}}k_B T$  для ОСР в точке плавления  $\Gamma = 175,2$ , которую даёт наша программа в случае ОСР (точечный пунктир) и со значениями, используемыми в теоретических моделях остывания белых карликов (см., напр., обзор [133] и ссылки там). В то же время, количественные отличия говорят о том, что отклонение этой величины в модели ОСР от реального значения может достигать десятков процентов. Видно также, что расчёты остывания нейтронных звёзд (см. обзор [41] и ссылки там), в настоящее время игнорирующие теплоту плавления коры, можно улучшить путём её учёта.

### 2.3.8 Обменно-корреляционные эффекты

Обменно-корреляционные эффекты в электронной жидкости изучались во многих работах (см., напр., обзор [127]). Танака и др. [134] рассчитали энергию межэлектронного взаимодействия в электронной жидкости при конечной температуре на основе нерелятивистского формализма STLS [135] и предложили приближённую формулу, воспроизводящую численные результаты и различные предельные асимптотики с погрешностью, не превосходящей 1%. На её основе путём интегрирования авторы получили аппроксимацию для нормированного вклада в свободную энергию  $f_{ee} \equiv F_{ee}/(k_B T N_e)$ . В статье [127] приведена улучшенная параметрическая зависимость коэффициентов этой формулы от  $\theta$ , обладающая более корректным асимптотическим поведением при малых  $\theta$ .

Штольцман и Блэккер [136] предложили другую параметризацию, в которой в обменном взаимодействии, в отличие от [127], учитывался релятивизм электронов. При умеренных  $r_s$  обе формулы согласуются между собой в пределах неопределённости численных оценок. Однако в классическом пределе ОСР при больших  $r_s$  и умеренных  $\Gamma_e$  формула [136] имеет в несколько раз большую погрешность, чем формула

[127]. Учитывая, что в приложениях для релятивистских электронов обмен и корреляция несущественны, так как их вклад в уравнение состояния на порядки меньше, чем другие вклады (напр., [5, 123] и Табл. 2.1), мы используем нерелятивистское выражение [127], которое для полноты воспроизводим здесь:

$$f_{ee} = -g\Gamma_e - \frac{2A}{f} \sqrt{\Gamma_e} + \frac{2(dB + CA)}{fD} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{2f \sqrt{\Gamma_e} + d}{D} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{d}{D} \right) \right] - \left( \frac{B}{f} - \frac{dA}{f^2} \right) \ln(f\Gamma_e + d\sqrt{\Gamma_e} + 1), \quad (2.124)$$

где  $A = b - gd$ ,  $B = a - g$ ,  $C = 2 - d^2/f$ ,  $D = \sqrt{4f - d^2}$ , а коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $f$  и  $g$  зависят от  $\theta = T/T_F$  следующим образом:

$$a = \left( \frac{9}{4\pi^2} \right)^{1/3} \frac{0,75 + 3,04363\theta^2 - 0,09227\theta^3 + 1,7035\theta^4}{1 + 8,31051\theta^2 + 5,1105\theta^4} \operatorname{th} \frac{1}{\theta}, \quad (2.125)$$

$$b = \frac{0,341308 + 12,0708\theta^2 + 1,148889\theta^4}{1 + 10,495346\theta^2 + 1,326623\theta^4} \sqrt{\theta} \operatorname{th} \frac{1}{\sqrt{\theta}}, \quad (2.126)$$

$$d = \frac{0,614925 + 16,996055\theta^2 + 1,489056\theta^4}{1 + 10,10935\theta^2 + 1,22184\theta^4} \sqrt{\theta} \operatorname{th} \frac{1}{\sqrt{\theta}}, \quad (2.127)$$

$$f = \frac{0,539409 + 2,522206\theta^2 + 0,178484\theta^4}{1 + 2,555501\theta^2 + 0,146319\theta^4} \theta \operatorname{th} \frac{1}{\theta}, \quad (2.128)$$

$$g = 0,872496 + 0,025248 \exp(-1/\theta). \quad (2.129)$$

### 2.3.9 Ионные смеси

Как хорошо известно (напр., [72]), свободная энергия идеального электрон-ионного газа определяется суммой свободных энергий его компонент:

$$F_{\text{id}}^{\text{ion}} = \sum_j F_{\text{id}}^{(j)} + F_{\text{id}}^{(e)}, \quad (2.130)$$

где  $F_{\text{id}}^{(e)}$  задаётся формулами раздела 2.3.1, а  $F_{\text{id}}^{(j)}$  – формулой (2.60) с подстановкой  $n_j$  вместо  $n_{\text{ion}}$ ,  $\lambda_j$  вместо  $\lambda_{\text{ion}}$  и  $g_{\text{spin}}^{(j)}$  вместо  $g_{\text{spin}}^{(i)}$  для каждого из сортов ионов. Аналогичные суммы определяют  $U$ ,  $S$ ,  $P$  и  $C_V$ . Так как (2.60) содержит  $n_{\text{ion}}$  под знаком логарифма, эти суммы для  $F$  и  $S$  естественным образом включают энтропию смешивания

$$S_{\text{mix}} = -k_B \sum_j N_j \ln x_j. \quad (2.131)$$

Здесь и далее мы обозначаем  $x_j \equiv n_j/n_{\text{ion}}$ .

Не столь тривиален вопрос о неидеальном вкладе в уравнение состояния многокомпонентных смесей. Многочисленными работами [93, 125, 137–139] установлено, что в многокомпонентной кулоновской плазме с хорошей точностью (доли процента и выше) выполняется *правило линейного смешивания* (LMR – *linear mixing rule*):

$$f_{\text{ex}}^{\text{LM}}(\Gamma) \approx \sum_j x_j f_{\text{ex}}(\Gamma_j, x_j = 1). \quad (2.132)$$

Здесь и далее верхний индекс “LM” обозначает приближение линейного смешивания, все  $\Gamma_j$  отвечают одному и тому же значению  $\Gamma_e$  (в предположении, что давление определяется вырожденным электронным газом):  $\Gamma_j = \Gamma Z_j^{5/3} / \langle Z^{5/3} \rangle$ , – а  $f_{\text{ex}}$  – нормированная неидеальная часть свободной энергии (2.29):  $f_{\text{ex}} = f_{\text{ii}}$  для модели несжимаемого фона, и  $f_{\text{ex}} = f_{\text{ii}} + f_{\text{ie}} + Z_j f_{\text{ee}}$  при учёте электронной неидеальности.

Однако LMR не выполняется при  $\Gamma \ll 1$ . Действительно, в этом случае, согласно теории Дебая–Хюккеля,

$$f_{\text{ee}}^{\text{DH}} = -\Gamma_e^{3/2} / \sqrt{3}, \quad f_{\text{ii}}^{\text{DH}} = f_{\text{ee}}^{\text{DH}} \zeta_{\text{ii}}^{\text{DH}}, \quad (2.133)$$

и для электрон-ионной плазмы имеем

$$f_{\text{ex}}^{\text{DH}} = f_{\text{ii}}^{\text{DH}} + f_{\text{ie}}^{\text{DH}} + \langle Z \rangle f_{\text{ee}}^{\text{DH}} = f_{\text{ee}}^{\text{DH}} \zeta_{\text{eip}}^{\text{DH}}, \quad (2.134)$$

где введены обозначения

$$\zeta_{\text{ii}}^{\text{DH}} = \frac{\langle Z^2 \rangle^{3/2}}{\langle Z \rangle^{1/2}}, \quad \zeta_{\text{eip}}^{\text{DH}} = \frac{(\langle Z^2 \rangle + \langle Z \rangle)^{3/2}}{\langle Z \rangle^{1/2}}. \quad (2.135)$$

Но LMR при  $\Gamma \ll 1$  приводит к иному результату:

$$f_{\text{ii}}^{\text{LM}} \sim f_{\text{ee}}^{\text{DH}} \zeta_{\text{ii}}^{\text{LM}}, \quad f_{\text{ex}}^{\text{LM}} \sim f_{\text{ee}}^{\text{DH}} \zeta_{\text{eip}}^{\text{LM}}, \quad (2.136)$$

где

$$\zeta_{\text{ii}}^{\text{LM}} = \langle Z^{5/2} \rangle, \quad \zeta_{\text{eip}}^{\text{LM}} = \langle Z(Z+1)^{3/2} \rangle. \quad (2.137)$$

На возможное значение нарушения LMR для астрофизических приложений обратили внимание Надёжин и Юдин [140], рассмотревшие несколько возможных модификаций LMR с целью распространения аналитических приближений для  $f_{\text{ex}}$  на область умеренных значений  $\Gamma$ . Однако надёжные численные результаты для смесей при таких  $\Gamma$  до недавнего времени в литературе отсутствовали. В работе [96] мы провели вычисления функций  $F_{\text{ii}}$ ,  $U_{\text{ii}}$  и  $P_{\text{ii}}$  в приближении ННС на несжимаемом фоне для смесей их двух и трёх сортов ионов в широком диапазоне значений параметра

$\Gamma$  при различных соотношениях между зарядовыми числами разных сортов ионов и разных относительных концентрациях. В статье [94] мы использовали результаты из предыдущей работы при  $\Gamma < 1$  и дополнили их результатами расчётов по методу Монте-Карло в области  $\Gamma \geq 1$ , где приближение ННС становится менее точным. На основе этих результатов, а также с учётом более ранних работ, построена аппроксимация, служащая дополнением к LMR при произвольных  $\Gamma$ .

Обозначим  $\Delta f \equiv f - f^{\text{LM}}$  и  $\Delta u \equiv u - u^{\text{LM}}$  – отклонение нормированных свободной и внутренней энергий смеси  $f_{\text{ex}}$  и  $u_{\text{ex}}$  от их значений, предсказываемых LMR. Аппроксимация [94], о которой идёт речь, записывается как

$$\Delta f = \frac{\Gamma_e^{3/2} \langle Z^{5/2} \rangle}{\sqrt{3}} \frac{\delta}{(1 + a \Gamma^\alpha)(1 + b \Gamma^\alpha)^\beta}, \quad (2.138)$$

где  $\delta$  определяется разностью между предсказаниями правила линейного смешивания и модели Дебая–Хюккеля при  $\Gamma \rightarrow 0$ :

$$\delta = 1 - \frac{\langle Z^2 \rangle^{3/2}}{\langle Z \rangle^{1/2} \langle Z^{5/2} \rangle} \quad (2.139a)$$

для модели «жёсткого» электронного фона, и

$$\delta = \frac{\langle Z(Z+1)^{3/2} \rangle}{\langle Z^{5/2} \rangle} - \frac{(\langle Z^2 \rangle + \langle Z \rangle)^{3/2}}{\langle Z \rangle^{1/2} \langle Z^{5/2} \rangle} \quad (2.139b)$$

для поляризуемого фона. Параметры  $a$ ,  $b$  и  $\alpha$  выбирались таким образом, чтобы минимизировать среднеквадратичное отклонение аппроксимации от данных ННС для величины  $\Delta u/u_{\text{LM}}$  при  $\Gamma \leq 1$  (то есть там, где значительна относительная погрешность правила линейного смешивания) и для величины  $\Delta u$  при  $\Gamma > 1$  (где относительная погрешность пренебрежимо мала, а играет роль абсолютная величина  $\Delta u$  или  $\Delta f$ ), а показатель степени  $\beta$  определяется из условия, чтобы функция  $\Delta f$  не росла при  $\Gamma \rightarrow \infty$ , которое следует из результатов расчётов по методу Монте-Карло [94]. Эти параметры следующим образом зависят от ионного состава плазмы:

$$a = \frac{2.6 \delta + 14 \delta^3}{1 - \alpha}, \quad \alpha = \frac{\langle Z \rangle^{2/5}}{\langle Z^2 \rangle^{1/5}}, \quad b = 0.0117 \left( \frac{\langle Z^2 \rangle}{\langle Z \rangle^2} \right)^2 a, \quad \beta = \frac{3}{2\alpha} - 1. \quad (2.140)$$

Благодаря простоте формулы (2.138), её производные также достаточно просты. Например, поправка к LMR для внутренней энергии, использованная при оптимизации параметров, равна

$$\Delta u = \Gamma \frac{\partial(\Delta f)}{\partial \Gamma} = \left( \frac{3}{2} - \frac{a \alpha \Gamma^\alpha}{1 + a \Gamma^\alpha} - \frac{b \alpha \beta \Gamma^\alpha}{1 + b \Gamma^\alpha} \right) \Delta f \quad (2.141)$$

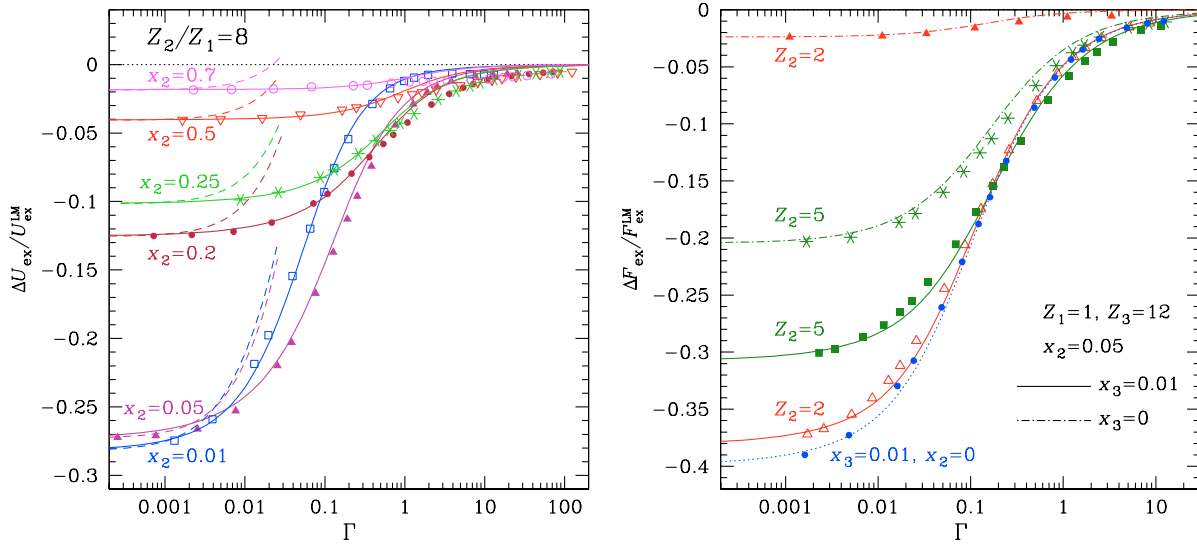


Рис. 2.7: *Левый рисунок*: Относительное отличие между кулоновской частью внутренней энергии в разных приближениях и предсказанием LMR для бинарной смеси ионов с отношением зарядовых чисел  $Z_2/Z_1 = 8$  на несжимаемом фоне. Пунктиром (с пометкой «DH») показано приближение Дебая–Хюккеля, символы представляют численные результаты в приближении HNC [96], сплошные кривые – аппроксимацию (2.138). Разный тип символов соответствует разным относительным концентрациям  $x_2$ : 0,01 (квадраты), 0,05 (заполненные треугольники), 0,2 (кружки), 0,25 (звёздочки), 0,5 (пустые треугольники) и 0,7 (окружности). *Правый рисунок*: Относительное отличие между кулоновской частью свободной энергии и предсказанием LMR для смеси ионов трёх сортов с отношениями зарядовых чисел  $Z_1 : Z_2 : Z_3 = 1 : 2 : 12$  и  $1 : 5 : 12$  с относительными концентрациями  $x_2 = 0,05$  и  $x_3 = 0,01$  (сплошные кривые), а также для бинарных смесей с такими же отношениями зарядовых чисел и концентраций двух сортов ионов. Символы представляют численные результаты в приближении HNC для тех же отношений зарядовых чисел и концентраций.

Сравнение этого приближения с некоторыми из результатов расчётов [94, 96] дано на рис. 2.7. Отличие аппроксимации (2.138) от численных результатов HNC для  $f_{\text{ex}}$  лежит в пределах 1% и в пределах 0,013 по абсолютной величине. Внутренняя энергия, вычисленная согласно (2.141), отличается от результатов HNC не более чем на 0,017 и на 1,5%. Эти наибольшие отличия достигаются для наиболее асимметричных смесей, использованных в расчётах, с  $Z_2/Z_1 = 16$ .

Аппроксимация (2.138) выполняется не только в модели несжимаемого фона, но и согласуется с расчётами для ионных смесей на поляризуемом электронном фоне, представленными в [125], в пределах численной погрешности последних.



## 2.4 Частично ионизованная плотная плазма

Частично ионизованная, плотная по лабораторным меркам плазма может присутствовать в атмосферах нейтронных звёзд при сравнительно невысоких для них плотностях и температурах. Чем выше заряд ядер  $Z$ , тем выше те значения  $\rho$  и  $T$ , до которых плазма частично ионизована. Например, плазму можно считать полностью ионизованной в левом окне на рис. 2.1 (для  $Z = 6$ ), но она лишь частично ионизована в левой нижней области правого окна на том же рисунке (для  $Z = 26$ ).

### 2.4.1 Ионизационное равновесие в химической модели

Теоретическое описание частично ионизованной плазмы может базироваться либо на «физической», либо на «химической» модели (см., напр., обсуждение и ссылки в [5, 141, 142]). В химической модели связанные состояния (атомы, молекулы, ионы) рассматриваются как самостоятельные члены термодинамического ансамбля, тогда как в физической модели единственные участники ансамбля – это атомные ядра и электроны. Каждая из моделей может быть термодинамически самосогласованной, но с микроскопической точки зрения физическая модель является более точной, так как в ней не требуется искусственного разграничения между электронами, связанными с тем или иным конкретным ядром, а такое разграничение становится весьма неоднозначным при высокой плотности, когда сразу несколько ядер могут с приблизительно равной силой притягивать один и тот же электрон. С другой стороны, расчёты в рамках физической модели технически более сложны и основаны на диаграммном разложении, в котором требуется учёт всё большего числа членов при увеличении плотности. По этой причине наилучшее в настоящее время уравнение состояния OPAL [143] ограничено областью  $\rho < \rho_{\text{OPAL}} \approx 10 T_6^3 \text{ г см}^{-3}$ . Взглянув на рис. 2.1, легко убедиться, что эта область покрывает лишь весьма небольшую долю внешних оболочек нейтронных звёзд<sup>3</sup>, поэтому в данной работе мы опираемся на химическую модель в сочетании с методом минимизации свободной энергии. Такой подход представляет собой компромисс между требованиями физической точности и применимости для практического использования в астрофизике [141].

---

<sup>3</sup>Ещё более трудоёмко вычисление спектральных непрозрачностей на основе физической модели – по этой причине в проекте OPAL непрозрачности вычислены с использованием элементов химической модели, на основе оценки индивидуальных чисел заполнения связанных состояний [144].

Свободную энергию в рамках химической модели удобно представлять в виде

$$F = F_{\text{id}}^{(i)} + F_{\text{id}}^{(e)} + F_{\text{id}}^{(\text{bound})} + F_{\text{ii}} + F_{\text{ie}} + F_{\text{ee}} + F_{\text{int}}, \quad (2.142)$$

отличающемся от (2.28) наличием слагаемых  $F_{\text{id}}^{(\text{bound})}$  и  $F_{\text{int}}$ , первое из которых отвечает за вклад идеального газа атомов, молекул и ионов, имеющих связанные электроны, а второе – взаимодействию этих объектов друг с другом и со свободными электронами и ядрами.

Принципиальная трудность в химической модели – необходимость различать связанные и свободные электроны и «приписывать» связанные электроны к определённым ядрам – становится особенно актуальной при высокой плотности, когда размерами связанных объектов уже нельзя пренебрегать по сравнению с расстояниями между ними. Современные подходы к решению этой проблемы, как правило, опираются на концепцию *вероятностей заполнения* квантовых состояний. Для примера, рассмотрим электроны в термодинамическом равновесии с классическими ионами  $Z$ -го химического элемента, и пусть  $j$  – стадия ионизации каждого иона (т.е. число оторванных электронов),  $\kappa$  – его квантовое состояние (уровень), а  $E_{j,\kappa}$  и  $g_{\kappa}^{(j)}$  – соответственно, энергия связи и квантовый статистический вес данного состояния. Вероятность заполнения данного уровня,  $0 \leq w_{j,\kappa} \leq 1$ , представляет собой дополнительный множитель к  $g_{\kappa}^{(j)}$ , имеющий смысл вероятности того, что данное состояние сможет реализоваться в условиях плазменной неидеальности, то есть при наличии взаимодействия иона ( $Z, j, \kappa$ ) с окружающими частицами. Тогда из соотношений (2.1) получается система уравнений

$$\frac{n_{j,\kappa}}{n_{j',\kappa'}} = \left( \frac{n_e \lambda_e^3}{2} \right)^{j'-j} \left( \frac{m_j}{m_{j'}} \right)^{3/2} \frac{g_{\kappa}^{(j)}}{g_{j',\kappa'}} \frac{w_{j,\kappa}}{w_{j',\kappa'}} \exp \left( \frac{E_{j,\kappa} - E_{j',\kappa'}}{k_B T} \right), \quad (2.143)$$

отличающаяся от уравнений химического равновесия для идеального газа множителем  $w_{j',\kappa'}/w_{j,\kappa}$ . Отсюда сразу же получается система уравнений ионизационного равновесия для  $n_j \equiv \sum_{\kappa} n_{j,\kappa}$ : пренебрегая различием масс  $m_j$  и  $m_{j'}$ , получаем

$$\frac{n_j}{n_{j+1}} = \frac{n_e \lambda_e^3}{2} \frac{\mathcal{Z}_{\text{int},j}}{\mathcal{Z}_{\text{int},j+1}} \exp \left( \frac{E_{j,\text{ion}}}{k_B T} \right), \quad (2.144a)$$

где

$$\mathcal{Z}_{\text{int},j} = \sum_{\kappa} g_{\kappa}^{(j)} w_{j,\kappa} \exp \left( \frac{E_{j,\kappa} - E_{j,\text{gr.st}}}{k_B T} \right) \quad (2.144b)$$

есть внутренняя статистическая сумма  $j$ -го иона,  $E_{j,\text{gr.st}}$  – его энергия связи в основном состоянии, а  $E_{j,\text{ion}} = E_{j,\text{gr.st}} - E_{j+1,\text{gr.st}}$  – энергия ионизации. Система (2.144) отличается от обычного уравнения Саха только наличием множителей  $w_{j,\kappa}$ . Как впервые

отметил Э. Ферми [145], множители  $w_{j,\kappa}$  не могут быть произвольными, а должны согласовываться с  $F_{\text{ex}}$ . Уравнение (2.1) предполагает [146]

$$w_{j,\kappa} = \exp \{ [(Z - j) \Delta\mu_e + \Delta\mu_Z - \Delta\mu_{j,\kappa}] / k_B T \}, \quad (2.145)$$

где

$$\Delta\mu_e = \partial F_{\text{ex}} / \partial N_e, \quad \Delta\mu_Z = \partial F_{\text{ex}} / \partial \mu_Z, \quad \text{и} \quad \Delta\mu_{j,\kappa} = \partial F_{\text{ex}} / \partial \mu_{j,\kappa} \quad (2.146)$$

– поправки на неидеальность к парциальным химическим потенциалам. Соотношение (2.145) является прямым следствием уравнений (2.1) и (2.144).

Основная проблема химической модели состоит в том, чтобы найти приближение для вероятностей заполнения, позволяющее наилучшим образом воспроизвести реальное уравнение состояния плазмы. Для этого было предпринято много попыток. Они обсуждались, например, в статье Хаммера и Михаласа [147], где было предложено приближение, основанное на критерии Инглиса–Теллера [148] для исчезновения спектральных линий вследствие их размытия из-за штарковского сдвига в плазменных микрополях. Плотность вероятности распределения напряжённости ионных микрополей  $E_{\text{mic}}$  в плазме в отсутствие корреляции между ионами ( $\Gamma \rightarrow 0$ ) и в отсутствие электронного экранирования подчиняется формуле Хольцмарка [149]

$$P_H(\beta) = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^\infty x \exp(-x^{3/2}) \sin(\beta x) dx, \quad (2.147)$$

где  $\beta = a_{\text{ion}}^2 (Ze)^{-1} E_{\text{mic}}$ , а в пределе очень сильных корреляций ( $\Gamma \rightarrow \infty$ ) – формуле Майера [150]

$$P_M(\beta) = \sqrt{2/\pi} \Gamma^{3/2} \beta^2 \exp(-\Gamma\beta^2/2). \quad (2.148)$$

Для произвольных значений параметров кулоновской связи  $\Gamma$  и экранирования  $k_s$  нами на основе результатов расчётов по методу Монте-Карло в статье [151] получены аппроксимационные формулы для первообразной  $P(\beta)$  – функции распределения

$$Q(\beta) = \int_0^\beta P(\beta') d\beta', \quad (2.149)$$

определяющей вероятность того, что величина микрополя не превышает заданного критического значения, при произвольных величинах параметров  $\Gamma$  и  $k_s$ . В частном случае, когда электронное экранирование отсутствует, распределение ионных микрополей  $Q(\beta)$  для нейтрального атома в плазменном окружении выражается формулой

$$Q(\beta) = \frac{q_0 \beta^3 - 1.33 \beta^{9/2} + \beta^6}{q_1 + q_2 \beta^2 + q_3 \beta^3 - \frac{1}{3} \beta^{9/2} + \beta^6}, \quad \text{где} \quad q_n = \alpha_n (1 + \beta_n \sqrt{\Gamma})^{-\gamma_n}, \quad (2.150)$$

Таблица 2.7: Параметры приближения (2.150)

$n$	0	1	2	3
$\alpha_n$	14,600	103,20	11,127	16,178
$\beta_n$	0,41	1,54	0,58	0,60
$\gamma_n$	0,707	1,64	0,572	0,915

а параметры  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  и  $\gamma_n$  приведены в Табл. 2.7.

При ненулевом параметре экранирования  $k_s$ , а также в случае, когда микрополе определяется не в нейтральной точке, а на заряженной частице, аппроксимации более сложные (см. [151]).

Однако перенос спектроскопического критерия в термодинамику не является физически обоснованным. Необходимость проводить чёткое различие между эффектом исчезновения спектральных линий атома при увеличении давления и эффектом разрушения атома в химической термодинамической модели подчёркивалась в ряде известных работ [152–154]. Действительно, рассмотрим, как ведёт себя вклад в энергию плазмы от конфигурации, в которой положительно заряженный ион приближается к атому. Вследствие поляризации электронного облака суммарная потенциальная энергия такой системы понижается, то есть такая конфигурация даёт отрицательный вклад в полную энергию системы до тех пор, пока расстояние между частицами не станет по порядку величины сравнимым с их размерами, тогда как спектр подобной квазимолекулы будут существенно отличаться от спектра атома. Таким образом, спектральные линии при увеличении плотности исчезают раньше, чем наступает ионизация давлением (ср. сплошную кривую и длинные штрихи на рис. 2.8).

Чтобы учесть эту дихотомию при самосогласованном расчёте уравнения состояния и спектральных непрозрачностей частично ионизованной плазмы в рамках химической модели, в работе [146] мы ввели понятие *оптических вероятностей заполнения* квантовых состояний  $\tilde{w}_{j,\kappa}$ , которые сходны с вероятностями заполнения Хаммера–Михаласа [147] и должны использоваться при расчёте спектральных непрозрачностей (см. § 7.3), но отличаются от *термодинамических вероятностей заполнения*  $w_{j,\kappa}$ , используемых при расчёте уравнения состояния.

На основе этого формализма нами построено [146, 155] самосогласованное описание термодинамических и спектральных свойств водородной плазмы, применимое при любых плотностях и температурах, встречающихся в оболочках нейтронных

звёзд. Его описанию посвящён следующий параграф. Однако для плазмы тяжёлых элементов, включающей многозарядные ионы, требуется учёт взаимодействия связанных электронов, находящихся на различных ионных подоболочках, между собой и с электронами континуума. Это усложняет задачу. Метод её решения будет описан и проиллюстрирован на примере расчёта уравнения состояния горячей углеродной плазмы произвольной плотности в § 2.4.3.

## 2.4.2 Водородная плазма

Уравнение состояния частично ионизованной водородной плазмы строилось и обсуждалось в огромном числе работ. Однако из-за технических трудностей физической модели и принципиальных ограничений химической модели плазмы, отмеченных в предыдущем разделе, каждое из ранее разработанных уравнений состояния имеет определённую ограниченную область применимости. В данном параграфе описана модель [146, 155], разработанная нами для условий, встречающихся в оболочках нейтронных звёзд, и служащая основой для построения уравнения состояния частично ионизованного водорода в квантующем магнитном поле, которое будет рассмотрено в главе 5. Рассматриваемая область параметров характеризуется температурой не ниже, чем несколько десятков тысяч градусов, и широким диапазоном плотности. За основу взято наиболее детализированное из ранее предлагавшихся уравнений состояния, применимых в этой области параметров, – уравнение Сомона–Шабрие [156, 157] (см. также ссылки в [158]). Наше уравнение состояния воспроизводит результаты Сомона–Шабрие с хорошей точностью в указанной области температур и отличается тем, что лежащая в его основе модель свободной энергии выражается полностью аналитической формулой.

Рассмотрим уравнение (2.142). Вклад идеального газа атомов в свободную энергию равен

$$F_{\text{id}}^{(\text{bound})} = k_{\text{B}}T \sum_{\kappa} N_{\kappa} [\ln(n_{\kappa}\lambda_{\text{H}}^3/g_{\kappa}) - 1 - E_{\kappa}/k_{\text{B}}T], \quad (2.151)$$

где  $N_{\kappa}$  – количество атомов в квантовом состоянии  $|\kappa\rangle$ ,  $g_{\kappa}$  – квантовый статистический вес этого состояния,  $\lambda_{\text{H}}$  – тепловая длина волны атома водорода, аналогичная  $\lambda_{\text{ion}}$  (2.21) а  $E_{\kappa}$  – энергия связи. В этом параграфе используем упрощённое описание: состояния атома с одним и тем же главным квантовым числом и различными орбитальным и магнитным квантовыми числами не рассматриваются по отдельности. Таким образом,  $\kappa$  можно положить равным главному квантовому числу, причём энергия связи равна  $E_{\kappa} = \text{Ry}/\kappa^2$ , а статистический вес  $g_{\kappa} = \kappa^2$ .

Следует заметить, что эффекты неидеальности, хоть и не включены в  $F_{\text{id}}^{(\text{bound})}$  явно, влияют на  $F_{\text{id}}^{(\text{bound})}$  через числа заполнения состояний. В частности, распределение  $N_{\kappa}$  в (2.151) не предполагается больцмановским.

Неидеальность, связанная с конечными размерами атомов, трактуется в «приближении твёрдых сфер»: предполагается, что два атома в состояниях  $\kappa$  и  $\kappa'$  не могут оказаться ближе друг к другу, чем на расстоянии между их центрами, равном  $d_{\kappa\kappa'} = l_{\kappa} + l_{\kappa'}$ , где  $l_{\kappa}$  – среднеквадратичное расстояние между ядром и электроном в изолированном атоме. Точно так же, атом водорода и протон нельзя рассматривать отдельно, если расстояние между ядром атома и протоном меньше, чем  $d_{\kappa p} = l_{\kappa}$ . Вследствие этих запретов появляется вклад в  $F_{\text{int}}$ , отвечающий «исключённому объёму», –  $F_{\text{vol}}$ . Для этого вклада мы используем формулу [159]

$$\frac{F_{\text{vol}}}{N_{\text{tot}} k_{\text{B}} T} = \frac{4\eta_{\text{pack}} - 3\eta_{\text{pack}}^2}{(1 - \eta_{\text{pack}})^2}, \quad (2.152)$$

где  $N_{\text{tot}} = \sum_{\alpha} N_{\alpha}$  – полное число частиц,

$$\eta_{\text{pack}} = \frac{\pi}{6N_{\text{tot}} V} \sum_{\alpha\alpha'} N_{\alpha} N_{\alpha'} d_{\alpha\alpha'}^3 \quad (2.153)$$

– эффективный параметр упаковки, а  $d_{\alpha\alpha'}$  – диаметры взаимодействия твёрдых сфер. Мы используем простейшую модель для диаметров:

$$d_{\alpha\alpha'}^{(0)} = l_{\alpha} + l_{\alpha'}, \quad d_{\alpha p}^{(0)} = l_{\alpha}, \quad (2.154)$$

где  $l_{\alpha}$  – среднеквадратичное расстояние между электроном и ядром в заданном квантовом состоянии. В нашем случае индекс  $\alpha$  нумерует атомные состояния  $\kappa$  и свободный протон  $p$ . Взаимодействие между ядрами уже учтено в  $F_{\text{ii}}$ , поэтому полагаем  $d_{pp} = 0$ .

Наряду с моделью, в которой  $F_{\text{int}} = F_{\text{vol}}$ , в [146, 155] исследована более сложная модель свободной энергии, в которой ко вкладу (2.152), описывающему эффект исключённого объёма, добавляется вклад противоположного знака, возникающий из-за поляризации атомов при их взаимодействии между собой и с ионами:

$$F_{\text{pert}}^{(\text{H})} = - \sum_{\kappa\kappa'} N_{\kappa} N_{\kappa'} a_{\kappa\kappa'} / V, \quad F_{\text{pert}}^{(\text{in})} = - \sum_{\kappa} N_{\text{p}} N_{\kappa} a_{\kappa} / V, \quad (2.155)$$

где  $a_{\kappa\kappa'}$  и  $a_{\kappa}$  – постоянные Ван-дер-Ваальса, для которых в [146] получены приближённые формулы

$$a_{\kappa\kappa'} = -s_{\kappa\kappa'}^2 k_{\text{B}} T_0 \frac{2\pi}{3} (R_0^3 - d_{\text{H}}^3(s_{\kappa\kappa'} T)), \quad (2.156)$$

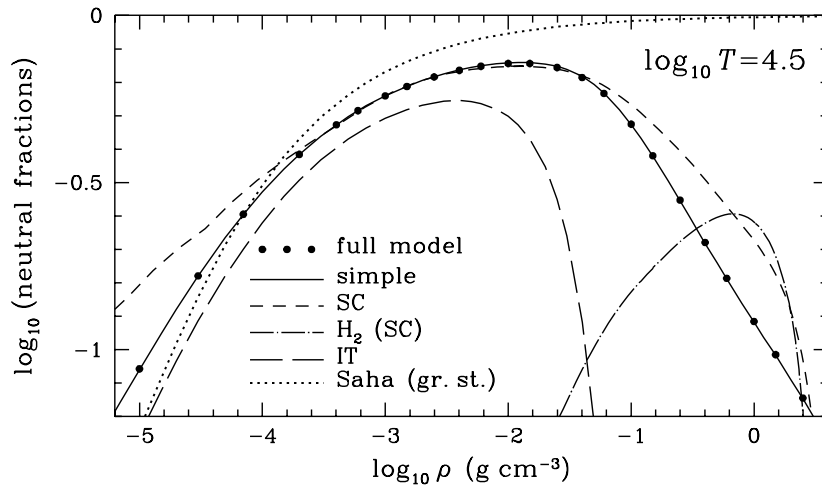


Рис. 2.8: Доля нейтральных атомов в зависимости от плотности при  $T = 3,162 \times 10^4$  К согласно представленной модели (кружкí – с учётом поляризационных поправок (2.155), сплошная кривая – без их учёта) в сравнении с моделью Сомона–Шабрие (пунктир) и с уравнением Саха для идеального газа при учёте только основного квантового состояния атомов (точечный пунктир). Штрих-пунктир показывает долю молекул, длинные штрихи – долю атомов, которые спектроскопически различимы (т.е. удовлетворяют критерию Инглиса–Теллера).

где  $T_0 = 20,2$  К,  $R_0 = 8,6a_B$ ,  $s_{\kappa\kappa'} = (l_\kappa + l_{\kappa'})/(2l_1)$ ,  $l_n = a_B n \sqrt{(7n^2 + 5)/4}$ ,

$$d_H = 6a_B \left[ 1 + \ln(1 + 4\sqrt{t}) + \frac{t}{1 + \ln(1 + t/2)} \right]^{-1}, \quad t \equiv T/(3,25 \times 10^4 \text{ К}), \quad (2.157)$$

и

$$a_\kappa = e^2 l_\kappa^2 \left[ v_*(l_\kappa/r_D) - \frac{4\pi}{3} \phi_*(l_\kappa/r_D) d_*^3(s_\kappa T) \right], \quad (2.158)$$

где

$$v_*(x) = \frac{4 - 1,7x}{1 + 1,7x}, \quad \phi_*(x) = \frac{0,155 - 0,0212x^2}{1 + 0,34x^2}, \quad (2.159)$$

и

$$d_* = 0,615a_B \left[ 1 + \ln(1 + 0,71\sqrt{t}) + \frac{t}{1 + \ln(1 + 0,75t)} \right]^{-1}, \quad t \equiv T/(2,15 \times 10^4 \text{ К}). \quad (2.160)$$

Как показано в [155], при температурах, характерных для оболочек нейтронных звёзд и белых карликов, поляризационными частями свободной энергии (2.155) можно пренебречь, так как при этом уравнение состояния изменяется не более, чем в пределах различий между разными современными более детальными моделями уравнения состояния водородной плазмы.

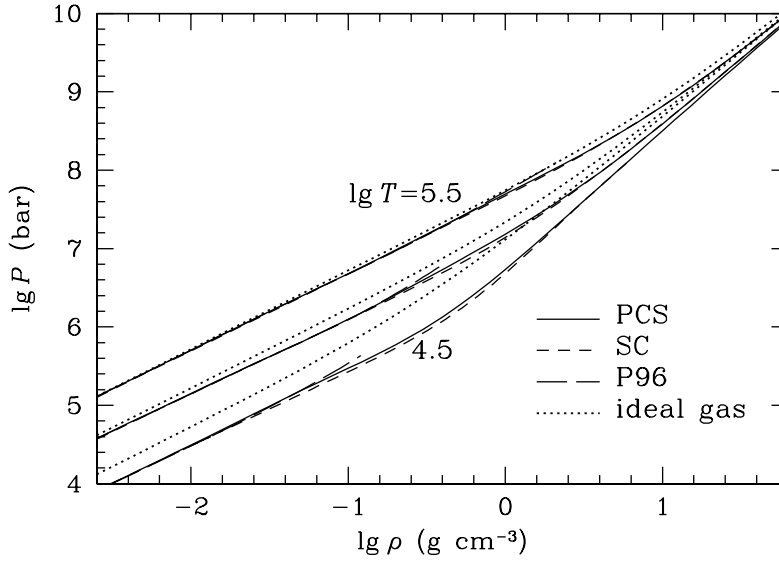


Рис. 2.9: Изотермы давления согласно представленной в тексте модели [155] (сплошные кривые) в сравнении с моделью [146], в которой электронное вырождение учтено по теории возмущений (длинный пунктир), с моделью Сомона–Шабрие [157] (короткий пунктир) и с уравнением состояния идеального газа протонов и вырожденных электронов (точечный пунктир).

С учётом электронного вырождения обобщённое уравнение Саха (2.144) можно записать в виде

$$n_{\text{H}} = n_p \frac{n_e \lambda_e^3}{2} Z_{\text{int}} \exp\left(\frac{E_{\text{gr.st}} + \Delta\mu_{\text{deg}}}{k_{\text{B}}T}\right), \quad (2.161)$$

где  $n_p$  – концентрация свободных протонов,  $E_{\text{gr.st}}$  – энергия связи основного состояния,

$$\Delta\mu_{\text{deg}} = \partial F_{\text{id}}^{(e)} / \partial N_e - \ln(n_e \lambda_e^3 / 2) \quad (2.162)$$

– поправка химического потенциала на вырождение ( $\Delta\mu_{\text{deg}} \rightarrow 0$  при  $\theta \gg 1$ ),

$$Z_{\text{int}} = \sum_{\kappa} g_{\kappa} w_{\kappa} \exp\left(\frac{E_{\kappa} - E_{\text{gr.st}}}{k_{\text{B}}T}\right) \quad (2.163)$$

– внутренняя статистическая сумма для атомов, модифицированная за счёт включения  $w_{\kappa}$  – вероятностей заполнения (2.145). Согласно (2.145),

$$k_{\text{B}}T \ln w_{\kappa} = \frac{\partial F_{\text{ex}}}{\partial N_{\text{ion}}} + \frac{\partial F_{\text{ex}}}{\partial N_e} - \frac{\partial F_{\text{ex}}}{\partial N_{\kappa}}. \quad (2.164)$$

Система уравнений (2.161)–(2.164) замыкается при помощи условий электронейтральности  $n_e = n_p$  и сохранения числа частиц  $n_{\text{H}} + n_p = (\rho / 11,293 \text{ г см}^{-3}) a_{\text{B}}^{-3}$ .



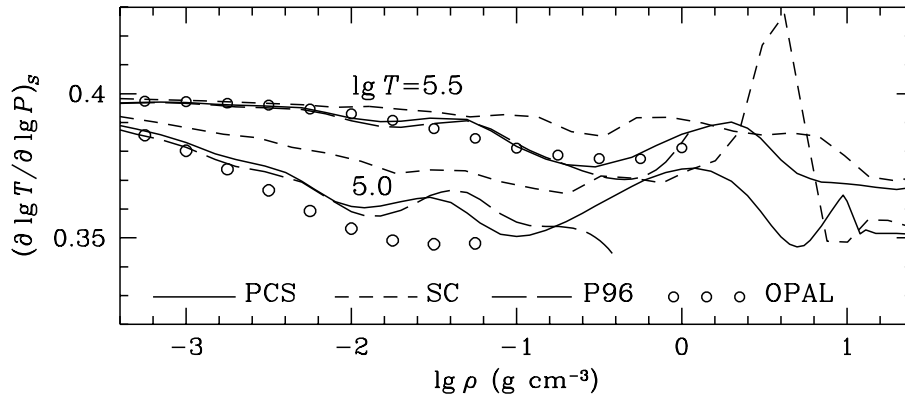


Рис. 2.10: Адиабатический градиент давления (2.5) при двух значениях температуры (значения  $\lg T = 5,5$  и  $6,0$  указаны рядом с соответствующими кривыми) в зависимости от плотности: сравнение представленной в тексте модели [155] (сплошные кривые) с упрощённой моделью [146] (длинный пунктир), усложнённой моделью [157] (короткий пунктир) и физической моделью OPAL [143] (незаполненные кружки).

Больцмановское распределение атомов с учётом неидеальности

$$n_{\kappa} = \mathcal{Z}_{\text{int}}^{-1} n_{\text{H}} g_{\kappa} w_{\kappa} e^{(E_{\kappa} - E_{\text{gr.st}})/k_{\text{B}}T}. \quad (2.165)$$

Минимум свободной энергии находим численно, решая систему уравнений (2.161)–(2.165) методом итераций.

Молекулы  $\text{H}_2$  можно учесть на основе уравнения диссоциативного равновесия

$$\partial F / \partial N_{\text{H}_2} = 2 (\partial F / \partial N_{\text{p}} + \partial F / \partial N_{\text{e}}), \quad (2.166)$$

откуда получаем

$$n_{\text{H}_2} = n_{\text{H}}^2 (\lambda_{\text{H}} \sqrt{2})^3 \mathcal{Z}_{w_2} / \mathcal{Z}_w^2, \quad (2.167)$$

где  $\mathcal{Z}_{w_2}$  – молекулярная статистическая сумма, модифицированная посредством умножения каждого члена  $\kappa$  на вероятность заполнения  $w_{\kappa}^{\text{H}_2}$ , вычисляемую согласно

$$k_{\text{B}}T \ln w_{\kappa}^{\text{H}_2} = 2 \left( \frac{\partial F_{\text{ex}}}{\partial N_{\text{ion}}} + \frac{\partial F_{\text{ex}}}{\partial N_{\text{e}}} \right) - \frac{\partial F_{\text{ex}}}{\partial N_{\kappa}^{\text{H}_2}}. \quad (2.168)$$

Результаты расчётов в соответствии с описанным алгоритмом и их сравнение с некоторыми другими моделями даны на рисунках 2.8–2.10. На рис. 2.8 показаны зависимости доли атомов согласно представленной здесь модели, согласно модели Сомона–Шабрие и идеальному уравнению Саха без учёта возбуждённых состояний атомов, а также доля молекул при фиксированной температуре в зависимости от

плотности. На рис. 2.9 показаны изотермы давления для разных моделей. Результаты описанной в данном параграфе модели близки к результатам модели Сомона–Шабрие. Обе они при  $T \lesssim 10^5$  К предсказывают существенно более низкое давление, чем модель полностью ионизованного идеального газа, что объясняется отрицательным вкладом кулоновской неидеальности и атомной рекомбинации. На рис. 2.9 показаны изотермы адиабатического градиента (2.5) для тех же моделей в сравнении с моделью OPAL [143], построенной на основе альтернативной – физической – модели плазмы. Можно видеть, во-первых, что адиабатический градиент чувствительнее к деталям моделей, чем давление (как и вообще термодинамические функции второго порядка более чувствительны, чем функции первого порядка), и во-вторых, что представленная простая модель даёт не худшее согласие с моделью OPAL, чем более сложная модель Сомона–Шабрие. Поэтому мы используем нашу модель в расчётах остывания нейтронных звёзд и берём её за основу при построении уравнения состояния частично ионизованной плазмы (глава 5).

В заключение данного параграфа ещё раз подчеркнём, что построенное уравнение состояния не претендует на наивысшую точность. В литературе имеются расчёты уравнения состояния водорода и дейтерия из первых принципов с использованием различных модификаций метода Монте-Карло (напр., [160] и ссылки там). Представленное здесь уравнение состояния предназначено для астрофизических расчётов, где необходим разумный компромисс между точностью и трудоёмкостью вычислений, а также для последующего обобщения на случай сильного магнитного поля.

### 2.4.3 Плазма, содержащая многозарядные ионы

В отличие от водорода, рассмотренного в предыдущем параграфе, атомы с несколькими электронами и их ионы имеют сложную электронную структуру, которую следует учитывать при расчёте уравнения состояния, причём надо принять во внимание, что эта структура меняется в плазме по сравнению со случаем изолированного атома. Связанные состояния взаимодействуют с электронами непрерывного спектра. Чем выше заряд иона, тем менее оправданно пренебрежение этим взаимодействием, использованное нами для водорода. Самосогласованный способ расчёта электронных состояний дискретного и непрерывного спектра в плазменном окружении был предложен Жераром Массакрие [161] и реализован для случая углеродной плазмы в нашей совместной работе [162]. Метод Массакрие имеет следующие особенности, отличающие его от ранее применявшихся моделей:

1. для каждой стадии ионизации строится своя модель, учитывающая реальную структуру связанных состояний иона (конфигурации, LS-связь);
2. для суммирования внутренних статистических сумм каждого типа ионов используется статистика Больцмана;
3. учитывается уширение дискретных уровней в энергетические зоны при ионизации давлением;
4. к электронному фону в окрестности каждого иона применяется квантовомеханическое рассмотрение с учётом резонансов.

Пункты (1) и (2) отличают эту модель от моделей среднего атома (среднего иона). Квантовомеханический учёт взаимодействия связанных и свободных электронов (пункты (3) и (4)) отменяет необходимость введения члена  $F_{\text{vol}}$ , использованного в предыдущем параграфе: эффект «исключённого объёма» самосогласованно учитывается при вычислении статистических сумм ионов.

Наиболее близкий подход из имеющихся в литературе был представлен в статье [163], где разные стадии ионизации рассматриваются по отдельности, однако в ней электронное экранирование учитывается в приближении Томаса – Ферми.

### 2.4.3а Модель свободной энергии

В работе [162] использован метод минимизации свободной энергии в форме, представленной в уравнении (2.142). Рассмотрена нейтральная плазма, состоящая из  $N_e$  свободных электронов и  $N_{\text{ion}}$  ионов в объёме  $V$ , с числом связанных электронов  $\nu$  от 0 до  $Z_{\text{нuc}}$ , где  $Z_{\text{нuc}}$  – номер химического элемента.

Для вычисления вклада за счёт дальнедействующих потенциалов,  $F_{\text{ex}}^{\text{fi}} \equiv F_{\text{ii}} + F_{\text{ie}} + F_{\text{ee}}$ , первоначально в [162] было использовано правило линейного смешивания, но в настоящее время мы повторили расчёты с учётом поправки к нему согласно § 2.3.9:

$$F_{\text{ex}}^{\text{fi}}(N_{\text{ion}}, V, T, \{x_\nu\}, \{Z_\nu\}) = N_{\text{ion}} k_B T \left( \sum_\nu x_\nu f_\nu + \Delta f \right), \quad (2.169)$$

где

$$f_\nu = f_{\text{ex}}^{\text{fi}}(n_e, T, Z_\nu) = F_{\text{ex}}^{\text{fi}}|_{x_\nu=1} / N_{\text{ion}} k_B T. \quad (2.170)$$

Мы вычисляем  $F_{\text{ee}} + F_{\text{ii}} + F_{\text{ie}}$  в уравнении (2.29) в соответствии с § 2.3.

Чтобы оценить  $F_{\text{int}}$ , рассчитываем структуру ионов в плазме на основе схемы, представленной в [161]. Она основана на *приближении ионной сферы*, в котором ре-

альное плазменное окружение для каждого иона заменяется статистически усреднённым граничным условием для электронных волновых функций внутри сферы с центром на атомном ядре. В настоящее время в модель не включены нейтральные атомы ( $\nu = Z_{\text{нuc}}$ ), что оправдано для высокой степени ионизации плазмы. Для каждого иона, имеющего  $\nu$  связанных электронов, радиус ионной сферы  $R_\nu$  определяется самосогласованным образом из условия электронейтральности сферы в целом. Гамильтониан иона  $\nu$  записывается как  $H_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} h_\nu(\mathbf{r}_i) + W_\nu$ , где

$$h_\nu(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2}\nabla^2 + V_{\text{at}}^\nu(r) + V_{\text{f}}^\nu(r), \quad W_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \left( -\frac{Z_{\text{нuc}}e^2}{r_i} - V_{\text{at}}^\nu(r_i) \right) + \sum_{i<j}^{\nu} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (2.171)$$

а  $V_{\text{f}}^\nu$  – потенциал плазмы, в которую погружён ион  $\nu$ . Этот потенциал определяется самосогласованным образом,  $W_\nu$  отвечает за LS-расщепление спектральных термов [164], а  $V_{\text{at}}^\nu$  – масштабированный потенциал Томаса–Ферми для иона с  $\nu - 1$  связанными электронами [165]. Отметим, что потенциал  $V_{\text{at}}^\nu$  не влияет на суммарный гамильтониан  $H_\nu$ . Он используется только для построения эффективного одноэлектронного гамильтониана  $h_\nu$ , который порождает базис одноэлектронных волновых функций. Координатные части этих функций,  $\psi_{nlm}^\nu$ , находятся из уравнения Шрёдингера

$$h_\nu \psi_{nlm}^\nu = \epsilon_{\nu nl} \psi_{nlm}^\nu(\mathbf{r}). \quad (2.172)$$

Затем  $H_\nu$  диагонализуется в подпространстве слэтеровских детерминантов, порождённом набором функций  $\psi_{nlm}^\nu$ . Энергии  $\nu$ -электронных связанных состояний с хорошей точностью аппроксимируются выражением

$$E_{\nu\alpha} = E_{\nu\alpha}^0 + \sum_{(nl)\in\alpha} (\epsilon_{\nu nl} - \epsilon_{\nu nl}^0), \quad (2.173)$$

где  $E_{\nu\alpha}^0$  и  $\epsilon_{\nu nl}^0$  вычисляются для изолированного иона, а  $\alpha = (nl)_1(nl)_2 \dots (nl)_\nu$   $^{2S+1}L$  определяет конкретный LS-терм электронной конфигурации. Разделение  $H_\nu$  на слагаемые  $h_\nu$  и  $W_\nu$  (2.171) позволяет учесть влияние плазмы на одноэлектронные энергии и волновые функции при помощи уравнения (2.172), сохраняя  $\nu$ -электронную структуру посредством вклада  $W_\nu$ . Граничное условие на  $R_\nu$  для (2.172) не оказывает заметного влияния на  $E_{\nu\alpha}$  нигде, кроме тех плотностей, при которых наступает ионизация давлением соответствующего терма  $\alpha$ . Этот случай будет отдельно рассмотрен ниже.

Плотность свободных электронов  $n_{\text{f}}(r)$  и потенциал  $V_{\text{f}}^\nu(r)$  рассчитываются совместно в приближении локальной плотности теории функционала плотности. Одноэлектронные волновые функции  $\psi_{\ell m}^\nu(\mathbf{r})$  парциальных рассеянных волн находятся из

уравнения Шрёдингера

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2}\nabla^2 - \frac{Z_{\text{nuc}}e^2}{r} + V_{\text{b}}^\nu(r) + V_{\text{f}}^\nu(r) + V_{\text{xc}}^\nu(r) \right) \psi_{\text{elm}}^\nu(\mathbf{r}) = \epsilon \psi_{\text{elm}}^\nu(\mathbf{r}). \quad (2.174)$$

Здесь  $V_{\text{xc}}^\nu$  – обменно-корреляционный потенциал [166], потенциалы  $V_{\text{b}}^\nu$  и  $V_{\text{f}}^\nu$  вычисляются из уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 V_{\text{b}}^\nu = -4\pi n_{\text{b}}^\nu e^2 \quad \nabla^2 V_{\text{f}}^\nu = -4\pi n_{\text{f}}^\nu e^2, \quad (2.175)$$

а концентрации электронов  $n_{\text{b}}^\nu(r)$  и  $n_{\text{f}}^\nu(r)$  определяются как квадраты модулей волновых функций связанных и свободных электронов, соответственно, просуммированные со статистическими весами, отвечающими заданной температуре  $T$ . Для связанных электронов эти веса пропорциональны  $w_{\nu\alpha} d_{\nu\alpha} \exp(-E_{\nu\alpha}/k_{\text{B}}T)$ , где  $d_{\nu\alpha} = (2S + 1)(2L + 1)$  – кратность уровня, а  $w_{\nu\alpha}$  – вероятность заполнения, определённая ниже. Плотность состояний в единице объёма для  $l$ -й парциальной волны свободных электронов при заданной энергии  $g_{\nu l}(\epsilon)$  определяется при совместном учёте плотности свободных и связанных состояний, как описано в [161]. Распределение энергии свободных электронов предполагается пропорциональным  $g_{\nu l}(\epsilon)/(1 + \exp[(\epsilon - \mu_e)/k_{\text{B}}T])$ . Свободными параметрами модели являются температура  $T$  и электронный химический потенциал  $\mu_e$ . В термодинамическом равновесии значение  $\mu_e$  одинаково для всех ионов. Однако ионы на разных стадиях ионизации имеют разные радиусы сферы нейтральности и разное число нейтрализующих электронов внутри этих сфер, поэтому  $\mu_e$  можно поставить в соответствие средней концентрации свободных электронов только после того, как минимизация полной свободной энергии даст относительные населённости разных ионов.

Нейтральность ионной сферы обеспечивается самосогласованным определением радиуса  $R_\nu$ , таким образом, что

$$\frac{d}{dr} \left[ -\frac{Z_{\text{nuc}}}{r} + V_{\text{b}}^\nu(r) + V_{\text{f}}^\nu(r) \right]_{r=R_\nu} = 0. \quad (2.176)$$

С этим радиусом ассоциирован объём нейтральности  $v_\nu = 4\pi R_\nu^3/3$ . В модели несжимаемого электронного фона имеем  $v_\nu = v_\nu^0 = (Z_{\text{nuc}} - \nu)/n_e^0$ , где  $n_e^0(\mu_e, T) = V^{-1}\partial F_e/\partial \mu_e|_{V,T}$  – концентрация свободных электронов, соответствующая этой модели. С учётом взаимодействий электронов между собой и с ионами,  $v_\nu$  отличается от  $v_\nu^0$ , как показано в левом окне на рис. 2.11. Скачки вниз изображённых на рисунке кривых при определённых плотностях, особенно резкие при низкой температуре, являются следствием ионизации давлением отдельных уровней: когда уровень  $nl$  иона  $\nu$

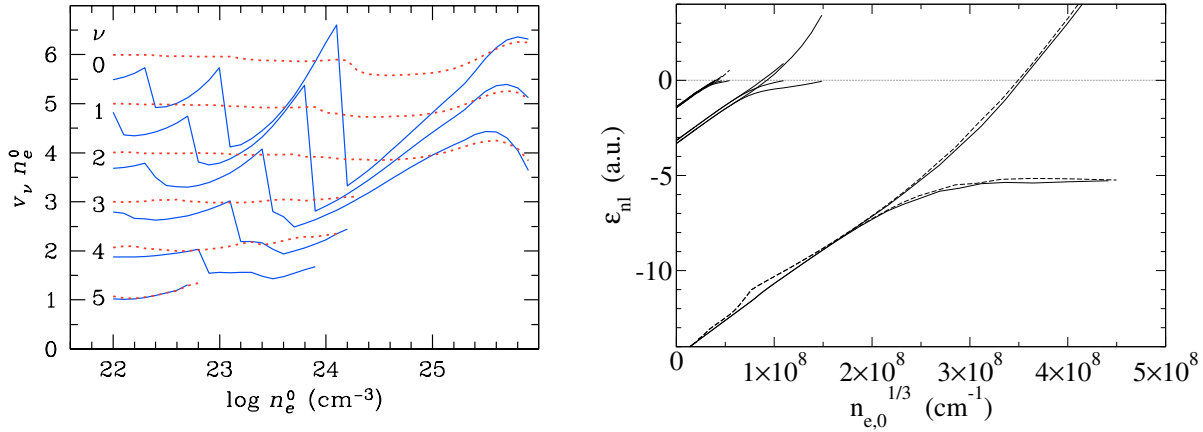


Рис. 2.11: *Левый рисунок*: Объёмы нейтральности для ионов углерода,  $v_\nu$ , нормированные на оценочную плотность свободных электронов  $n_e^0$  (см. текст), как функции  $n_e^0$  для  $T = 2,32 \times 10^5$  К (сплошные кривые) и  $T = 3,71 \times 10^6$  К (точечный пунктир) для ионов углерода с числом  $\nu$  связанных электронов ( $\nu = 0, 1, \dots, 5$ ). Кривые для трёх первых степеней ионизации ( $\nu = 3, 4, 5$ ) оканчиваются при значениях  $n_e^0$ , при которых не остаётся соответствующих связанных состояний ( $\epsilon_-$  становится положительным для состояния  $2s$  в конфигурациях  $1s^2 2s$  и  $1s^2 2s^2$ , и для состояния  $2p$  в  $1s^2 2s^2 2p$ ). *Правый рисунок*: Одно-электронные энергии гелиеподобного иона углерода ( $\nu = 2$ ) как функции  $n_e^0$ . Сплошные кривые – для  $T = 3,71 \times 10^6$  К и состояний  $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d$  (снизу вверх); пунктир – для  $T = 2,32 \times 10^5$  К и состояния  $1s$ . Расщепление каждой кривой при высокой плотности соответствует верхней и нижней границам энергетических  $\epsilon_+$  и  $\epsilon_-$ .

пересекает уровень континуума и превращается в резонанс следующей стадии ионизации  $\nu - 1$ , сфера нейтральности иона  $\nu - 1$  сжимается, компенсируя увеличение плотности состояний свободных электронов.

С увеличением  $\mu_e$  (или  $n_e^0$ ) радиус  $R_\nu$  уменьшается, волновые функции  $\psi_{nlm}^\nu(r)$  искажаются, и энергии дискретных уровней  $\epsilon_{\nu nl}$  превращаются в энергетические зоны. Оценкой ширины зоны служит решение уравнения (2.172) с двумя альтернативными граничными условиями:  $\psi_{nlm}^\nu(R_\nu) = 0$  или  $\partial\psi_{nlm}^\nu/\partial r = 0$  при  $r = R_\nu$ . Эти два условия дают два собственных значения энергии, которые интерпретируются как верхний ( $\epsilon_+$ ) и нижний ( $\epsilon_-$ ) края энергетической зоны (правое окно на рис. 2.11). С уменьшением  $R_\nu$  ниже некоторого порога, энергия  $\epsilon_+$  становится положительной. Электроны с  $0 < \epsilon < \epsilon_+$  рассматриваются как свободные и исключаются из внутренней статистической суммы иона. Вероятность заполнения  $w_{\nu nl}$  приравнивается статистическому весу электронов с  $\epsilon < 0$ . Предполагая, что плотность состояний внутри энергетической зоны описывается функцией Хаббарда

$$g(\epsilon) = \frac{2}{\pi\delta^2} \sqrt{\delta^2 - (\epsilon - \bar{\epsilon})^2}, \quad \delta = \frac{\epsilon_+ - \epsilon_-}{2}, \quad \bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_+ + \epsilon_-}{2}, \quad (2.177)$$

находим для  $\epsilon_- < 0 < \epsilon_+$

$$w_{\nu nl} = \frac{1}{2} - \frac{y}{\pi} \sqrt{1-y^2} - \frac{1}{\pi} \arcsin(y), \quad \text{где } y = \frac{\epsilon_+ + \epsilon_-}{\epsilon_+ - \epsilon_-}. \quad (2.178)$$

Вероятность заполнения терма  $\alpha$  равна  $w_{\nu\alpha} = \prod_{(nl) \in \alpha} w_{\nu nl}$ . Для всех электронных оболочек  $nl$ , кроме К-оболочки,  $\epsilon_-$  при достаточно большом  $\mu_e$  становится положительным; в этом случае  $w_{\nu nl} = 0$ , и связанное состояние исчезает. Кривые на рис. 2.11 оканчиваются при тех концентрациях электронов, при которых соответствующие связанные состояния  $\nu$ -го иона в плазме перестают существовать.

Для К-оболочек водородо- и гелиеподобных ионов  $\epsilon_-$  остаётся отрицательным при любой плотности. Асимптотически, при больших  $\mu_e$  (малых  $R_\nu$ ) и однородной концентрации  $n_e$ ,  $\epsilon_- \simeq -0,3(Z_{\text{нuc}} - \nu)e^2/R_\nu$ , тогда как  $\epsilon_+ \simeq 0,5 m_e^{-1}(\pi\hbar/R_\nu)^2$ . Следовательно, при высоких плотностях  $w_{\nu nl} \simeq (4\sqrt{6}/\pi^4)[(Z_{\text{нuc}} - \nu)R_\nu/5a_0]^{3/2} \propto n_e^{-1/2}$ .

Электроны, населяющие те зоны, которые перекрываются с континуумом, де-локализованы, и поэтому они дают вклад в вырождение свободных электронов в соответствии с принципом Паули. Это означает, что при заданном  $n_{\text{ion}}$  наличие таких электронов повышает  $\mu_e$ . И наоборот, при заданном  $\mu_e$  выход части электронов в континуум увеличивает объём нейтральности, который соответствует неэкранированной оболочке. Поскольку доля таких квазисвободных электронов равна  $(1 - w_{\nu\alpha})$ , эффективный заряд иона для частично делокализованного состояния, который используется в (2.170), равен  $Z_\nu = Z_{\text{нuc}} - \nu w_\nu - \nu^*(1 - w_\nu)$ , где  $w_\nu = w_{\nu\alpha}$  для низшего уровня  $\alpha$  иона с  $\nu$  электронами, а  $\nu^* < \nu$  – число электронов, оставшихся на внутренних оболочках ( $\nu^* = 0$  для конфигураций  $1s$  и  $1s^2$ ).

Вклад внутренних степеней свободы в свободную энергию вычисляется по формуле  $F_{\text{int}} = -\sum_\nu N_\nu k_B T \ln \mathcal{Z}_\nu$ , где  $\mathcal{Z}_\nu = \sum_\alpha w_{\nu\alpha} d_{\nu\alpha} \exp(-E_{\nu\alpha}/k_B T)$  – внутренняя статистическая сумма иона в плазме.

Полная свободная энергия, нормированная на  $N_{\text{ion}} k_B T$ , равна

$$f \equiv \frac{F_{\text{tot}}}{N_{\text{ion}} k_B T} = f^{\text{fi}} + f_{\text{int}}, \quad (2.179)$$

где

$$f^{\text{fi}} = \sum_\nu x_\nu f_\nu + f_i + \langle Z \rangle f_e, \quad f_i = \ln(n_{\text{ion}} \lambda_{\text{ion}}^3) - 1 - s_{\text{mix}}, \quad f_e = \chi_e - p_e, \quad (2.180)$$

$$\chi_e = \frac{\mu_e}{k_B T}, \quad p_e = \frac{P_{\text{id}}^{(e)}}{n_e k_B T}, \quad f_{\text{int}} = \frac{F_{\text{int}}}{N_{\text{ion}} k_B T}, \quad s_{\text{mix}} = \frac{S_{\text{mix}}}{N_{\text{ion}} k_B T}. \quad (2.181)$$

Каждую из составляющих в  $f^{\text{fi}}$  можно вычислить на основе приближённых формул § 2.3, и только  $f_{\text{int}}$  приходится определять численно.

### 2.4.3b Поиск термодинамического равновесия

Минимум свободной энергии  $F_{\text{tot}}$  определяется при условии  $\sum_{\nu} N_{\nu} = N_{\text{ion}}$ . Условие нейтральности (2.7) выполняется автоматически, потому что в каждой ионной ячейке число электронов равно  $Z_{\text{nuc}}$  по построению, но это достигается ценой того, что полный объём заранее не фиксирован. Для поддержания  $V = \text{const}$  необходимо наложить связь  $\sum_{\nu} N_{\nu} v_{\nu} = V$ . Таким образом, искомые условия термодинамического равновесия можно записать в виде

$$f = \text{minimum}; \quad G_N = G_V = 1; \quad x_{\nu} \geq 0, \quad \forall \nu; \quad G_N = \sum_{\nu} x_{\nu}, \quad G_V = n_{\text{ion}} \sum_{\nu} x_{\nu} v_{\nu}, \quad (2.182)$$

где  $f = f(\chi_e, T, \{x_{\nu}\})$  вычисляется согласно (2.179),  $n_{\text{ion}}$  и  $T$  фиксированы, а  $\chi_e$  и  $x_{\nu}$  могут варьироваться.

Для поиска условного минимума (2.182) мы задаём условие  $G_N = 1$  в явном виде как  $x_0 = 1 - \sum_{\nu=1}^{Z_{\text{nuc}}-1} x_{\nu}$  и исключаем те наборы  $\{x_{\nu}\}$ , которые дали бы отрицательную правую часть в этом равенстве (как отмечено выше, нейтральные атомы  $\nu = Z_{\text{nuc}}$  не рассматриваются). Чтобы удовлетворить второму условию,  $G_V = 1$ , используем метод множителей Лагранжа: минимизируем вспомогательную функцию

$$\Phi(n_{\text{ion}}, T; \chi_e, \{x_{\nu}\}; \lambda) = f - \lambda G_V + \lambda^2 (G_V - 1)^2 \quad (2.183)$$

относительно её аргументов  $\chi_e$  и  $x_{\nu}$  ( $1 \leq \nu \leq Z_{\text{nuc}} - 1$ ) для разных значений множителя Лагранжа  $\lambda$  и находим такое значение  $\lambda$ , которое даёт  $G_V = 1$  в точке минимума. Последнее (квадратичное по  $\lambda$ ) слагаемое в (2.183) представляет собой эмпирический регуляризующий член, ускоряющий численную сходимость итерационного поиска минимума. Решение даёт значения  $F_{\text{tot}}$ ,  $\chi_e$ ,  $x_{\nu}$  и  $n_e = \langle Z \rangle n_{\text{ion}}$  в точке условного минимума. Детали минимизации, сглаживающая фильтрация полученного численного решения и используемые при этом алгоритмы описаны в статье [162]; здесь мы опускаем эти подробности ради экономии места.

### 2.4.3c Результаты

На основе описанного общего метода построения уравнения состояния плазмы, содержащей многозарядные ионы, получено уравнение состояния ионизованного углерода при температурах  $T \gtrsim 10^5$  К в широком диапазоне плотности [162]. Приведём для примера некоторые из результатов.

Рис. 2.12 демонстрирует температурную зависимость ионных фракций  $x_{\nu}$  и средний эффективный заряд  $\langle Z \rangle$  (кривая с пометкой  $\bar{Z}$ ), а левый рис. 2.13 – зависимость



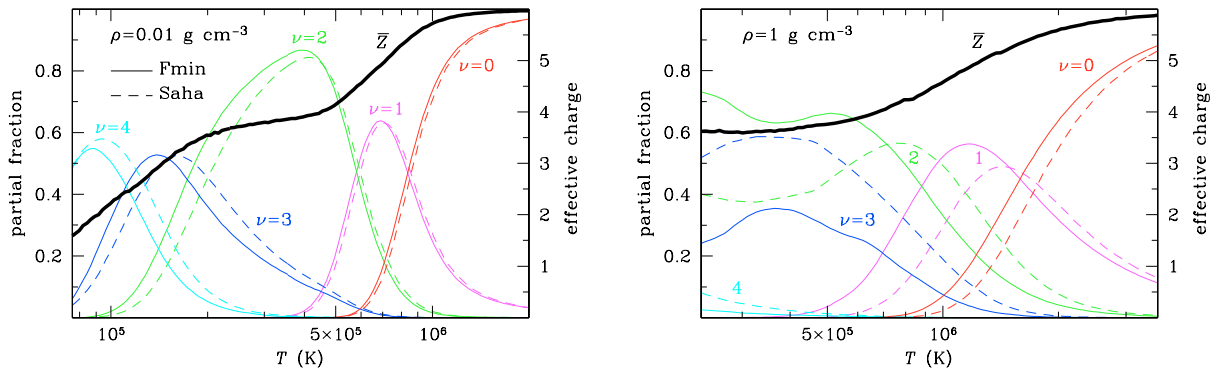


Рис. 2.12: Доли разных ионов углерода в плазме (левая ось ординат) как функции температуры при  $\rho = 0,01 \text{ г см}^{-3}$  (левое окно) и  $\rho = 1 \text{ г см}^{-3}$  (правое окно). Нормальные сплошные кривые – численные результаты; пунктир – приближение Саха на основе точных статистических сумм. Числа связанных электронов для каждого иона  $\nu$  помечены у кривых. Толстая сплошная кривая – средний заряд иона  $\bar{Z} \equiv \langle Z \rangle$  (правая ось ординат).

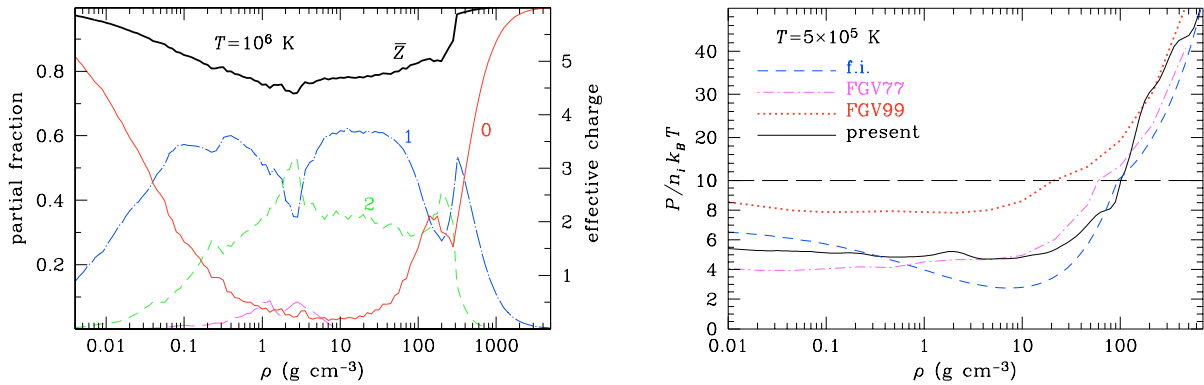


Рис. 2.13: *Левый рисунок:* Те же величины, что и на рис. 2.12, но как функции плотности при фиксированной температуре  $T = 10^6 \text{ К}$ . *Правый рисунок:* Изотермы давления, делённого на  $n_{\text{ion}} k_B T$ , для  $T = 5 \times 10^5 \text{ К}$ : сравнение наших результатов (сплошная кривая) с моделью Фонтена и др. [167] (FGV) (штрихпунктир – вариант 1977 года, точечный пунктир – вариант 1999 года). Для сравнения штриховой линией показан результат для полностью ионизованной плазмы.

тех же величин от плотности. При низких плотностях, когда малы эффекты неидеальности, для оценки применимо уравнение Саха (2.144). Результаты такой оценки показаны на рис. 2.12 пунктирными линиями. Подчеркнём, что в (2.144) мы включаем сдвиги дискретных уровней ионов в плазменном окружении в статистические суммы  $Z_{\text{int},\nu}$ , а пренебрегаем только взаимодействием ионов друг с другом. При  $\rho \ll 0,01 \text{ г см}^{-3}$  приближение Саха и результаты минимизации полной свободной энергии дают близкие результаты, что служит одной из проверок компьютерного алгоритма, а при увеличении  $\rho$  уравнение Саха становится всё менее точным. Зависимость ионных фракций от плотности (рис. 2.13) имеет ярко выраженные провалы и пики, связанные с последовательной ионизацией электронных оболочек. Эти особенности

связаны с раздуванием и сжатием соответствующих объёмов нейтральности, по отношению к их оценке в модели несжимаемого электронного фона, при выдавливании электронных состояний в континуум (рис. 2.11) и с соответствующими изменениями внутренних статистических сумм ионов.

На правом рисунке 2.13 сплошная кривая показывает собственно уравнение состояния – зависимость давления от плотности при  $T = 5 \times 10^5$  К. Для сравнения показано уравнение состояния для полностью ионизованного углерода согласно § 2.3, а также уравнение состояния Фонтена и др., опубликованное в 1977 году [167] (FGV77) и обновлённое в 1999-м (частное сообщение; FGV99). Это уравнение основано на методе минимизации свободной энергии при низкой плотности, модели Томаса–Ферми при высокой плотности и интерполяции в промежуточной области. Чтобы были видны различия, давление на рисунке нормировано на  $n_{\text{ion}} k_B T$ . Вертикальный масштаб в верхней части рисунка уменьшен, чтобы охватить превышение  $P$  над  $n_{\text{ion}} k_B T$  за счёт вырожденности электронного газа при высокой плотности. В целом разница между двумя вариантами FGV77 и FGV99 – того же порядка, что и их отличие от нашей модели. Но наша модель демонстрирует больше особенностей. Это вызвано тем, что наклон изотермы меняется вблизи точек быстрого изменения состава плазмы, что не описывается в рамках модели Томаса–Ферми, использованной в FGV77 и FGV99, но проявляется при использовании метода минимизации свободной энергии.

Схожие вариации наклона заметны и на рис. 2.14, где показаны изотермы внутренней энергии на единицу массы,  $U^* = (U + U_0)/N_{\text{ion}} m_{\text{ion}}$ , отсчитанной от уровня  $-U_0 = -8,28 \times 10^{13}$  эрг г<sup>-1</sup>, отвечающего основному состоянию атомарного углерода ( $U_0 = 8,2751 \times 10^{13}$  эрг г<sup>-1</sup> для естественного изотопного состава углерода и  $U_0 = 8,2825 \times 10^{13}$  эрг г<sup>-1</sup> для <sup>12</sup>C). Как и на предыдущем рисунке, приведено сравнение с двумя моделями Фонтена и др. и с моделью полностью ионизованной кулоновской плазмы. Разрыв на нижней пунктирной кривой соответствует области, в которой последняя модель термодинамически неустойчива.

Более подробные примеры и обсуждения даны в статье [162]. В стадии разработки находится аналогичная модель для кислородной плазмы и для углеродно-кислородных смесей.

## 2.5 Упругость коры и мантии нейтронной звезды

В данном параграфе мы дадим краткую характеристику упругих свойств коры и мантии нейтронной звезды, следуя в основном статье [18] и разделу 3.7 монографии

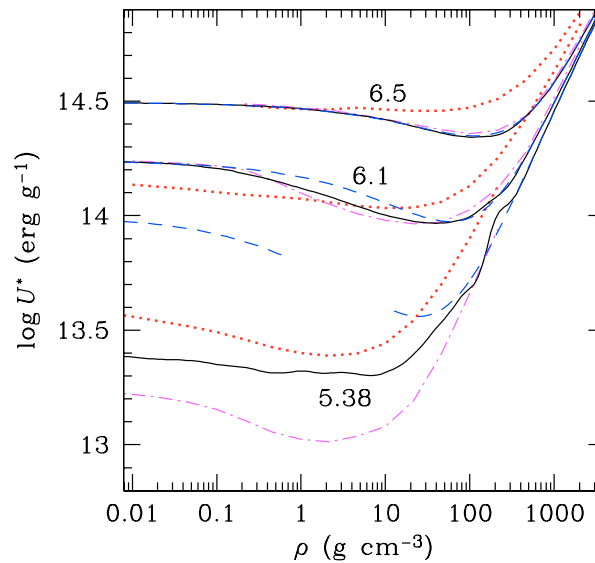


Рис. 2.14: Изотермы внутренней энергии углеродной плазмы при  $T = 2,4 \times 10^5$  К,  $1,26 \times 10^6$  К, и  $3,16 \times 10^6$  К (кривые помечены значениями  $\lg T$ ). Сплошные кривые – наша модель, штриховой пунктир – модель полностью ионизованной кулоновской плазмы, штрихпунктир и точечный пунктир – модели FGV77 и FGV99, соответственно.

[5]. Эти свойства являются дополнительными к уравнению состояния, так как, в отличие от океана и атмосферы нейтронной звезды, кора и мантия могут выдерживать упругие напряжения. Их учёт требуется, например, при описании эволюции вращающихся нейтронных звёзд (см. статью [168] и ссылки в ней) и их сейсмологии (см., напр., [169]).

Вообще говоря, для нейтронных звёзд следует использовать релятивистскую теорию упругости [170, 171]. Однако упругие характеристики, которые в неё входят, можно вывести в рамках нерелятивистской теории [172], что мы здесь и проделаем.

Параграф 2.5.1 посвящён описанию упругих свойств коры и содержит, в основном, известные результаты, а § 2.5.2 представляет оригинальное исследование упругих свойств мантии нейтронной звезды.

### 2.5.1 Общие соотношения. Модули упругости коры

Деформация элемента коры предполагает смещение ядер из их положений равновесия  $\mathbf{r}$  в новые положения  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}$  – вектор смещения. В пределе непрерывной среды рассматриваются непрерывные поля смещений  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . Смещение  $\mathbf{u}$  создаёт упругое напряжение, стремящееся вернуть вещество в состояние с наименьшей плотностью энергии  $\mathcal{E}_0$  и задаёт плотность энергии деформации  $\mathcal{E}_{\text{def}} = \mathcal{E}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}_0$ . Малая

деформация описывается симметричным тензором напряжений

$$u_{ik} = u_{ki} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (2.184)$$

где  $i, j = 1, 2$  и  $3$  [172]. Его можно разложить на тензоры всестороннего сжатия  $u_{ik} = u_{ik}^{\text{comp}}$  и сдвига  $u_{ik}^{\text{shear}}$ :  $u_{ik} = u_{ik}^{\text{comp}} + u_{ik}^{\text{shear}}$ , где  $u_{ik}^{\text{comp}} = \frac{1}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{u}$  и  $u_{ik}^{\text{shear}} = u_{ik} - u_{ik}^{\text{comp}}$ . Элементарный объём вещества изменяется при деформации как  $dV' = (1 + \nabla \cdot \mathbf{u}) dV$ . Всестороннее сжатие, сохраняющее форму элементарного объёма, описывается тензором вида  $u_{ik} = a \delta_{ik}$ . Деформация сдвига не меняет величину элементарного объёма, так что при такой деформации  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .

Плотность энергии деформации в первом приближении выражается как

$$\mathcal{E}_{\text{def}} = \frac{1}{2} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}, \quad (2.185)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, а  $\lambda_{iklm}$  – тензор четвёртого ранга. Из общих соотношений симметрии следует, что из 81 компоненты этого тензора линейно независимыми являются не более 21. Число независимых компонент – модулей упругости – уменьшается с увеличением степени симметрии. Для бсс-кристалла это число равно 3, а для изотропного твёрдого тела – 2. Тензор упругих напряжений связан с энергией деформации равенством  $\sigma_{ik} = \partial \mathcal{E}_{\text{def}} / \partial u_{ik}$ .

Для идеальной бсс-решётки существуют три независимых модуля упругости, традиционно обозначаемых  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  и  $c_{44}$  [112]. Деформация сдвига ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) определяется двумя независимыми модулями:

$$\mathcal{E}_{\text{def}} = b_{11} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + 2c_{44} (u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2), \quad (2.186)$$

где  $b_{11} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$ . Для  $T = 0$ , согласно результатам численного моделирования [173],  $b_{11} = 0,0245 n_{\text{ion}} (Ze)^2 / a_{\text{ion}}$ ,  $c_{44} = 0,1827 n_{\text{ion}} (Ze)^2 / a_{\text{ion}}$ , что согласуется с классическим результатом Клауса Фухса [174]. Большое отличие  $b_{11}$  от  $c_{44}$  указывает на сильную анизотропию бсс-кристалла по отношению к упругим деформациям.

Обычно делается естественное предположение, что кора нейтронной звезды представляет собой не идеальный монокристалл, а поликристалл, макроскопические свойства которого можно описать моделью изотропного твёрдого тела. В этом случае

$$\mathcal{E}_{\text{def}} = \frac{1}{2} K (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{u} \right)^2, \quad (2.187)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига, а

$$K = n_b (\partial P / \partial n_b) \quad (2.188)$$

– *модуль сжатия*. При этом тензор напряжений равен

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{def}}}{\partial u_{ik}} = K \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{u} + 2\mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \nabla \cdot \mathbf{u} \right). \quad (2.189)$$

Эффективный модуль сдвига можно оценить при помощи усреднения по всем возможным ориентациям осей всс-решётки по отношению к вектору сдвига [173]. В результате будем иметь

$$\mu = \frac{1}{5} (2b_{11} + 3c_{44}) = 0,1194 \frac{n_{\text{ion}} (Ze)^2}{a_{\text{ion}}} = 0,1925 Z^{2/3} n_{\text{ion}}^{4/3}. \quad (2.190)$$

В случае, когда давление  $P$  обусловлено в основном ультрарелятивистскими сильно-вырожденными электронами, из (2.59) следует, что  $P \approx (\hbar c/4) (3\pi^2)^{1/3} n_{\text{ion}}^{4/3}$ . В этом случае выражение (2.190) можно переписать как  $\mu \approx 0,01594 (Z/26)^{2/3} P$ , а отсюда при сравнении с (2.188) видно, что  $\mu/K \ll 1$ . Зависимость  $\mu(\rho)$  для разных уравнений состояния в коре нейтронной звезды приведена в § 3.7.1 монографии [5].

## 2.5.2 Жидкокристаллическая мантия

Как уже сказано в § 1.3.2, между дном внешней коры и ядром нейтронной звезды может находиться мантия, в которой атомные ядра имеют форму пластин (фаза «лазанья») или цилиндров (фаза «спагетти»). Такие ядра могут свободно перемещаться вдоль поверхностей пластин или образующих цилиндров, соответственно, но не в перпендикулярных им направлениях. Вещество с такими свойствами называется мезоморфным или жидкокристаллическим [175].

### 2.5.2а Фаза «лазанья»

В случае лазаньи имеется вращательная симметрия относительно оси, перпендикулярной поверхности пластин, поэтому такой жидкий кристалл относится к смектикам А. Пусть ось  $z$  совпадает с этой осью симметрии в равновесии. Возвращающая сила может быть направлена только вдоль  $z$ , поэтому  $\mathbf{u} = (0, 0, u)$ . При этом [175]

$$\mathcal{E}_{\text{def}} = \frac{1}{2} B \left[ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} u)^2 \right]^2 + \frac{1}{2} K_1 (\nabla_{\perp}^2 u)^2, \quad (2.191)$$

где  $\nabla_{\perp} \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)$ . Константа  $B$  связана со сжатием вещества вдоль  $z$  (первое слагаемое в квадратных скобках) или, что для смектиков А эквивалентно, со сдвиговой деформацией (второй член в квадратных скобках). Константа  $K_1$  связана

с изгибной деформацией. Рассматривая эти деформации и вычисляя соответствующие приращения  $\mathcal{E}_{\text{def}}$  в рамках жидкокапельной модели ядра (см., напр., обзор [176]), получаем [18]

$$B = 6 \mathcal{E}_{\text{Coul}} , \quad K_1 = \frac{2}{15} r_c^2 \mathcal{E}_{\text{Coul}} (1 + 2w - 2w^2) . \quad (2.192)$$

Здесь  $r_c$  – полупериод одномерной решётки в направлении  $z$  (одномерный аналог радиуса ионной сферы),  $n_{p,i}$  – концентрация протонов в ядерном веществе при данной плотности,  $w$  – доля объёма, занятая ядерным веществом (§ 2.2.1), а

$$\mathcal{E}_{\text{Coul}} = \frac{2\pi}{3} (en_{p,i}r_c)^2 (1 - w)^2 w^2 , \quad (2.193)$$

– кулоновская составляющая равновесной плотности энергии [177]. Все эти величины вычисляются для недеформированного вещества.

Поправки к выражениям (2.192), возникающие из-за поправки на кривизну к поверхностной ядерной энергии в капельной модели [177], а также из-за изменения толщины пластин вдоль оси  $z$ , малы [18].

### 2.5.2b Фаза «спагетти»

Ядерное вещество с цилиндрической симметрией аналогично колонковой фазе жидких кристаллов [175]. Рассмотрим фазу «спагетти», в которой ядерное вещество сконцентрировано в цилиндрических трубках, занимающих долю объёма  $w$ , а пространство между ними заполнено свободными нейтронами. Все результаты останутся применимы и для «трубчатой» фазы, в которой нейтроны занимают цилиндрические трубки внутри ядерной материи, если только во всех формулах мы заменим  $w$  на  $(1 - w)$ .

Для фазы спагетти в основном состоянии мы имеем структуру из заряженных цилиндров, центры которых образуют двумерную гексагональную решётку в плоскости  $(xy)$ , перпендикулярной осям цилиндров (оси  $z$ ). Поверхностная концентрация цилиндров равна  $1/(\pi r_c)^2$ , где  $r_c$  – эквивалентный радиус двумерной ячейки Вигнера–Зейца. Плотность кулоновской энергии в основном состоянии для такой фазы равна [177]

$$\mathcal{E}_{\text{Coul}} = \frac{\pi}{2} (en_{p,i}r_c)^2 w^2 \left[ \ln \left( \frac{1}{w} \right) - 1 + w \right] . \quad (2.194)$$

Смещения, влияющие на энергию и вызывающие упругие силы возврата, представ-

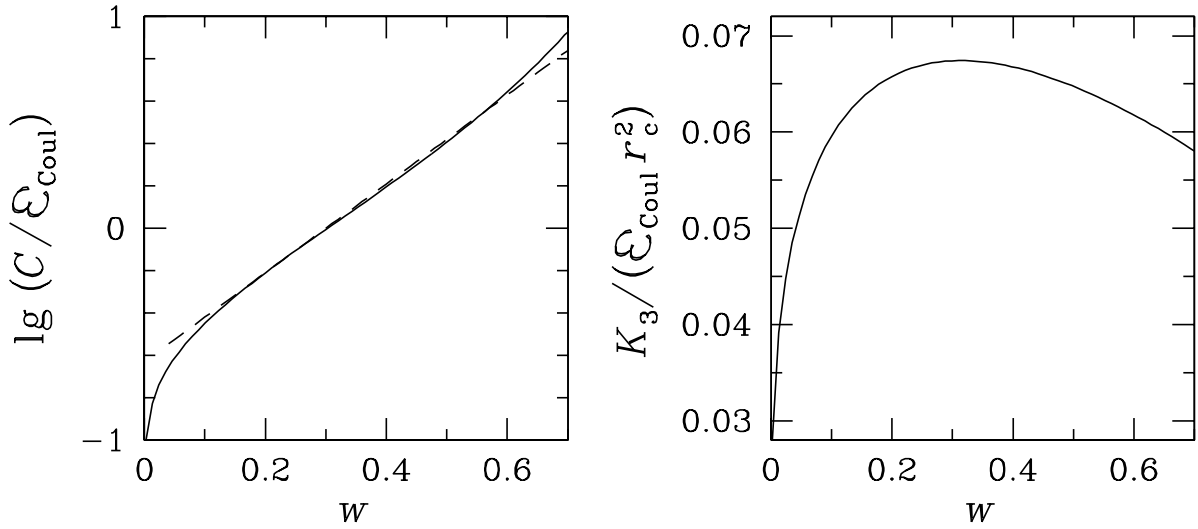


Рис. 2.15: Модуль сдвига  $C$  (левый рисунок, в единицах  $\mathcal{E}_{\text{Coul}}$ ) и модуль изгиба  $K_3$  (правый рисунок, в единицах  $\mathcal{E}_{\text{Coul}} r_c^2$ ) цилиндрической (колонковой) фазы вещества мантии нейтронной звезды в зависимости от фактора объёмного заполнения  $w = (r_p/r_c)^2$ . Пунктирная линия на левом рисунке показывает аппроксимацию (2.197).

ляются в виде  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0)$ . Тогда плотность энергии деформации имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{def}} = & \frac{1}{2} B \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} C \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} K_3 \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \right)^2 + B' \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} B'' \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)^4. \end{aligned} \quad (2.195)$$

Модуль упругости  $B$  связан с однородным поперечным сжатием или растяжением решётки, а модули упругости  $C$  и  $K_3$  связаны с поперечным сдвигом и с изгибом. Вторая строка формулы (2.195) содержит члены более высокого порядка, которые могут быть важны при больших продольных деформациях. Все три слагаемых, содержащих коэффициенты  $B$ ,  $B'$  и  $B''$ , возникают от изменения эквивалентного радиуса ячейки, вызванного деформацией. Вычисление  $\mathcal{E}_{\text{def}}$  в рамках обобщённой капельной модели ядра [176] приводит к формулам [18]

$$B = \frac{3}{2} \mathcal{E}_{\text{Coul}}, \quad B' = -\frac{3}{4} \mathcal{E}_{\text{Coul}}, \quad B'' = \frac{3}{8} \mathcal{E}_{\text{Coul}}. \quad (2.196)$$

Модуль упругости  $C$  оказывается чувствителен к фактору заполнения  $w$ , как видно из рис. 2.15. В том диапазоне значений  $w$ , в котором существует эта ядерная фаза,  $-0,2 \lesssim w \lesssim 0,4$ , – справедлива приближённая формула [18]

$$C \simeq 10^{2,1(w-0,3)} \mathcal{E}_{\text{Coul}}. \quad (2.197)$$

«Постоянная изгиба»  $K_3$  определяет энергию деформации, связанную с изгибом цилиндров. Её зависимость от  $w$  и  $r_c$  понятна из рисунка 2.15. При  $0,2 \lesssim w \lesssim 0,4$  применимо приближение

$$K_3 \simeq 0,06 \mathcal{E}_{\text{Coul}} r_c^2. \quad (2.198)$$

## 2.6 Унифицированное уравнение состояния нейтронной звезды

В завершение данной главы, представим аналитическое приближение для уравнения состояния, применимого для внутренней коры и ядра нейтронной звезды, которое при астрофизических расчётах может служить удобным дополнением к приближениям для уравнения состояния плазмы во внешних оболочках, представленным в предыдущих разделах. Принципиальное отличие внутренней коры от внешних оболочек состоит в наличии свободных нейтронов, которые участвуют в установлении ядерного равновесия посредством бета-захвата и бета-распада, а также других ядерных реакций. Поэтому ядерный состав внутренней коры не может задаваться произвольно, а должен рассчитываться термодинамически самосогласованным способом. Таким расчётам было посвящено много работ, использовавших те или иные приближения (см., напр., их краткий обзор в главе 3 монографии [5] и ссылки там). То же можно сказать и об уравнении состояния ядра звезды, с той разницей, что степень неопределённости в составе и свойствах вещества ядра ещё намного выше, чем для коры (см., напр., главы 5 и 7 монографии [5] и ссылки там). Среди применявшихся методов видное место занимает метод минимизации свободной энергии, аналогичный описанному в § 2.1, но на этот раз применительно к субатомным и субъядерным частицам (вместо ионов и электронов, как в предыдущих параграфах). Среди построенных модельных уравнений состояния лишь весьма немногие применимы как для ядра звезды, так и для её оболочек (а только такие уравнения состояния в принципе могут использоваться, например, для изучения свойств границы между ядром и корой). Два самых известных из таких *унифицированных* уравнений состояния — это уравнение состояния FPS [178] и его более современный аналог SLy [74].

Ввиду сложности расчёта уравнения состояния для внутренней коры и ядра, его обычно представляют в виде таблиц. Их использование требует интерполяции, которая неоднозначна, а также и нетривиальна ввиду необходимости поддержания термодинамической самосогласованности интерполированных функций [179]. Последняя



проблема оказывается особенно серьёзной, например, при трёхмерном моделировании быстро вращающихся нейтронных звёзд (см., напр., [180]). Тем более трудно опираться на таблицы в тех случаях, когда требуется знание различных производных – как, например, при моделировании двойных систем нейтронных звёзд [181], в котором используются производные давления по энтальпии.

Как средство избежать перечисленных трудностей, в статье [182] мы предложили аналитические приближения для унифицированных уравнений состояния FPS и SLy. Они являются сглаженными, то есть игнорируют фазовые границы в ядре звезды и её оболочках, но это является скорее преимуществом, чем недостатком для расчётов типа упомянутых [180, 181]. Однако уравнения состояния для внешней коры, внутренней коры и ядра звезды имеют различный характер, и это обуславливает сложность аппроксимации, которая состоит из нескольких дробно-рациональных функций, сопряжённых между собой при помощи функции

$$f_0(x) = \frac{1}{e^x + 1} . \quad (2.199)$$

Уравнения состояния FPS и SLy использовались для построения аппроксимации при  $\rho > 5 \times 10^{10}$  г см<sup>-3</sup>. При более низкой плотности  $10^8$  г см<sup>-3</sup>  $\lesssim \rho < 5 \times 10^{10}$  г см<sup>-3</sup> вещество коры описывается уравнением состояния Хенслея–Пишона [183], основанным на свойствах атомных ядер, полученных из результатов ядерных экспериментов. При ещё меньшей плотности использовалось уравнение состояния BPS [184] для вещества в основном состоянии. Таблицы BPS для  $\rho < 10^5$  г см<sup>-3</sup> были исключены из использования, так как при столь низких плотностях уравнение состояния вещества нейтронной звезды зависит не только от плотности, но и от температуры, поэтому для него следует применять иные модели, описанные в предшествующих параграфах настоящей главы (см. рис. 2.16).

Были разработаны разные приближения – с учётом того, что для моделирования невращающихся звёзд удобно использовать уравнение состояния в обычной форме, выражающей давление как функцию плотности, тогда как для моделирования вращающихся звёзд более удобно представлять все термодинамические функции в зависимости от приведённой энтальпии

$$\mathfrak{h} \equiv h(P)/(m_{\text{u}}c^2) - 1, \quad (2.200)$$

где

$$h(P) = \frac{\rho c^2 + P}{n_{\text{b}}} \quad (2.201)$$

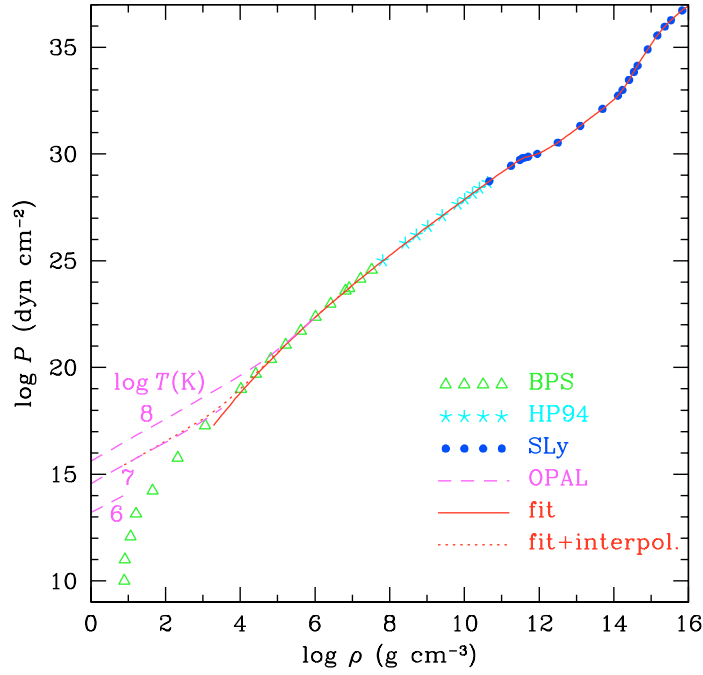


Рис. 2.16: Уравнения состояния вещества нейтронной звезды: BPS [184] (треугольники), Хенсель–Пишон [183] (HP94, звездочки), SLy [74] (кружкй), OPAL [143] при  $T = 10^6, 10^7$  и  $10^8$  К (пунктир), аналитическая аппроксимация (2.203) (сплошная кривая) и аппроксимация, модифицированная при низких  $\rho$  (точечный пунктир). Из работы [182].

– энтальпия, приходящаяся на один барион. При этом плотность числа барионов  $n_b$  выражается через энтальпию при помощи точного равенства

$$n(H) = n_s \left[ \frac{\rho(H)}{\rho_s} + \frac{P(H)}{\rho_s c^2} \right] e^{-H}, \quad (2.202)$$

где  $H \equiv \ln(h/h_s)$ , а  $h_s$  и  $n_s$  – значения энтальпии и концентрации барионов на границе звезды.

Параметризация давления как функции плотности выглядит следующим образом:

$$\zeta = \frac{a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^3}{1 + a_4 \xi} f_0(a_5(\xi - a_6)) + (a_7 + a_8 \xi) f_0(a_9(a_{10} - \xi)) + (a_{11} + a_{12} \xi) f_0(a_{13}(a_{14} - \xi)) + (a_{15} + a_{16} \xi) f_0(a_{17}(a_{18} - \xi)). \quad (2.203)$$

Здесь  $\zeta = \lg(P/\text{дин см}^{-2})$ ,  $\xi = \lg(\rho/\text{г см}^{-3})$ , а  $a_i$  – параметры, которые для уравнений состояния FPS и SLy приведены в Табл. 2.8. Типичная погрешность аппроксимации для  $P$  составляет 1–2% (при  $\xi \gtrsim 5$ ). Максимальная погрешность связана с фазовыми переходами, отслеженными в исходных таблицах, но сглаженными при аппроксимации.

Таблица 2.8: Параметры формулы (2.203)

$i$	$a_i(\text{FPS})$	$a_i(\text{SLy})$	$i$	$a_i(\text{FPS})$	$a_i(\text{SLy})$
1	6,22	6,22	10	11,8421	11,4950
2	6,121	6,121	11	-22,003	-22,775
3	0,006004	0,005925	12	1,5552	1,5707
4	0,16345	0,16326	13	9,3	4,3
5	6,50	6,48	14	14,19	14,08
6	11,8440	11,4971	15	23,73	27,80
7	17,24	19,105	16	-1,508	-1,653
8	1,065	0,8938	17	1,79	1,50
9	6,54	6,54	18	15,13	14,67

ции. Для FPS она составляет 3,6% при  $\xi = 14,22$  (это граница между корой и ядром), а для SLy – 2,9% при  $\xi = 8,42$  (граница между  $^{62}\text{Ni}$  и  $^{64}\text{Ni}$  в таблице [183]).

Рисунок 2.16 в десятичном логарифмическом масштабе показывает зависимость давления  $P$  от плотности  $\rho$  для табличных уравнений состояния (символы) и соответствующих аппроксимаций (кривые). Аппроксимация строилась для  $\rho \geq 10^5$  г см $^{-3}$ . Как отмечено выше, при более низкой плотности необходимо учитывать температурную зависимость при тех температурах, которые характерны для оболочек нейтронных звёзд. Это проиллюстрировано пунктирными кривыми, которыми нанесено уравнение состояния OPAL [143] для железа<sup>4</sup> при  $T = 10^6$ ,  $10^7$ , и  $10^8$  К. Фактически такая необходимость не является ограничением области применимости аппроксимации, так как её разумное продолжение в область низких  $\rho$  даёт простая интерполяция. Например, точечный пункт на рис. 2.16 демонстрирует результат простого сложения  $P = 10^\zeta + P_{\text{OPAL}}$ , где  $\zeta$  определяется из уравнения (2.203) (предполагается, что  $\xi$  положительно), а  $P_{\text{OPAL}} = 3,5 \times 10^{14} \rho$  является аппроксимацией уравнения состояния OPAL при  $\rho \lesssim 10$  г см $^{-3}$  и  $T = 10^7$  К (здесь  $P$  – в единицах дин см $^{-2}$ , а  $\rho$  – в г см $^{-3}$ ).

Для некоторых приложений бывает удобно использовать  $n_b$  в качестве независимой переменной. Для этой цели подходит приближённая формула

$$\frac{\rho}{n_b m_u} = 1 + \frac{p_1 n_b^{p_2} + p_3 n_b^{p_4}}{(1 + p_5 n_b)^2} f_0(-p_6(\lg n_b + p_7)) + \frac{n_b}{8 \times 10^{-6} + 2,1 n_b^{0,585}} f_0(p_6(\lg n_b + p_7)) , \quad (2.204)$$

<sup>4</sup>Данные OPAL для железа были любезно предоставлены авторами статьи [143].

Таблица 2.9: Параметры формул (2.204) и (2.205)

$i$	$p_i(\text{FPS})$	$p_i(\text{SLy})$	$q_i(\text{FPS})$	$q_i(\text{SLy})$
1	0,320	0,423	0,608	0,183
2	2,17	2,42	2,41	1,26
3	0,173	0,031	2,39	6,88
4	3,01	0,78	3,581	3,612
5	0,540	0,238	1,681	2,248
6	0,847	0,912	0,850	0,911
7	3,581	3,674	11,64	11,56

Таблица 2.10: Параметры формулы (2.206)

$l$	$b_l(\text{FPS})$	$b_l(\text{SLy})$	$l$	$b_l(\text{FPS})$	$b_l(\text{SLy})$
1	5,926	5,926	9	11,97	34,96
2	0,4704	0,4704	10	15,432	15,328
3	19,92	20,13	11	0,6731	0,621
4	0,2333	0,2347	12	49,4	63,1
5	2,63	3,07	13	11,47	68,5
6	54,7	97,8	14	1,425	2,518
7	-1,926	-2,012	15	3,0	2,6
8	36,89	89,85	16	0,913	1,363

где концентрация барионов  $n_b$  выражена в единицах  $\text{фм}^{-3}$ . Обратная функция  $n_b(\rho)$  даётся приближённой формулой

$$\frac{x}{n_b} = 1 + \frac{q_1 x^{q_2} + q_3 x^{q_4}}{(1 + q_5 x)^3} f_0(q_6(q_7 - \xi)) + \frac{x}{8 \times 10^{-6} + 2,1 x^{0,585}} f_0(q_6(\xi - q_7)), \quad (2.205)$$

где  $x = \rho/m_n$ . Параметры  $p_i$  и  $q_i$  формул (2.204) и (2.205) даны в Табл. 2.9. Относительные погрешности варьируются от  $\lesssim 10^{-9}$  при  $\rho \lesssim 10 \text{ г см}^{-3}$  до долей процента вблизи максимальной плотности  $\rho \sim 10^{16} \text{ г см}^{-3}$ , а разность  $(\rho - nm_0)$  аппроксимируется этими формулами с погрешностью в пределах нескольких процентов.

Как отмечено выше, бывает удобно параметризовать давление и плотность как

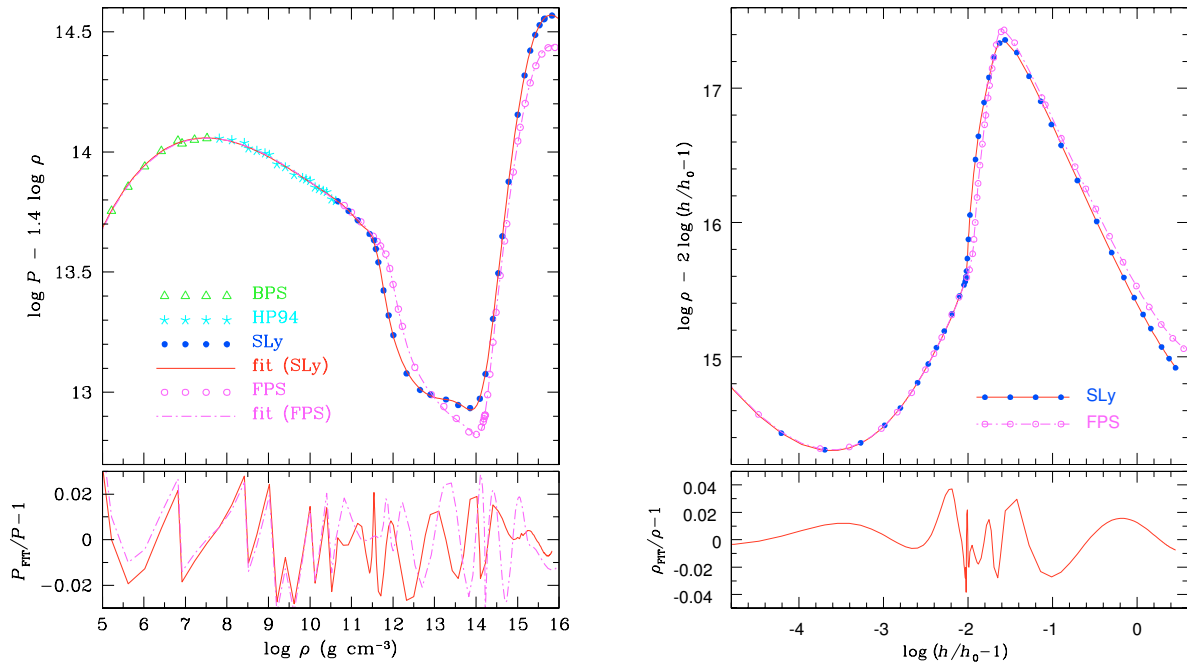


Рис. 2.17: Сравнение аппроксимации с табличными данными для уравнений состояния SLy и FPS [182]. *Левый рисунок:* Давление как функция плотности. *Правый рисунок:* Плотность как функция приведённой энтальпии  $\mathfrak{h}$ . *Наверху:* Прореженные табличные данные (показаны разными символами в зависимости уравнения состояния) и приближённая формула [(2.203) для левого рисунка, (2.206) для правого] (линии). *Внизу:* Относительная разность между табличными данными и аппроксимацией.

функции энтальпии. Для этих целей в [182] построена следующая формула:

$$\xi = \left( b_1 + b_2 \lg \mathfrak{h} + \frac{b_3 \mathfrak{h}^{b_4}}{1 + b_5 \mathfrak{h}} \right) f_0(b_6(\lg \mathfrak{h} - b_7)) + \frac{b_8 + b_9 \lg \mathfrak{h} + (b_{10} + b_{11} \lg \mathfrak{h})(b_{12} \mathfrak{h})^7}{1 + b_{13} \mathfrak{h} + (b_{12} \mathfrak{h})^7} f_0(b_6(b_7 - \lg \mathfrak{h})) + b_{14} f_0(b_{15}(b_{16} - \lg \mathfrak{h})) . \quad (2.206)$$

Параметры  $b_l$  приведены в Табл. 2.10. Типичная погрешность  $\rho$  в формуле (2.206) составляет порядка 1% при  $\mathfrak{h} \gtrsim 10^{-7}$  (т.е. при  $\xi \gtrsim 3$ ); максимальная погрешность  $< 4\%$  встречается вблизи границ между внешней и внутренней корой и между корой и ядром звезды и обусловлена сглаживанием находящихся в этих местах фазовых скачков.

На рис. 2.17 показано сравнение табличных данных с аппроксимациями для давления как функция плотности (слева) и для плотности как функции приведённой энтальпии (справа) для уравнений состояния FPS и SLy. Для того, чтобы сделать заметными различия между этими двумя уравнениями состояния, на верхних рисунках показаны не полные величины логарифмов  $P$  и  $\rho$ , а отклонения  $\lg P$  и  $\lg \rho$

от функций  $1,4 \lg \rho$  и  $2 \lg \eta$ , соответственно, которые приближённо описывают общий средний наклон этих зависимостей. Тем не менее, в масштабе верхних рисунков табличные данные неотличимы от аппроксимаций (2.203) и (2.206). Эти относительные отличия показаны на соответствующих нижних рисунках. Наблюдающиеся на них резкие скачки кривых, на вершинах которых отличия максимальны, обусловлены вышеупомянутыми фазовыми переходами между слоями с разным элементным составом в коре нейтронной звезды, которые сглажены при аппроксимации.

Комбинируя формулы (2.203) и (2.206) с точным соотношением

$$\ln \left( \frac{n_b}{n_{bs}} \right) = c^2 \int_{\rho_s}^{\rho} \frac{d\rho'}{P(\rho') + \rho' c^2} \quad (2.207)$$

или с аппроксимацией (2.205), мы приходим к искомой параметризации  $\rho(H)$ ,  $P(H)$  и  $n_b(H)$ . В этом случае функция  $P(H) = P(\rho(H))$ , полученная из уравнений (2.203) и (2.206), воспроизводит табличные значения с типичной погрешностью  $\sim 1-2\%$  и с максимальной погрешностью в пределах  $10\%$  на границе коры с ядром.

## 2.7 Резюме

Представленные в § 2.3 результаты позволяют находить термодинамические функции полностью ионизованной плазмы во внешних оболочках нейтронных звёзд при произвольной температуре и плотности. Компьютерная программа, реализующая их вычисление, предоставлена в свободное пользование на специально созданной странице в Интернете<sup>5</sup>. В § 2.4 представлено два метода расчёта ионизационного равновесия и термодинамических функций частично ионизованной плазмы. Первый из них разработан для изучения плазмы, содержащей лёгкие ионы, а второй – многозарядные ионы. Оба метода основаны на минимизации свободной энергии (§ 2.1) и проиллюстрированы расчётом широкодиапазонных уравнений состояния частично ионизованных водорода и углерода, соответственно. Наконец, в § 2.6 представлены аналитические аппроксимации для унифицированных уравнений состояния FPS и SLy, применимых для внутренней коры и ядра нейтронной звезды. Компьютерная программа, реализующая эти аппроксимации, также предоставлена в свободное пользование на специально созданной странице в Интернете<sup>6</sup>.

---

<sup>5</sup><http://www.ioffe.ru/astro/EIP/>

<sup>6</sup><http://www.ioffe.ru/astro/NSG/NSEOS/>

## Глава 3

# Коэффициенты электронного переноса тепла и заряда в океане и коре нейтронной звезды

Данная глава посвящена расчётам теплопроводности, электропроводности и термоэлектрического коэффициента полностью ионизованной плазмы при физических условиях, встречающихся в океане и коре нейтронных звёзд без сильного магнитного поля. Влиянию магнитных полей на эти характеристики будет посвящён § 5.4.

Первым теплопроводность и проводимость, обусловленные электронным рассеянием в астрофизических условиях, рассмотрел Р. Маршак в 1940 году [185]. Бурное развитие теории кинетических свойств астрофизической плазмы началось в 1950-х годах [186–193]. 1960-е ознаменовались в этой области работами Хаббарда и Лампе [194–197], которые учли ионные корреляции и динамическое экранирование при расчётах электронной теплопроводности. В 1970-х кинетические коэффициенты плотной плазмы изучали несколько исследовательских групп, использовавших разные модели экранирования и ионных корреляций в кулоновской жидкости и электрон-фононного взаимодействия в кулоновском кристалле [118, 198–201]. В. А. Урпин и Д. Г. Яковлев критически проанализировали эти работы и вывели удобные обобщающие формулы для расчёта кинетических коэффициентов при условиях, типичных для океана и внешней коры нейтронных звёзд и для недр белых карликов [202–205]. При этом рассматривалось рассеяние электронов друг на друге и на ионах с учётом статического ионного экранирования в кулоновской жидкости, а также рассеяние электронов на фононах за счёт процессов переброса (напр., [112, 113]) в кулоновском

кристалле.

Выражения, представленные в [202–204], становятся неприменимыми при  $T \ll T_{\text{ri}}$ , когда в кулоновском кристалле «вымораживаются» процессы переброса, играющие главную роль при  $T \gtrsim T_{\text{ri}}$ . Простая аналитическая трактовка такого вымораживания была предложена М. Е. Райхом и Д. Г. Яковлевым [116].

В работах [206, 207] область применимости результатов [205] была расширена путём учёта электронного экранирования. Общее описание, учитывающее как динамическое экранирование при  $\Gamma \ll 1$ , так и статические ионные корреляции при  $\Gamma \gtrsim 1$ , было развито в работе [208]. Однако эта работа не нашла широкого применения в астрофизике из-за её технической сложности и отсутствия удобных аналитических приближений.

Следующее улучшение теории состояло в выходе за рамки борновского приближения. Поскольку неборновские поправки к кинетическим коэффициентам невелики, их строгий расчёт был бы излишним усложнением; вместо этого Д. Г. Яковлев ввёл их упрощённую трактовку [209].

В данной главе, после вводной части, опирающейся на перечисленные результаты, будет представлено дальнейшее развитие теории, состоящее в учёте частичной упорядоченности кулоновской жидкости вблизи точки кристаллизации, многофононных процессов в кулоновском кристалле, конечных размеров ядер и их реального формфактора во внутренней коре нейтронной звезды. Также будут представлены аналитические аппроксимации коэффициентов электронного электро- и теплопереноса, применимые во всех оболочках нейтронной звезды при произвольной степени вырожденности и релятивизма электронов.

### 3.1 Основные соотношения для электронных кинетических коэффициентов

Этот параграф носит вводный характер. Оригинальные результаты будут представлены в последующих разделах, а здесь мы суммируем основные подходы и формулы для расчёта кинетических коэффициентов в плазме, которые будут использоваться в дальнейшем.



### 3.1.1 Уравнение Больцмана. Общие соотношения

Для определённости в качестве носителей тепла и заряда будем рассматривать электроны, так как их вклад в тепло- и электропроводность плазмы, как правило, доминирует. В основе рассмотрения лежит хорошо известное (напр., [210]) кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения  $f = f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, s, t)$

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I_e, \quad I_e = \sum_j I_{ej}[f], \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $s$  – импульс, радиус-вектор, скорость и спиновый индекс электрона, соответственно;  $t$  – время;  $\mathbf{F}$  обозначает внешнюю силу, действующую на электроны;  $I_{ej}$  – интеграл столкновений электронов с частицами сорта  $j$  (электронами, ионами и т.д.). Интегралы столкновений являются функционалами от  $f$ .

Пусть в плазме имеются стационарные градиенты температуры  $\nabla T$  и химического потенциала  $\nabla \mu_e$  и электрическое поле  $\mathbf{E}$  (тогда  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ ), и пусть эти градиенты и поле настолько слабы, что характерный масштаб вызываемой ими неоднородности плазмы значительно превышает среднюю характерную длину свободного пробега электрона. При этом элементарный объём вещества близок к термодинамическому равновесию, а отклонения от строгого равновесия связаны с токами тепла и заряда. Решение уравнения (3.1) ищем в виде

$$f = f^{(0)} + \delta f, \quad (3.2)$$

где

$$f^{(0)}(\epsilon - \mu_e, T) \equiv \frac{1}{\exp[(\epsilon - \mu_e)/k_B T] + 1} \quad (3.3)$$

– локальная функция распределения Ферми–Дирака, а  $\delta f$  – поправка за счёт неравновесности, в первом приближении линейная по  $\nabla T$ ,  $\nabla \mu_e$  и  $\mathbf{E}$ . В силу малости градиентов, в левой части уравнения (3.1) в первом приближении можно пренебречь  $\delta f$  по сравнению с  $f^{(0)}$ :

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{df^{(0)}}{dt} = - \left( \frac{\epsilon - \zeta}{T} \nabla T + e\mathbf{E}^* \right) \cdot \mathbf{v} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \epsilon}. \quad (3.4)$$

Здесь  $\zeta = \mu_e + (S_e/N_e)T$  – энтальпия на электрон,

$$\mathbf{E}^* \equiv \mathbf{E} + \frac{\nabla \mu_e}{e} + \frac{S_e}{N_e} \frac{\nabla T}{e}, \quad (3.5)$$

а

$$S_e = - \frac{2k_B V}{(2\pi\hbar)^3} \int [f \ln f + (1-f) \ln(1-f)] d\mathbf{p} \quad (3.6)$$

– электронная энтропия. Интеграл столкновений обращается в нуль на  $f = f^{(0)}$ , поэтому первое ненулевое приближение для него дают члены, линейные по  $\delta f$ . Ограничиваясь в разложении по  $\delta f$  только этими членами, из (3.1) получаем *линеаризованное* уравнение Больцмана, соответствующее первому приближению в методе Энскога–Чепмена разложения функции распределения по малому параметру. В случае, когда среда *изотропна*, можно записать (напр., [193])

$$\delta f = \Phi \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \epsilon} = -\frac{\Phi}{k_B T} f^{(0)}(1 - f^{(0)}), \quad \Phi = \frac{\epsilon - \zeta}{T} A_T(\epsilon) \mathbf{v} \cdot \nabla T + e A_e(\epsilon) \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}^*, \quad (3.7)$$

где  $A_e(\epsilon)$  и  $A_T(\epsilon)$  – некоторые функции электронной энергии, подлежащие определению.

Используя уравнения (3.2) и (3.7), можно вывести некоторые общие соотношения, связывающие  $\nabla T$ ,  $\nabla \mu_e$  и  $\mathbf{E}$  с плотностью электрического тока

$$\mathbf{j}_e = -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathbf{v} f d\mathbf{p}, \quad (3.8)$$

плотностью потока тепла

$$\mathbf{j}_T = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathbf{v} (\epsilon - \zeta) f d\mathbf{p} \quad (3.9)$$

и плотностью потока энергии  $\mathbf{j}_E = \mathbf{j}_T - (\zeta/e) \mathbf{j}_e$ . Из (3.8) и (3.9), получаем

$$\mathbf{j}_e = \sigma \mathbf{E}^* - \alpha_T \nabla T, \quad \mathbf{j}_T = \alpha_T T \mathbf{E}^* - \tilde{\kappa} \nabla T, \quad (3.10)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \alpha_T \\ \tilde{\kappa} \end{array} \right\} = \frac{1}{12\pi^3 \hbar^3} \int \left( -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \epsilon} \right) v^2 \left\{ \begin{array}{c} e^2 A_e(\epsilon) \\ e A_{e,T}(\epsilon) (\zeta - \epsilon) / T \\ A_T(\epsilon) (\epsilon - \zeta)^2 / T \end{array} \right\} d\mathbf{p}. \quad (3.11)$$

Здесь  $\sigma$  – электропроводность, а  $\alpha_T$  и  $\tilde{\kappa}$  – вспомогательные коэффициенты переноса (один и тот же коэффициент  $\alpha_T$  входит в оба уравнения (3.10) вследствие принципа симметрии Онзагера – напр., [72], § 120; [193]).

Удобно переписать соотношения (3.10) в виде

$$\mathbf{E}^* = \frac{\mathbf{j}_e}{\sigma} - Q_T \nabla T, \quad \mathbf{j}_T = -Q_T T \mathbf{j}_e - \kappa \nabla T, \quad (3.12)$$

где

$$Q_T = -\frac{\alpha_T}{\sigma}, \quad \kappa = \tilde{\kappa} - \frac{T \alpha_T^2}{\sigma} \quad (3.13)$$

– соответственно, термоэлектрический коэффициент и теплопроводность. Каждый набор коэффициентов переноса –  $(\sigma, \alpha_T, \tilde{\kappa})$  или  $(\sigma, Q_T, \kappa)$  – полностью определяет перенос тепла и заряда в изотропной среде.

Подставив соотношение (3.4) в уравнение (3.1), умножив обе части на  $2(2\pi\hbar)^{-3}\Phi$  и проинтегрировав по  $\mathbf{p}$ , получаем полезное соотношение

$$\frac{\dot{Q}}{V} = \frac{(\nabla T)^2}{T} \tilde{\kappa} - 2\alpha_T \mathbf{E}^* \cdot \nabla T + (E^*)^2 \sigma = \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j}_e - \frac{\mathbf{j}_T \cdot \nabla T}{T}, \quad (3.14)$$

где

$$\dot{Q} \equiv \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \left[ (\epsilon - \zeta) A_T(\epsilon) \frac{\nabla T}{T} + e \mathbf{E}^* A_e(\epsilon) \right] \cdot \mathbf{v} I_e. \quad (3.15)$$

Используя уравнения (3.1)–(3.7) и учитывая сохранение числа электронов и их полной энергии при упругих столкновениях, можно показать (напр., [210]), что  $\dot{Q} = T \dot{S}_{\text{coll}}$ , где  $\dot{S}_{\text{coll}}$  – скорость производства энтропии (3.6) за счёт столкновений. Это позволяет рассматривать соотношения (3.14) и (3.15) как вариационные, в которых  $A_e(\epsilon)$  и  $A_T(\epsilon)$  являются пробными функциями (напр., [193]). Полагая в них  $\nabla T = 0$  или  $E^* = 0$ , получаем, соответственно,

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\dot{Q}}{j_e^2} = \frac{(E^*)^2}{\dot{Q}}, \quad \frac{1}{\tilde{\kappa}} = \frac{\dot{Q}T}{j_T^2} = \frac{(\nabla T)^2}{T \dot{Q}}. \quad (3.16)$$

Точные решения  $A_e(\epsilon)$  и  $A_T(\epsilon)$  реализуют минимумы  $1/\sigma$  и  $1/\tilde{\kappa}$ .

### 3.1.2 Электрон-электронное рассеяние

Конкретная форма интеграла столкновений  $I_e$  зависит от механизма рассеяния. Рассмотрим сначала столкновения электронов друг с другом –  $ee$ -рассеяние, которое можно схематически представить в виде  $(\mathbf{p}_1 s_1, \mathbf{p}_2 s_2 \rightarrow \mathbf{p}'_1 s'_1, \mathbf{p}'_2 s'_2)$ , где импульсы  $\mathbf{p}$  и спиновые индексы  $s$  без штрихов определяют состояния электронов 1 и 2 до столкновения, а со штрихами – после него. Обозначим квантовомеханический матричный элемент перехода при столкновении через  $\mathcal{M}_{1,2 \rightarrow 1',2'}$ . Вероятность перехода за единицу времени равна (напр., [164])

$$W(12; 1'2') = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{1,2 \rightarrow 1',2'}|^2 \delta(\epsilon'_1 + \epsilon'_2 - \epsilon_1 - \epsilon_2). \quad (3.17)$$

Согласно принципу микроскопической обратимости,  $|\mathcal{M}_{1,2 \rightarrow 1',2'}|^2 = |\mathcal{M}_{1',2' \rightarrow 1,2}|^2$ , поэтому согласно принципу детального равновесия выполняется тождество

$$f_1^{(0)'} f_2^{(0)'} (1 - f_1^{(0)}) (1 - f_2^{(0)}) = f_1^{(0)} f_2^{(0)} (1 - f_1^{(0)'}) (1 - f_2^{(0)'}). \quad (3.18)$$

Для интеграла столкновений имеем

$$I_{ee}[f_1] = \sum_{s_2, s'_1, s'_2} \int \frac{d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}'_2}{2(2\pi\hbar)^9} W(12; 1'2') [f'_1 f'_2 (1 - f_1)(1 - f_2) - f_1 f_2 (1 - f'_1)(1 - f'_2)], \quad (3.19)$$

где дополнительный фактор 2 в знаменателе обеспечивает исключение двойного учёта одних и тех же столкновений, отличающихся перестановкой индексов 1 и 2.

Линеаризация  $I_{ee}$  в соответствии с (3.2) и (3.7) приводит к выражению

$$I_{ee}[f_1] = \frac{1}{k_B T} \sum_{\sigma_2, \sigma'_1, \sigma'_2} \int \frac{d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}'_2}{2(2\pi\hbar)^9} W(12; 1'2') f_1^{(0)'} f_2^{(0)'} (1 - f_1^{(0)}) (1 - f_2^{(0)}) (\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi'_1 - \Phi'_2). \quad (3.20)$$

### 3.1.3 Электрон-ионное рассеяние. Приближение времени релаксации

В качестве другого важного примера рассмотрим рассеяние электронов на ионах в случае, когда характерная передача энергии  $\delta\epsilon$  при единичном столкновении мала:  $|\delta\epsilon| \ll k_B T$ . Тогда [193]

$$I_{ei} = -\delta f / \tau_0(\epsilon), \quad (3.21)$$

где  $\tau_0(\epsilon)$  – эффективное время релаксации для электронной функции распределения. Это приближение называется *приближением времени релаксации*. Если столкновения такого типа доминируют, то решением линеаризованного уравнения Больцмана будет просто

$$A_e(\epsilon) = A_T(\epsilon) = \tau_0(\epsilon). \quad (3.22)$$

Если положения ионов некоррелированы, то время релаксации оценивается как

$$\tau_{ei}(\epsilon) = n_{\text{ion}} v \frac{1}{\sigma_{\text{tr}}(\epsilon)}, \quad (3.23)$$

где

$$\sigma_{\text{tr}}(\epsilon) = \int_{(4\pi)} \sigma(\epsilon, \vartheta) (1 - \cos \vartheta) d\Omega \quad (3.24)$$

– транспортное сечение рассеяния,  $\vartheta$  – угол рассеяния, а  $\sigma(\epsilon, \vartheta) d\Omega$  – сечение рассеяния электрона в элемент телесного угла  $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ .

Дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\sigma(\epsilon, \vartheta) = \frac{|U_q|^2 m_e^2}{4\pi^2 \hbar^4}, \quad (3.25)$$

где  $U_q$  – фурье-образ экранированного кулоновского потенциала, зависящий от  $\hbar q = 2p \sin(\vartheta/2)$  – импульса, переданного при столкновении. Определим функцию экранирования  $\phi_q$  посредством равенства

$$U_q = -4\pi Z e^2 \phi_q. \quad (3.26)$$

Тогда транспортное сечение (3.24) равно

$$\sigma_{\text{tr}} = 4\pi \left( \frac{Z e^2}{p v} \right)^2 \Lambda_{ei}(p), \quad (3.27)$$

где

$$\Lambda_{ei}(p) = \int_0^{2p/\hbar} q^3 |\phi_q|^2 dq \quad (3.28)$$

– кулоновский логарифм, зависящий от импульса электрона  $p$ . Для неэкранированного кулоновского потенциала  $|\phi_q| = 1/q^2$ , поэтому интеграл в (3.28) логарифмически расходится при малых  $q$ . Плазменное экранирование устраняет эту расходимость. Зависящее от энергии время релаксации в (3.23) приобретает вид

$$\tau_{ei}(\epsilon) = \frac{p^2 v}{4\pi Z^2 e^4 n_{\text{ion}} \Lambda_{ei}(p)}. \quad (3.29)$$

### 3.1.4 Общие выражения для невырожденной плазмы

Кинетические коэффициенты невырожденной ( $T \gg T_F$ ) нерелятивистской ( $x_r \ll 1$ ) электрон-ионной плазмы с учётом как электрон-ионных ( $ei$ ), так и электрон-электронных ( $ee$ ) столкновений были детально рассмотрены С. И. Брагинским [190] с использованием разложения функций  $A_e(\epsilon)$  и  $A_T(\epsilon)$  по присоединённым полиномам Сони́на – Лагерра, традиционно применяющегося в кинетике разреженных газов (напр., [211]). В невырожденной плазме эффективное время релаксации, *усреднённое по энергиям* электронов, для  $ei$ -рассеяния равно

$$\tau_{ei} = \frac{1}{\nu_0 \Lambda_{ei}}, \quad (3.30)$$

где

$$\nu_0 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m_e}} \frac{Z^2 e^4}{(k_B T)^{3/2}} n_{\text{ion}}, \quad (3.31)$$

а  $\Lambda_{ei}$  – *кулоновский логарифм*. По порядку величины

$$\Lambda_{ei} \approx \ln(r_{\text{max}}/r_{\text{min}}), \quad (3.32)$$

где  $r_{\max}$  и  $r_{\min}$  – соответственно, максимальный и минимальный прицельные параметры столкновения. Максимальный прицельный параметр близок к радиусу плазменного экранирования  $r_{\text{scr}} = 1/k_s$ , где  $k_s$  определяется уравнением (2.24). Минимальный прицельный параметр можно оценить как  $r_{\min} = \max(\lambda_e, Ze^2/k_B T)$ . Тепловая длина волны де Бройля  $\lambda_e$  ограничивает  $r_{\min}$  при высоких температурах, а классическое наименьшее расстояние между электроном и ионом с тепловыми скоростями,  $Ze^2/(k_B T)$ , ограничивает  $r_{\min}$  в низкотемпературном квазиклассическом режиме.

Кулоновский логарифм слабо зависит от параметров плазмы и обычно варьируется от нескольких единиц до  $\sim 20$ . Эффективное время релаксации  $\tau_{ei}$  характеризует эффективность электрон-ионных столкновений. Похожее эффективное время релаксации

$$\tau_{ee} = \frac{3\sqrt{m_e}(k_B T)^{3/2}}{8\sqrt{\pi}e^4 n_e \Lambda_{ee}} \quad (3.33)$$

характеризует эффективность  $ee$ -столкновений. Если  $\Lambda_{ee} \sim \Lambda_{ei}$ , то  $\tau_{ee}/\tau_{ei} \sim Z$ , то есть  $ei$ -столкновения примерно в  $Z$  раз более эффективны, чем  $ee$ -столкновения (более точная оценка будет дана в § 3.3).

Рассмотрим плазму тяжёлых ионов, в которой  $ee$ -столкновениями можно пренебречь, а для  $ei$ -столкновения довольно точным является приближение (3.23). Если при этом в формуле (3.29) пренебречь зависимостью  $\Lambda$  от  $p$  (напр., [190]) и воспользоваться приближением времени релаксации (3.22), то можно произвести явное интегрирование в (3.11), что приводит к равенствам

$$\sigma = \frac{32e^2 n_e \tau_{ei}}{3\pi m_e}, \quad \alpha_T = -\frac{16en_e \tau_{ei}}{\pi m_e}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{200 k_B^2 T n_e \tau_{ei}}{3\pi m_e}. \quad (3.34)$$

Отсюда с помощью соотношений (3.13) получаем

$$\sigma = \frac{32}{3\pi} \frac{e^2 n_e \tau_{ei}}{m_e}, \quad Q_T = \frac{3}{2} \frac{k_B}{e}, \quad \kappa = \frac{128}{3\pi} \frac{k_B^2 T n_e \tau_{ei}}{m_e}, \quad (3.35)$$

Если использовать тот же метод, но не пренебрегать  $ee$ -столкновениями, то равенства (3.35) приобретут поправочные коэффициенты, зависящие от  $Z$ <sup>1</sup>:

$$\sigma = \frac{\sigma_{ei}}{1 + 1,2136/Z - 0,471/Z^2}, \quad (3.36)$$

$$Q_T = \frac{Q_{T,ei}}{1 + 0,777/Z - 0,488/Z^2 + 0,205/Z^3}, \quad (3.37)$$

$$\kappa = \frac{\kappa_{ei}}{1 + 4,238/Z - 1,804/Z^2 + 0,863/Z^3}. \quad (3.38)$$

Здесь  $\sigma_{ei}$ ,  $Q_{T,ei}$  и  $\kappa_{ei}$  задаются формулами (3.35).

<sup>1</sup> Аппроксимации (3.36)–(3.38) получены и предоставлены Д. Г. Яковлевым (не опубликованы).

### 3.1.5 Сильно вырожденный электронный газ

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай, когда электроны сильно вырождены. Анализ электронного переноса при этом упрощается за счёт того, что основной вклад вносят лишь те электроны, энергии которых лежат в узкой области вблизи уровня Ферми. Энтальпия  $\zeta$  и химический потенциал  $\mu_e$  отличаются от энергии Ферми  $\epsilon_F$  малыми слагаемыми  $\sim \mu_e(T/T_F)^2$  (см. уравнение (2.54)). Поэтому достаточно положить в (3.11)  $\zeta = \mu_e$ . Кроме того, во втором соотношении (3.13)  $T\alpha_T^2/\sigma \sim (T/T_F)^2 \tilde{\kappa}$ , поэтому  $\kappa \approx \tilde{\kappa}$ . Удобно записать коэффициенты переноса в виде

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_\sigma}{m_e^*}, \quad \kappa = \frac{\pi^2 k_B^2 T n_e \tau_\kappa}{3m_e^*}, \quad Q_T = \frac{\pi^2 k_B^2 T}{3e p_F v_F} (3 + \xi), \quad (3.39)$$

где  $m_e^* = \epsilon_F/c^2 = m_e \gamma_T$  – динамическая масса электрона,  $v_F = p_F/\gamma_T$  – его скорость на поверхности Ферми, а  $\tau_\sigma$ ,  $\tau_\kappa$  и  $\xi$  – величины, подлежащие определению на основе уравнения Больцмана (3.1). Величины  $\tau_\sigma$  и  $\tau_\kappa$  называются эффективными временами релаксации электронов по отношению к переносу заряда и тепла, соответственно;  $\xi \sim 1$  – безразмерный фактор, который может иметь тот или иной знак в зависимости от механизма электронного рассеяния.

Для численных оценок удобны соотношения

$$\sigma = 1,485 \times 10^{22} \frac{x_T^3}{\gamma_T} \left( \frac{\tau_\sigma}{10^{-16} \text{ с}} \right) \text{ с}^{-1}, \quad \kappa = 4,038 \times 10^{15} T_6 \frac{x_T^3}{\gamma_T} \left( \frac{\tau_\kappa}{10^{-16} \text{ с}} \right) \text{ эрг см}^{-1} \text{ с}^{-1} \text{ К}^{-1}. \quad (3.40)$$

В случае, когда рассматривается рассеяние электронов на тяжёлых частицах, применимо приближение времени релаксации (3.22). В этом случае из (3.11) и (3.22) легко получить выражения

$$\tau_\sigma = \tau_\kappa = \tau_{ei}(\mu_e), \quad (3.41)$$

$$\xi = \frac{p_F}{v_F} \frac{\partial}{\partial \mu_e} \ln \sigma(\mu_e) - 3 = p_F v_F \frac{\partial}{\partial \mu_e} \ln \left( \frac{\tau_{ei}(\mu_e)}{\mu_e} \right), \quad (3.42)$$

а также закон Видемана – Франца

$$\kappa = \frac{\pi^2 k_B^2 T \sigma}{3e^2}. \quad (3.43)$$

Функция  $\tau_{ei}(\mu_e)$  в правой части формулы (3.41), как и раньше, определяется формулами (3.23) и (3.24), в которых сечение определяется рассеянием электрона с заданной энергией на заданном потенциале и не зависит от статистического распределения электронов. Поэтому функция  $\tau_{ei}(\epsilon)$  задаётся формулой (3.29) независимо от степени электронного вырождения.

### 3.1.6 Правило Маттиссена

Если имеется несколько механизмов рассеяния, то решение усложняется. Однако при сильном вырождении электронов можно независимо вычислить эффективные частоты  $\nu_j$  для разных механизмов рассеяния и получить эффективное время релаксации  $\tau = 1/\nu$  на основе правила Маттиссена (напр., [193]):  $\nu_{\text{total}} = \nu_1 + \nu_2 + \dots$ . На практике это правило обеспечивает хорошее приближение и в отсутствие сильной вырожденности. В частности, если имеются два механизма рассеяния с эффективными частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , то на основе вариационного принципа (3.16) можно показать, что результирующая эффективная частота  $\nu$  удовлетворяет неравенствам  $\nu_1 + \nu_2 \leq \nu \leq \nu_1 + \nu_2 + \delta\nu$ , где  $\delta\nu \ll \min(\nu_1, \nu_2)$  [193].

При этом случаи ионной жидкости и кристалла различаются.

В жидкости или газе (при  $T > T_m$ ) основным является кулоновское рассеяние электронов на ионах. Электрон-электронные соударения практически не участвуют в переносе заряда по причине сохранения импульса, а значит, и среднего тока в парных соударениях, поэтому ими обычно можно пренебречь при расчёте проводимости (см., напр., [212]). Однако они могут оказаться существенными для теплопроводности. Следовательно, по правилу Маттиссена

$$\frac{1}{\tau_\sigma} = \frac{1}{\tau_{ei}^\sigma}, \quad \frac{1}{\tau_\kappa} = \frac{1}{\tau_{ei}^\kappa} + \frac{1}{\tau_{ee}}. \quad (3.44)$$

Электрон-ионное рассеяние будет более подробно рассмотрено в § 3.2, а электрон-электронное – в § 3.3. Учитывая равенства (3.39), можно переписать второе равенство (3.44) в терминах теплопроводностей как

$$\kappa = (\kappa_{ei}^{-1} + \kappa_{ee}^{-1})^{-1}. \quad (3.45)$$

В кристалле (при  $T < T_m$ ) основной механизм рассеяния – это рассеяние электронов на фононах (для него мы, как и для рассеяния на ионах в жидкости, используем обозначение « $ei$ ») и на заряженных неоднородностях (индекс « $imp$ »). Электрон-фононное рассеяние обычно доминирует при температурах, не слишком малых по сравнению с  $T_m$ . Если же  $T_m \gg T$ , то определяющим может стать рассеяние электронов на примесях или дефектах кристаллической решётки<sup>2</sup>. Рассеяние на неоднородностях можно описать при помощи эффективного времени релаксации  $\tau_{imp}$ . Таким образом, совместный эффект рассеяния электронов на фононах, электронах

<sup>2</sup>Отметим, что при таких условиях могут стать конкурентоспособными иные механизмы теплопереноса – за счёт ионов [16] или сверхтекучих нейтронов [17, 213]



и примесях можно представить как

$$\frac{1}{\tau_\sigma} = \frac{1}{\tau_{ei}^\sigma} + \frac{1}{\tau_{\text{imp}}}, \quad \frac{1}{\tau_\kappa} = \frac{1}{\tau_{ei}^\kappa} + \frac{1}{\tau_{\text{imp}}} + \frac{1}{\tau_{ee}}. \quad (3.46)$$

Рассеяние на заряженных примесях будет более подробно рассмотрено в § 3.4.

## 3.2 Рассеяние электронов на ионах

### 3.2.1 Ионный газ

В случае, когда ионы практически некоррелированы, эффективное время релаксации  $\tau_{ei}$  для проводимости и теплопроводности, обусловленных  $ei$ -столкновениями, можно получить путём использования в уравнениях (3.23) и (3.24) дифференциального сечения рассеяния Мотта для релятивистского электрона, дополненного поправкой второго порядка к борновскому приближению (напр., [214]):

$$\sigma(\epsilon, \vartheta) = \frac{4Z^2 e^4 \epsilon^2}{(\hbar c)^4} |\phi_q|^2 \left[ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) + \pi Z \alpha_f \frac{v}{c} \sin \frac{\vartheta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \right], \quad (3.47)$$

где  $\phi_q$  – функция экранирования, введённая в (3.26). Таким образом мы приходим к формуле (3.29) с уточнённым выражением для кулоновского логарифма  $\Lambda_{ei}(p)$ : вместо (3.28) мы теперь имеем

$$\Lambda_{ei}(p) = \int_0^{2p/\hbar} q^3 |\phi_q|^2 \left[ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) + \pi Z \alpha_f \frac{v}{c} \sin \frac{\vartheta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \right] dq, \quad (3.48)$$

что отражает учёт релятивистских и неборновских поправок. Пренебрегая для этих поправок плазменным экранированием, можно выполнить аналитическое интегрирование двух последних слагаемых в (3.48), в результате чего приходим к явному выражению для них, справедливому при слабом экранировании (т.е. при  $2pr_D/\hbar \gg 1$ ) [209, 215]:

$$\Lambda_{ei}(p) = \Lambda_{ei}^{(0)}(p) - \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 + \frac{\pi \alpha_f Z}{2} \frac{v}{c}, \quad (3.49)$$

где первое слагаемое,  $\Lambda_{ei}^{(0)}$ , – кулоновский логарифм в нерелятивистском борновском приближении, который вычисляется с учётом динамического экранирования на основе формализма Уильямса и ДеВитта [216] и равен

$$\Lambda_{ei}(p) = \ln \left( \frac{2pr_D}{\hbar} \right) - \left( \frac{r_D}{r_e} \right)^2 \ln \left( \frac{r_e}{r_D} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_D^2}{r_e^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{r_D^2}{r_e^2} \right), \quad (3.50)$$

где  $r_D$  и  $r_e$  определяются равенствами (2.23) и (2.17), соответственно.

Согласно (3.41) и (3.29), для *вырожденных электронов* эффективное время релаксации можно оценить как

$$\tau_{ei} = \tau_{ei}(\mu_e) = \frac{3\pi\hbar}{4Zm_e^*\alpha_f^2\Lambda_{ei}(\mu_e)c^2} = \frac{5,7 \times 10^{-17}}{Z\Lambda_{ei}(\mu_e)\gamma_r} \text{ с.} \quad (3.51)$$

Если положить  $\Lambda_{ei} = \text{const}$ , то  $\tau_{ei}$  будет независимым от температуры, а в области нерелятивистских электронов ещё и от плотности.

Все формулы в данном подразделе хорошо известны и приведены с целью использования и ссылок на них в дальнейшем изложении.

### 3.2.2 Ионная жидкость (вырожденные электроны)

Рассмотрим теперь наиболее важный для нейтронных звёзд случай сильносвязанной кулоновской плазмы,  $\Gamma \gtrsim 1$ . В этом случае ионное экранирование является сильным: формальное выражение для дебаевской длины экранирования (2.23) даёт результат  $r_D < a_{\text{ион}}$ . Предполагая, что последовательные акты рассеяния некогерентны между собой, суммарное число переходов в единицу времени между состояниями с заданными начальным ( $\mathbf{p}$ ) и конечным ( $\mathbf{p}'$ ) импульсами получим суммированием по конечным ( $\sigma'$ ) и усреднением по начальным ( $\sigma$ ) спиновым состояниям (ср. [194]):

$$W(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') = \frac{2\pi N_i}{\hbar^2} \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} |U_{q,\sigma'\sigma}|^2 S(\mathbf{q}, \omega), \quad (3.52)$$

где  $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$  – переданный импульс,  $\hbar\omega$  – переданная энергия,  $U_{q,\sigma'\sigma}$  – кулоновский матричный элемент перехода, а  $S(\mathbf{q}, \omega)$  – динамический структурный фактор (2.79). Экранирование кулоновского потенциала учитываются при помощи диэлектрической функции (2.105), а конечные размеры иона – при помощи формфактора (фурье-образа плотности заряда)  $F_q$ . В результате в формуле (3.48) для кулоновского логарифма появляются дополнительные подынтегральные множители, учитывающие корреляцию положений ионов и их конечные размеры, и таким образом уточнённая формула в борновском приближении (то есть без последнего слагаемого в скобках) может быть записана в виде

$$\Lambda_{ei} = \int_0^{2k_F} q^3 |\phi_q|^2 S_{\text{eff}}(q) \left[ 1 - \frac{v_F^2}{c^2} \left( \frac{q}{2k_F} \right)^2 \right] dq. \quad (3.53)$$

Здесь

$$\phi_q = \frac{F_q}{q^2 \varepsilon_e(q)}, \quad (3.54)$$

а  $S_{\text{eff}}(q)$  – эффективный статический структурный фактор, выражающийся через динамический структурный фактор  $S(\mathbf{q}, \omega)$  посредством интеграла по  $\omega$  с весовыми множителями, учитывающими зависимость распределения ионных плазменных колебаний по частотам.

Вообще говоря, эти множители различны для разных кинетических коэффициентов, что и служит причиной различия эффективных времён релаксации  $\tau_\sigma$  и  $\tau_\kappa$  в (3.39), которое проявляется в при  $T \lesssim T_{\text{pi}}$ . Явный их вид для кулоновского кристалла будет представлен в § 3.2.3. Эти веса стремятся к единице при  $\hbar\omega \ll k_{\text{B}}T$ , поэтому в классической области ( $T \gg T_{\text{pi}}$ ), рассмотрением которой мы ограничиваемся в случае ионной жидкости, в качестве эффективного структурного фактора  $S_{\text{eff}}(q)$  часто используют статический структурный фактор  $S(q)$ , выражающийся формулой (2.81) (напр., [118, 194, 197, 206, 207, 215, 217]). Но в статье [114] мы привели аргументы в пользу определённого видоизменения  $S_{\text{eff}}(q)$ , которое становится существенным при  $\Gamma \gtrsim 100$ . Рассмотрим это видоизменение.

### 3.2.2а Эффективный структурный фактор сильносвязанной кулоновской жидкости

Формально в жидкости отсутствует дальний порядок. Однако известно, что сильносвязанная кулоновская жидкость имеет много общего с кулоновским кристаллом. Так, моделирование методом молекулярной динамики [218] продемонстрировало появление коллективных сдвиговых мод колебаний (характерных для кристаллов) в кулоновской жидкости при  $\Gamma \gtrsim 120$ . Это означает, что в ионной жидкости возникают квазиупорядоченные структуры, время жизни которых намного превышает период колебаний ионов около положений равновесия в этих структурах. Вырожденные электроны, таким образом, рассеиваются не на отдельных ионах, а на таких квазиупорядоченных блоках. В литературе уже давно отмечалось, что при рассеянии электронов в плазме имеет значение не глобальный беспорядок, а тот локальный беспорядок, который «видит» электрон за характерное время рассеяния [219]. Учёт влияния частичной упорядоченности ионов на электронные кинетические коэффициенты кулоновской жидкости был впервые осуществлён в работе [114], в которой в качестве  $S_{\text{eff}}(q)$  вместо полного структурного фактора  $S(q)$  использовалась его неупругая компонента

$$S''(q) = S(q) - S'(q), \quad (3.55)$$

где  $S'(q)$  – упругая (брэгговская) компонента, которая по аналогии с (2.87) вычисляется по формуле

$$S'(q) = e^{-2W(q)} (2\pi)^3 n_{\text{ion}} \sum_{\mathbf{G} \neq 0} \overline{\delta(\mathbf{q} - \mathbf{G})}, \quad (3.56)$$

где  $e^{-2W(q)}$  – фактор Дебая–Валлера, определяемый по формулам (2.89) и (2.93), а черта над дельта-функцией обозначает усреднение по ориентациям волнового вектора  $\mathbf{q}$  в бсс-структуре. Выбор типа кристаллической решётки для такого усреднения неоднозначен, но результат нечувствителен к этому выбору.

### 3.2.2b Формфактор

Во внутренней коре нейтронной звезды размеры ядер уже не являются пренебрежимо малыми по сравнению с расстояниями между ними. В этом случае необходимо принимать в расчёт распределение электрического заряда по объёму ядра. В этом случае необходимо учитывать ядерный формфактор  $F_q$  в выражении для функции экранирования (3.54).

Для сферических атомных ядер в предположении, что заряд ядра распределён равномерно внутри сферы радиуса  $r_{\text{nuc}}$ ,

$$F_q = \frac{3}{(qr_{\text{nuc}})^3} [\sin(qr_{\text{nuc}}) - qr_{\text{nuc}} \cos(qr_{\text{nuc}})]. \quad (3.57)$$

Безразмерный параметр, характеризующий отношение размера ядра к расстоянию между ядрами, определяется как отношение протонного радиуса ядра  $r_{\text{nuc}}$  к радиусу ионной сферы:  $x_{\text{nuc}} = r_{\text{nuc}}/a_{\text{ion}}$ . Этот параметр можно приближённо выразить через  $x_{\text{r}}$  (см. [5], Appendix B):

$$x_{\text{nuc}} = \begin{cases} 0,00155 (A/Z)^{1/3} x_{\text{r}} & \text{при } \rho \leq \rho_{\text{drip}}, \\ 0,00247 x_{\text{r}} & \text{при } \rho > \rho_{\text{drip}}. \end{cases} \quad (3.58)$$

На самом деле протонный заряд в атомном ядре распределён не вполне равномерно: его плотность гладко спадает от максимума до нуля вблизи границы ядра, что становится особенно заметным при высокой плотности вблизи дна внутренней коры нейтронной звезды. Профили плотности заряда ядра были рассчитаны и описаны приближёнными формулами для нескольких значений концентрации барионов во внутренней коре в работе Оямацу [220]. На их основе была разработана аналитическая аппроксимация для параметров распределения заряда в ядре, применимую при любых плотностях – *SCM* (smooth composition model; см. [5], § B2), использованная, в частности, в [117] при расчётах тормозного нейтринного излучения и в [37] при расчётах кинетических коэффициентов во внутренней коре нейтронной звезды.

### 3.2.2c Выход за рамки борновского приближения

Неборновские поправки учитываются путём домножения подынтегрального выражения (3.53) на  $\sigma(\epsilon, q)/\sigma_{\text{Born}}(\epsilon, q)$ , где  $\sigma(\epsilon, q)$  – точное неборновское дифференциальное сечение рассеяния электрона на кулоновском потенциале [221] при энергии  $\epsilon$  и переданном импульсе  $\hbar q$ , а  $\sigma_{\text{Born}}(\epsilon, q)$  – сечение рассеяния в борновском приближении, т.е. выражение (3.47) без последнего слагаемого.

### 3.2.2d Учёт поляризуемости электронного фона

Электронное экранирование не только приводит к появлению  $\epsilon_e(q)$  в знаменателе (3.54), но и влияет на структурный фактор  $S(q)$  в (3.53). Последний эффект обычно не учитывается при расчётах коэффициентов переноса в кулоновской жидкости, то есть используется модель ОСР. Для того чтобы оценить приемлемость такого приближения, в статье [215] при вычислении  $S(q)$  была учтена поляризуемость электронного фона с учётом поправки LFC (2.107) согласно [126]. Такой учёт поляризуемости фона приводит к увеличению  $\Lambda_{ei}$  для водорода на  $\lesssim 15\%$  при  $\rho = 100 \text{ г см}^{-3}$  и  $\Gamma = 10$  и до 40% при бóльших  $\Gamma$ . Для гелия эффект в несколько раз слабее, а для тяжёлых элементов он пренебрежимо мал. Результаты для водорода и гелия показаны на правом рисунке 3.1.

### 3.2.2e Аналитическая аппроксимация для кулоновского логарифма

Расчёты кулоновского логарифма для электрон-ионного рассеяния в классической вырожденной кулоновской жидкости вне рамок борновского приближения и с учётом поляризуемости электронного фона были выполнены в работе [215], и там же предложена формула для аппроксимации численных результатов:

$$\Lambda_{ei} = \frac{1}{2} (1 + c_5 \tilde{q}_{\text{tot}}) \ln \left( \frac{1 + c_7 \tilde{q}_e}{\tilde{q}_{\text{tot}}} \right) - c_4 - \frac{x_r^2}{2\gamma_r^2} (1 - c_6 \tilde{q}_{\text{tot}}) + \pi Z \alpha_f \frac{x_r}{2\gamma_r}, \quad (3.59)$$

где  $\tilde{q}_{\text{tot}} = \tilde{q}_i + \tilde{q}_e$  – квадрат эффективного обратного радиуса экранирования, нормированного на  $(2k_F)$ ,

$$\tilde{q}_i = \left( \frac{3}{2\pi Z} \right)^{2/3} \left( 1,5c_1 + \frac{c_3\sqrt{Z} + c_2(x_r/\gamma_r)^2}{\sqrt{\Gamma Z}} + \frac{3}{\Gamma} \right)^{-1}, \quad \tilde{q}_e = \left( \frac{k_{\text{TF}}}{2k_F} \right)^2 = \frac{\alpha_f \gamma_r}{\pi x_r} \quad (3.60)$$

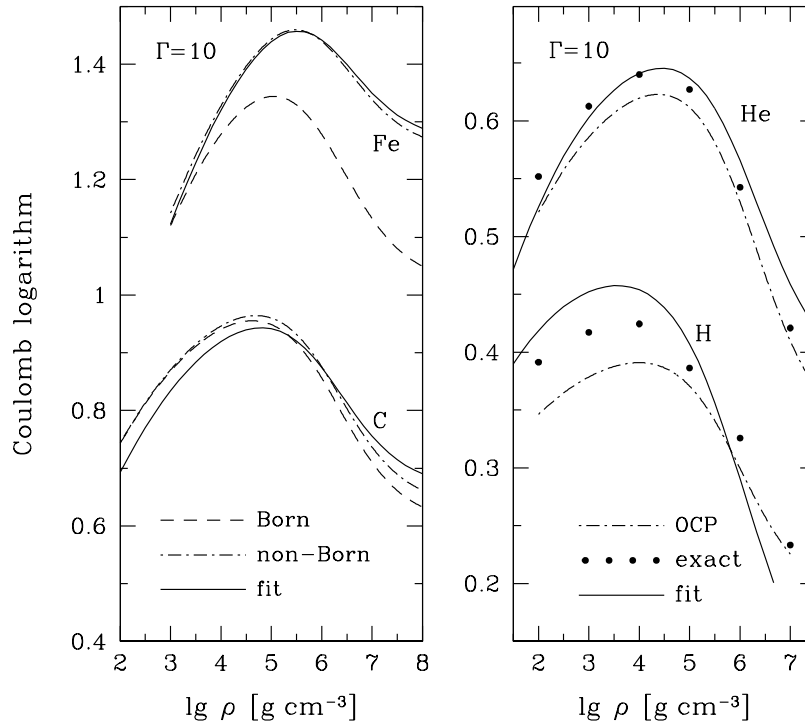


Рис. 3.1: Кулоновский логарифм  $\Lambda_{ei}$  как функция логарифма плотности для полностью ионизованной плазмы при  $\Gamma = 10$  [215]. *Слева*: железная (Fe) и углеродная (C) плазма; штрихпунктир – численные неборновские результаты, пунктир – борновское приближение, сплошные кривые – аналитическая аппроксимация. *Справа*: водородная (H) и гелиевая (He) плазма; штрихпунктир – расчёты с использованием структурного фактора ионов для ОСП, кружки – с учётом неоднородности электронного фона, сплошные кривые – аналитическая аппроксимация.

(последнее равенство справедливо в силу (2.18)). Для  $Z \leq 3$  параметры этой аппроксимации даются формулами

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -0,349 + 1,766 Z - 0,413 Z^2, \\
 c_2 &= 3,499 - 2,355 Z + 0,871 Z^2, \\
 c_3 &= 11,92 - 6,77 Z + 1,04 Z^2, \\
 c_4 &= 0,5733 - 0,1116 Z + 0,0159 Z^2, \\
 c_5 &= 0,7060 - 0,9896 Z + 0,3517 Z^2, \\
 c_6 &= 4,779 - 2,676 Z + 0,361 Z^2, \\
 c_7 &= 2,457 + 2,523 Z - 1,014 Z^2,
 \end{aligned}$$

а для  $Z > 3$  –

$$c_1 = 1,232, \quad c_2 = 4,273, \quad c_3 = 0,9742, \quad c_4 = 0,3816, \quad c_5 = 0,9025, \quad c_6 = 0,0, \quad c_7 = 0,9.$$

Характерная погрешность аппроксимации – несколько процентов (более точные данные для разных режимов см. в [215]), что вполне достаточно для изучения нейтронных звёзд.

Левый рисунок 3.1 показывает кулоновский логарифм  $\Lambda_{ei}$  для полностью ионизованной углеродной и железной плазмы, вычисленный в борновском приближении (пунктир), вне рамок борновского приближения (штрихпунктир) и по формуле (3.59) (сплошные кривые). Видно, с одной стороны, качество аппроксимации (3.59), а с другой – быстрый рост неборновских поправок с увеличением  $Z$ .

### 3.2.3 Ионный кристалл

В кристалле  $ei$ -рассеяние можно описать в терминах поглощения и испускания фононов. Оно может происходить как посредством нормальных процессов, так и посредством *процессов переброса* (напр., [112, 113]): в первом случае переданный импульс  $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$  лежит в первой зоне Бриллюэна, а во втором – перескакивает через зоны. Волновые векторы  $\mathbf{k}$  поглощённых и испущенных фононов по определению лежат в первой зоне Бриллюэна. Поэтому для нормальных процессов  $\mathbf{k} = \mathbf{q}$ , а для процессов переброса  $\mathbf{k} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ , где  $\mathbf{q}_0$  – вектор обратной решётки для той зоны Бриллюэна, куда попадает вектор  $\mathbf{q}$ . Если импульс электрона  $\mathbf{p}$  на поверхности Ферми может свободно рассеяться в любую другую точку ферми-сферы ( $q \leq 2k_F$ ), то согласно равенству  $q_{BZ} = (6\pi n_{\text{ион}})^{1/3}$  (2.68), отношение вероятностей нормальных процессов и процессов переброса при рассеянии составляет  $(2k_F/q_{BZ})^2 \sim (4Z)^{2/3}$ . В лаборатории число электронов проводимости на один ион  $Z$  невелико, поэтому обычно наиболее важны нормальные процессы, однако в плотной астрофизической плазме тяжёлых элементов, напротив,  $Z \gg 1$ , и поэтому доминируют процессы переброса (при не слишком низких температурах, как пояснено ниже в § 3.2.3а).

Как отмечено выше, брэгговское рассеяние не вносит вклада в электронную релаксацию, поэтому в интеграл столкновений входит неупругая компонента структурного фактора. Неупругий динамический структурный фактор вычисляется по формуле (2.95). Если в этой формуле мы обрежем сумму по  $n$  на  $n = 1$ , то мы придём к однофононному приближению (2.103), применявшемуся в более ранних работах [118, 206, 222, 223]. Однако, как мы отметили в статье [114], однофононное приближение нарушается при приближении  $T$  к  $T_m$ . Вклад  $n$ -фононных процессов ( $n$ -е слагаемое) при  $T$  выше температуры Дебая можно оценить как  $(qr_T)^{2n}/n! \sim (k_F r_T)^{2n}/n!$ , где  $r_T^2 \approx u_{-2} a^2/\Gamma$  можно оценить по формуле (2.91). Например, для железа при  $\Gamma \approx \Gamma_m$

получается  $n \sim (k_F r_T)^2 \approx 3$  – не малое число.

Ввиду доминирования процессов переброса для вычисления кулоновского логарифма можно использовать приближение (2.101).

Как отмечено в § 3.2.2, в общем случае следует различать эффективные времена релаксации для вычисления проводимости  $\tau_\sigma$  и теплопроводности  $\tau_\kappa$  в уравнении (3.39). Поэтому в уравнения (3.29) и (3.53), войдут, вообще говоря, разные кулоновские логарифмы  $\Lambda_{ei}^\sigma$  и  $\Lambda_{ei}^\kappa$  (их различием можно пренебречь, когда рассеяние квазиупруго, то есть при  $T \gtrsim T_{pi}$ ). Соответственно, в (3.53) в качестве  $S_{\text{eff}}(q)$  используются разные эффективные статические структурные факторы  $S_\sigma(q)$  и  $S_\kappa(q)$  [114]:

$$\Lambda_{ei}^{\sigma,\kappa} = \int_0^{2k_F} q^3 |\phi_q|^2 S_{\sigma,\kappa}(q) \left[ 1 - \frac{v_F^2}{c^2} \left( \frac{q}{2k_F} \right)^2 \right] dq, \quad (3.61)$$

$$\tau_{ei}^\sigma = \frac{p_F^2 v_F}{4\pi Z^2 e^4 n_{\text{ион}} \Lambda_{ei}^\sigma}, \quad \tau_{ei}^\kappa = \frac{p_F^2 v_F}{4\pi Z^2 e^4 n_{\text{ион}} \Lambda_{ei}^\kappa}. \quad (3.62)$$

Факторы  $S_\sigma$  и  $S_\kappa$  выражаются через  $S''(\mathbf{q}, \omega)$  посредством равенств

$$S_\sigma(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{1 - e^{-z}} S''(q, \omega) d\omega, \quad (3.63)$$

$$S_\kappa(q) = S_\sigma(q) + \left( \frac{3k_F^2}{q^2} - \frac{1}{2} \right) \delta S_\kappa(q), \quad (3.64)$$

$$\delta S_\kappa(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^3}{1 - e^{-z}} S''(q, \omega) d\omega, \quad (3.65)$$

где  $z = \hbar\omega/k_B T$ .

Используя формулу (2.101), можно переписать уравнения (3.63) и (3.65) как

$$S_\sigma(q) = \frac{1}{2} e^{-2W(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} K(q, T, t) \frac{dx}{\text{ch}^2 x}, \quad (3.66)$$

$$\delta S_\kappa(q) = e^{-2W(q)} \int_{-\infty}^{+\infty} K(q, T, t) \frac{1 - 2 \text{sh}^2 x}{\text{ch}^4 x} dx, \quad (3.67)$$

где  $x = \pi t T / \hbar$ , а функция  $K(q, T, t)$  определена в (2.102). Вычисления [114, 224] показывают, что эти функции практически не зависят от типа кристаллической решётки.

Рассмотрим *классический кристалл*:  $T \gtrsim T_{pi}$ . Тогда характерные энергии фононов намного меньше, чем  $k_B T$ . Следовательно, только значения  $z \ll 1$  дают вклад в интегралы (3.63) и (3.64), и можно с хорошим приближением положить

$$S_\sigma(q) = S_\kappa(q) = S''(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} S''(\mathbf{q}, \omega) d\omega. \quad (3.68)$$



Тогда можно найти  $\Lambda_{ei}^\sigma = \Lambda_{ei}^\kappa$  из (3.53) (с подстановкой  $S''(q)$  вместо  $S(q)$ ), а  $\tau_{ei}^\sigma = \tau_{ei}^\kappa$ . Такое приближение эквивалентно приближению времени релаксации, использованному в § 3.2.2. В этом случае  $\Lambda_{ei}^{\sigma,\kappa}$  в формуле (3.62) обычно принимает значения  $\sim 1$ .

В противоположном предельном случае *низких температур* ( $T \ll T_{pi}$ ) корреляции ионов – существенно динамические. При этом  $\Lambda_{ei}^\sigma \neq \Lambda_{ei}^\kappa$  и  $\Lambda_{ei}^{\sigma,\kappa} \ll 1$ .

**1. Эффективные структурные факторы.** Прежде всего используем тот факт, что в *высокотемпературном* кулоновском кристалле ( $T_{pi} \lesssim T < T_m$ ) мы можем использовать уравнение (3.68) с  $S''(q)$ , определяемом уравнением (2.104). Фактор Дебая–Валлера  $e^{-2W(q)}$ , входящий в последнее уравнение, при этом можно оценить по формулам (2.89) и (2.91).

В общем случае эффективные структурные факторы в (3.61) можно описать приближёнными формулами [224]

$$S_\sigma(q) = e^{-2W(q)} (e^{2W_1(q)} - 1), \quad (3.69)$$

$$\delta S_\kappa(q) = \alpha_1 \left[ \frac{91 \eta^2 e^{-2W(q)}}{(1 + 111,4\eta^2)^2} + \frac{0,101 \eta^4}{(0,06408 + \eta^2)(0,001377 + \eta^2)^{3/2}} \right], \quad (3.70)$$

$$W_1(q) = \frac{\alpha_1 u_{-2} \eta^2}{2 \sqrt{\eta^2 + (u_{-2}/117)^2}},$$

где

$$\alpha_1 = \alpha_0 \frac{q^2}{4k_F^2} = \frac{(qr_D)^2}{\eta}, \quad \alpha_0 = \frac{4k_F^2 a_i^2}{3\Gamma\eta} = 1,683 \sqrt{\frac{x_r}{AZ}}. \quad (3.71)$$

Эти формулы охватывают достаточно широкую область параметров  $0,001 \leq \eta \leq 10$  и  $0 \leq \alpha_1 \leq 0,3$ . Уравнения (3.69) и (3.70) также воспроизводят асимптотики эффективных структурных факторов при больших и малых  $\eta$ , которые можно получить из формул (3.66) и (3.67). Максимальная погрешность аппроксимации, равная 4%, достигается при  $\alpha_1 = 0,001$  и  $\eta = 0,04$ .

### 3.2.3а Низкие температуры: случай нормальных процессов

Вблизи границ зон Бриллюэна дисперсионное соотношение для электронов  $\epsilon(\mathbf{p})$  отличается от соотношения для свободных электронов и содержит скачки (запрещённые зоны). Оценка ширины запрещённых зон  $\Delta\epsilon$  в приближении слабой связи (напр., [112]) даёт  $\Delta\epsilon \sim U_{k_F} = 4\pi Z e^2 n_{\text{ион}} k_F^{-2} = 4e^2 / (3\pi k_F)$ . Эти особенности  $\epsilon(\mathbf{p})$  существенны вблизи линий пересечения поверхности Ферми с границей зоны Бриллюэна, на расстояниях  $\Delta k \sim \Delta\epsilon / (\hbar v_F) \sim \frac{4}{3\pi} (\alpha_f \gamma_r / x_r) k_F$  от этих линий пересечения. Видно, что  $\Delta k \ll k_F$ . Но с уменьшением  $T$  те участки поверхности Ферми, между которыми

эффективны процессы переброса, сужаются, стягиваясь к этим линиям пересечения. Когда ширина этих участков  $\sim q_{BZ}/\eta$  становится меньше, чем  $\Delta k$ , большинство переходов начинает происходить в пределах одной зоны – говорят, что процессы переброса *вымораживаются*. Согласно приведённым оценкам, это происходит при  $T \lesssim T_u$ , где

$$T_u \sim T_{pi} Z^{1/3} \alpha_f \gamma_r / (3x_r). \quad (3.72)$$

В этом случае (3.61) следует заменить на

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Lambda_{ei}^\sigma \\ \Lambda_{ei}^\kappa \end{pmatrix} &= \frac{2p_F^2}{m_i T} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} |\phi_q|^2 \left[ 1 - \frac{v_F^2}{c^2} \left( \frac{q}{2k_F} \right)^2 \right] \times \\ &\times \sum_s [q e_s(\mathbf{k})]^2 \frac{e^{-z}}{(1 - e^{-z})^2} \begin{pmatrix} q^2 \\ q^2 - (qz/\pi)^2 + 3(k_F z/\pi)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

где  $d\Omega$  и  $d\Omega'$  – элементы телесного угла вблизи направлений  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ ,  $p = p' = p_F$ . Выражение, равносильное (3.73), было получено в [116] с использованием общего метода [193] и приближений сферической ячейки Вигнера–Зейца и однофононного рассеяния.

При  $T \ll T_u$  из (3.73) можно получить точные асимптотики для кулоновских логарифмов [116], которые выражаются через параметры плазмы следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{ei}^\sigma \\ \Lambda_{ei}^\kappa \end{pmatrix} = \frac{a_\zeta x_r^{1/2}}{A^{1/2} Z^{1/2}} \times \begin{pmatrix} (4\pi/3) (\alpha_f \gamma_r / x_r) \eta^{-5} \\ \eta^{-3} \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

где

$$a_\zeta = \frac{180}{\pi} \left( \frac{3}{\pi \alpha_f} \frac{m_e}{m_u} \right)^{1/2} \zeta(5) \approx 15,9,$$

а  $\zeta(5) = 1,0369$  (здесь  $\zeta(x)$  – дзета-функция Римана).

### 3.2.4 Общая аппроксимация для внешних оболочек

В данном разделе мы представим единую аналитическую аппроксимацию для вычисления электронных теплопроводности, проводимости и термоэлектрического коэффициента, обусловленных рассеянием электронов на ионах, в любом из рассмотренных выше режимов.

### 3.2.4a Сильно вырожденные электроны

Начнём рассмотрение со случая, когда  $T \ll T_F$ . Как мы отмечали выше, классическая сильносвязанная кулоновская жидкость и классический ионный кристалл имеют схожие физические свойства. Расчёты [37, 114, 224] показывают, что благодаря этому сходству скачок кинетических коэффициентов на фазовой границе между кулоновской жидкостью и кристаллом весьма мал при условии, что в сильносвязанной вырожденной кулоновской жидкости используется неупругий структурный фактор (3.55), а в кристалле принимаются во внимание многофононные процессы согласно (3.68) и (2.101). Проведение вычислений при  $\Gamma \geq 1$  облегчается наличием приближённых формул (3.69), (3.70). С другой стороны, при  $\Gamma \ll 1$  можно использовать формулу (3.49). Кулоновские логарифмы, вычисленные по этой формуле при  $\Gamma < 1$ , достаточно гладко сшиваются с кулоновскими логарифмами, рассчитанными при  $\Gamma > 1$ . Это позволило нам сконструировать единую аппроксимационную формулу для вычисления электронной теплопроводности, обусловленной  $ei$ -рассеянием, применимую во всех режимах [224]. Она основана на выражении (3.53), в котором  $|\phi_q|^2 S(q)$  заменяется на *эффективную функцию экранирования*

$$|\phi_q^{\text{eff}}|^2 = \frac{1}{(q^2 + q_s^2)^2} [1 - e^{-s_0 q^2}] e^{-s_1 q^2} G_{\sigma, \kappa} D(\eta). \quad (3.75)$$

Здесь первый множитель имеет вид дебаевской функции экранирования с эффективной обратной длиной экранирования

$$q_s = \sqrt{(q_i^2 + k_{\text{TF}}^2) e^{-\beta_Z}}, \quad (3.76)$$

где параметр  $\beta_Z = \pi \alpha_f Z x_r / \gamma_r$  связан со второй борновской поправкой в (3.49), а

$$q_i^2 = q_D^2 (1 + 0,06 \Gamma) e^{-\sqrt{\Gamma}} \quad (3.77)$$

– эффективная обратная длина ионного экранирования. Таким образом,  $q_s$  переходит в  $k_s$  при  $\Gamma \ll 1$  и в  $k_{\text{TF}}$  при  $\Gamma \gg 1$ . Вторым множителем (в квадратных скобках), по форме схожий с (2.104), играет роль эффективного структурного фактора, поэтому  $s_0$  по порядку величины близко к величине  $r_T^2/3$ , выраженной по формуле (2.91), а именно,

$$s_0 = u_{-2} r_D^2 \left( 1 + \frac{\beta_Z}{3} \right). \quad (3.78)$$

Третий множитель, введённый в статье [37], учитывает ионный формфактор и, таким образом, позволяет расширить область применимости аппроксимации на внут-

реннюю кору. Входящий в этот множитель параметр

$$s_1 = r_{\text{нuc}}^2 \left( 1 + \sqrt{x_{\text{нuc}}} \frac{Z}{13} \right) \left( 1 + \frac{\beta_Z}{3} \right), \quad (3.79)$$

по порядку величины близок к  $r_{\text{нuc}}^2$ , где  $r_{\text{нuc}}$  – протонный радиус атомного ядра (т.е. характерный радиус распределения положительного заряда в ядре). Для вычислений полезно заметить, что  $k_{\text{F}} r_{\text{нuc}} = (9\pi/4)^{1/3} x_{\text{нuc}}$ , а  $x_{\text{нuc}}$  даётся формулой (3.58). Наконец, функции  $G$  и  $D$  описывают квантовые эффекты при низких температурах. Функция

$$D(\eta) = \exp[-\alpha_0 u_{-1} e^{-9,1/\eta}/4], \quad (3.80)$$

связана с квантовой поправкой к фактору Дебая–Валлера (напр., [5], формула [2.130]), а

$$G_\sigma = \frac{1 + (Z/125)^2}{\sqrt{1 + (0,19\eta)^2 Z^{-1/3}}} \quad (3.81)$$

и

$$G_\kappa = G_\sigma + \delta G, \quad \delta G = \frac{0,0105\eta^2}{(1 + 0,0081\eta^2)^{3/2}} [1 + (x_r/\gamma_r)^3 \beta_Z] (1 - Z^{-1}) \quad (3.82)$$

– это феноменологические факторы, учитывающие неборновость и уменьшение смещений ионов в квантовом кристалле: все они увеличиваются с ростом  $Z$  и уменьшаются как  $\eta^{-1}$  при  $\eta \gg 1$ . Отметим, что можно смело положить  $G = 1$  при  $T \gtrsim T_{\text{pi}}$  и  $Z \lesssim 30$ .

Уравнение (3.53) с эффективной функцией экранирования (3.75) можно проинтегрировать аналитически. В результате получим [37]

$$\Lambda_{\sigma,\kappa}^{\text{fit}} = [\Lambda_0(s, w + w_1) - \Lambda_0(s, w_1)] G_{\sigma,\kappa} D(\eta). \quad (3.83)$$

Здесь  $s = q_s^2/(4k_{\text{F}}^2)$ ,  $w = 4k_{\text{F}}^2 s_0$ ,  $w_1 = 4k_{\text{F}}^2 s_1$ ,

$$\Lambda_0(s, w) = \Lambda_1(s, w) - \frac{v^2}{c^2} \Lambda_2(s, w), \quad (3.84)$$

$$2\Lambda_1(s, w) = \ln \frac{s+1}{s} + \frac{s}{s+1} (1 - e^{-w}) - (1 + sw) e^{sw} [\text{E}_1(sw) - \text{E}_1(sw + w)], \quad (3.85)$$

$$2\Lambda_2(s, w) = \frac{e^{-w} - 1 + w}{w} - \frac{s^2}{s+1} (1 - e^{-w}) - 2s \ln \frac{s+1}{s} + s(2 + sw) e^{sw} [\text{E}_1(sw) - \text{E}_1(sw + w)], \quad (3.86)$$

где  $\text{E}_1(x) = \int_x^\infty y^{-1} e^{-y} dy$  – интегральная экспонента [225].

Отметим, что прямое использование формул (3.85), (3.86) может быть затруднительно в различных предельных случаях при  $s \ll 1$ ,  $w \ll 1$  или  $w \gg 1$ . В этих случаях лучше использовать явные предельные асимптотики [224]:

$$\Lambda_1(s, w \ll 1) \approx w \left( \frac{2s+1}{2s+2} - s \ln \frac{s+1}{s} \right), \quad (3.87)$$

$$\Lambda_2(s, w \ll 1) \approx w \left( \frac{1-3s-6s^2}{4s+4} + \frac{3}{2} \ln \frac{s+1}{s} \right). \quad (3.88)$$

$$\Lambda_1(s, w \gg 1) = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{s+1}{s} - \frac{1}{s+1} \right), \quad (3.89)$$

$$\Lambda_2(s, w \gg 1) = \frac{2s+1}{2s+2} - s \ln \frac{s+1}{s}. \quad (3.90)$$

$$\Lambda_1(s \ll 1, w \ll s^{-1}) = \frac{1}{2} [E_1(w) + \ln w + C_E], \quad (3.91)$$

$$\Lambda_2(s \ll 1, w \ll s^{-1}) = \frac{e^{-w} - 1 + w}{2w}, \quad (3.92)$$

где  $C_E = 0,5772\dots$  – постоянная Эйлера.

Приведённые формулы получены для не слишком низких температур, когда не вымораживаются процессы переброса. Низкие же температуры (§ 3.2.3а) мы включаем путём интерполяции

$$\Lambda_{ei}^{\sigma,\kappa} = \Lambda_{\sigma,\kappa}^{\text{fit}} \exp(-T_u/T) + \Lambda_{ei,\text{low}}^{\sigma,\kappa} [1 - \exp(-T_u/T)], \quad (3.93)$$

где  $\Lambda_{\sigma,\kappa}^{\text{fit}}$ , определяются формулой (3.83), а  $\Lambda_{ei,\text{low}}^{\sigma,\kappa}$  – это низкотемпературные асимптотики (3.74). Отметим, что несмотря на практическое удобство такой интерполяции, действительное поведение кулоновских логарифмов в промежуточном температурном режиме требует отдельного исследования, которое пока отсутствует.

Итак, кинетические коэффициенты в сильно вырожденной плазме мы получаем при помощи формул (3.39), (3.51) и (3.93).

На рис. 3.2 (из [224]) показаны зависимости проводимости и теплопроводности, обусловленных электрон-ионным рассеянием, в полностью ионизованной железной плазме при  $\rho = 10^8$  г см<sup>-3</sup>. Тёмные кружки показывают численные результаты, а сплошные кривые – аналитические аппроксимации. Для сравнения показаны также численные результаты в первом борновском приближении (незаполненные кружки) и «старые» электро- и теплопроводности (пунктир), при получении которых использовалось однофононное приближение для кристалла, а также первое борновское приближение и полный (включающий квазибрэгговскую составляющую) структурный

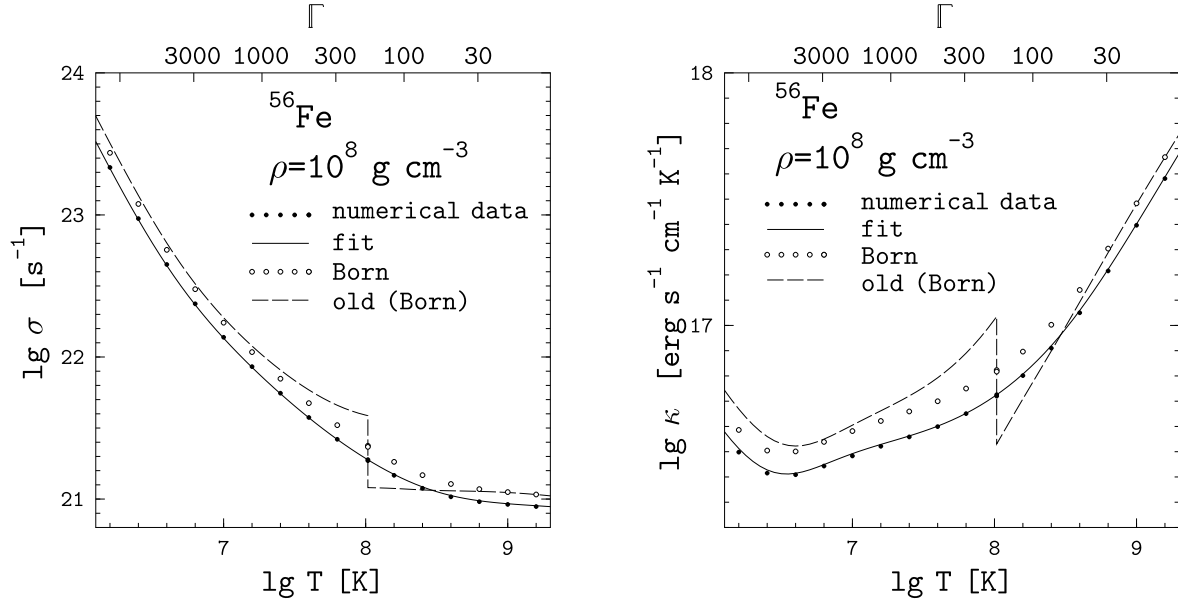


Рис. 3.2: Электронная проводимость (*слева*) и теплопроводность (*справа*), обусловленные  $ei$ -рассеянием, в железной плазме при  $\rho = 10^8 \text{ г см}^{-3}$  как функции температуры (нижняя ось абсцисс) или кулоновского параметра связи (верхняя ось). Заполненные кружки показывают точные численные результаты, незаполненные – численные результаты в борновском приближении, сплошные линии – аналитические аппроксимации (3.85) и (3.86), пунктирные линии со скачком в точке плавления – результаты предыдущих работ, не учитывавших многофононные процессы в кристалле и частичную упорядоченность кулоновской жидкости. Из статьи [224].

фактор для ионной жидкости. Скачки на пунктирных кривых происходят в точке плавления кулоновского кристалла. В старых работах (напр., [222]) они присутствовали при всех плотностях. Описанная модификация структурных факторов улучшает вычисление проводимостей как в жидкой, так и в твёрдой фазе сильносвязанной кулоновской плазмы и практически устраняет скачки для различных химических элементов в широком диапазоне плотности.

На рис. 3.3 (из [224]) показаны зависимости теплопроводности от плотности при разных температурах (левый рисунок) и для разных химических элементов (справа). Выбранные параметры соответствуют внешней коре или океану нейтронной звезды или ядру белого карлика. Показаны результаты с учётом только электрон-ионного рассеяния, а также электрон-ионного и электрон-электронного рассеяния. Сравнение точек и кривых даёт представление о качестве аналитической аппроксимации, описанной в настоящем разделе.

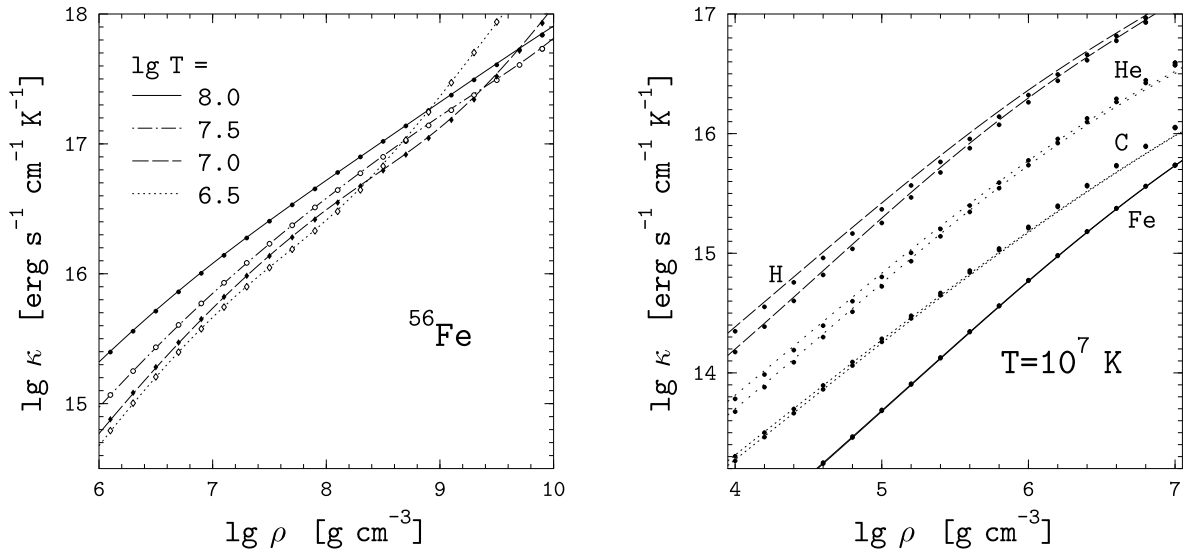


Рис. 3.3: Теплопроводность как функция плотности (в логарифмическом масштабе): сравнение численных результатов (показанных различными точками) с аналитической аппроксимацией по формулам (3.39), (3.51) и (3.76)–(3.93) (нанесённой линиями). Слева – результаты для железа при 4 значениях  $T$  ( $ee$ -столкновения здесь учтены, но совершенно не играют роли). Справа – результаты для водорода, гелия, углерода и железа при  $T = 10^7$  К. Для каждого химического элемента показаны две серии результатов: верхние кривые и точки получены с учётом только  $ei$ -столкновений, а нижние – включая и  $ee$ -столкновения.

### 3.2.4b Частично вырожденные электроны

На основе общих соотношений (3.11) в статье [226] была введена процедура усреднения выражений для коэффициентов переноса, обусловленных  $ei$ -рассеянием, полученных в пределе  $\theta \rightarrow 0$ , по тепловому распределению электронных энергий. Первоначально эта процедура была введена для учёта уширения осцилляций кинетических коэффициентов в квантующем магнитном поле при  $T \ll T_F$ , но она оказалась полезной также и для перехода от вырожденной к невырожденной плазме, в том числе и в отсутствие магнитного поля [227]. Состоит она в выполнении интегрирования согласно формулам

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{ei} \\ \alpha_{T,ei} \\ \tilde{\kappa}_{ei} \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} e^2 \\ e\chi \\ \chi^2 \end{Bmatrix} \frac{\mathcal{N}(\epsilon)\tau_{ei}(\epsilon)}{m_e^*(\epsilon)} \frac{e^\chi}{(e^\chi + 1)^2} d\chi, \quad (3.94)$$

где, как и в главе 2,  $\chi = (\epsilon - \mu_e)/k_B T$ ,  $m_e^*(\epsilon)$  – динамическая масса электрона, соответствующая его энергии  $\epsilon$ , тогда как  $\mathcal{N}(\epsilon)$  – это плотность электронных состояний с энергиями, меньшими, чем энергия  $\epsilon$ , по которой производится интегрирование

(другими словами, это концентрация электронов, которая соответствовала бы равенству  $\epsilon_F = \epsilon$  при  $T = 0$ ), а  $\tau_{ei}(\epsilon)$  – эффективное время релаксации для электронов с энергией  $\epsilon$ . В отсутствие квантующего магнитного поля (то есть для ситуации, рассматриваемой в данной главе), имеем

$$\mathcal{N}(\epsilon) = p^3 / (3\pi^2 \hbar^3) \quad (3.95)$$

и  $m_e^*(\epsilon) = \epsilon \gamma_T / c^2 = \sqrt{m_e^2 + (p/c)^2}$ , где  $p$  – электронный импульс, а эффективное время релаксации определяется аналогично (3.62):

$$\tau_{ei}(\epsilon) = \frac{p^2 v}{4\pi Z^2 e^4 n_{\text{ion}} \Lambda_{ei}}, \quad (3.96)$$

где в качестве  $\Lambda_{ei}$  используется  $\Lambda_{\sigma}^{\text{fit}}$  из формулы (3.83). Очевидно, что такое приближение предполагает  $\Lambda_{\sigma} \approx \Lambda_{\kappa}$ , поэтому необходимым условием его применимости является  $T \gtrsim T_u$ . Впрочем, на практике в тех случаях, когда необходим учёт частичной вырожденности электронного газа, это условие всегда выполняется,

После вычисления  $\sigma_{ei}$ ,  $\alpha_{T,ei}$  и  $\tilde{\kappa}_{ei}$  по формуле (3.94), термоэлектрический коэффициент  $Q_{T,ei}$  и теплопроводность  $\kappa_{ei}$  определяются выражениями (3.13).

Во избежание недоразумений подчеркнём, что характерное время столкновения  $\tau_{ei}(\epsilon)$  в формуле (3.96) следует отличать от эффективных времён релаксации  $\tau_{\kappa,\sigma}$  и  $\tau_{ei,ee}^{\kappa,\sigma}$ , которые характеризуют кинетические коэффициенты при заданных значениях  $n_e$  и  $T$  и не зависят явным образом от энергии, и только при  $T \ll T_F$  мы имеем  $\tau_{ei}^{\sigma} \approx \tau_{ei}(\epsilon_F)$ .

## 3.3 Электрон-электронное рассеяние

### 3.3.1 Невырожденные электроны

Эффективное время релаксации за счёт  $ee$ -столкновений в приближении времени релаксации даёт выражение (3.33), включающее кулоновский логарифм  $\Lambda_{ee}$ , определяемый весьма приближённо.

Как отмечено в § 3.1.4, метод Брагинского [190] учитывает как  $ei$ -, так и  $ee$ -столкновения. Таким образом, в невырожденной плазме кинетические коэффициенты, учитывающие оба типа столкновений, можно определять из выражений (3.34) и (3.35).

Точная асимптотика электронной теплопроводности при  $T \gg T_F$  с учётом только столкновений электронов между собой и в пренебрежении их столкновениями с



ионами приведена в [196]:

$$\kappa_{ee} = \frac{75}{32} \frac{k_B}{\sqrt{\pi m_e}} \frac{(k_B T)^{5/2}}{e^4 \ln(r_e/r_{\min})}, \quad (3.97)$$

где  $r_{\min} = \lambda_e/\sqrt{4\pi}$  при  $\lambda_e \gg r_{\text{cl}} \equiv e^2/(k_B T)$  и  $r_{\min} = r_{\text{cl}}$  при  $\lambda_e \ll r_{\text{cl}}$ .

Любопытно сравнить этот результат с элементарной теорией, в которой предполагается, что эффективная частота рассеяния электронов  $\nu_{\text{eff}}$  не зависит от скорости электронов [193]. Эта теория приводит к выражению

$$\kappa = \frac{3}{2} \frac{n_e k_B^2 T}{m_e \nu_{\text{eff}}}, \quad (3.98)$$

которое можно привести к виду (3.97), если положить

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{25}{6} \tau_{ee}^{-1}, \quad (3.99)$$

где  $\tau_{ee}$  определяется формулой (3.33) с  $\Lambda_{ee} = \ln(r_e/r_{\min})$ . Появившийся здесь множитель  $\frac{25}{6}$  служит мерой неточности приближения времени релаксации применительно к столкновениям одинаковых частиц (в противоположность высокой точности этого метода при рассмотрении столкновений электронов с тяжёлыми ионами).

### 3.3.2 Сильно вырожденные электроны

Несмотря на только что показанную неприменимость приближения времени релаксации к  $ee$ -столкновениям, удобно всё же представлять коэффициенты переноса в форме (3.39), что позволяет применять правило Маттиссена в виде равенства (3.44) для жидкости или (3.46) для кристалла.

Характер  $ee$ -столкновений различен в областях  $T_{pe} \lesssim T \ll T_F$  и  $T \ll T_{pe}$  [196]: в первом случае характерный импульс  $\hbar q \sim \hbar k_{TF}$ , передаваемый при рассеянии, намного меньше, чем тепловое размытие поверхности Ферми, а во втором – больше. При этом в силу принципа Паули импульсы электронов до и после рассеяния должны лежать в пределах тепловой ширины поверхности Ферми. Следовательно, при  $T \ll T_{pe}$  число переходов ( $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2$ ) подавлено: разрешёнными оказываются только те переходы, при которых изменяются направления импульсов, но не их абсолютная величина. При  $T_{pe} \lesssim T \ll T_F$  это ограничение отпадает, так как передача импульса в любом направлении не способна вывести электрон за пределы тепловой ширины поверхности Ферми.

М. Лампе [196] проанализировал  $ee$ -релаксацию нерелятивистских вырожденных электронов с учётом динамического экранирования межэлектронного взаимодействия. В нерелятивистской ( $x_r \ll 1$ ) сильно вырожденной ( $T \ll T_F$ ) плазме при  $k_F \gg k_{TF}$  (то есть при  $T_F \gg T_{pe}$ ) теплопроводность, ограниченная  $ee$ -столкновениями, в первом (однополиномиальном) приближении метода разложения по модифицированным полиномам Сонина–Лагерра равна

$$\kappa_{ee} = \frac{5\pi^3}{72} \frac{k_B^3 T^2 p_F}{m_e e^4} \left[ \ln \left( \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{k_F}{k_{TF}} \right) \right]^{-1}, \quad (3.100)$$

при этом отношение  $k_F/k_{TF}$  под знаком логарифма легко находится по формуле (2.18).

Э. Флауэрс и Н. Ито [118] вывели вариационное выражение  $\tau_{ee}$  для сильно вырожденных релятивистских электронов при  $T \ll T_{pe}$ . В. А. Урпин и Д. Г. Яковлев [203] получили более общий результат, применимый также при  $T \ll T_F$ , но не требующий  $T \ll T_p$ . Этот результат использовался в наших статьях [215, 224], где были вычислены электронные теплопроводности, обусловленные  $ee$ -рассеянием, и получена приближённая формула для них. П. С. Штернин и Д. Г. Яковлев [228] заново рассмотрели  $ee$ -рассеяние при  $T \ll T_F$ , более корректно учтя динамическое экранирование при взаимодействии электронных токов (его можно также рассматривать как затухание Ландау, которое претерпевают поперечные виртуальные плазмоны при таком взаимодействии). Они показали, что этот эффект уменьшает эффективное время релаксации  $\tau_{ee}$  при  $x_r \gtrsim 1$  и  $T \ll T_p$  (вне этой области параметров воспроизводятся прежние результаты [224]). Представленный в статье [228] результат можно записать по аналогии с (3.39) в следующем виде:

$$\kappa_{ee} = \frac{\pi^2 k_B^2 T n_e}{3m_e^* \nu_{ee}^{\text{deg}}}, \quad (3.101)$$

$$\nu_{ee}^{\text{deg}} = \frac{m_e c^2}{\hbar} \frac{6\alpha_f^{3/2}}{\pi^{5/2}} \frac{x_r^{3/2}}{\gamma_r^{1/2}} y I(x_r/\gamma_r, y) = 1,66 \times 10^{17} \frac{x_r^{3/2}}{\gamma_r^{1/2}} y I(x_r/\gamma_r, y) \text{ с}^{-1}, \quad (3.102)$$

где  $y = \sqrt{3} T_{pe}/T = (571,6/T_6) \sqrt{x_r^3/\gamma_r}$ , а  $I(\beta, y)$  – аналитическая аппроксимационная функция, выражающаяся формулой

$$\begin{aligned} I(\beta, y) = & \frac{1}{\beta} \left( \frac{10}{63} - \frac{8/315}{1 + 0,0435y} \right) \ln \left( 1 + \frac{128,56}{37,1y + 10,83y^2 + y^3} \right) + \\ & + \beta^3 \left( \frac{2,404}{B} + \frac{C - 2,404/B}{1 + 0,1\beta y} \right) \ln \left[ 1 + \frac{B}{A\beta y + (\beta y)^2} \right] + \\ & + \frac{\beta}{1 + D} \left( C + \frac{18,52\beta^2 D}{B} \right) \ln \left[ 1 + \frac{B}{Ay + 10,83(\beta y)^2 + (\beta y)^{8/3}} \right], \quad (3.103) \end{aligned}$$

в которой для сокращения записи введены обозначения

$$A = 12,2 + 25,2 \beta^3, \quad B = A \exp[(0,123636 + 0,016234 \beta^2)/C],$$

$$C = 8/105 + 0,05714 \beta^4, \quad D = 0,1558 y^{1-0,75 \beta}.$$

### 3.3.3 Частично вырожденные электроны

Выражение (3.103) справедливо только при  $T \ll T_F$ . Чтобы получить аналитическую аппроксимацию, применимую при любых  $T$ , мы используем интерполяцию между формулами (3.97) и (3.101)–(3.103). Первоначальный вариант такой интерполяции был опубликован в [229], а улучшенный – в [230]. Улучшение состояло в том, что поведение интерполяционной функции в промежуточной области  $T \sim T_F$  было приведено к такой форме, которая максимально точно воспроизводит результаты численных расчётов [197] в той области плотностей и температур, где эти расчёты можно считать достаточно надёжными. Окончательная аппроксимация выглядит так:

$$\kappa_{ee} = \frac{\pi^2 k_B^2 T n_e}{3 m_e \gamma_T} \tau_{ee}, \quad \tau_{ee} = \frac{1 + 25 \theta + 625 a \theta^{5/2}}{\nu_{ee}^{\text{deg}} (1 + 625 \theta^2)}, \quad (3.104)$$

где  $\nu_{ee}^{\text{deg}}$  определяется формулами (3.102) и (3.103),  $\theta = T/T_F$ , а коэффициент  $a = 135/\sqrt{32\pi^7} \approx 0,434$  соответствует отношению асимптотических выражений (3.97) и (3.100).

Совместный учёт рассеяния электронов на ионах и друг на друге производится при помощи правила Маттиссена (3.45). Определим эффективное время релаксации за счёт  $ei$ -столкновений  $\tau_{ei}^\kappa$  при помощи равенства

$$\kappa_{ei} = \frac{\pi^2 k_B^2 T n_e}{3 m_e \gamma_T} \tau_{ei}^\kappa, \quad (3.105)$$

причём  $\kappa_{ei}$  вычисляется по формулам (3.94) и (3.13). Тогда полная теплопроводность кулоновской жидкости будет равна

$$\kappa = \frac{\pi^2 k_B^2 T n_e}{3 m_e \gamma_T} \tau_\kappa, \quad (3.106)$$

На рис. 3.4 приведено сравнение нашего приближения и приближения Брагинского с табличными значениями, опубликованными в статье [197]. Здесь сплошными линиями и точечным пунктиром показано отношение табличной теплопроводности к нашему приближению, в котором  $\kappa_{ei}$  вычисляется по формулам (3.94) и (3.13), а  $\kappa_{ee}$  – по формулам (3.104). Сплошные кривые показывают это отношение в зависимости

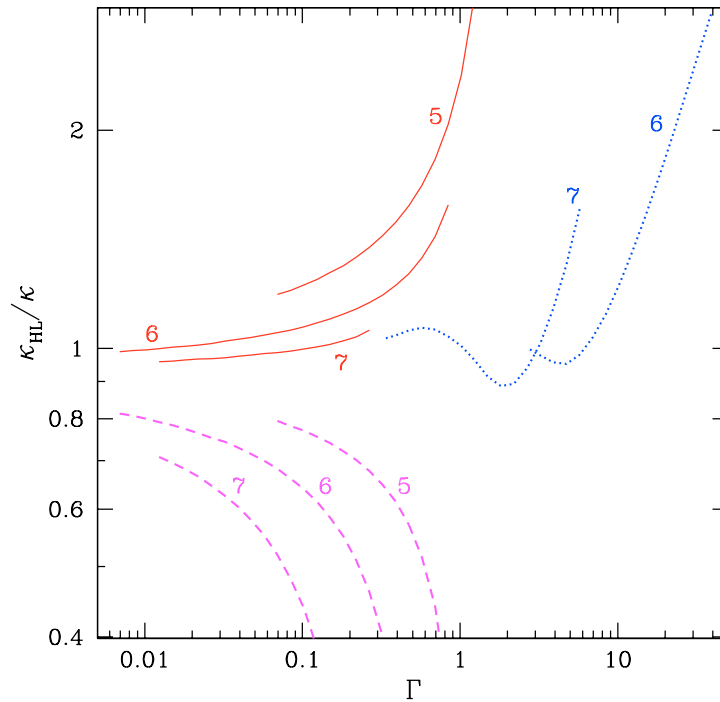


Рис. 3.4: Отношение теплопроводности полностью ионизованного гелия согласно таблицам Хаббарда и Лампе [197] к значениям теплопроводности, вычисленным по аналитическим формулам. Каждая кривая соответствует постоянному значению  $T$ ; значения  $\lg T$  (К) отмечены у кривых. Сплошные линии и точечный пунктир показывают отношение табличных данных для невырожденной и вырожденной плазмы, соответственно, к значениям, вычисленным по формулам (3.45), (3.94), (3.96), и (3.104). Штриховые кривые показывают отношение тех же табличных данных к значениям, вычисленным по формулам (3.32) и (3.35)–(3.38).

от  $\Gamma$  при  $T > 1,7 T_F$ , тогда как точечный пунктир демонстрирует это отношение при  $T < 1,7 T_F$ . Такая граница раздела между двумя областями выбрана потому, что для многих сравнительно низких значений  $T$  таблицы [197] на самом деле состоят из двух не стыкующихся друг с другом частей – для слабо и сильно вырожденной плазмы, – которые при более высоких температурах соединяются приблизительно при  $\theta \sim 1,7$ . Штриховым пунктиром для сравнения нанесено отношение табличной теплопроводности [197] к теплопроводности Брагинского [190], определяемой по формулам (3.38) и (3.30)–(3.32). Эти линии нанесены только для режима невырожденной плазмы, соответственно области применимости метода Брагинского.

Из рис. 3.4 мы видим, что имеются две области существенных расхождений между нашей аппроксимацией и таблицами [197] при  $\Gamma \gtrsim 0,1$ . Эти расхождения встречаются вблизи тех областей  $(\rho, T)$ , которые исключены из таблиц [197] либо по той причине, что ионы становятся сильносвязанными в слабыврожденной плазме, либо по той,

что их движение становится квантованным в сильно вырожденной плазме. В этих случаях метод [197] не работает, а потому и расхождения не могут служить свидетельством против аппроксимации (3.104). Кроме того, мы используем [224] более точный ионный структурный фактор [232]. Дополнительное расхождение на рис. 3.4 при  $\Gamma \gtrsim 1$  и сравнительно низких температурах происходит из-за поправки к электрон-электронному рассеянию [228], обсуждавшейся в § 3.3.2. Вдобавок к сказанному, из рисунка видно, что в левой области (т.е. для невырожденных электронов) согласие с таблицами [197] намного лучше для наших формул (3.94), (3.96) и (3.104), чем для приближения (3.38).

## 3.4 Рассеяние на примесях

Астрофизическая плазма часто представляет собой смесь разных ионов. Кроме того, ионные кристаллы могут содержать структурные дефекты. В этих случаях формулы (3.62), записанные для одной ионной компоненты, подлежат изменению, которое может зависеть от состояния плазмы, типа неоднородностей, их количества и характера расположения. Ниже в этом разделе мы кратко рассмотрим два наиболее характерных случая.

### 3.4.1 Рассеяние на заряженных примесях в кристалле

Рассмотрим рассеяние электронов на заряженных примесях в кристалле. Этот случай ранее изучался в работах [118, 201, 202, 233]. Подходы всех авторов по существу совпадают, различаясь только выбором функции экранирования  $\phi_q$ , от которого слегка зависят кулоновские логарифмы. Тот же подход использовали и мы в статьях [37, 231].

Заряженные примеси в кристаллической коре нейтронных звёзд или кристаллическом ядре белых карликов – это ионы (атомные ядра) с зарядовыми числами  $Z_j \neq Z$ , где  $Z$  – зарядовое число ионов, образующих решётку. Предполагается, что они хаотически расположены в кристалле<sup>3</sup>. Тогда рассеяние электрона на примесях можно рассматривать как кулоновское рассеяние на избыточном заряде  $(Z_j - Z)e$ .

---

<sup>3</sup>Вообще говоря, это предположение может нарушаться в тех случаях, когда примесные ионы составляют заметную долю от общей ионной концентрации. Недавние результаты моделирования по методу молекулярной динамики [234] указывают на возможное возникновение регулярной вигнеровской решётки, состоящей из нескольких сортов ионов. Этот случай требует особого изучения и здесь не рассматривается.

По существу это такое же рассеяние, как и рассеяние электрона на ионе в газовой фазе (§ 3.2.1), и его тоже можно описать в приближении времени релаксации.

Аналогично выражению (3.62), электронное время релаксации при рассеянии на примесях равно

$$\tau_{\text{imp}} = \frac{p_{\text{F}}^2 v_{\text{F}}}{4\pi e^4 \sum_j (Z - Z_j)^2 n_j \Lambda_{\text{imp}}^{(j)}}, \quad (3.107)$$

где суммирование производится по всем сортам примесей. Поскольку рассматриваются некоррелированные примеси, то кулоновский логарифм  $\Lambda_{\text{imp}}^{(j)}$  определяется формулой (3.61), в которой структурный фактор  $S_{\sigma,\kappa}(q) = 1$ .  $\Lambda_{\text{imp}}^{(j)}$  – медленная функция параметров плазмы, зависящая от экранирования рассеяния электронов на примесях, описываемого функцией  $\phi_q$ . Экранирование определяется электронами, а также, возможно, корреляциями между примесями, но последними мы пренебрегаем. Таким образом,  $\phi_q = (q^2 + k_{\text{TF}}^2)^{-1}$ . Чтобы протестировать возможный эффект корреляции между примесями, в работах [224, 231] мы добавляли к  $k_{\text{TF}}^2$  квадрат обратного расстояния между ними  $(4\pi n_j/3)^{2/3}$ , однако на окончательных результатах это практически не сказывается, так как зависимость от параметра экранирования является слабой. Соответствующий кулоновский логарифм равен

$$\Lambda_{\text{imp}}^{(j)} = \frac{1}{2} \left[ 1 + 2 \frac{x_{\text{r}}^2}{\gamma_{\text{r}}^2} \frac{q_{\text{s}}^2}{2k_{\text{F}}^2} \right] \ln \left( 1 + \frac{4k_{\text{F}}^2}{k_{\text{TF}}^2} \right) - \frac{x_{\text{r}}^2}{2\gamma_{\text{r}}^2} - \frac{1 + (x_{\text{r}}/\gamma_{\text{r}})^2 (k_{\text{TF}}/2k_{\text{F}})^2}{2 + 2(k_{\text{TF}}/2k_{\text{F}})^2}. \quad (3.108)$$

Таким образом, формула (3.107) для эффективного времени релаксации при рассеянии электронов на примесях в кристалле аналогична формуле (3.29) для рассеяния на ионах в газовой фазе, с той разницей, что первая величина больше второй приблизительно (с точностью до кулоновских логарифмов) в  $Z^2/Q_{\text{imp}}$  раз, где

$$Q_{\text{imp}} = \sum_j (Z - Z_j)^2 n_j / n_{\text{ion}} \quad (3.109)$$

– это так называемый *параметр неоднородности*, или *примесный параметр*.

Полное эффективное время релаксации получаем по правилу Маттисена (3.46). Так как  $\tau_{\text{imp}}$  почти не зависит от  $T$ , рассеяние на примесях доминирует при достаточно низких температурах. Поэтому ионные примеси могут быть основным источником остаточного электросопротивления (почти не зависящего от  $T$ ) и теплопроводности ( $\propto T$ ) в коре нейтронной звезды при достаточно низких температурах и высоких плотностях (при  $T \ll T_{\text{pi}}$ ) – главным образом во внутренней коре.

На рис. 3.5 показаны зависимости проводимости и теплопроводности от плотности в коре нейтронной звезды при двух постоянных значениях температуры:  $10^7$  и

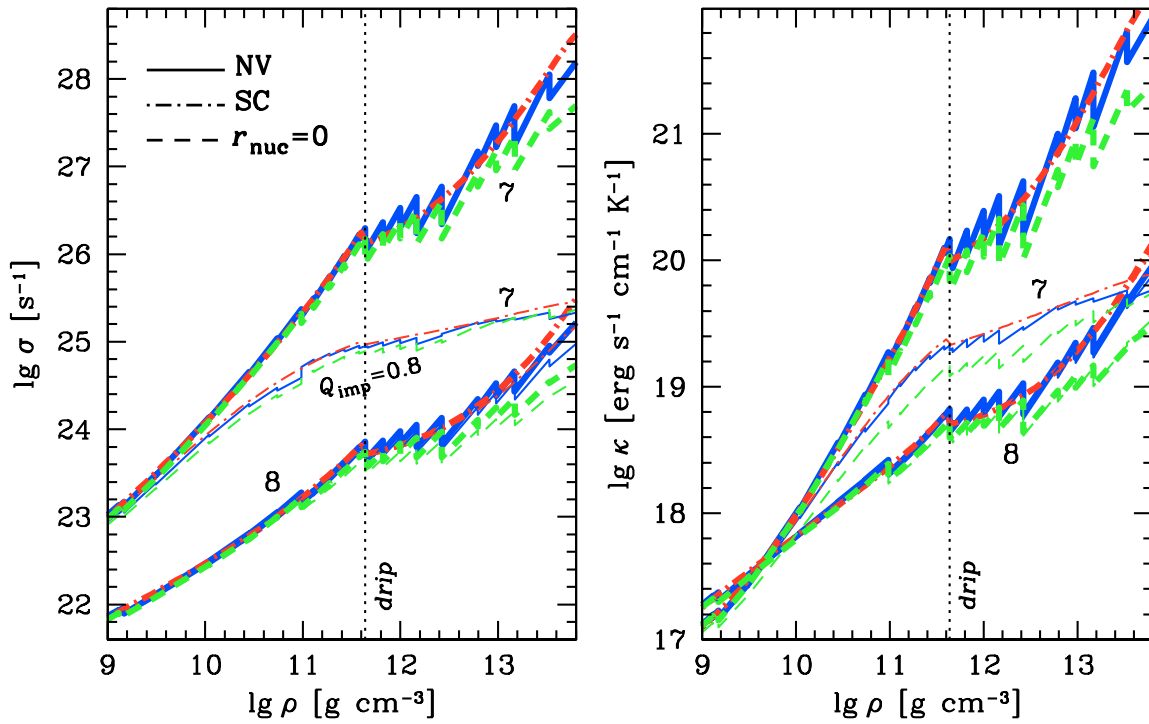


Рис. 3.5: Электронная проводимость (*левый рисунок*) и теплопроводность (*правый рисунок*) вещества в основном состоянии в коре нейтронной звезды при  $\lg T$  [K] = 7 и 8 (согласно числам у кривых). Сплошные линии – численные результаты для изотопного состава согласно модели Нежеля–Вотрена [75] (NV – Negele–Vautherin) с однородным объёмным распределением заряда атомного ядра, штрихпунктир – модель «сглаженного состава» с гладко спадающей плотностью заряда от центра к краю атомного ядра согласно [5, 37] (SC – “smooth composition”); пунктир – состав Нежеля–Вотрена, но с точечной моделью атомных ядер (т.е. без учёта их формфактора). При каждом значении температуры толстые (верхние) линии соответствуют модели без ионных примесей, а тонкие (нижние) кривые – составу, в котором наряду с основным ядерным изотопом присутствует 5% примесей с  $Z_j = Z \pm 4$ , что соответствует параметру неоднородности  $Q_{\text{imp}} = 0,8$ . Вертикальный точечный пунктир на каждом рисунке разделяет внешнюю и внутреннюю кору в точке нейтронного испарения  $\rho = \rho_{\text{drip}}$ .

$10^8$  K (значения  $\lg T$  отмечены числами у кривых). Сплошными кривыми нанесены указанные зависимости для основного состояния ядерной материи в коре нейтронной звезды согласно модели Нежеля и Вотрена [75] с ядерным формфактором, рассчитанным по формуле (3.57). Для сравнения пунктиром показаны результаты, полученные при  $|F(q)| = 1$ , то есть для модели точечных ядер. Штрихпунктир соответствует модели «сглаженного состава» с учётом неоднородности распределения плотности заряда по объёму ядра. Эта модель была впервые использована в статье [37] и подробно описана в § В.2 монографии [5]. Для каждой модели и для каждой температуры жирные кривые соответствуют идеальному вигнеровскому кристаллу,

а тонкие кривые – кристаллу, содержащему примеси, зарядовое число которых  $Z_j$  отличается на 4 от  $Z$  основного изотопа, а относительная концентрация составляет 5%.

### 3.4.2 Линейное смешивание

В случае, когда нет доминирующего типа ионов, упорядоченных в кристаллическую решётку, – например, если мы рассматриваем жидкость, газ или аморфный сплав, – применим альтернативный способ вычисления кинетических коэффициентов. В этом случае можно использовать уравнение (3.62), произведя в нём замену  $Z^2 n_{\text{ион}} \Lambda_{ei}$  в знаменателе на  $\sum_j Z_j^2 n_j \Lambda_{ei}^j$ , где суммирование производится по всем сортам ионов  $j$ , а кулоновские логарифмы  $\Lambda_{ei}^j$ , вообще говоря, зависят от  $j$ . В статье [224] мы предложили способ приближённого вычисления  $\Lambda_{ei}^j$ , основанный на «правиле аддитивности» для ионных смесей [137]. Состоит он в том, чтобы каждый из  $\Lambda_{ei}^j$  рассчитывать по формулам (3.76)–(3.86), подставляя в них  $Z_j$  вместо  $Z$  и  $\Gamma_j$  вместо  $\Gamma$ .

Почти столь же хорошее и намного более простое приближение состоит в том, чтобы все кулоновские логарифмы заменить на один, рассчитанный по тем же формулам, но с заменой  $Z$  на  $\sqrt{\langle Z^2 \rangle}$ .

## 3.5 Резюме

В §§ 3.2, 3.3 и 3.4 представлена теория расчёта электронных теплопроводности и проводимости плазмы, обусловленных, соответственно, рассеянием электронов на тяжёлых ионах, на электронах и на заряженных примесях с учётом полного или частичного вырождения и релятивизма электронного газа, различных механизмов плазменного экранирования, конечных размеров атомных ядер и реального распределения заряда по их объёму, частичной упорядоченности сильносвязанной кулоновской жидкости, квантования движения ионов и многофононных процессов рассеяния в кулоновском кристалле, а также неборновских поправок. Для всех рассмотренных случаев найдены и представлены аналитические аппроксимации, облегчающие вычисление проводимости и теплопроводности плазмы. Комплекс компьютерных программ, реализующих эти аппроксимации, предоставлен в свободное пользование на специально созданной странице в Интернете<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup><http://www.ioffe.ru/astro/conduct/>



## Глава 4

# Атом водорода и квантовые переходы в сильном магнитном поле

Магнитные поля  $B \gg 10^{10}$  Гс, типичные для большинства известных нейтронных звёзд, оказывают сильное влияние на многие свойства вещества. В данной главе мы рассмотрим квантовомеханические свойства атомов водорода с учётом их движения в атмосфере нейтронной звезды с сильным магнитным полем, а также безызлучательные и излучательные квантовые переходы в дискретном и непрерывном спектрах водорода в сильном магнитном поле.

В § 4.1 суммированы основные сведения и обозначения, которые используются в данной и следующей главах, а оригинальные результаты содержатся в последующих разделах. Раздел 4.2 посвящён исследованию энергий связи и волновых функций дискретного и непрерывного спектра, § 4.3 – сечениям ионных безызлучательных переходов при кулоновских столкновениях в магнитном поле, § 4.4 – взаимодействию атомов и ионов в сильном магнитном поле с электромагнитным излучением. В § 4.5 суммируются итоги и обсуждаются дальнейшие задачи по изучению других, отличных от водорода, атомов и ионов в сильных магнитных полях.

### 4.1 Предварительные сведения и обозначения

#### 4.1.1 Основные параметры

Движение свободных электронов в направлении, перпендикулярном полю, квантовано по орбиталиям Ландау. Их характерный поперечный масштаб – это *магнитная длина*  $a_m = (\hbar c/eB)^{1/2}$ , а расстояние между уровнями в нерелятивистской теории

– циклотронная энергия  $\hbar\omega_c$ , где  $\omega_c = eB/(m_e c)$  – электронная циклотронная частота. Безразмерные параметры, характеризующие магнитное поле, – это магнитная индукция в атомных единицах  $\gamma$  и в релятивистских единицах  $b$ :

$$\gamma = \left(\frac{a_B}{a_m}\right)^2 = \frac{\hbar\omega_c}{2\text{Ry}} = \frac{\hbar^3 B}{m_e^2 c e^3} = 425,44 B_{12}, \quad b = \frac{\hbar\omega_c}{m_e c^2} = \alpha_f^2 \gamma = \frac{B_{12}}{44,14}, \quad (4.1)$$

где введено обозначение  $B_{12} = B/(10^{12} \text{ Гс})$ . Мы называем магнитное поле сильным, если  $\gamma \gg 1$ , и сверхсильным, если  $b \gtrsim 1$ .

Эффекты квантования Ландау становятся существенными, когда электронная циклотронная энергия  $\hbar\omega_c$  по крайней мере сравнима как с электронной энергией Ферми  $\epsilon_F$ , так и с характерной тепловой энергией  $k_B T$ . Если  $\hbar\omega_c$  заметно превосходит обе эти энергии, то в термодинамическом равновесии большинство электронов находятся на основном уровне Ландау. В этом случае поле называют *сильно квантующим*. Необходимым для этого условием является  $\zeta_e \gg 1$ , где

$$\zeta_e = \frac{\hbar\omega_c}{k_B T} \approx 134,34 \frac{B_{12}}{T_6}. \quad (4.2)$$

Если же, напротив,  $k_B T$  или  $\epsilon_F$  намного больше разностей энергий между соседними уровнями Ландау, то поле неквантующее.

Квантование Ландау движения *ионов* становится существенным, когда ионная циклотронная энергия  $\hbar\omega_{ci} = Z(m_e/m_{\text{ion}})\hbar\omega_c$  по крайней мере соизмерима с  $k_B T$ , то есть когда немал параметр

$$\zeta_i \equiv \hbar\omega_{ci}/k_B T \approx 0,0737 (A/Z) B_{12}/T_6. \quad (4.3)$$

## 4.1.2 Электрон в квантующем магнитном поле

### 4.1.2а Релятивистский электрон в магнитном поле в калибровке Ландау

Пусть однородное магнитное поле  $\mathbf{B}$  направлено вдоль оси  $z$ . Тогда можно ввести векторный потенциал в *калибровке Ландау* в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -By \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Квантовые состояния свободного электрона в магнитном поле формируют полный ортогональный базис [235]. В качестве базисных можно выбрать состояния с фиксированными значениями  $(p_x, p_z, n, \sigma)$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$  – номер уровня Ландау,  $\sigma = \pm 1$

– спиновый квантовый номер,  $p_z$  – проекция импульса на ось  $z$ , а  $p_x$  – его проекция на ось  $x$ , которая определяет  $y$ -координату *ведущего центра* электронной орбиты:  $y_c = p_x/(m_e\omega_c)$ . Решением уравнения Дирака в магнитном поле является волновая функция-биспинор [214, 235]

$$\Psi_{p_x, p_z, n, \sigma}(\mathbf{r}) = \frac{\exp[i(p_x x + p_z z)/\hbar]}{(L_x L_z)^{1/2}} \psi_{n\sigma}(p_z, y - y_c), \quad (4.5)$$

где  $L_x$  и  $L_z$  – нормировочные длины, а  $\psi_{n\sigma}$  – биспиноры, не зависящие от  $x$  и  $z$ . Основной уровень Ландау  $n = 0$  невырожден по спину (спин антипараллелен  $\mathbf{B}$ ,  $\sigma = -1$ ; статистический вес  $g_0 = 1$ ), а уровни  $n > 0$  дважды вырождены ( $\sigma = \pm 1$ ,  $g_n = 2$ ). Последнее обстоятельство делает неоднозначным возможный выбор базисных биспиноров  $\psi_{n\sigma}$ . Простейший выбор, а часто и самый удобный, таков:

$$\psi_{n,1}(p_z, y) = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\epsilon}_F(\tilde{\epsilon}_F + 1)a_m}} \begin{pmatrix} (\tilde{\epsilon}_F + 1) \mathcal{H}_{n-1}(y/a_m) \\ 0 \\ \tilde{p}_z \mathcal{H}_{n-1}(y/a_m) \\ -\sqrt{2bn} \mathcal{H}_n(y/a_m) \end{pmatrix}, \quad (4.6a)$$

$$\psi_{n,-1}(p_z, y) = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\epsilon}_F(\tilde{\epsilon}_F + 1)a_m}} \begin{pmatrix} 0 \\ (\tilde{\epsilon}_F + 1) \mathcal{H}_n(y/a_m) \\ -\sqrt{2bn} \mathcal{H}_{n-1}(y/a_m) \\ -\tilde{p}_z \mathcal{H}_n(y/a_m) \end{pmatrix}. \quad (4.6b)$$

Здесь  $\tilde{\epsilon} = 1 + \epsilon_e/(m_e c^2)$  и  $\tilde{p}_z = p_z/(m_e c)$  – полная энергия и продольный импульс электрона в релятивистских единицах,

$$\mathcal{H}_n(\xi) = \frac{\exp(-\xi^2/2)}{\pi^{1/4}(2^n n!)^{1/2}} H_n(\xi), \quad H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} \quad (4.7)$$

( $\mathcal{H}_n(\xi)$  – функции гармонического осциллятора,  $H_n(\xi)$  – полиномы Эрмита). Энергия электрона и модуль  $p_z$  связаны соотношениями

$$m_e c^2 + \epsilon_e \equiv m_e c^2 \tilde{\epsilon} = c (m_e^2 c^2 + 2\hbar\omega_c m_e n + p_z^2)^{1/2} = m_e c^2 \sqrt{1 + 2bn + \tilde{p}_z^2}, \quad (4.8)$$

$$|p_z| = p_n(\epsilon_e) \equiv [(\epsilon_e/c)^2 - (m_e c)^2 - 2m_e \hbar\omega_c n]^{1/2} = m_e c \sqrt{\tilde{\epsilon}^2 - 1 - 2bn}. \quad (4.9)$$

В формуле (4.9) предполагается, что  $n \leq n_{\max}$ , где  $n_{\max}$  – максимально возможный номер уровня Ландау при данном значении  $\tilde{\epsilon}$ :

$$n_{\max} = \left[ \frac{1}{\hbar\omega_c} \frac{p_0^2(\epsilon_e)}{2m_e} \right]. \quad (4.10)$$

Переход от базиса (4.6) к другому базису  $\psi'_{n\sigma}$  можно записать в виде

$$\psi'_{n\sigma} = \psi_{n\sigma} \cos \varphi_n - \sigma \psi_{n,-\sigma} \sin \varphi_n, \quad (4.11)$$

где  $0 \leq \varphi_n \leq \pi/2$  при  $n \geq 1$  и  $\varphi_0 = 0$ .

В частности, выбирая

$$\varphi_n = \arcsin \sqrt{(1 - |p_z|/p_0)/2}, \quad (4.12)$$

мы получим базис состояний с фиксированной *спиральностью* – проекцией спина на канонический импульс. В этом случае  $\sigma$  определяет знак спиральности.

Мы будем пренебрегать отличием гиромагнитного  $g$ -фактора электрона  $g_{\text{mag}}^{(e)}$  от единицы. Для изолированного электрона это отличие приводит к расщеплению уровней  $n \geq 1$  в дублеты, компоненты которых различаются по энергии на  $\hbar\omega_c(g_{\text{mag}}^{(e)} - 1)$ , и таким образом снимает двукратное вырождение уровней  $n \geq 1$ <sup>1</sup>. Однако на практике в оболочках нейтронных звёзд можно положить  $g_{\text{mag}}^{(e)} = 1$ , так как соответствующее расщепление уровней меньше ширины уровней Ландау, обусловленной спонтанным излучением или столкновениями в плазме (см. [238, 239]).

#### 4.1.2b Нерелятивистский предел. Аксиальная калибровка

В нерелятивистском пределе базисные функции (4.6) отвечают фиксированным проекциям спина  $\sigma\hbar/2$  на ось  $z$  (двумя нижними компонентами  $\psi_{n\sigma}$  в этом случае пренебрегают). Тогда координатную часть волновой функции в калибровке Ландау даёт формула (4.5), в которой

$$\psi_{n,1} = a_m^{-1/2} \mathcal{H}_{n-1}(y/a_m), \quad \psi_{n,-1} = a_m^{-1/2} \mathcal{H}_n(y/a_m). \quad (4.13)$$

*Аксиальная калибровка* векторного потенциала может быть записана как

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -By/2 \\ Bx/2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

В этой калибровке  $p_x$  не является «хорошим» квантовым числом (то есть не имеет определённого значения); вместо него «хорошим» становится квантовое число  $m$  –

---

<sup>1</sup>При  $b \ll 1$ , как известно (напр., [214, 236]),  $g_{\text{mag}}^{(e)} - 1 \approx \alpha_f/(4\pi) \approx 0,00116$ . Но в сверхсильных полях расщепление по спину перестаёт быть прямо пропорциональным  $B$ , поэтому  $g_{\text{mag}}^{(e)}$  зависит от  $B$ . Асимптотически, при  $b \gg 1$  [237],  $g_{\text{mag}}^{(e)} - 1 \sim -(\alpha_f/4\pi)[\ln(2b) - (C_E + \frac{3}{2})]^2 + \dots$ , где  $C_E$  – постоянная Эйлера.

проекция углового момента на ось  $z$  в единицах  $\hbar$ . При любом  $n \geq 0$  должно быть  $m \leq n$  ( $m = n, n - 1, n - 2 \dots$ ).

В нерелятивистском пределе координатные части базисных волновых функций в аксиальной калибровке не зависят от  $\sigma$  и выглядят следующим образом:

$$\Psi_{p_z, n, m, \sigma}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ip_z z / \hbar}}{L_z^{1/2}} \Phi_{n, -m}(\mathbf{r}_\perp). \quad (4.15)$$

Здесь  $\mathbf{r}_\perp = (x, y) = (r_\perp \cos \phi, r_\perp \sin \phi)$ ,

$$\Phi_{n, s}(r_\perp) = \frac{e^{-is\phi}}{\sqrt{2\pi} a_m} I_{n+s, n}(r_\perp^2 / 2a_m^2) \quad (4.16)$$

– функция Ландау,  $L_z$  – нормировочная длина, а  $I_{n'n}(u)$  – функция Лагерра [235], равная

$$I_{n'n}(u) = e^{-u/2} u^{(n'-n)/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\sqrt{n'!n!}}{k!(n-k)!(n'-n+k)!} u^k = (-1)^{n'-n} I_{nn'}(u) \quad (4.17)$$

при  $n' \geq n$ .

Волновые функции релятивистских электронов в квантующем магнитном поле в аксиальной калибровке также выражаются через  $\Phi_{n, s}(r_\perp)$  [235], но в этой работе они нам не понадобятся.

### 4.1.3 Связанные электрон-ионные состояния в сильном магнитном поле

Магнитные поля  $B \gg 10^{10}$  Гс радикально влияют на квантовомеханические свойства атомов, молекул, а также атомарных и молекулярных ионов, имеющих связанные состояния.

Атомы в сильных магнитных полях активно изучались с конца 1950-х, а молекулы – с 1970-х годов (см. обзоры [240, 241]). В подавляющем большинстве работ предполагалось, что изучаемый атом *покоится* в той системе отсчёта, в которой отсутствует электрическое поле. При одной и той же температуре атомы при  $\gamma \gg 1$  намного многочисленнее в атмосфере нейтронной звезды, чем при  $\gamma \lesssim 1$ , потому что в сильном магнитном поле энергии связи их основного и определённого класса возбуждённых состояний – так называемых *тесносвязанных состояний* – существенно возрастают, а квантовомеханические размеры уменьшаются. Во всех состояниях электронное облако приобретает форму вытянутого эллипсоида вращения с характерной малой полуосью  $\sim a_m$  и большой полуосью  $l \gg a_m$  (но при этом  $l$  меньше размеров атома в отсутствие поля).

### 4.1.3а Покоящийся атом водорода

Естественно, что лучше всего изучен простейший из атомов – атом водорода. При  $\gamma \gtrsim 0,1$  состояние атома удобно характеризовать номером уровня Ландау  $n$ , на котором условно находится связанный электрон, квантовым числом  $s = -m$  ( $s \geq -n$ ), соответствующим проекции  $\hbar s$  разности угловых моментов протона и электрона на направление магнитного поля  $\mathbf{B}$ , и числом узлов  $\nu$  волновой функции в направлении  $\mathbf{B}$ . При  $\gamma \gtrsim 1$  связанными остаются только состояния с  $n = 0$ , а остальные дискретные состояния становятся метастабильными и могут распадаться путём автоионизации. При  $\gamma \gg 1$  энергии связи тесно связанных состояний увеличиваются с ростом  $\gamma$  как  $(\ln \gamma)^2$ , тогда как энергии связи остальных, *водородоподобных состояний*, стремятся к энергиям связи немагнитного атома водорода.

Энергия покоящегося атома водорода равна

$$E_{nsv} = E_{nsv}^{\parallel} + s\hbar\omega_{ci} + n\hbar(\omega_c + \omega_{ci}), \quad (4.18)$$

где  $E_{nsv}^{\parallel}$  – «продольная» энергия (для состояний дискретного спектра она отрицательна). Тесно связанные состояния отвечают значению  $\nu = 0$ , а водородоподобные –  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ . В формулу (4.18) и последующие не включена энергия взаимодействия магнитного момента ядра с магнитным полем, потому что процессы с переворотом спина (запрещённые в дипольном приближении) столь неэффективны, что подсистемы с протонными спинами, направленными по полю и против поля, можно трактовать как взаимно независимые в большинстве приложений, в которых участвуют связанные состояния.

Как отмечено выше, все атомы приобретают вытянутость вдоль поля при  $\gamma \gtrsim 1$ . Характерные поперечные размеры волновых функций атома водорода соответствуют размерам функций Ландау  $\Phi_{n,s}$  (4.16), то есть

$$l_x = l_y \approx \sqrt{2n + s + 1} a_m \sim a_B / \sqrt{\gamma}. \quad (4.19)$$

Продольные размеры намного больше:  $l_z \sim a_B / \ln \gamma$  для тесно связанных состояний ( $\nu = 0$ ) и  $l_z \sim a_B \nu^2$  для водородоподобных состояний ( $\nu \geq 1$ ). При  $\gamma \gg 1$  атом хорошо описывается *адиабатическим приближением*, предполагающим факторизацию волновой функции

$$\psi_{nsv}(\mathbf{r}) \approx \Phi_{n,s}(\mathbf{r}_{\perp}) g_{nsv}(z) \quad (4.20)$$

и широко использовавшимся в ранних работах (см. обзор [242]). Аккуратный расчёт волновых функций и энергий связи покоящегося атома водорода был представлен в

работе [243], авторы которой использовали разложение [244]

$$\psi_{nsv}(\mathbf{r}) = \sum_{n'=0}^{\infty} \Phi_{n',s}(\mathbf{r}_{\perp}) g_{n',nsv}(z), \quad (4.21)$$

где одномерные функции  $g_{n',nsv}(z)$  определялись численно из системы уравнений, возникающей после подстановки разложения (4.21) в уравнение Шрёдингера – системы (4.77), представленной ниже. На основе этого расчёта в статье [245] вычислялись силы осцилляторов для радиационных переходов.

Релятивистский атом водорода в сильном магнитном поле изучался в статьях [246, 247] на основе решения уравнения Дирака в предположении, что протон бесконечно массивен (то есть его положение фиксировано).

Наконец, сто́ит отметить, что энергии связи нерелятивистского покоящегося атома водорода в произвольном магнитном поле могут быть вычислены как сумма сходящегося ряда, выведенного в работе [248].

#### 4.1.3b Другие атомы и ионы

Расчёты энергий связи атомов и ионов, имеющих от 2 до 26 электронов, в сильном магнитном поле проводились начиная с 1970-х годов разными методами – в приближении Томаса–Ферми, методами функционала плотности, Хартри–Фока – «одномерным», или адиабатическим, в котором базисные орбитали задаются в факторизованном виде (4.20), и «двумерным», в котором такая факторизация не предполагается. Последний метод, применявшийся вплоть до  $Z = 10$  [249], представляется наиболее точным. Сравнение результатов, полученных на основе одномерного и двумерного приближений Хартри–Фока, показывает, что, например, при  $B \sim 10^{12}$  Гс и  $Z_{\text{нuc}} \sim 10$  энергия связи основного состояния определяется адиабатическим методом Хартри–Фока с погрешностью в несколько процентов. Погрешность адиабатического приближения увеличивается с увеличением  $Z_{\text{нuc}}$ . Связано это с тем, что внутренние орбитали с ростом  $Z_{\text{нuc}}$  всё более деформируются под действием кулоновского потенциала ядра. Для электронов на К-оболочке кулоновские силы преобладают над магнитными при  $\gamma \lesssim Z_{\text{нuc}}^2$ , поэтому адиабатическое, или «одномерное», приближение может быть удовлетворительным при выполнении сильного обратного неравенства:  $B \gg 2,35 \times 10^9 Z_{\text{нuc}}^2$  Гс. Впрочем, ниже на примере атома водорода мы увидим, что некоторые эффекты (например, резонансы фотоионизации) в принципе нельзя описать в рамках адиабатического приближения, независимо от величины магнитного поля.

Теми же методами изучались положительные ионы разных атомов, а также ион  $\text{H}^-$ .

В большинстве работ исследователи ограничивались изучением основного квантового состояния многоэлектронных атомов и ионов. Краткий обзор соответствующих работ, включающий наиболее представительные ссылки, приведён в § 4.2.1b монографии [5].

Возбуждённые состояния изучались в ряде работ для  $\text{He}$  и  $\text{H}^-$ , в работе [250] адиабатическим методом Хартри–Фока для ряда атомов и их положительных ионов вплоть до железа, в статье [251] двумерным методом Хартри–Фока для  $\text{B}$  и  $\text{B}^+$ , а также в сравнительно недавней статье [252] для ряда атомов и ионов от  $\text{H}$  до  $\text{Fe}$ . В последней работе авторы предложили и использовали метод, сокращённо названный ими МСРН<sup>3</sup> (“*multiconfigurational, perturbative, hybrid, Hartree, Hartree-Fock*”). Суть его состоит в том, что решение в адиабатическом приближении Хартри берётся в качестве начального приближения, а поправки к нему за счёт обменных эффектов и отклонения от адиабатичности рассчитываются в первом порядке теории возмущений. Этот метод обеспечивает намного лучшую точность, чем одномерный метод Хартри–Фока, и при этом требует намного меньше вычислительных ресурсов, чем двумерный метод Хартри–Фока. Поэтому он представляется наиболее подходящим для моделирования атмосфер нейтронных звёзд, содержащих *многоэлектронные* атомы и ионы.

#### 4.1.3с Молекулы, молекулярные ионы и полимеры

Свойства молекул и даже само существование определённых их типов в сильных магнитных полях дискутировались в течение почти 40 лет и до сих пор остаются недостаточно изученными.

Лучше всего изучены двухатомные молекулы в том случае, когда направление их оси совпадает с направлением магнитного поля. Также по понятным причинам лучше всего изучена молекула  $\text{H}_2$ . В частности, в обзоре [241] даны приближённые формулы для её энергии связи при  $\gamma \gtrsim 10^3$ , растущей примерно в том же темпе ( $\propto (\ln \gamma)^2$ ), что и энергия связи атома  $\text{H}$ . Интересно, однако, что, согласно численным результатам, приведённым в статье [253], эта молекула нестабильна в умеренно сильном магнитном поле (в интервале  $0,18 < \gamma < 12,3$ ).

Из молекулярных ионов достаточно хорошо изучен ион  $\text{H}_2^+$ , которому были посвящены несколько детальных исследований; рассматривались также ионы  $\text{HeH}^{++}$  и  $\text{H}_3^{++}$  (см. краткий обзор и ссылки в [5]).



Сильное магнитное поле может стабилизировать полимерные цепочки молекул, вытянутые вдоль магнитных силовых линий. Эти цепочки затем могут притягиваться друг к другу за счёт диполь-дипольного взаимодействия и образовывать конденсированную среду. Такое предположение впервые выдвинул М. Рудерман в 1971 году [254]. Однако исследования, проведённые в 1980-х – 2000-х годах, показали, что в полях  $B \sim 10^{12}$ – $10^{13}$  Гс такие одномерные цепочки формируются не из любых химических элементов, а только из атомов от Н до С, а их полимеризация в конденсированную фазу происходит либо в сверхсильном поле, либо при сравнительно низкой температуре, причём энергия сублимации такого конденсата значительно ниже, чем предполагал Рудерман (см. статью [255] и ссылки в ней).

#### 4.1.3d Эффе́кты дви́жения

Все работы, перечисленные до сих пор, относились только к атомам и молекулам, покоящимся в магнитном поле. Более того, почти во всех них ядро полагалось бесконечно массивным (фиксированным в пространстве). Это является серьёзным упрощением. Для водородоподобных ионов в таком приближении существуют определённые законы подобия при изменении  $Z_{\text{нuc}}$  [256]. Так, энергии связи этих ионов выражаются через энергии связи атома водорода по закону  $E(Z_{\text{нuc}}, B) = Z_{\text{нuc}}^2 E(1, B/Z_{\text{нuc}}^2)$ . Однако при моделировании атмосфер нейтронных звёзд требуется учитывать конечную температуру, а значит и тепловое движение. Между тем, движение атома поперёк магнитных силовых линий нарушает осевую симметрию квантовомеханической системы, что сразу намного усложняет расчёт, а заодно делает невозможным упомянутое масштабирование по  $Z_{\text{нuc}}$ .

Квантовомеханический оператор, осуществляющий преобразование между покоящейся и движущейся системами, – это обобщённый импульс [257–259]

$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{k}_i, \quad (4.22)$$

где суммирование ведётся по всем частицам, составляющим систему, индивидуальные обобщённые импульсы которых равны

$$\mathbf{k}_i = \boldsymbol{\pi}_i + \frac{q_i}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{r}_i. \quad (4.23)$$

В последней формуле  $q_i$  – заряд, а

$$\boldsymbol{\pi}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{p}_i - \frac{q_i}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \quad (4.24)$$

– оператор кинетического импульса  $i$ -й частицы [260],  $\mathbf{p}_i = -i\hbar\nabla_i$  – оператор её канонического импульса, и  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  – векторный потенциал электромагнитного поля. Обобщённый импульс  $\mathbf{K}$  сонаправлен скорости, но отличается от канонического импульса центра масс. Для нейтрального атома (но не для иона) декартовы компоненты  $\mathbf{K}$  коммутируют друг с другом, и поэтому существуют квантовые состояния атома, в которых  $K_x$ ,  $K_y$  и  $K_z$  одновременно имеют определённые значения; только такие состояния и рассматриваются в настоящей работе. С увеличением поперечной составляющей обобщённого импульса,  $K_{\perp} = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}$ , энергия связи уменьшается, тогда как размер атома растёт. При этом растёт и постоянный дипольный момент атома, перпендикулярный  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{K}$ . При  $\gamma \gg 1$  подобные специфические эффекты, связанные с коллективным движением системы заряженных частиц, становятся особенно существенны. В частности, могут стать заселёнными так называемые *децентрированные состояния*, в которых электрон локализован главным образом в «магнитной яме» в стороне от кулоновского центра. Для атома водорода эти экзотические состояния были предсказаны в статье [261], и там же, а затем в статье [262], были выполнены первые исследования их энергетического спектра. Впоследствии децентрированные состояния исследовались в работах [263–265].

В конце 1980-х – начале 1990-х годов поведению атомов и ионов, движущихся поперёк магнитных силовых линий, была посвящена серия работ бельгийских авторов, завершившаяся статьёй [266], в которой спектр атома водорода, движущегося в магнитном поле, был впервые рассчитан для произвольных значений  $K_{\perp}$  вне предельных случаев очень малых и очень больших  $K_{\perp}$  (соответствующий критерий малости  $K_{\perp}$  мы определим ниже). Авторы этой статьи выполнили вариационный расчёт на специально подобранном базисе функций. Здесь мы используем иной метод (описанный ниже), который лучше подходит для сильных и сверхсильных полей нейтронных звёзд и который позволил рассчитать не только спектр дискретных состояний, но и волновые функции континуума, а также силы линий дискретного спектра и сечения фотоионизации движущегося атома (эти результаты будут описаны в § 4.4).

Квантовомеханические эффекты движения ионов  $\text{He}^+$  рассматривались в статьях [267, 268]. Принципиальное отличие от случая нейтрального атома состоит в этом случае в том, что значения  $K_{\perp}$  дискретно квантованы.

Для многоэлектронных атомов, молекул и ионов эффекты движения поперёк магнитного поля остаются до сих пор почти неизученными. Однако при малых  $K_{\perp}$  применима теория возмущений [269, 270], которая может оказаться достаточной для моделирования атмосфер при достаточно низких температурах.

## 4.2 Атом водорода, движущийся в сильном магнитном поле

### 4.2.1 Преобразования гамильтониана и волновых функций

Гамильтониан атома водорода, движущегося в однородном магнитном поле, есть сумма операторов кинетической энергии электрона и протона и кулоновской потенциальной энергии:

$$H = \frac{\boldsymbol{\pi}_p^2}{2m_p} + \frac{\boldsymbol{\pi}_e^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r_{ep}}, \quad (4.25)$$

где  $\mathbf{r}_{ep} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p$ , а  $\boldsymbol{\pi}_{e,p}$  – операторы кинетического импульса (4.24) для электрона и протона. Здесь мы рассматриваем нерелятивистскую трактовку задачи, поэтому проекции спинов на направление  $\mathbf{B}$  предполагаются фиксированными, а соответствующие им постоянные вклады в  $H$  опущены<sup>2</sup>.

Гамильтониан (4.25) можно представить в виде

$$H = \frac{m_H \dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{m_* \dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{e^2}{r_{ep}}, \quad (4.26)$$

где  $\mathbf{R} = (m_p/m_H)\mathbf{r}_p + (m_e/m_H)\mathbf{r}_e$  – оператор радиус-вектора центра масс,  $m_H = m_e + m_p$  – масса атома, а  $m_* = m_e m_p / m_H$  – приведённая масса ( $m_H \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\pi}_e + \boldsymbol{\pi}_p$  и  $m_* \dot{\mathbf{r}}_{ep} = (m_p/m_H)\boldsymbol{\pi}_e - (m_e/m_H)\boldsymbol{\pi}_p$  – операторы кинетических импульсов центра масс и относительного движения, соответственно).

Обобщённый импульс (4.22) для атома водорода можно записать в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} - \frac{e}{2c} \mathbf{B} \times \mathbf{r}_{ep}, \quad (4.27)$$

где  $\mathbf{P} = -i\hbar \nabla_{\mathbf{R}}$  – канонический импульс центра масс, а собственные функции оператора  $\mathbf{K}$  в координатном представлении – в виде [257]

$$\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_p) = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \mathbf{K} + \frac{e}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{r}_{ep} \right) \cdot \mathbf{R} \right] \psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}_{ep}). \quad (4.28)$$

Будем по-прежнему предполагать, что ось  $z$  направлена вдоль  $\mathbf{B}$ . Когда атом движется в направлении оси  $y$ , поле стремится сдвинуть электрон от протона в направлении  $x$ , тем самым нарушая цилиндрическую симметрию задачи. В этих условиях наиболее подходящий для решения выбор системы координат и калибровки векторного потенциала неочевиден. Зададим некоторый (пока произвольный) базовый

<sup>2</sup>При рассмотрении фотоионизации в § 4.4.3 взаимодействие со спином будет учтено в приближении Паули.

сдвиг  $\mathbf{r}_B$  в плоскости  $xy$  и будем рассматривать в качестве независимой переменной отклонение от него,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{ep} - \mathbf{r}_B = (\mathbf{r}_\perp, z)$ . Для векторного потенциала выберем аксиальную калибровку с осью, сдвинутой на некоторый произвольный вектор  $\mathbf{r}_A$  в плоскости  $(xy)$ :  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)$ . Тогда из уравнения Шрёдингера для функции  $\Psi$  (4.28) выводится эффективный гамильтониан относительного движения  $H_{\text{rel}}$ , управляющий функцией  $\psi_{\mathbf{K}}$  согласно уравнению Шрёдингера для относительного движения

$$H_{\text{rel}} \psi_{\mathbf{K}} = E \psi_{\mathbf{K}}. \quad (4.29)$$

Зависимость волновых функций  $\psi_{\mathbf{K}}$  от параметров  $\mathbf{r}_A$  и  $\mathbf{r}_B$  состоит в пространственном сдвиге на  $\mathbf{r}_B$  и в появлении фазового множителя, связанного с калибровочным преобразованием (см., напр., [164]) и имеющего вид  $\exp[ie(\mathbf{r}_A \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{r}/(2\hbar c)]$ .

В общем случае  $H_{\text{rel}}$  содержит члены, связывающие между собой координаты коллективного и относительного движения системы частиц. Некоторые из этих членов пропорциональны  $m_*^{-1}$ . Вследствие малости отношения  $m_*/m_{\text{H}}$  такие слагаемые порождают сильное возмущение, существенно усложняющее численное решение. Чтобы обнулить такие нежелательные слагаемые, мы налагаем условие [271]

$$\mathbf{r}_A = \frac{m_p - m_e}{m_{\text{H}}} \mathbf{r}_B. \quad (4.30)$$

Тогда  $H_{\text{rel}}$  упрощается и приводится к виду

$$H_{\text{rel}} = \frac{K_z^2}{2m_{\text{H}}} + \frac{p_z^2}{2m_*} + H_\perp - \frac{e^2}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_B|}, \quad (4.31)$$

где  $H_\perp$  – составляющая, связанная с относительным движением в плоскости  $(xy)$ . Её можно записать как

$$H_\perp = \frac{\pi^2}{2m_*} - \frac{e}{m_p c} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + H_K, \quad (4.32)$$

где

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p}_\perp + \frac{e}{2c} \mathbf{B} \times \mathbf{r}, \quad (4.33)$$

$$H_K = \frac{K_B^2}{2m_{\text{H}}} + \frac{e}{m_{\text{H}} c} \mathbf{K}_B \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}), \quad (4.34)$$

$$\mathbf{K}_B = \mathbf{K} + \frac{e}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{r}_B. \quad (4.35)$$

Собственные значения гамильтониана  $H_\perp$  равны  $E_{ns}^\perp + \hbar(\omega_c + \omega_{ci})/2$ , где  $\hbar(\omega_c + \omega_{ci})/2$  – постоянный член, соответствующий нулевым колебаниям электрона и ядра в магнитном поле, а

$$E_{ns}^\perp = [n + (m_e/m_p)(n + s)]\hbar\omega_c \quad (4.36)$$

– энергия возбуждения за счёт движения электрона и протона в плоскости  $(xy)$ , причём  $n$  и  $n + s$  – это номера электронного и протонного уровней Ландау, соответственно, а  $\hbar s$  с  $s \geq -n$  – собственные значения проекции момента импульса электрона относительно протона на ось  $z$ .

Для вычисления матричных элементов оператора  $H_K$  между состояниями  $|n, s\rangle_{\perp}$ , характеризуемыми функциями Ландау  $\Phi_{ns}(\mathbf{r}_{\perp})$  в плоскости  $(xy)$ , используем следующие соотношения (напр., [272–274]):

$$\pi_{+1}|n, s\rangle_{\perp} = -\frac{i\hbar}{a_m}\sqrt{n+1}|n+1, s-1\rangle_{\perp}, \quad \pi_{-1}|n, s\rangle_{\perp} = \frac{i\hbar}{a_m}\sqrt{n}|n-1, s+1\rangle_{\perp}, \quad (4.37a)$$

$$\Pi_{+1}|n, s\rangle_{\perp} = -\frac{i\hbar}{a_m}\sqrt{n+s}|n, s-1\rangle_{\perp}, \quad \Pi_{-1}|n, s\rangle_{\perp} = \frac{i\hbar}{a_m}\sqrt{n+s+1}|n, s+1\rangle_{\perp}, \quad (4.37b)$$

где

$$\mathbf{\Pi} \equiv \mathbf{p} - \frac{e}{2c}\mathbf{B} \times \mathbf{r}, \quad (4.38)$$

а индексы  $\pm 1$  обозначают циклические координаты вектора в плоскости  $(xy)$ :

$$a_{\pm 1} \equiv \frac{a_x \pm ia_y}{\sqrt{2}}. \quad (4.39)$$

В дальнейшем при использовании циклического базиса нам иногда будет удобно обозначать продольную координату индексом “0”:  $a_z = a_0$ .

Для циклических компонент оператора радиус-вектора  $\mathbf{r}$  из (4.37) следуют известные (напр., [275]) соотношения

$$r_{+1}|ns\rangle_{\perp} = a_m \left( \sqrt{n+s}|n, s-1\rangle_{\perp} - \sqrt{n+1}|n+1, s-1\rangle_{\perp} \right), \quad (4.40a)$$

$$r_{-1}|ns\rangle_{\perp} = a_m \left( \sqrt{n+s+1}|n, s+1\rangle_{\perp} - \sqrt{n}|n-1, s+1\rangle_{\perp} \right). \quad (4.40b)$$

Отсюда находим [271]

$$\begin{aligned} \langle n's'|H_K|ns\rangle_{\perp} = & \frac{K_B^2}{2m_H} \delta_{n'n} \delta_{s's} + \frac{i\hbar}{a_m} \left[ \left( w_{e,+1} \sqrt{n} \delta_{n',n-1} + w_{p,+1} \sqrt{n+s+1} \delta_{n'n} \right) \delta_{s',s+1} - \right. \\ & \left. - \left( w_{e,-1} \sqrt{n+1} \delta_{n',n+1} + w_{p,-1} \sqrt{n+s} \delta_{n'n} \right) \delta_{s',s-1} \right], \end{aligned} \quad (4.41)$$

где

$$\mathbf{w}_e = \frac{\mathbf{K}}{m_H} + \frac{e}{2m_e c} \mathbf{B} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A), \quad \mathbf{w}_p = \frac{\mathbf{K}}{m_H} + \frac{e}{2m_p c} \mathbf{B} \times (\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_A). \quad (4.42)$$

$H_K$  можно сделать равным нулю, если положить  $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_c$ , где

$$\mathbf{r}_c = \frac{c}{eB^2} \mathbf{B} \times \mathbf{K} \quad (4.43)$$

– «относительный ведущий центр», равный разности ведущих центров электронной и протонной орбит в магнитном поле. Тогда  $K_B = 0$ , и мы приходим к гамильтониану в представлении со сдвигом, ранее использованному в работах [257, 261, 262].

Обычный выбор  $\mathbf{r}_B = 0$ , напротив, оставляет  $H_K$  ненулевым (причём  $\mathbf{K}_B = \mathbf{K}$ ), но зато делает симметричным последнее слагаемое в (4.31).

В статье [273] мы рассматривали сдвиг, зависящий от параметра:  $\mathbf{r}_B = \eta \mathbf{r}_c$ , – и изучали волновые функции и сечения фотоионизации, используя модификацию адиабатического приближения, порождённую таким сдвигом. При переходах между представлениями с разными значениями  $\eta$  волновые функции относительного движения преобразуются как

$$\psi_{\mathbf{K}}^{(\eta)}(\mathbf{r}) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \frac{m_p - m_e}{2m_H} \eta \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_{\perp} \right] \psi_{\mathbf{K}}^{(0)}(\mathbf{r} + \eta \mathbf{r}_c). \quad (4.44)$$

В ходе наших работ [271, 273] и последующих, однако, выяснилось, что использование такого параметрического сдвига не даёт реальных вычислительных преимуществ: в зависимости от значений  $B$  и  $K_{\perp}$  и от рассматриваемого квантового состояния, оптимальным оказывается либо представление с полным сдвигом  $\eta = 1$ , либо представление без сдвига  $\eta = 0$ . Практически всегда представление с промежуточным сдвигом приводит к большему объёму вычислений. Представление с промежуточным сдвигом, тем не менее, оказывается полезным при тестировании компьютерных программ для вычисления квантовомеханических характеристик атома, движущегося в магнитном поле: согласие результатов, полученных в представлениях с разными значениями параметра  $\eta$ , является важным критерием точности вычислений.

## 4.2.2 Волновые функции дискретного спектра

Аналогично формуле (4.21) для покоящегося атома водорода, волновую функцию  $\psi_{\kappa}$  квантового состояния  $|\kappa\rangle$  движущегося атома можно разложить по полному набору функций Ландау:

$$\psi_{\kappa}^{(\eta)}(\mathbf{r}^{(\eta)}) = \sum_{ns} \Phi_{ns}(\mathbf{r}_{\perp}^{(\eta)}) g_{n,s;\kappa}^{(\eta)}(z), \quad (4.45)$$

где  $\eta$  – параметр сдвига, введённый в § 4.2.1. Также аналогично случаю покоящегося атома, квантовые состояния можно нумеровать как  $|\kappa\rangle = |n\nu\mathbf{K}\rangle$ , где  $n$  и  $s$  относятся к ведущему члену разложения (4.45), а  $\nu$  нумерует уровни энергии, отвечающие продольным возбуждениям,

$$E_{n\nu}^{\parallel}(K) = E_{\kappa} - E_{ns}^{\perp}, \quad (4.46)$$

и контролирует чётность по  $z$ :  $g_{n,s;\kappa}^{(\eta)}(-z) = (-1)^\nu g_{n,s;\kappa}^{(\eta)}(z)$ .

Подставляя (4.45) в уравнение Шрёдингера (4.29), умножая обе части на  $\Phi_{n''s''}(\mathbf{r}_\perp)$  и интегрируя по  $\mathbf{r}_\perp$ , приходим к системе уравнений

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2}{dz^2} + V_{n''s'',n's''}(z) + \langle n''s'' | H_K | n''s'' \rangle_\perp + E_{n''s''}^\perp - E_{ns}^\perp - E_{nsv}^\parallel \right] g_{n''s'',nsv}(z) =$$

$$= -\sum' (V_{n''s'',n's'}(z) + \langle n''s'' | H_K | n's' \rangle_\perp) g_{n's',nsv}(z). \quad (4.47)$$

Здесь  $\Sigma'$  означает суммирование по всем парам  $(n', s')$ , за исключением  $(n'', s'')$ ; матричные элементы  $\langle n''s'' | H_K | n's' \rangle_\perp$  вычисляются по формуле (4.41); а

$$V_{n''s'',n's'}(z) = \langle n''s'' | -e^2/r_{ep} | n's' \rangle_\perp \quad (4.48)$$

– эффективные потенциалы. Учитывая, что вектор  $\mathbf{r}_B$  сонаправлен  $\mathbf{r}_c$ , имеем

$$V_{n''s'',n's'}(z) = -\frac{e^2}{a_m \sqrt{2}} v_{n''s'',n's'} \left( \frac{r_B}{a_m \sqrt{2}}, \frac{z}{a_m \sqrt{2}} \right), \quad (4.49)$$

где

$$v_{ns,n's'}(\rho, \zeta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i(s-s')\varphi} \int_0^\infty d\xi I_{n+s}(\xi) I_{n'+s'}(\xi) \left( \zeta^2 + \rho^2 + \xi - 2\rho\sqrt{\xi} \cos \varphi \right)^{-1/2} \quad (4.50)$$

– универсальная безразмерная функция ( $v_{ns,n's'} = v_{n's',ns}$ ), свойства которой мы исследовали в работе [271]. В частности, в [271] выведено представление (ср. также [274])

$$v_{ns,n's'}(\rho, \zeta) = (-1)^{(|s|-s+|s'|-s')/2} \sum_{l=0}^{n_\rho+n'_\rho} (-1)^l \sum_{m=\max(0, l-n'_\rho)}^{\min(n_\rho, l)} a_{mn_\rho|s|} a_{l-m, n'_\rho, |s'|} \sqrt{\tilde{s}! \tilde{s}'!} \tilde{v}_{0\tilde{s}, 0\tilde{s}'}(\rho, \zeta), \quad (4.51)$$

где<sup>3</sup>

$$n_\rho = n + (s - |s|)/2, \quad n'_\rho = n' + (s' - |s'|)/2, \quad (4.52a)$$

$$\tilde{s} = (|s| + s + |s'| - s')/2 + l, \quad \tilde{s}' = (|s'| - s + |s| + s')/2 + l, \quad (4.52b)$$

$$a_{mns} = \frac{\sqrt{n!(n+s)!}}{m!(n-m)!(m+s)!}, \quad (4.52c)$$

и при  $\Delta s \geq 0$

$$v_{0,s;0,s+\Delta s}(\rho, \zeta) = \frac{\rho^{\Delta s}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^s a_{ms, \Delta s} \rho^{2m} \int_0^1 \exp \left[ -\frac{\zeta^2 t}{1-t} - \rho^2 t \right] t^{\Delta s+2m-1/2} (1-t)^{s-m-1/2} dt. \quad (4.53)$$

<sup>3</sup>Числа  $n_\rho$  и  $n'_\rho$  – это не что иное, как радиальные квантовые числа в магнитном поле [164].

На основе этого представления и с использованием асимптотических свойств функции  $v_{n_s, n's'}(\rho, \zeta)$  в [271] построен алгоритм её быстрого вычисления.

Бесконечная система уравнений (4.47) эквивалентна точному уравнению Шрёдингера. Обрывая сумму (4.45), мы приходим к конечной системе, решение которой даёт приближённые волновые функции и энергии связи. Такое решение равносильно решению вариационной задачи на соответствующем неполном базисе.

Потенциалы  $V_{n''s'', n's'}(z)$  с  $s'' \neq s'$  равны нулю, если  $r_B = 0$ , а матричные элементы  $\langle n''s'' | H_K | n's' \rangle_{\perp}$  исчезают при  $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_c$ . Таким образом, для покоящегося атома (для которого  $r_c = 0$ ) суммирование по  $s'$  выпадает, и система уравнений (4.47) распадается на несвязанные подсистемы, каждая из которых соответствует определённому значению  $s$ , которое в этом случае становится «хорошим» квантовым числом. Этот частный случай ранее исследовался во многих работах (см. монографию [240] и ссылки в ней). Наш метод численного решения системы (4.47) является обобщением метода [244], применённого в [243] для покоящегося атома водорода, на случай движущегося атома.

Для каждого заданного состояния  $\kappa = |nsv\mathbf{K}\rangle$  в качестве исходного берётся решение задачи в адиабатическом приближении. Используемый численный алгоритм такого решения описан в [272]. Затем запускается процедура вложенных итераций. На каждой  $i$ -й внутренней итерации (1) ищется левая часть системы (4.47), в правую часть которой подставлены функции  $g_{n's'}^{(i-1)}$ , полученные на предыдущем шаге; (2) полученные таким образом функции  $\tilde{g}_{n's'}^{(i)}$  нормируются согласно условию  $\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_{n's'}^{(i)}|^2 dz = 1$ ; и (3) решается матричная задача на собственные значения

$$\sum_{n's'} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_{n''s''}^{(i)*}(z) \left\{ \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2}{dz^2} + E_{n''s''}^{\perp} \right] \delta_{n''n'} \delta_{s''s'} + V_{n''s'', n's'}(z) + \langle n''s'' | H_K | n's' \rangle_{\perp} \tilde{g}_{n's'}^{(i)}(z) dz \right\} c_{n's'}^{(i)} = E^{(i)} c_{n's''}^{(i)}, \quad (4.54)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение (но на практике мы выбираем функции  $g$  вещественными, что возможно благодаря вещественности эффективных потенциалов в рассматриваемом представлении). Последняя задача решается методом обратной итерации [276] со сдвигом  $E^{(i-1)}$  и с использованием  $LU$ -факторизации по Флетчеру [277]. Результатом является следующее ( $i$ -е) приближение  $E^{(i)}$  и  $g_{n's'}^{(i)}(z) = c_{n's''}^{(i)} \tilde{g}_{n's'}^{(i)}(z)$ . На каждой внешней итерации к системе добавляется очередная орбиталь Ландау. Процесс завершается, когда с заданной точностью достигнута сходимость собственного значения  $E^{(i)}$  и набора нормировочных коэффициентов  $c_{n's'}^{(i)}$ . По-



дробности вычислений даны в [271].

Легче всего решение находится в пределах малых и больших  $K_{\perp}$ . В первом случае эффективные потенциалы с  $s' \neq s$  становятся малыми из-за малости  $r_B \leq r_c$ , тогда как члены с  $n' \neq n$  малы при  $\gamma \gg 1$  из-за больших значений разностей  $E_{n's}^{\perp} - E_{ns}^{\perp}$ . Во втором случае ( $K_{\perp} \rightarrow \infty$ ) все недиагональные потенциалы  $V_{n''s'',n's'}(z)$  исчезают в представлении с «полным сдвигом»  $r_B = r_c$  независимо от величины  $\gamma$ . Поэтому в обоих случаях достаточно удерживать лишь небольшое число членов в (4.45). В обоих случаях электронное облако почти цилиндрически-симметрично; при этом в плоскости  $(xy)$  максимум квадрата модуля волновой функции достигается в центре для состояний с  $s = 0$ , а для остальных состояний – на окружности, радиус которой с ростом номера  $s$  приближается к радиусу классической орбиты электрона в магнитном поле. В направлении оси  $z$  волновая функция плавно спадает с увеличением  $|z|$  при  $\nu = 0$ , а при  $\nu \geq 1$  она сначала осциллирует, меняя знак  $\nu$  раз на оси  $z$ , а при дальнейшем росте  $|z|$  экспоненциально убывает.

В промежуточной области значений  $K_{\perp}$  может иметь место ситуация, когда много разных орбиталей Ландау смешиваются между собой, так что выбор ведущего члена в разложении (4.45) сразу не очевиден. Однако при  $\gamma \gg 1$  такие области чрезвычайно узки, поэтому нумерация уровней числами  $n$ ,  $s$  и  $\nu$  остаётся удобной при всех  $K_{\perp}$  [271].

Значения  $K_{\perp}$ , при которых орбитали Ландау сильно смешиваются, а уровни энергии  $E_{\kappa}$  испытывают антипересечения, находятся вблизи критического значения  $K_{\text{кр}} \approx \sqrt{2m_{\text{H}}E_{nsv}^{(0)}}$ , где  $E_{nsv}^{(0)} = -E_{nsv}^{\parallel}(0)$ , а  $E_{nsv}^{\parallel}$  определяется формулой (4.46).

При  $K_{\perp} \gg K_{\text{кр}}$  состояния становятся децентрированными, и в этом случае только представление с полным сдвигом приводит к численной сходимости метода.

Волновые функции разных состояний атома водорода при разных значениях  $B$  и их изменения при увеличении  $K_{\perp}$  от нуля до бесконечности, включая переход  $K_{\perp}$  через область смешивания, изучались впервые в работе Винке и др. [266], а затем (для других значений  $B$  и на основе другого метода вычислений) в нашей статье [271].

### 4.2.3 Уровни энергии

На рисунке 4.1 в качестве примера, типичного для условий в атмосферах нейтронных звёзд, показан энергетический спектр атома водорода в зависимости от  $K_{\perp}$  при  $\gamma = 1000$ . С увеличением  $K_{\perp}$  все уровни повышаются, то есть энергия связи уменьшается.

При малых  $K_{\perp}$  зависимость приблизительно параболическая,

$$E_{nsv}(K_{\perp}) \approx E_{nsv}(0) + \frac{K_{\perp}^2}{2m_{\text{eff}}}, \quad (4.55)$$

где  $m_{\text{eff}}$  – эффективная «поперечная масса». При очень малых  $K_{\perp}$  её можно рассчитать во втором порядке теории возмущений по  $K_{\perp}$  [269, 270]. При  $B \neq 0$   $m_{\text{eff}}$  всегда превосходит  $m_{\text{H}}$ , причём тем больше, чем сильнее магнитное поле.

Когда атом движется в отсутствие поля, он остаётся стабильным независимо от полной (включая кинетическую) энергии благодаря закону сохранения полного импульса. При движении поперёк магнитного поля сохраняется обобщённый импульс  $\mathbf{K}$ , всем значениям которого соответствует один и тот же уровень континуума  $E_{00}^{\perp}$ . Состояния, для которых полная энергия выше этого уровня, становятся метастабильными. Их аккуратное рассмотрение включающее одновременный учёт членов в разложении (4.45), соответствующих открытым каналам автоионизации атома ( $E_{n's'}^{\perp} > E_{\kappa}$ , для которых продольные волновые функции  $g_{n's',nsv}(z)$  на бесконечности не убывают, а осциллируют) и закрытым каналам ( $E_{n's'}^{\perp} < E_{\kappa}$ , для которых  $g_{n's',nsv}(z) \rightarrow 0$  при  $|z| \rightarrow \infty$ ), будет проведено ниже. Но, как правило, если использовать представление без сдвига при  $K_{\perp} < K_{\text{cr}}$  и представление с полным сдвигом при  $K_{\perp} > K_{\text{cr}}$ , то примесь слагаемых первого типа невелика, и можно их исключить из разложения. Тогда дискретный спектр продолжается выше  $E_{00}^{\perp}$ , как показано на рис. 4.1.

Так как  $|E_{nsv}^{\parallel}(K)|$  монотонно убывает с ростом  $K_{\perp}$ , тесно связанные уровни  $|ns0\rangle$  пересекаются с теми водородоподобными уровнями  $|ns'\nu\rangle$ , для которых  $s' < s$  и  $E_{ns0}(0) > |E_{nsv}^{\parallel}(K)|$  (см. рис. 4.1). При адиабатической трактовке многообразия  $(ns)$  и  $(ns')$  рассматриваются раздельно, поэтому все такие пересечения являются точными. Однако вне адиабатического приближения наличие недиагональных членов в системе уравнений (4.47) приводит к тому, что точными остаются только пересечения уровней разной чётности  $\nu$ , а уровни одинаковой чётности испытывают антипересечения: с увеличением  $K_{\perp}$  вблизи той точки, где энергии двух уровней почти сравниваются, волновые функции сильно искажаются, становясь близки к суперпозициям волновых функций этих состояний, рассматривавшихся независимо в адиабатическом приближении, причём между точными уровнями энергии всегда остаётся зазор, который снова увеличивается с дальнейшим ростом  $K_{\perp}$  за точкой антипересечения. Эти антипересечения и их следствия изучались в статьях [266, 271, 278]. Согласно результатам [271, 278], при значениях  $B$ , характерных для большинства известных нейтронных звёзд, антипересечения являются чрезвычайно узкими (так,

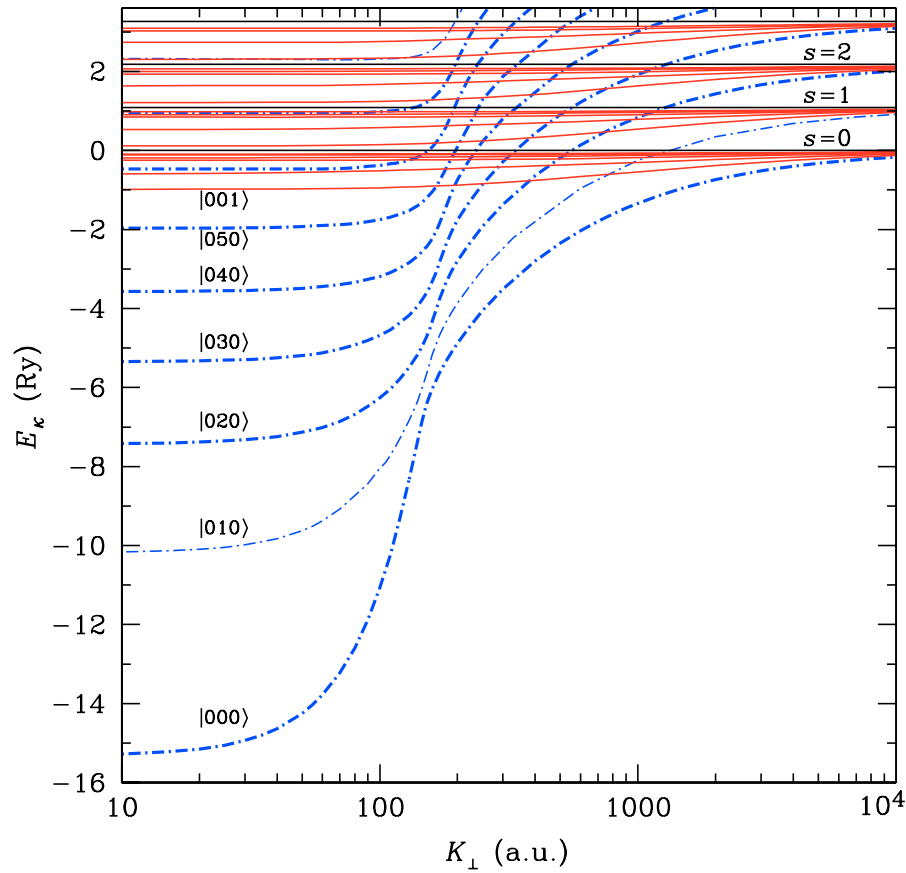


Рис. 4.1: Энергии  $E_{0s\nu}$  как функции  $K_{\perp}$  при  $\gamma = 10^3$ . Штрихпунктир соответствует тесно связанным состояниям  $|0s0\rangle$ , сплошные кривые – водородоподобным состояниям  $|0s\nu\rangle$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ).

при  $\gamma = 10^3$  имеется одно антипересечение с энергетической щелью  $0,005$  Ry, а все остальные характеризуются щелями  $\lesssim 10^{-4}$  Ry).

На рис. 4.2 показаны зависимости энергетического спектра от  $K_{\perp}$  при более слабом ( $\gamma = 600$ ) и более сильном ( $\gamma = 2000$ ) магнитных полях. С уменьшением магнитной индукции уровни с разными  $s$  сгущаются из-за уменьшения  $E_{ns}^{\perp}$  в (4.46). Благодаря этому при  $B \lesssim 10^{12}$  G перестают быть метастабильными некоторые водородоподобные уровни с  $s \neq 0$ . В результате, в частности, возникают антипересечения между водородоподобными уровнями одинаковой чётности с разными  $s$ , которые также рассматривались в [271]. Напротив, с увеличением  $B$  полные энергии уровней с  $s > 0$  становятся всё выше, так что в сверхсильных полях (при  $B > 6 \times 10^{13}$  G [279]) не остаётся истинно связанных (не метастабильных) состояний с  $s \neq 0$ . Однако число связанных состояний с  $s = 0$  остаётся бесконечным при любых значениях  $B$

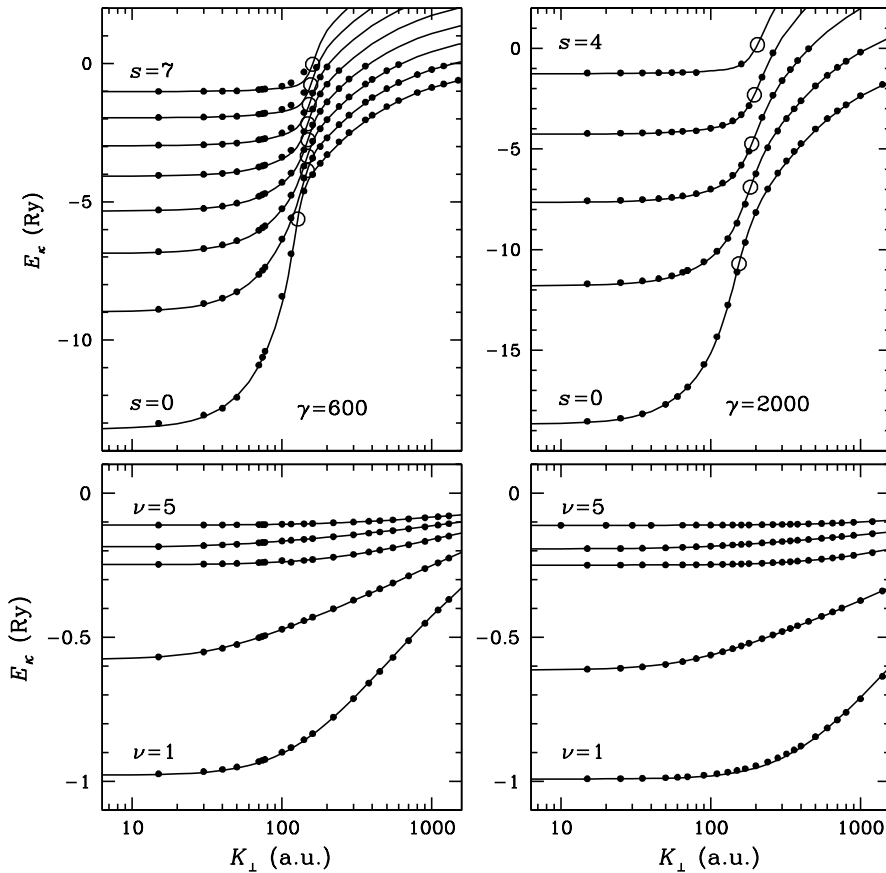


Рис. 4.2: Спектр энергии атома водорода, движущегося поперёк сильного магнитного поля. *Верхние рисунки* – тесносвязанные состояния ( $\nu = 0$ ); *нижние рисунки* – водородоподобные состояния для  $s = 0$ . Показано сравнение результатов расчётов (точки) с аналитической аппроксимацией (кривые). Для каждого тесносвязанного состояния положение критического значения  $K_{\text{cr}}$  обобщённого импульса  $K_{\perp}$  отмечено окружностью на соответствующей кривой.

и  $K_{\perp}^4$ . Действительно, число связанных состояний с  $s = 0$  бесконечно в адиабатическом приближении, которое является решением вариационной задачи с пробными функциями вида (4.20) в представлении с полным сдвигом при любом  $K_{\perp}$ . Так как истинные энергии связи не могут быть меньше вариационных, то все состояния  $|00\nu\rangle$ ,  $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ , являются связанными [271].

На основе результатов численных расчётов для движущегося атома водорода, описанных выше, и ранее опубликованных результатов для покоящегося атома в работе [280] были построены аналитические приближённые формулы для уровней энергии и геометрических размеров атома водорода, движущегося в сильном магнитном

<sup>4</sup>Ранее в некоторых статьях (напр., [263]) утверждалось обратное.

поле, необходимые для построения астрофизических моделей.

Продольная энергия движущегося атома водорода при  $\gamma \gtrsim 300$  приближённо описывается формулой

$$|E_{nsv}^{\parallel}(K_{\perp})| = \frac{E_{nsv}^{(1)}(K_{\perp})}{1 + (K_{\perp}/K_{\text{cr}})^{1/\alpha}} + \frac{E_{nsv}^{(2)}(K_{\perp})}{1 + (K_{\text{cr}}/K_{\perp})^{1/\alpha}} \quad (4.56)$$

Наличие двух слагаемых в (4.56) обусловлено необходимостью описать две качественно различные области  $K_{\perp}$ , разделённые критическим значением  $K_{\text{cr}}$  и соответствующие обычным и децентрированным состояниям. Параметр  $\alpha$  имеет смысл ширины переходной области вблизи  $K_{\text{cr}}$  в логарифмическом масштабе. Так как для тесно связанных состояний значение  $K_{\text{cr}}$  близко к  $(2m_{\text{H}}E_{nsv}^{(0)})^{1/2}$ , мы записываем  $K_{\text{cr}} = q_0(2m_{\text{H}}E_{nsv}^{(0)})^{1/2}$  и рассматриваем  $q_0$  как параметр аппроксимации.

Для тесно связанных состояний атома, функции  $E^{(1,2)}(K_{\perp})$  в формуле (4.56) параметризуются следующим образом:

$$E_{0s0}^{(1)}(K_{\perp}) = E_{0s0}^{(0)} - \frac{K_{\perp}^2}{2m_{\text{eff}} + q_1 K_{\perp}^2 / E_{0s0}^{(0)}}, \quad (4.57)$$

$$E_{0s0}^{(2)}(K_{\perp}) = 2 [r_*^2 + r_*^{3/2} + q_2 r_*]^{-1/2} \text{ Ry}. \quad (4.58)$$

Здесь  $r_* = r_c/a_{\text{B}}$ ,  $q_1$  и  $q_2$  – безразмерные параметры, а  $m_{\text{eff}}$  – эффективная поперечная масса атома, которая близка к поперечной массе в (4.55), получаемой во втором порядке теории возмущений [269, 270], но не обязательно с ней совпадает.

В диапазоне  $300 \leq \gamma \leq 10^4$ , рассмотренном в [280], параметр  $q_1$  можно представить как

$$q_1 = \begin{cases} \lg(\gamma/300) & \text{при } s = 0, \\ 0,5 & \text{при } s > 0. \end{cases}$$

Оптимальные значения остальных параметров приведены в Табл. 4.1. В последней колонке представлено среднеквадратичное отклонение  $\sigma_E$  от расчётных значений энергии. Наибольшие значения погрешности ( $\lesssim 3\sigma_E$ ) встречаются в областях антипересечений уровней.

Энергии связи водородоподобных состояний даются той же формулой (4.56), но с несколько иными выражениями для  $E^{(1)}$  и  $E^{(2)}$ . Для этих состояний  $m_{\text{eff}}$  превышает  $m_{\text{H}}$  на порядки величины, и теория возмущений перестаёт быть применимой уже при сравнительно малых  $K_{\perp}$  [270], что делает понятие поперечной массы практически бесполезным для аппроксимации. Поэтому мы рассматриваем её как эффективно бесконечную и полагаем  $E_{0s\nu}^{(1)} = E_{0s\nu}^{(0)}$  ( $\nu \geq 1$ ). Кроме того, переходная область перестаёт быть чётко определённой, вследствие чего  $K_{\text{cr}}$  и  $\alpha$  утрачивают ясный физический смысл и остаются просто параметрами аппроксимации.

Таблица 4.1: Параметры аналитической аппроксимации (4.56)–(4.58) для энергий тесно-связанных состояний  $|0s0\rangle$ 

$s$	$\gamma$	$E^{(0)}$ (Ry)	$\lg(m_{\text{eff}}/m_{\text{H}})$	$q_0$	$\alpha$	$q_2$	$\sigma_E$ (Ry)
0	300	10,722	0,009	0,859	0,001	0,102	0,028
	600	13,210	0,042	0,811	0,107	0,157	0,040
	1000	15,325	0,072	0,823	0,117	0,189	0,025
	2000	18,610	0,141	0,850	0,178	0,233	0,018
	3000	20,770	0,175	0,873	0,191	0,244	0,017
	10000	28,286	0,319	1,019	0,173	0,275	0,027
1	300	7,669	0,161	0,963	0,132	0,115	0,026
	600	9,607	0,269	1,060	0,093	0,160	0,021
	1000	11,277	0,369	1,147	0,060	0,176	0,024
	2000	13,904	0,578	1,195	0,122	0,215	0,016
	3000	15,649	0,701	1,202	0,147	0,235	0,014
	10000	21,830	0,944	1,337	0,298	0,240	0,033
2	300	6,450	0,304	1,184	0,030	0,120	0,017
	600	8,142	0,497	1,197	0,081	0,181	0,014
	1000	9,610	0,643	1,262	0,074	0,195	0,014
	2000	11,937	0,931	1,291	0,127	0,230	0,014
	3000	13,493	1,093	1,320	0,153	0,240	0,022
	10000	19,051	1,369	1,531	0,260	0,262	0,042
3	300	5,734	0,466	1,263	0,039	0,122	0,015
	600	7,274	0,701	1,273	0,082	0,183	0,012
	1000	8,617	0,897	1,347	0,090	0,204	0,018
	2000	10,755	1,252	1,403	0,131	0,232	0,019
	3000	12,191	1,451	1,457	0,154	0,240	0,026
	10000	17,354	1,797	1,804	0,241	0,265	0,031
4	300	5,243	0,616	1,330	0,050	0,128	0,013
	600	6,676	0,892	1,342	0,095	0,194	0,011
	1000	7,929	1,124	1,437	0,096	0,211	0,017
	2000	9,933	1,555	1,544	0,114	0,229	0,016
	3000	11,282	1,866	1,598	0,150	0,239	0,026
	10000	16,158	2,477	2,063	0,222	0,271	0,030
5	300	4,877	0,755	1,391	0,058	0,128	0,012
	600	6,227	1,086	1,393	0,107	0,199	0,012
	1000	7,413	1,354	1,545	0,130	0,229	0,010
	2000	9,312	1,974	1,653	0,123	0,230	0,024
	3000	10,595	2,509	1,738	0,144	0,236	0,028
	10000	15,249	2,368	2,146	0,225	0,265	0,021
6	300	4,589	0,888	1,448	0,062	0,123	0,013
	600	5,874	1,281	1,441	0,121	0,207	0,013
	1000	7,004	1,668	1,587	0,107	0,210	0,018
	2000	8,820	2,792	1,772	0,113	0,224	0,017
7	300	4,355	1,021	1,504	0,070	0,132	0,013
	600	5,585	1,480	1,473	0,139	0,213	0,014
	1000	6,669	2,018	1,653	0,114	0,214	0,016

Таблица 4.2: Параметры аналитической аппроксимации (4.56), (4.59) для энергий водородоподобных состояний  $|00\nu\rangle$ ,  $\nu \geq 1$ .

$\nu$	$\gamma$	$E_{0s\nu}^{(0)}$ (Ry)	$q_0$	$\alpha$	$\sigma_E$ (Ry)
1	300	0,9643	1,751	0,7081	0,0013
	600	0,9781	3,019	0,7441	0,0013
	1000	0,9850	4,595	0,7604	0,0018
	2000	0,9912	8,467	0,7977	0,0017
	3000	0,9936	12,43	0,8095	0,0012
	10000	0,9976	39,65	0,8052	0,0023
2	300	0,5522	1,064	0,6186	0,0006
	600	0,5755	1,463	0,6252	0,0005
	1000	0,5917	1,885	0,6322	0,0018
	2000	0,6125	2,632	0,6255	0,0007
	3000	0,6240	3,143	0,6406	0,0037
	10000	0,6554	4,810	0,6573	0,0022
3	300	0,2456	5,608	0,8501	0,0005
	600	0,2473	10,68	0,8495	0,0013
	1000	0,2482	16,67	0,8617	0,0003
	2000	0,2489	31,35	0,8940	0,0002
	3000	0,2492	45,96	0,8966	0,0002
	10000	0,2498	150,1	0,8956	0,0003
4	300	0,1814	2,145	0,7140	0,0025
	600	0,1858	2,868	0,6699	0,0003
	1000	0,1887	3,566	0,6609	0,0002
	2000	0,1924	4,963	0,6165	0,0002
	3000	0,1945	5,908	0,5970	0,0003
	10000	0,1999	8,965	0,5675	0,0006
5	300	0,10982	10,05	0,9245	0,00014
	600	0,11032	18,58	0,9422	0,00014
	1000	0,11057	29,87	0,9404	0,00010
	2000	0,11079	56,85	0,9630	0,00009
	3000	0,11088	83,66	0,9619	0,00009
	10000	0,11104	273,3	0,9745	0,00006
6	300	0,08920	2,435	0,8688	0,00054
	600	0,09068	4,328	0,7156	0,00016
	1000	0,09167	5,237	0,7205	0,00018
	2000	0,09294	7,419	0,6593	0,00010
	3000	0,09362	8,825	0,6237	0,00016
	10000	0,09542	13,43	0,5906	0,00026

Функция  $E^{(2)}(K)$ , описывающая продольную энергию при больших  $K_{\perp}$ , записывается в виде

$$E_{0s\nu}^{(2)}(K) = \left\{ (2 \text{ Ry})^{-1} [r_*^2 + (2\nu + 1)r_*^{3/2} + q_2 r_*]^{1/2} + 1/E_{0s\nu}^{(0)} \right\}^{-1}, \quad (4.59)$$

где  $r_*$  и  $E^{(0)}$  имеют тот же смысл, что и раньше. Первое и второе слагаемые в квадратных скобках обеспечивают правильную асимптотику. Теперь

$$q_2 = \begin{cases} \nu^2 - 1 & (\text{нечётные } \nu), \\ \nu^2 + 2^{\nu/2} \lg(\gamma/300) & (\text{чётные } \nu). \end{cases}$$

Оптимальные значения параметров  $q_0$  и  $\alpha$  даны в Табл. 4.2 и 4.3. Как и в Табл. 4.1, последняя колонка представляет среднеквадратичную погрешность, которая в несколько раз меньше максимальной погрешности вблизи антипересечений.

В таблицах 4.1–4.3 представлены только истинно связанные (т.е. не метастабильные) состояния.

На основе формул (4.56)–(4.59) в работе [280] получены аппроксимации для энергий связанных состояний как функции двух непрерывных аргументов  $\gamma$  и  $K_{\perp}$  путём замены параметров из таблиц 4.1–4.3 аналитическими функциями  $\gamma$ . Один из этих параметров – продольная энергия покоящегося атома  $E^{(0)}$  – имеет самостоятельное значение. Для неё были найдены аналитические аппроксимации в широком диапазоне значений параметра  $\gamma$ , не ограниченном упомянутым выше условием  $\gamma \geq 300$ . Для тесно связанных состояний используется формула

$$E_{0s0}^{(0)}(\gamma)/\text{Ry} = \ln \left( \exp [(1 + s)^{-2}] + p_1 [\ln(1 + p_2 \sqrt{\gamma})]^2 \right) + p_3 [\ln(1 + p_4 \gamma^{p_5})]^2. \quad (4.60)$$

Параметры  $p_1 - p_5$  зависят от  $s$ ; они представлены в Табл. 4.4. Эта аппроксимация имеет погрешность в пределах 0,1%–1% при  $\gamma = 10^{-1} - 10^4$  (то есть годится и для нейтронных звёзд с относительно слабыми полями, таких как миллисекундные пульсары), а также обеспечивает правильный предел при  $\gamma \rightarrow 0$ .

Для водородоподобных состояний используем асимптотический результат

$$E_{ns\nu}^{(0)} = \frac{1 \text{ Ry}}{(n + \delta)^2}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} n = (\nu + 1)/2, & \delta \sim \gamma^{-1} \quad (\text{нечётные } \nu), \\ n = \nu/2, & \delta \sim (\ln \gamma)^{-1} \quad (\text{чётные } \nu). \end{cases} \quad (4.61)$$

Для квантового дефекта  $\delta$  получены приближённые формулы: для нечётных  $\nu$ ,

$$\delta(\gamma) = (a_{\nu} + b_{\nu} \sqrt{\gamma} + 0,077\gamma)^{-1}, \quad (4.62)$$

где  $a_{\nu} \approx 1$  и  $b_{\nu} \approx 2$ ; для чётных  $\nu$ ,

$$\delta(\gamma) = [a_{\nu} + 1,28 \ln(1 + b_{\nu} \gamma^{1/3})]^{-1}, \quad (4.63)$$



Таблица 4.3: Параметры аналитической аппроксимации (4.56), (4.59) для энергий некоторых состояний  $|0s\nu\rangle$ ,  $\nu \geq 1$  при  $s = 1, 2$ .

$s$	$\nu$	$\gamma$	$E_{0s\nu}^{(0)}$ (Ry)	$q_0$	$\alpha$	$\sigma_E$ (Ry)
1	1	300	0,9407	2,109	0,6794	0,0010
		600	0,9640	3,553	0,7029	0,0024
		1000	0,9750	5,271	0,7323	0,0015
		2000	0,9842	9,515	0,7608	0,0014
		3000	0,9884	13,39	0,7909	0,0012
		10000	0,9952	41,22	0,7898	0,0021
1	2	300	0,5138	1,930	0,6417	0,0038
		1000	0,5579	3,552	0,6688	0,0029
2	1	300	0,9223	2,421	0,6553	0,0014
		1000	0,9652	5,732	0,7123	0,0014
		2000	0,9784	10,03	0,7467	0,0014
		3000	0,9838	14,01	0,7721	0,0009

где  $a_\nu \approx \frac{2}{3}$  и  $b_\nu \approx \frac{2}{3}$ . Более точные значения  $a_\nu$  и  $b_\nu$  приведены в Табл. 4.5. При  $1 \leq \gamma \leq 10^4$  характерная погрешность  $\delta(\gamma)$  находится в пределах  $3 \times 10^{-4}$  для нечётных и  $10^{-3}$  для чётных состояний.

Параметры  $m_{\text{эфф}}$ ,  $\alpha$  и  $q_0$  в (4.56)–(4.59), определяющие зависимость энергий от  $K_\perp$ , также аппроксимируются функциями от  $\gamma$ . Для эффективной массы тесно связанных состояний ( $\nu = 0$ ) имеем

$$m_{\text{эфф}}(\gamma) = m_{\text{H}} [1 + (\gamma/\gamma_0)^{c_0}], \quad (4.64)$$

где показатель степени  $c_0$  и значение  $\gamma_0$  зависят от  $s$ :

$$c_0 = 0,937 + 0,038s^{1,58}, \quad \gamma_0 = 6150 \frac{1 + 0,0389s^{3/2}}{1 + 7,87s^{3/2}}.$$

Для  $K_{\text{cr}}$  имеем (по-прежнему рассматривая тесно связанные состояния)

$$q_0 \equiv K_{\text{cr}} / \sqrt{2m_{\text{H}}E^{(0)}} = c_1 + \ln(1 + \gamma/\gamma_1). \quad (4.65)$$

Параметры  $c_1$  и  $\gamma_1$  принимают значения  $c_1 = 0,81, 1,09, 1,18, 1,24$  и  $\gamma_1 = (8,0, 3,25, 2,22, 1,25) \times 10^4$  для  $s = 0, 1, 2, 3$ , соответственно. Для  $s \geq 4$  мы полагаем  $c_1 = 0,93 + 0,08s$  и  $\gamma_1 = 6500$ . Остальные параметры можно заменить простыми выражениями  $\alpha = 0,053 \ln(\gamma/150)$  и  $q_2 = 0,158 [\ln((1 + 0,1s)\gamma/215)]^{2/5}$ .

Таблица 4.4: Параметры аналитической аппроксимации (4.60) для энергий тесно связанных состояний  $|0s0\rangle$  при  $10^{-1} \leq \gamma \leq 10^4$ .

$s$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$
0	15,55	0,378	2,727	0,3034	0,4380
1	0,5332	2,100	3,277	0,3092	0,3784
2	0,1707	4,150	3,838	0,2945	0,3472
3	0,07924	6,110	4,906	0,2748	0,3157
4	0,04696	7,640	5,787	0,2579	0,2977
5	0,03075	8,642	6,669	0,2431	0,2843
6	0,02142	9,286	7,421	0,2312	0,2750
7	0,01589	9,376	8,087	0,2209	0,2682

Таблица 4.5: Параметры аналитических аппроксимаций (4.61)–(4.63) для энергий водородоподобных состояний  $|00\nu\rangle$  при  $1 \leq \gamma \leq 10^4$ .

$\nu$	1	2	3	4	5	6
$a_\nu$	0,785	0,578	0,901	0,631	0,970	0,660
$b_\nu$	1,724	0,765	1,847	0,717	1,866	0,693

Наконец, для нечётных водородоподобных состояний имеем аппроксимации  $q_0 = (\nu^{5/4}\gamma/170)^{0,9}$  и  $\alpha = 0,66 + \nu/20$ , а для чётных водородоподобных состояний  $q_0 = \nu \sqrt{\gamma/1200}$  и  $\alpha = 0,66$ .

На рис. 4.2 показано сравнение приведённых аппроксимаций для энергий (сплошные кривые) с результатами численных расчётов (точки). В большинстве случаев отличие расчётных данных от аппроксимации почти неразличимо. Можно сделать вывод, что несмотря на более низкую точность аппроксимаций энергий связи функциями от двух переменных  $K_\perp$  и  $\gamma$ , где зависимость от  $\gamma$  даётся формулами (4.60)–(4.65), по сравнению с использованием табличных значений параметров аппроксимаций (4.56)–(4.59) при фиксированных значениях  $\gamma$ , эта точность вполне достаточна для большинства астрофизических приложений. Дополнительно на рис. 4.2 окружностями для каждого тесно связанного состояния показано положение критического обобщённого импульса  $K_{cr}$  согласно построенной аппроксимации, практически совпадающее с положением точки перегиба на кривой для энергии.

В связи с открытием линий поглощения в спектрах магнитаров и попытками их

Таблица 4.6: Параметры для оценки энергии водородоподобных уровней по формулам (4.66) и (4.67).

$s$	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_6$
0	1	20,62	27,37	164,19	106,0	1175,6
1	5	19,57	19,72	212,0	495,5	1903,7
2	12	12,53	13,02	207,8	907,9	1532,6
3	21	3,393	8,177	203,6	1313,8	1140,1

интерпретации на основе моделей атмосфер возникла потребность в аналитических оценочных формулах для энергий связанных состояний атома водорода, которые не ограничивались бы верхним пределом магнитного поля  $\gamma \sim 10^4$ , как в статье [280]. Такая формула для энергии связи покоящегося атома, заменяющая (4.60) и применимая при *произвольных* напряжённостях магнитного поля, приведена нами в [281]:

$$E_{0s0}^{(0)} = -\mathcal{A}_s x^2, \quad x = \ln(1 + c_0 b), \quad (4.66)$$

$$\frac{\mathcal{A}_s}{\text{Ry}} = \frac{1 + c_2 x^{-2} + c_3 x^{-3} + c_5 x^{-5} + c_6 (1 + s)^{-2} x^{-6}}{1 + c_1 x^{-1} + c_4 x^{-2} + c_6 x^{-4}}. \quad (4.67)$$

Здесь  $c_5 = c_6(1 + s)/c_0$  обеспечивает правильное поведение аппроксимации при  $b \ll 1$ . Параметры  $c_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4, 6$ ) при  $s = 0, 1, 2, 3$  приведены в Табл. 4.6. Относительная погрешность аппроксимации не превосходит нескольких промилле в диапазоне  $B$  от 0 до  $10^{17}$  Гс.

#### 4.2.4 Размеры атома. Дипольный и квадрупольный моменты

Геометрические характеристики атомов играют важную роль в распределении атомов по квантовым состояниям в плотной плазме (см. § 2.4.2). Зависимость среднеквадратичных размеров волновой функции от  $K_{\perp}$  достаточно сложна и может быть немонотонной вблизи антипересечений. Однако размеры обычно не требуется знать с высокой точностью, что позволяет использовать сравнительно простые аппроксимации. Типичная погрешность аппроксимаций, представленных ниже, составляет несколько процентов.

При  $K = 0$  среднеквадратичные размеры атома вдоль осей координат можно

аппроксимировать формулами  $l_{x0} = l_{y0} \approx a_m \sqrt{s+1}$  и

$$l_{z0} \approx \left\{ 1/\sqrt{2} + 1/\ln[\gamma/(1+s)] \right\} (\text{Ry}/E^{(0)})^{1/2} a_B \quad (\nu = 0), \quad (4.68)$$

$$l_{z0} \approx (1,6 \text{Ry}/E^{(0)}) a_B \quad (\nu \geq 1). \quad (4.69)$$

Рассмотрим атом, движущийся вдоль оси  $y$ . Поперечные размеры электронного облака остаются практически независимыми от  $K$ :  $l_x \approx l_y \approx l_{x0}$ . Однако атом приобретает постоянный дипольный момент  $\mathbf{d} = e\langle \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e \rangle$ , пропорциональный среднему расстоянию между электроном и протоном  $|\bar{x}| = |\langle \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p \rangle|$ . Это расстояние остаётся всегда меньше  $r_c$ , приближаясь к  $r_c$  при  $K_{\perp} \gg K_{\text{cr}}$ . С погрешностью менее 10%, при  $\gamma \geq 300$ ,

$$|\bar{x}|/r_c \approx 1 - \left[ 1 + 0,015\gamma^2 \sqrt{1+s} (E^{(0)})^{-4} \right]^{-1} \left[ 1 + (K/K_{\text{cr}})^{1/\alpha} \right]^{-1} - \left[ 1 + 0,004\gamma^2 (E^{(2)}(K))^{-4} \right]^{-1} \left[ 1 + (K_{\text{cr}}/K)^{1/\alpha} \right]^{-1}, \quad (4.70)$$

где  $E^{(0)}$ ,  $E^{(2)}$ ,  $K_{\text{cr}}$  и  $\alpha$  определены выше.

Размер электронного облака вдоль поля описывается формулой [280]

$$l_z = l_{z0} \frac{[1 + (1 - m_{\text{H}}/m_{\text{eff}})(K/K_{\text{cr}})^2]^{1/2}}{1 + (K/K_{\text{cr}})^{1/\alpha}} + \frac{l_{z2}}{1 + (K_{\text{cr}}/K)^{1/\alpha}} \quad (\nu = 0) \quad (4.71)$$

$$l_z = (l_{z0}^2 + l_{z2}^2)^{1/2} \quad (\nu \geq 1). \quad (4.72)$$

Здесь  $l_{z0}$  определяется формулами (4.68), (4.69), и

$$l_{z2} = \sqrt{\nu + 1/2} [r_*^3 + (4,3 + 7\nu^2)r_*^2]^{1/4}.$$

На рис. 4.3 показаны размеры атома в разных квантовых состояниях, определённые как  $l(K) = [\bar{x}^2 + l_x^2 + l_y^2 + l_z^2]^{1/2}$ . Размеры, вычисленные на основе приведённых формул, сравниваются с результатами расчёта. На левом рисунке (при  $\gamma = 600$ ) значительные отклонения аппроксимации от численных результатов для состояний  $|003\rangle$  и  $|011\rangle$  при  $K \sim 10^2$  а.е.и.<sup>5</sup> связаны с их антипересечением, которое происходит недалеко от точки, в которой уровень  $(011)$  становится метастабильным.

Дополнительно в статье [282] был рассчитан квадрупольный момент основного состояния покоящегося атома водорода в зависимости от магнитного поля. В этом случае, вследствие осевой симметрии задачи, компоненты квадрупольного тензора  $Q_{\alpha\beta}$  удовлетворяют соотношениям (напр., [236])

$$\begin{aligned} Q_{xy} = Q_{yz} = Q_{zx} = 0, \\ Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{zz} = e \langle z^2 \rangle - \langle x^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.73)$$

<sup>5</sup>Здесь и далее «а.е.и.» обозначает атомную единицу импульса, равную  $m_e e^2/\hbar$ .

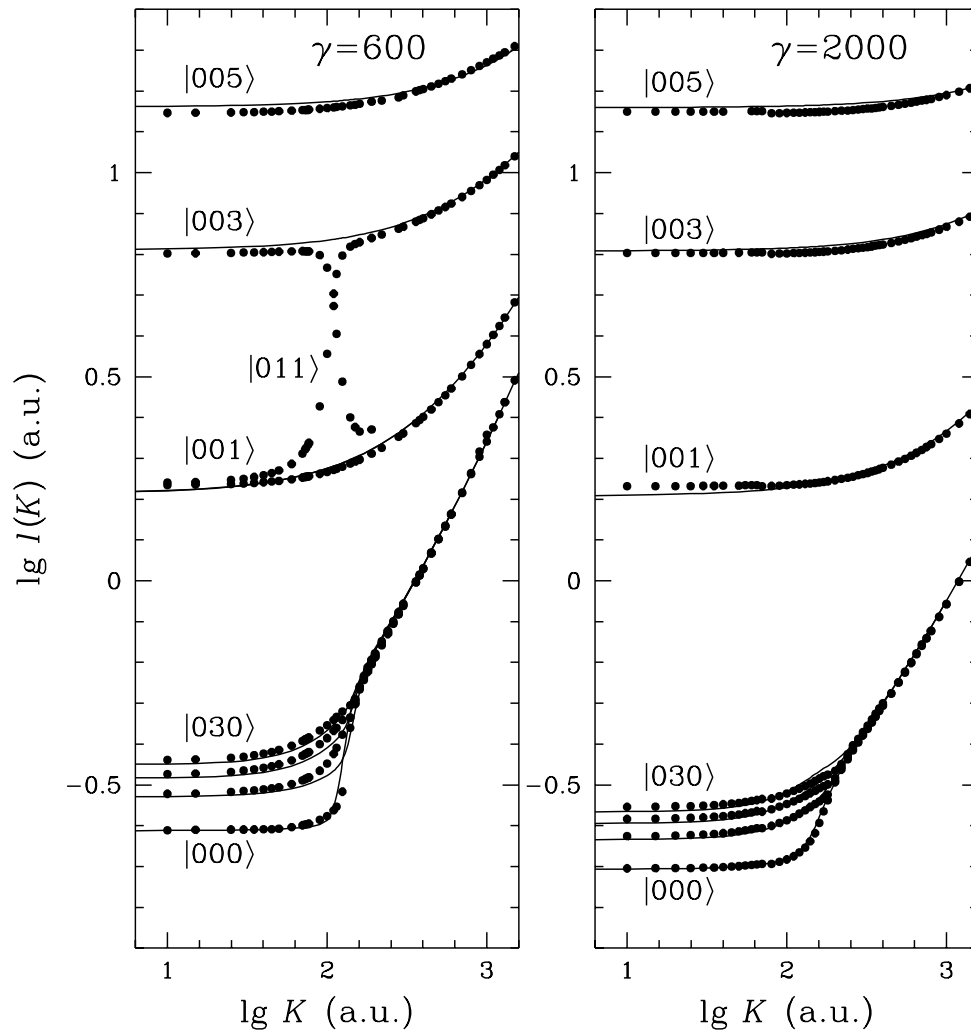


Рис. 4.3: Сравнение вычисленных размеров атома с аналитической аппроксимацией.

В пределе слабого поля обычная теория возмущений даёт [283]

$$-Q_{zz} = \frac{5}{2} \gamma^2 - \frac{615}{32} \gamma^4 + \dots \quad (4.74)$$

В противоположном пределе,  $\ln \gamma \gg 1$ , имеем  $\langle x^2 \rangle \ll \langle z^2 \rangle$ , а  $\langle z^2 \rangle \sim |2E^{\parallel}|^{-1}$ . Используя метод статьи [275] для оценки  $E^{\parallel}$ , получаем

$$-Q_{zz} \sim \frac{1}{(\ln \gamma)^2} + \frac{2 \ln(\ln \gamma)}{(\ln \gamma)^3} + O\left(\frac{1}{(\ln \gamma)^3}\right) \quad (4.75)$$

при  $\gamma \rightarrow \infty$ .

Результаты расчётов энергии связи  $E$  и квадрупольного момента  $Q_{zz}$  покоящегося атома водорода представлены в Табл. 4.7. Для значений  $E$ , когда это возможно, приведено сравнение с точными результатами [248]. Из таблицы видно, что для энергии

Таблица 4.7: Энергия связи  $E$  и квадрупольный момент  $Q_{zz}$  покоящегося атома водорода при разных напряжённостях магнитного поля  $B$ , вычисленные (а) вариационным методом и (б) методом разложения по базису орбиталей Ландау. Для сравнения даны округлённые точные данные для энергии связи [248].

$B$	$-E$ (Ry)		Ref. [248]	$-Q_{zz}$ (a.u.)	
	(а)	(б)		(а)	(б)
$0.1 B_0$	1,095 05274	–	1,095 05296	0.0235	–
$10^9$ G	1,346 292	–		0.2185	–
$B_0$	1,662 322	1,63	1,662 338	0.4155	0.38
$10^{10}$ G	2,614 73	2,61		0.5085	0.48
$10 B_0$	3,4948	3,490	3,495 6	0.4370	0.447
$10^{11}$ G	5,713	5,717		0.2806	0.290
$100 B_0$	7,5642	7,579	7,579 6	0.2071	0.217
$10^{12}$ G	11,87	11,924		0.1228	0.1308
$1000 B_0$	15,23	15,325	15,324 9	0.0915	0.0981
$10^{13}$ G	22,5	22,77		0.0576	0.0620
$B_r$	32,5	32,92		0.0380	0.0406

связи метод разложения по орбиталям Ландау более точен при  $\gamma \gtrsim 10$ , а вариационный метод более точен для более слабых полей. Оба метода дают близкие результаты для квадрупольного момента (отличие не превышает 10%).

Данные в Табл. 4.7 можно аппроксимировать выражением

$$-Q_{zz} \approx \frac{\xi \gamma^{7/4}}{0,3392 + (1 + \xi^3) \gamma^{7/4}}, \quad \text{где } \xi = 4 \ln(1 + 0,212 \gamma^{1/4}). \quad (4.76)$$

Эта аппроксимация воспроизводит точные асимптотики:  $-Q_{zz} \sim (\ln \gamma)^{-2}$  при  $\gamma \rightarrow \infty$  и  $-Q_{zz} \sim \frac{5}{2} \gamma^2$  при  $\gamma \rightarrow 0$ , – а её отклонение от численных результатов не превышает нескольких процентов при любом  $B$ .

#### 4.2.5 Наибольшая поперечная скорость

На основе вышеприведённых формул для энергий связанных состояний атома можно определить максимально возможную скорость атома в этих состояниях поперёк магнитного поля,  $v_{\max} = \max |\partial E / \partial K_{\perp}|$ . Она пропорциональна максимальному поперечному электрическому полю в той системе, в которой атом покоится:  $\mathcal{E}_{\text{mov}} = v_{\max} B / c$ . Более сильное поперечное поле  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_{\text{mov}}$  неизбежно вынудит атом двигаться со скоро-

Таблица 4.8: Наибольшая поперечная скорость (в атомных единицах) для состояний  $|0s0\rangle$ : численные значения  $v_{\max}$  и аналитическая аппроксимация  $v_{\max, \text{appr}}$ .

$s$	0	0	0	0	1	2	3
$\gamma$	300	1000	3000	10 000	3000	3000	3000
$v_{\max}$	0,0588	0,0479	0,0372	0,0253	0,0240	0,0198	0,0173
$v_{\max, \text{appr}}$	0,0622	0,0467	0,0367	0,0279	0,0232	0,0187	0,0154

стью, приближающейся к скорости дрейфа свободных зарядов в скрещенных полях,  $\mathbf{v}_{\text{drift}} = c \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$ , при условии, что  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_c = B = \gamma / \alpha_f$  а.е.и. (в обычных единицах  $\mathcal{E}_c = 2,998 \times 10^4 [B/\text{Гс}] \text{ В м}^{-1}$ ). Ещё более сильное электрическое поле,  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_c$ , не может быть уравновешено движением и приводит к штарковской ионизации.

Численное определение  $v_{\max}$  потребовало бы многократного вычисления производных  $\partial E_\kappa / \partial K_\perp$  в наиболее сложной области  $K \sim K_{\text{cr}}$ . Аппроксимация на основе аналитических формул – это просто  $v_{\max, \text{appr}} = \partial E / \partial K_\perp$  при  $K_\perp = K_{\text{cr}}$ , где  $E$  даётся формулой (4.56), а  $K_{\text{cr}}$  – формулой (4.65). В Табл. 4.8 приведены значения  $v_{\max, \text{appr}}$ , полученные на основе этого приближения, наряду со значениями  $v_{\max}$ , полученными численно. Значения, приведённые в Табл. 4.8 в атомных единицах скорости ( $e^2 / \hbar = 2188 \text{ км с}^{-1}$ ), можно пересчитать в значения поперечного электрического поля:  $\mathcal{E}_{\text{mov}} = \gamma v_{\max} / (e^2 / \hbar) \times 5,14 \times 10^{11} \text{ В м}^{-1}$ .

## 4.2.6 Волновые функции непрерывного спектра

Для упрощения формул проведём рассмотрение волновых функций непрерывного спектра сначала для атома водорода, покоящегося относительно магнитного поля. Переход к случаю движущегося атома затем будет произведён тривиальным обобщением с использованием того факта, что асимптотики волновых функций на больших расстояниях для этих двух случаев одни и те же.

### 4.2.6а Покоящийся атом

Для покоящегося атома рассмотрение можно проводить независимо для каждого  $s$ . При этом вместо (4.45) решается сокращённая система уравнений

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2}{dz^2} + V_{nn}^s(z) + E_{ns}^\perp - E \right] g_n^{s\nu}(z) = - \sum_{n' \neq n} V_{nn'}^s(z) g_{n'}^{s\nu}(z). \quad (4.77)$$

Здесь

$$\begin{aligned} V_{nn'}^s(z) &\equiv V_{ns,n's}(z) = \langle ns | -e^2/r | n's \rangle_{\perp} \equiv (\Phi_{ns} | -e^2/r | \Phi_{n's}) = \\ &= -\frac{e^2}{a_m \sqrt{2}} \int_0^{\infty} I_{n+s,n}(\xi) I_{n'+s,n'}(\xi) (\xi + z^2/2a_m^2)^{-1/2} d\xi, \end{aligned} \quad (4.78)$$

Полный набор  $n_{\max} - n_{\min} + 1$  уравнений (*каналов ионизации*) разбивается на две группы. Первая из них включает *открытые каналы*  $n = n_{\min}, \dots, n_0 - 1$ , для которых  $E > E_{ns}^{\perp}$ , а вторая – *закрытые каналы*  $n = n_0, \dots, n_{\max}$ , для которых выполнено обратное неравенство  $E < E_{ns}^{\perp}$ .

В большинстве работ, в которых рассматривались состояния непрерывного спектра в сильном магнитном поле, волновые функции этих состояний задавались в адиабатическом приближении,  $\langle \mathbf{r} | f \rangle = \Phi_{ns}(\mathbf{r}_{\perp}) g^{(f)}(z)$ . При этом в ряде работ (напр., [284]) дополнительно применялось борновское приближение, предполагающее, что продольная часть волновой функции имеет вид

$$g^{(f)}(z) = \exp(\pm i k_n z), \quad (4.79)$$

где  $k_n = \sqrt{2m_*(E_f - E_{ns}^{\perp})}/\hbar$  – волновое число электрона, а  $\pm$  соответствует направлению его движения. Более аккуратная трактовка, применённая, в частности, в наших статьях [272, 285], состоит в нахождении функции  $g^{(f)}(z)$  путём численного решения уравнения (4.77) без правой части; такое решение переходит в (4.79) асимптотически при  $|z| \rightarrow \infty$  с точностью до логарифмической фазы:  $g^{(f)}(z) \sim \exp[\pm i k_n z + i(\ln |z|)/|a_B k_n|]$ .

Вне рамок адиабатического приближения открытые каналы через правую часть системы (4.77) связаны с закрытыми, а также друг с другом (если их количество  $n_0 - n_{\min} > 1$ ). Связь закрытых и открытых каналов приводит, в частности, к автоионизации метастабильных состояний, упоминавшейся в § 4.2.3. Связь разных открытых каналов удобно описывать при помощи  $R$ -матрицы (матрицы реакции – *reactance matrix*)  $R_{nn'}$  [286]. По аналогии со случаем без магнитного поля, подробно рассмотренным в обзоре Ситона [287], в рассматриваемом нами случае сильного магнитного поля  $R$ -матрицу можно ввести следующим образом.

Система (4.77)  $n_{\max} - n_{\min} + 1$  связанных уравнений для заданной чётности  $\nu$  имеет  $n_{\max} - n_{\min} + 1$  линейно независимых решений (базисных векторов  $g^{(n)s\nu} = [g_{n_{\min}}^{(n)s\nu}, \dots, g_{n_{\max}}^{(n)s\nu}]$ ), удовлетворяющих физически осмысленным граничным условиям. Удобно нумеровать решения согласно нумерации каналов:  $n = n_{\min}, n_{\min} + 1, \dots, n_{\max}$  (тогда при выключении связи между каналами будет  $g_{n'}^{(n)s\nu} \rightarrow g_n^{(n)s\nu} \delta_{nn'}$ ). Каждое из



этих решений образует волновую функцию  $\psi_{s\nu}^{(n)}(\mathbf{r}) = \sum_{n'} \Phi_{n's}(\mathbf{r}_\perp) g_{n'}^{(n)s\nu}(z)$ , в разложении (4.21) которой присутствуют  $n_0 - n_{\min}$  открытых и  $n_{\max} - n_0 + 1$  закрытых каналов. Для решений заданной чётности по  $z$ , не ограниченных на бесконечности ( $n = n_{\min}, \dots, n_0 - 1$ ), достаточно построить *вещественные* волновые функции для положительных  $z$ , удовлетворяющие следующим асимптотическим условиям при  $z \rightarrow +\infty$ :

$$g_{n'}^{(n,\text{real})}(z) \sim \delta_{nn'} \sin \phi_{n'}(z) + R_{nn'} \cos \phi_{n'}(z) \quad (4.80)$$

для  $n' = n_{\min}, \dots, n_0 - 1$ , и  $g_{n'}^{(n,\text{real})}(z) \rightarrow 0$  для  $n' = n_0, \dots, n_{\max}$ . (Здесь и далее в этом параграфе мы для краткости опускаем индексы  $s$  и  $\nu$ .) В уравнении (4.80)

$$\phi_{n'}(z) = k_{n'} z + (k_{n'} a_B m_e / m_*)^{-1} \ln(k_{n'} z) \quad (4.81)$$

– это составляющая фазы, зависящая от  $z$ . При выборе нормировки волновых функций непрерывного спектра на единицу в интервале длины  $L_z$ ,

$$\int d^2 \mathbf{r}_\perp \int_{-L_z/2}^{L_z/2} dz |\psi^{(f)}(\mathbf{r}_\perp, z)|^2 = 1, \quad (4.82)$$

$R$ -матрица удовлетворяет следующему соотношению симметрии:

$$k_{n'} R_{nn'} = k_n R_{n'n}. \quad (4.83)$$

Вещественный базис волновых функций  $g_{n'}^{(n,\text{real})}(z)$  удобен для вычислений, но для применения к расчётам фотоионизации его следует преобразовать в базис уходящих волн. Это осуществляется по аналогии с обычной теорией [287]. Для электрона, уходящего в положительном направлении оси  $z$ , асимптотическое условие для  $n$ -го решения при  $z \rightarrow +\infty$  выглядит следующим образом:

$$g_{n'}^{(n,\text{out})}(z) \sim \delta_{nn'} \exp[i\phi_{n'}(z)] - S_{nn'}^\dagger \exp[-i\phi_{n'}(z)], \quad (4.84)$$

где  $S^\dagger$  – эрмитово сопряжённая матрица рассеяния. Теперь, если составить матричную  $[(n_0 - n_{\min}) \times (n_{\max} - n_{\min} + 1)]$  функцию  $G(z)$  из элементов  $g_{n'}^{(n)}(z)$  (где  $n$  – первый, а  $n'$  – второй индекс), то набор волн, уходящих на бесконечность, можно получить из матричного уравнения

$$G^{(\text{out})} = 2i[(1 + iR)^{-1}]^T G^{(\text{real})}. \quad (4.85)$$

Матрица  $S^\dagger$  выражается через матрицу  $R$  как

$$S^\dagger = -(1 + iR)^{-1}(1 - iR). \quad (4.86)$$

Отметим, что для получения окончательного выражения для волновой функции уходящей волны  $\psi^{(f,\text{out})}(\mathbf{r})$  следует продольные волновые функции, удовлетворяющие асимптотическому условию (4.84), домножить на общий нормировочный множитель. Из унитарности  $S$ -матрицы рассеяния следует, что этот множитель равен  $(2L_z)^{-1/2}$ .

Решение проводится независимо для чётных и нечётных функций относительно  $z$ . Таким образом, если при заданной энергии  $E$  имеется  $n_0 - n_{\min}$  открытых каналов, то в целом имеется  $2(n_0 - n_{\min})$  линейно независимых решений.

#### 4.2.6b Резонансы

Метастабильные состояния, соответствующие возбуждённым уровням Ландау, рассматриваются совершенно по-разному в адиабатическом приближении и в формализме  $R$ -матрицы. Поскольку в адиабатическом приближении отсутствует связь между орбиталями Ландау, в этом приближении под каждым уровнем Ландау с номером  $n$  возникает своя система связанных состояний. Однако эти состояния лежат в континууме для  $n' < n$  и поэтому могут распадаться. Существует два пути такого распада. Первый – это спонтанное излучение фотонов, изученное в работе [288], в которой показано, что такое излучение существенно уширяет эти уровни в сильном магнитном поле. Второй процесс – это *автоионизация*, посредством которой электрон может покинуть метастабильное состояние по любому из открытых каналов  $n' < n$ . Адиабатическое приближение этот процесс описать не может. Его общая теория изложена, например, в монографии [289]. В сильном магнитном поле он был изучен в статье [290], а для значений  $B$ , характерных для нейтронных звёзд, – в нашей работе [291].

Метастабильные состояния проявляются как резонансы волновой функции непрерывного спектра: вблизи метастабильного уровня удовлетворяется условие резонанса – диагональный элемент в правой части системы (4.77) обращается в нуль, что приводит к гигантскому увеличению соответствующего продольного коэффициента  $g_n(z)$ . Форма  $g_n(z)$  вблизи начала координат становится близкой к той, что получается в адиабатическом приближении. На больших расстояниях – там, где  $g_n(z)$  экспоненциально убывает, – доминируют вклады орбиталей  $n' < n$ , что можно интерпретировать как просачивание электрона из квазисвязанного состояния по этим каналам.

Предположим, что энергия электрона  $E$  близка к энергии  $E_{n\nu}^{\text{ad}}$ , которой обладало бы связанное состояние с квантовым номером Ландау  $n$  в отсутствие связи между каналами. Чтобы рассмотреть связь канала  $n$  с некоторым открытым каналом  $n' < n$ , достаточно удерживать два соответствующих члена в разложении (4.21) и два

уравнения в системе (4.77), если предположить, что вблизи  $E_{n\nu}^{\text{ad}}$  отсутствуют другие квазисвязанные уровни. Пусть  $g_{n'}^{\text{ad}}(z)$  и  $\bar{g}_{n'}^{\text{ad}}(z)$  – два линейно независимых решения для открытого канала в отсутствие связи с другими каналами (имеющие, например, асимптотики  $g_{n'}^{\text{ad}}(z) \sim \sin[\phi_{n'}(z) + \delta_{\text{ad}}]$  и  $\bar{g}_{n'}^{\text{ad}}(z) \sim \cos[\phi_{n'}(z) + \delta_{\text{ad}}]$  при  $z \rightarrow +\infty$ , где  $\delta_{\text{ad}}$  – адиабатический фазовый сдвиг, а функция  $\phi_{n'}(z)$  определена формулой (4.81)), и пусть  $g_{n\nu}^{\text{ad}}(z)$  – решение для закрытого канала в адиабатическом приближении. Тогда, по аналогии со случаем без магнитного поля, решение нашей системы двух связанных уравнений можно представить в виде

$$g_{n'}(z) = \cos \delta_c g_{n'}^{\text{ad}}(z) + \sin \delta_c \bar{g}_{n'}^{\text{ad}}(z), \quad (4.87)$$

$$g_{n\nu}(z) = -\sin \delta_c \frac{U_{n\nu,n'}}{\Gamma_{n\nu,n'}^{\text{a}}/2} g_{n\nu}^{\text{ad}}(z), \quad (4.88)$$

где  $\delta_c$  – добавочный фазовый сдвиг, появляющийся при учёте связи между каналами,

$$\text{tg } \delta_c = -\frac{\Gamma_{n\nu,n'}^{\text{a}}/2}{E - E_{n\nu}}. \quad (4.89)$$

В формулах (4.88) и (4.89),

$$\Gamma_{n\nu,n'}^{\text{a}} = \frac{2m_*L_z}{\hbar^2 k_{n'}} |U_{n\nu,n'}|^2 \quad (4.90)$$

– парциальная *ширина автоионизации* метастабильного состояния  $|n\nu\rangle$ ,

$$U_{n\nu,n'} = \int g_{n\nu}^{\text{ad}}(z) V_{n,n'}(z) g_{n'}^{\text{ad}}(z) dz \quad (4.91)$$

– матричный элемент, осуществляющий связь,  $E_{n\nu}$  – энергия резонанса, слегка сдвинутая по отношению к  $E_{n\nu}^{\text{ad}}$ . Заметим, что формулы (4.90) и (4.91) можно вывести непосредственно с помощью обычной теории возмущений.

Итак, из (4.87) и (4.88) следует, что связь между закрытыми и открытыми каналами искажает волновую функцию и смешивает связанное состояние  $|n\nu\rangle$  с континуумом. Сила этого смешивания определяется квадратом амплитуды перед волновой функцией  $g_{n\nu}^{\text{ad}}(z)$  в (4.88); её зависимость от энергии (профиль Брейта–Вигнера) определяется производной фазы  $\delta_c$  по энергии,

$$\frac{d\delta_c}{dE} = \frac{\Gamma_{n\nu,n'}^{\text{a}}/2}{(E - E_{n\nu})^2 + (\Gamma_{n\nu,n'}^{\text{a}}/2)^2}. \quad (4.92)$$

Закрытый канал  $n$  сильнее всего связан с открытым каналом  $n' = n - 1$ . Чаще всего достаточно учёта связи только этих двух каналов. При учёте же связи со всеми открытыми каналами полная ширина автоионизации оценивается как

$$\Gamma_{n\nu}^{\text{a}} = \sum_{n'=n_{\text{min}}}^{n-1} \Gamma_{n\nu,n'}^{\text{a}}.$$

#### 4.2.6c Обобщение на случай движущегося атома

Обобщение рассмотренной выше трактовки автоионизации при  $K_{\perp} = 0$  на случай произвольного  $K_{\perp}$  осуществлено в нашей работе [278]. Это обобщение производится достаточно легко и очевидно по той причине, что асимптотика продольных волновых функций на большом удалении от кулоновского центра – одна и та же для любого  $K_{\perp}$ . Действительно, в разложении (4.45) используются те же орбитали Ландау, что и в (4.21), а асимптотика коэффициентов при них – продольных волновых функций  $g(z)$  – определяется кулоновскими хвостами диагональных эффективных потенциалов (4.49), которые не зависят от  $K_{\perp}$  при  $z \rightarrow \infty$ .

Так как кулоновский потенциал, убывая, перестаёт искажать волновые функции на бесконечности, орбитали в разложении (4.45) перестают быть связанными между собой на больших продольных расстояниях  $z$  при условии, что для состояний непрерывного спектра используется представление с полным сдвигом ( $\eta' = 1$ ). В этом случае при вычислении  $R$ -матрицы не возникает дополнительных сложностей по сравнению со случаем  $K_{\perp} = 0$ . Поэтому представление с полным сдвигом является наиболее естественным для волновых функций непрерывного спектра, и мы его придерживаемся на практике.

Тогда для того, чтобы произвести требуемое обобщение, достаточно перенумеровать орбитали  $(n, s)$  в (4.45) при помощи одного целого числа  $j$  таким образом, что бóльшие значения  $j$  соответствуют более высоким энергиям  $E_{ns}^{\perp}$ . При этом для матриц реакции  $R$  и рассеяния  $S$  будут справедливы те же соотношения, что и при  $K_{\perp} = 0$  – например, (4.85) и (4.86).

#### 4.2.6d Метод расчёта

Для вычисления волновых функций непрерывного спектра используется метод итераций. В качестве начального выбирается адиабатическое приближение, в котором решение сводится к одномерному интегрированию продольных составляющих волновых функций, причём сначала удерживается только один открытый канал. В адиабатическом приближении используются только диагональные ( $j' = j$ ) уравнения систем (4.77) или (4.47), а недиагональные элементы  $g_{j;j'}(z)$  равны нулю.

На каждом следующем шаге итерационной процедуры предыдущее решение подставляется в правую часть системы уравнений, и выполняется сначала интегрирование с граничными условиями в нуле, соответствующими чётным и нечётным решениям по  $z$ : в первом случае ставятся граничные условия  $g_{j;j'}(0) = \delta_{jj'}$ ,  $\partial g_{j;j'}(z)/\partial z|_{z=0} =$

0, а во втором –  $g_{j;j'}(0) = 0$ ,  $\partial g_{j;j'}(z)/\partial z|_{z=0} = \delta_{jj'}$ . Одновременно с интегрированием открытых каналов запоминается правая часть системы для закрытых каналов. Затем производится интегрирование для них с граничным условием в нуле, соответствующим выбранной чётности, и условием убывания на бесконечности.

По достижении сходимости итераций для заданного числа открытых каналов в систему добавляется ещё один, и процедура повторяется до тех пор, пока в решение не будут вовлечены все каналы, являющиеся открытыми при заданной энергии.

После этого производится ещё одно интегрирование для открытых каналов, но на этот раз его область распространяется на большие  $z$ , на которых достигается кулоновская асимптотика  $g_{j;j'}(z): z \gg e^2/E_{\min}^{\parallel}$ , где  $E_{\min}^{\parallel}$  – минимальная энергия в правой части системы (4.77) или (4.47) для открытых каналов.

По завершении всех итераций производится ортогонализация волновых функций континуума. Пометим «продольные» волновые функции, полученные в итоге итераций, значком «тильда»:  $\tilde{g}_{j;j'}(z)$ . Тогда окончательная система функций  $g_{j;j'}(z)$  конструируется при помощи линейной комбинации

$$g_{j;\kappa}(z) = \sum_{j'} a_{jj'}^{\pm} \tilde{g}_{j';\kappa}(z) \quad (4.93)$$

таким образом, чтобы удовлетворялось асимптотическое условие на бесконечности

$$g_{j;\kappa}(z) \sim \delta_{j\kappa} \sin[\phi_{\kappa}(z)] + R_{j\kappa} \cos[\phi_{\kappa}(z)] \quad \text{при } z \rightarrow +\infty. \quad (4.94)$$

Здесь  $\kappa$  соответствует индексу рассматриваемого открытого канала. Если всего в разложении (4.45) волновой функции удержано  $j_{\max}$  членов, то есть система (4.47) включает  $j_{\max}$  уравнений, и в том числе имеется  $\kappa_{\max}$  открытых каналов, то такая ортогонализация сводится к решению  $j_{\max}$  алгебраических систем размером  $2\kappa_{\max} \times 2\kappa_{\max}$ .

Вслед за ортогонализацией производится общая нормировка в соответствии с выбранным нормировочным условием.

Базис *уходящих волн* (который следует использовать, например, при расчёте сечения фотоионизации) соответствует асимптотике, аналогичной (4.84):

$$g_{j;\kappa}^{\text{out}}(z) \sim \delta_{j\kappa} \exp[i\phi_{\kappa}(z)] - S_{j\kappa}^* \exp[-i\phi_{\kappa}(z)] \quad \text{при } z \rightarrow +\infty. \quad (4.95)$$

Он получается из системы вещественных функций (4.93) преобразованием (4.85), которое в явном виде записывается как

$$g_{j;\kappa}^{\text{out}}(z) = 2i \sum_{\kappa'} [(1 + iR)^{-1}]_{\kappa\kappa'} g_{j;\kappa'}(z). \quad (4.96)$$

Здесь  $\kappa$  и  $\kappa'$  пробегают  $\kappa_{\max}$  значений, соответствующих открытым каналам, а  $j$  –  $j_{\max}$  значений, соответствующих всем (открытым и закрытым) каналам.

Как и в случае покоящегося атома, решение проводится независимо для чётных и нечётных функций относительно  $z$ , и в целом, таким образом, получается  $2\kappa_{\max}$  линейно независимых решений при каждой энергии  $E$ .

### 4.3 Переходы между ионными уровнями Ландау при кулоновском рассеянии

В данном параграфе мы рассмотрим вероятности переходов между ионными уровнями Ландау при кулоновском электрон-ионном и ион-ионном рассеянии, не сопровождающемся испусканием или поглощением фотонов. Взаимодействие с излучением будет изучено в § 4.4; в частности, поглощение фотонов при кулоновском рассеянии – в § 4.4.4. Для конкретности внимание будет сконцентрировано на случае водородной плазмы, а возможное обобщение результатов на другие  $Z$  будет кратко обсуждено в конце параграфа.

Кулоновские столкновения невырожденных фермионов в сильном магнитном поле ранее изучались многими авторами. В статье [292] выведены скорости переходов при рассеянии на кулоновском потенциале, фиксированном в пространстве. В работе [293] представлены дифференциальные вероятности переходов при столкновениях двух нерелятивистских частиц, взаимодействующих посредством экранированного кулоновского потенциала. Как частный случай, авторы воспроизвели результаты [292], но в более простом виде. Релятивистские выражения для вероятностей переходов между уровнями Ландау при кулоновских столкновениях невырожденных фермионов выведены в [294, 295]. Но так как здесь нас интересуют ионные переходы<sup>6</sup>, то мы будем использовать нерелятивистский подход [293]. Соответственно, мы не станем рассматривать переходы с переворотом спина, которые по сравнению с переходами без переворота спина слабее на множитель  $\sim b_i$ , где

$$b_i = \frac{\hbar\omega_{ci}}{m_{\text{ion}}c^2} = b_e Z \left( \frac{m_e}{m_{\text{ion}}} \right)^2 = 0.68 \times 10^{-8} \frac{Z}{A^2} B_{12} \quad (4.97)$$

– ионный релятивистский магнитный параметр, аналогичный параметру  $b$  (4.1) для

---

<sup>6</sup> Столкновительные переходы между электронными уровнями Ландау требуют кинетической энергии  $\gtrsim \hbar\omega_c$ , которая в атмосферах нейтронных звёзд при интересующих нас магнитных полях не достигается

электронов. Опираясь на метод рассмотрения кулоновских столкновений в магнитном поле, введённый в [293], мы найдём полные скорости различных типов кулоновских переходов между уровнями Ландау в водородной плазме. Изложение в данном параграфе основано главным образом на статье [239].

### 4.3.1 Рассеяние на фиксированном кулоновском центре

#### 4.3.1a Вывод сечения для $Z = 1$

В § 4.1.2 были представлены разные волновые функции электрона в магнитном поле, соответствующие разному выбору электромагнитной калибровки. Аналогичные разные представления можно рассмотреть и для ионов. В статье [292] рассеяние на кулоновском потенциале изучалось с использованием аксиальной калибровки (4.14). Как показано в [293], калибровка Ландау (4.4) облегчает получение более простого выражения для вероятности перехода. Её мы и будем использовать.

Координатная часть волновой функции в калибровке Ландау равна

$$\psi_{N,k_x,k_z}(\mathbf{r}) = (L_x L_z)^{-1/2} e^{ik_x x + ik_z z} \mathcal{H}_N(y + k_x a_m^2), \quad (4.98)$$

где функция  $\mathcal{H}_N(y)$  определена формулой 4.7. Функции  $\mathcal{H}_N(y)$  являются ортонормированными и обладают следующим полезным свойством [238]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_N(y - q_x a_m^2/2) \mathcal{H}_{N'}(y + q_x a_m^2/2) e^{iq_y y} dy = I_{N'N}(q_{\perp}^2 a_m^2/2) e^{i(N'-N)\arctg(q_y/q_x)}, \quad (4.99)$$

где  $q_{\perp}^2 \equiv q_x^2 + q_y^2$ , а  $I_{N'N}$  – функция Лагерра (4.17).

Соотношение (4.99) позволяет привести матричный элемент перехода  $|Nk_x k_z\rangle \rightarrow |N'k'_x k'_z\rangle$  к виду

$$\langle N'k'_x k'_z | Nk_x k_z \rangle = \frac{1}{2\pi L_x L_z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iq_y(k_x + k'_x)a_m^2/2 + i(N'-N)\arctg(q_y/q_x)} I_{N'N}(q_{\perp}^2 a_m^2/2) V_q dq_y, \quad (4.100)$$

где  $q_x = k'_x - k_x$  и  $q_z = k'_z - k_z$ , а

$$V_q = e^2 \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{e^{-k_s r}}{r} = \frac{4\pi e^2}{q^2 + k_s^2} \quad (4.101)$$

фурье-образ экранированного кулоновского потенциала с параметром экранирования  $k_s$  (2.24).

Усреднение по  $k_x$  вероятности перехода в единицу времени между заданными состояниями  $(2\pi/\hbar)|\langle N'k'_x k'_z | Nk_x k_z \rangle|^2 \delta(E' - E)$  (где  $E$  и  $E'$  – начальная и конечная

энергии) и её суммирование по  $k'_x$  и  $k'_z$  приводят к выражению для среднего числа переходов в единицу времени в расчёте на одну частицу, находящуюся на уровне  $N$  с начальной скоростью вдоль магнитного поля  $v_z = \hbar k_z/m$ , где  $m$  – масса частицы, в объёме  $V = L_x L_y L_z$ :

$$\begin{aligned} W_{NN'}^{\text{fix}} &\equiv \frac{v_z \sigma_{NN'}^{\text{fix}}(v_z)}{V} = \frac{L_x L_z a_m^2}{(2\pi)^2 L_y} \sum_{\pm} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x \frac{2\pi}{\hbar} |\langle N' k'_x k'_z | N k_x k_z \rangle|^2 \left( \frac{dE'}{d|k'_z|} \right)^{-1} = \\ &= \frac{4\pi}{\tau_0} \frac{m}{m_e} \frac{a_m^3}{V} \sum_{\pm} \frac{w_{NN'}^{\text{fix}}(u_{\pm})}{u'}, \end{aligned} \quad (4.102)$$

где

$$\tau_0 = \frac{\hbar^3}{e^4 m_e} = 2.42 \times 10^{-17} \text{ с} \quad (4.103)$$

– атомная единица времени,  $\sigma_{NN'}^{\text{fix}}(v_z)$  – эффективное парциальное сечение,

$$w_{NN'}^{\text{fix}}(u_{\pm}) = \int_0^{\infty} \frac{I_{N'N}^2(t/2)}{(t + u_{\pm}^2)^2} dt, \quad (4.104a)$$

$$u_{\pm} = [(u \pm u')^2 + u_s^2]^{1/2}, \quad u = |k_z| a_m, \quad u_s = k_s a_m, \quad (4.104b)$$

$$u' = |k'_z| a_m = \sqrt{u^2 + 2N - 2N'}, \quad (4.104c)$$

и  $w_{NN'}^{\text{fix}}$  полагается равным нулю при  $u^2 < 2(N' - N)$ . Проверка показывает, что система уравнений (4.102), (4.104) эквивалентна уравнениям (12), (13) из статьи [293].

#### 4.3.1b Классический предел

Функция  $w_{NN'}^{\text{fix}}(u_{\pm})$  принадлежит к классу интегралов, изучавшихся в работе [296], в которой на основе результатов статьи [238] было показано, что в квазиклассическом пределе ( $N \gg 1$ ,  $N' \gg 1$ )

$$w_{NN'}^{\text{fix}}(u_{\pm}) \approx \frac{1}{2} \frac{u_{\pm}^2/2 + N + N'}{[(\sqrt{N'} - \sqrt{N})^2 + u_{\pm}^2/2]^{3/2} [(\sqrt{N'} + \sqrt{N})^2 + u_{\pm}^2/2]^{3/2}}. \quad (4.105)$$

Используя это приближение, можно показать, что формулы (4.102), (4.104) обеспечивают правильное классическое сечение в пределе  $B \rightarrow 0$ , в котором  $N$  можно заменить на  $(p_{\perp} a_m / \hbar)^2 / 2$ ,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}$ ,  $p_{\perp}^2 \equiv p_x^2 + p_y^2$ .

В качестве примера рассмотрим рассеяние на потенциале без экранирования ( $k_s = 0$ ) при движении частиц в плоскости  $(xz)$ . Рассмотрим событие рассеяния, при котором частица движется под углом  $\theta$  к оси  $z$  до рассеяния и под углом  $\theta' = \theta + \alpha$  после рассеяния, причём  $\theta < \pi/2$  и  $\theta' < \pi/2$ . Учитывая, что  $p' = p$  и



$(p'_z p_z - p'_\perp p_\perp)/p^2 = \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ , из (4.105) получаем

$$w_{NN'}^{\text{fix}}(u_-) = \left( \frac{\hbar}{a_m} \right)^4 \frac{1}{8p^3 \sin^4 \frac{\alpha}{2}} \frac{1 - \cos \theta \cos \theta'}{1 - \cos \alpha}. \quad (4.106)$$

Когда  $N' \gg 1$ , сумму по  $N'$  можно заменить интегралом. Тогда, согласно формулам (4.102) и (4.106), эффективное сечение перехода в интервал номеров уровней Ландау между  $N'$  и  $N' + dN'$  равно

$$d\sigma = \frac{4\pi}{\tau_0} \frac{m}{m_e} \frac{a_m^3}{v_z} \frac{w(u_-)}{u'} dN' = \frac{4\pi}{\tau_0} \frac{m}{m_e} \frac{a_m^4}{V\hbar} w(u_-) \frac{p'_\perp dp'_\perp}{p'_z} = \frac{\pi e^4 m (1 - \cos \theta \cos \theta') \sin \theta'}{2V p^3 (1 - \cos \alpha) \sin^4 \frac{\alpha}{2}} d\theta'. \quad (4.107)$$

В случае цилиндрической симметрии, когда  $\theta \rightarrow 0$  и  $\theta' \rightarrow \alpha$ , это выражение переходит в

$$d\sigma = \frac{e^4}{4m^2 v_z^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}} d\Omega_\alpha, \quad (4.108)$$

где  $d\Omega_\alpha$  – элемент телесного угла. Последнее выражение есть не что иное, как формула Резерфорда.

#### 4.3.1с Сечение и средняя вероятность переходов для произвольного $Z$

В случае рассеяния частицы, имеющей заряд  $Ze$ , на кулоновском центре с зарядом  $Z_0 e$  следует произвести подстановки  $a_m \rightarrow a_m |Z|^{-1/2}$  в формулах (4.98)–(4.100) и  $V_q \rightarrow Z_0 Z V_q$  в формуле (4.100). Тогда

$$\sigma_{NN'}^{\text{fix}}(v_z) = \frac{4\pi a_m^3}{v_z \tau_0} \frac{m}{m_e} Z_0^2 \sqrt{|Z|} \sum_{\pm} \frac{w_{NN'}^{\text{fix}}(u_{\pm})}{u'}, \quad (4.109)$$

где  $w_{NN'}^{\text{fix}}$ ,  $u_{\pm}$  и  $u'$  по-прежнему определяются формулами (4.104), но с изменённым масштабированием по  $k_z$  и  $k'_z$ :  $u = |k_z| a_m |Z|^{-1/2}$  и  $u' = |k'_z| a_m |Z|^{-1/2}$ . Кроме того, следует принимать во внимание зависимость от  $Z$  параметра экранирования  $u_s = k_s a_m$ .

Если скорости  $v_z = \hbar k_z / m_{\text{ion}}$  распределены по Максвеллу,

$$\mathcal{F}_{m_*, T}(v_z) = \sqrt{\frac{m_*}{2\pi T}} \exp\left(-\frac{m_* v_z^2}{2T}\right), \quad (4.110)$$

то из (4.109) находим следующую вероятность того, что частица, находящаяся на уровне  $N$  в единичном объёме, совершит переход на уровень  $N'$ :

$$\langle v_z \sigma_{NN'}^{\text{fix}}(v_z) \rangle = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\tau_0} \frac{m}{m_e} Z_0^2 \sqrt{|Z|} a_m^3 \tilde{\Lambda}_{NN'}^{\text{fix}}, \quad (4.111)$$

где  $\tilde{\Lambda}_{NN'}^{\text{fix}} \equiv \sqrt{\zeta} \Lambda_{NN'}^{\text{fix}}$ ,

$$\Lambda_{NN'}^{\text{fix}} = \int_0^\infty \frac{du}{u'} e^{-\zeta u^2/2} \theta(u'^2) \sum_{\pm} w_{NN'}^{\text{fix}}(u_{\pm}), \quad (4.112)$$

$\zeta = \hbar|Z|eB/mcT$ , а  $\theta(u'^2)$  – ступеньчатая функция Хевисайда.

#### 4.3.1d Область применимости и поправка

Интеграл в формуле (4.112) расходится при  $N = N'$ . Такая расходимость характерна для вероятностей переходов в одном измерении, вычисленных в борновском приближении, и означает только неприменимость этого приближения при малых скоростях сталкивающихся частиц.

Введём аналог электронного магнитного параметра  $\gamma$  для произвольной массы и зарядов:  $\gamma_Z = \hbar^3 B / (m^2 c |Z| Z_0^2 e^3)$ . Борновское приближение справедливо при  $|k_z|, |k'_z| \gg |Z Z_0| e^2 m / \hbar^2$ , то есть при  $u, u' \gg \gamma_Z^{-1/2}$ . Самое важное следствие выхода за рамки борновского приближения – это подавление амплитуды продольной части волновой функции (экспоненты в (4.98)) вблизи кулоновского центра. При  $|k_z| \rightarrow 0$  эта амплитуда становится пропорциональной<sup>7</sup>  $\sqrt{|k_z|}$ . Следовательно, при  $u \rightarrow 0$  или  $u' \rightarrow 0$ ,  $|\langle N' k'_x k'_z | N k_x k_z \rangle|^2$  в (4.102) становится пропорциональным  $u$  или  $u'$ , соответственно, что компенсирует фактор расходимости  $1/u'$  в (4.112).

Для того, чтобы избавиться от расходимостей интегралов столкновений в борновском приближении, аналогичной расходимости в (4.112), авторы предшествующих работ [238, 297] вводили обрезание на нижнем пределе интегрирования для  $N = N'$ . Вместо этого мы вводим под интеграл произведение  $g(u)g(u')$  весовых функций

$$g(u) = (1 + \gamma_Z^{-1} u^{-2})^{-1/2}. \quad (4.113)$$

При выполнении условий  $\gamma_Z \gg 1$  и  $\zeta \gamma_Z \gg 1$  борновское приближение справедливо на большей части той области значений скорости, которая даёт существенный вклад в интеграл в (4.112). Второе из этих условий можно записать как  $T \gg Z_0^2 Z^2 e^4 m_* / \hbar^2$ , что является обычным условием применимости борновского приближения в отсутствие магнитного поля.

Помимо борновского приближения, состоящего в пренебрежении влияния кулоновского потенциала на *продольную* часть волновой функции (экспонента в формуле

<sup>7</sup>Количественно, если  $\ln \gamma_Z \gg 1$ , то отношение квадрата модуля амплитуды при  $|k_z z| \gamma_Z^{-1/4} \ll u \ll 1$  к постоянному пределу при  $u \gg 1$  равно  $C |k_z| \hbar^2 / (m |Z Z_0| e^2) = C u \sqrt{\gamma_Z}$ , где  $C = 2\pi / \ln^2 \gamma_Z [1 + O(1/\ln \gamma_Z)]$  [275].

(4.98)), при выводе формул этого параграфа использовано также адиабатическое приближение, состоящее в пренебрежении возмущением *поперечной* части волновой функции ( $\mathcal{H}_N$  в (4.98)). Для волновых функций непрерывного спектра оба этих приближения всегда выполняются при  $z \rightarrow \infty$ , но могут нарушаться на расстояниях от кулоновского центра, сравнимых с боровским радиусом. Адиабатическое приближение остаётся достаточно точным при малых  $z$  при условии, что параметр  $\gamma_Z$ , введённый выше, велик. Поправки к адиабатическому приближению для волновых функций непрерывного спектра обсуждались в [291] (см. также § 4.2.6).

### 4.3.2 Рассеяние двух заряженных частиц

#### 4.3.2a Рассеяние различных частиц

Рассмотрим кулоновское рассеяние двух частиц с зарядами  $Z_i e$  ( $i = 1, 2$ ). В каллибровке Ландау их волновые функции записываются в виде

$$\psi_{N_i, k_{x,i}, k_{z,i}}(\mathbf{r}_i) = (L_x L_z)^{-1/2} e^{ik_{x,i}x_i + ik_{z,i}z_i} |Z_i|^{1/4} \mathcal{H}_N(|Z_i|^{1/2}(y_i + k_{x,i}a_m^2/Z_i)). \quad (4.114)$$

Энергия возбуждения двух частиц равна  $E = \hbar e V c^{-1}(|Z_1|/m_1 + |Z_2|/m_2) + m_1 v_{z,1}^2/2 + m_2 v_{z,2}^2/2$ , где  $m_i$  – массы частиц, а  $v_{z,i}$  – компоненты их скоростей вдоль силовых линий магнитного поля.

Рассмотрим переход, в котором квантовые номера частиц изменяются с  $N_i, k_{x,i}, k_{z,i}$  на  $N'_i, k'_{x,i}, k'_{z,i}$  ( $i = 1, 2$ ). Волновые функции (4.114) зависят от  $x$  и  $z$  только через экспоненциальный фактор, описывающий плоскую волну. Следствием этого является сохранение  $x$ - и  $z$ -компонент полного импульса в матричном элементе любого потенциала, зависящего только от относительного положения частиц  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ :  $k_{x1} + k_{x2} = k'_{x1} + k'_{x2}$ ,  $k_{z1} + k_{z2} = k'_{z1} + k'_{z2}$ . Так как  $\mathcal{H}_N$  не зависит от  $k_{z,i}$ , можно выбрать систему отсчёта, сопутствующую движению центра масс в направлении  $z$ , так что  $k_{z2} = -k_{z1} \equiv k_z$ . Число конечных состояний, приходящихся на  $dk'_{x,1} dk'_{x,2} dk'_z$ , равно  $(2\pi)^{-3} L_x^2 L_z dk'_{x,1} dk'_{x,2} dk'_z = (2\pi)^{-3} L_x^2 L_z dk'_{x,1} dk'_{x,2} dE' m_*/\hbar^2 |k'_z|$ , где  $m_* = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  – приведённая масса.

При помощи преобразования Фурье потенциала взаимодействия

$$V(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{q} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V_q \quad (4.115)$$

(где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ), и предполагая, что  $L_x$  и  $L_z$  велики, можно выполнить интегрирование по  $x_1, q_x, z$  и  $q_z$  в матричном элементе  $\mathcal{M} \equiv \langle N'_1, N'_2, k'_{x,1}, k'_{x,2}, k'_z | N_1, N_2, k_{x,1}, k_{x,2}, k_z \rangle$

для перехода  $|N_1, N_2, k_{x,1}, k_{x,2}, k_z\rangle \rightarrow |N'_1, N'_2, k'_{x,1}, k'_{x,2}, k'_z\rangle$ . Это интегрирование фиксирует  $q_x = k_{1,x} - k'_{1,x}$  и  $q_z = k'_z - k_z$  в  $V_q$ . Далее, используя формулу (4.99), можно произвести интегрирование по  $y_1$  и  $y_2$ . Тогда мы получим

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{1}{2\pi L_x^2 L_z} \int dx_2 e^{i(q_x + k_{x,2} - k'_{x,2})x_2} \int dq_y V_q I_{N'_1 N_1} \left( \frac{q_1^2 a_m^2}{2|Z_1|} \right) I_{N'_2 N_2} \left( \frac{q_1^2 a_m^2}{2|Z_2|} \right) \times \\ &\times \exp \left[ ia_m^2 \left( \frac{k_{x,1} + k'_{x,1}}{2Z_1} - \frac{k_{x,2} + k'_{x,2}}{2Z_2} \right) q_y \right] \times \\ &\times \exp \{ i [(N'_1 - N_1) \text{sign} Z_1 + (N'_2 - N_2) \text{sign} Z_2] \arctg(q_y/q_x) \}. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Усредняя  $|\mathcal{M}|^2$  по  $k_{x,2}$  и суммируя по  $k'_{x,2}$ , приходим к формуле

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_2 &\equiv \int \frac{a_m^2 dk_{x,2}}{|Z_2| L_y} \int \frac{L_x dk'_{x,2}}{2\pi} |\mathcal{M}|^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi L_x^2 L_y L_z^2} \int dq_y |V_q|^2 I_{N'_1 N_1}^2 \left( \frac{q_1^2 a_m^2}{2|Z_1|} \right) I_{N'_2 N_2}^2 \left( \frac{q_1^2 a_m^2}{2|Z_2|} \right). \end{aligned} \quad (4.117)$$

Это выражение не зависит от  $k_{x,1}$  и потому уже не требует дальнейшего усреднения. Наконец, суммирование парциальных вероятностей перехода в единицу времени  $(2\pi/\hbar)\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_2 \delta(E' - E)$  по  $k'_{x,1}$  и  $k'_z$  приводит к общей вероятности перехода с уровней  $N_1, N_2$  на уровни  $N'_1, N'_2$  для двух частиц в объёме  $V = L_x L_y L_z$ :

$$\begin{aligned} W_{N_1 N_2; N'_1 N'_2} &\equiv V^{-1} v_z \sigma_{N_1 N_2; N'_1 N'_2}(v_z) = \frac{L_z m_*}{\hbar^3 |k'_z|} \sum_{\text{sign } k'_z} \int \frac{L_x dk'_x}{2\pi} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle_2 = \\ &= \frac{4\pi}{\tau_0} \frac{m_*}{m_e} Z_1^2 Z_2^2 \frac{a_m^3}{V} \frac{1}{u'} \sum_{\pm} w_{N_1, N_2; N'_1, N'_2}(u_{\pm}), \end{aligned} \quad (4.118)$$

где

$$w_{N_1, N_2; N'_1, N'_2}(u) = \int_0^\infty \frac{dt}{(t + u^2)^2} I_{N'_1 N_1}^2 \left( \frac{t}{2|Z_1|} \right) I_{N'_2 N_2}^2 \left( \frac{t}{2|Z_2|} \right). \quad (4.119)$$

Здесь  $u_{\pm} = [(u \pm u')^2 + u_s^2]^{1/2}$ ,  $u = |k_z| a_m$ ,  $u_s = k_s a_m$ , и

$$u' = \left[ u^2 + \frac{2m_2|Z_1|}{m_1 + m_2} (N_1 - N'_1) + \frac{2m_1|Z_2|}{m_1 + m_2} (N_2 - N'_2) \right]^{1/2}. \quad (4.120)$$

Последняя формула выражает закон сохранения энергии. Переход энергетически невозможен, если выражение в квадратных скобках отрицательно. Заметим, что здесь  $u$  и  $u'$  переопределены по сравнению с первоначальным определением, использованным в уравнениях (4.109)–(4.112): теперь  $Z_i$  включено в (4.120). Очевидно, что  $w_{N_1, N_2; N'_1, N'_2}(u) = w_{N'_1, N_2; N_1, N'_2}(u) = w_{N_1, N_2; N'_1, N_2}(u)$ . Кроме того, если  $Z_1 = Z_2$ , то  $w_{N_1, N_2; N'_1, N'_2}(u) = w_{N_2, N_1; N'_2, N'_1}(u)$ .

### 4.3.2b Рассеяние тождественных частиц

Вывод выражения для вероятностей переходов при кулоновских столкновениях неразличимых частиц производится по аналогии с только что представленным выводом аналогичного выражения для различных частиц. Отличие состоит в том, что в качестве начальных и конечных волновых функций берутся комбинации

$$[\psi_{N_1, k_{x1}, k_{z1}}(\mathbf{r}_1)\psi_{N_2, k_{x2}, k_{z2}}(\mathbf{r}_2) \pm \psi_{N_1, k_{x1}, k_{z1}}(\mathbf{r}_2)\psi_{N_2, k_{x2}, k_{z2}}(\mathbf{r}_1)]/\sqrt{2},$$

где  $\psi_{N, k_x, k_z}(\mathbf{r})$  задаётся формулой (4.114). Результирующая вероятность перехода в единицу времени с уровней  $N_1, N_2$  на уровни  $N'_1, N'_2$ , усреднённая по начальным и просуммированная по конечным значениям  $k_x$ , равна

$$W_{N_1, N_2; N'_1, N'_2}^{\pm} = 2(W_{N_1, N_2; N'_1, N'_2} \pm W_{N_1, N_2; N'_1, N'_2}^x), \quad (4.121)$$

где знак  $+$  ( $-$ ) относится к состояниям с чётным (нечётным) полным спином,  $W_{N_1, N_2; N'_1, N'_2}$  задаётся формулой (4.118),

$$W_{N_1, N_2; N'_1, N'_2}^x = \frac{8\pi}{\tau_0} \frac{m_*}{m_e} \frac{|Z|^3}{u'} w_{N_1, N_2; N'_1, N'_2}^x(u_-, u_+) \quad (4.122)$$

и

$$w_{N_1, N_2; N'_1, N'_2}^x(u_-, u_+) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t + u_+^2/|Z|)(t + u_-^2/|Z|)} \times \\ \times I_{N'_1 N_1}(t/2) I_{N'_2 N_2}(t/2) I_{N_2 N'_1}(t/2) I_{N_1 N'_2}(t/2). \quad (4.123)$$

Последняя функция удовлетворяет соотношениям симметрии  $w_{N_1, N_2; N'_1, N'_2}^x(u_-, u_+) = w_{N_1, N_2; N'_1, N'_2}^x(u_+, u_-) = w_{N_2, N_1; N'_1, N'_2}^x(u_-, u_+) = w_{N_1, N_2; N'_2, N'_1}^x(u_-, u_+) = w_{N'_1, N'_2; N_1, N_2}^x(u_-, u_+)$ .

### 4.3.3 Протон-электронные столкновения

Опираясь на выведенные общие формулы для вероятностей переходов между уровнями Ландау при кулоновских столкновениях двух частиц, рассмотрим столкновения электронов с протонами при условии, что электрон не покидает основной уровень Ландау. Этот частный случай ранее рассматривался в статье [298], основанной на методе [293]. При заданной относительной скорости вдоль  $z$  между протоном и электроном,  $v_z$ , вероятность перехода в единицу времени с одного протонного уровня Ландау  $N$  на другой  $N'$  равна

$$W_{NN'}^{(pe)}(v_z) \equiv n_e v_z \sigma_{NN'}^{(pe)}(v_z) = 4\pi\tau_0^{-1} n_e a_m^3 \sum_{\pm} w_{NN'}^{(pe)}(u_{\pm})/u', \quad (4.124)$$

где  $\sigma_{NN'}^{(pe)}(v_z)$  – соответствующее сечение, и

$$w_{NN'}^{(pe)}(u_{\pm}) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t/2} I_{NN'}^2(t/2)}{(t + u_{\pm}^2)^2} dt. \quad (4.125)$$

Здесь  $u_{\pm}^2 = (u \pm u')^2 + u_s^2$ , а  $u = (m_* |v_z| / \hbar) a_m$  и  $u' = (m_* |v'_z| / \hbar) a_m$  – безразмерные относительные скорости сталкивающихся частиц вдоль  $z$ , удовлетворяющие закону сохранения энергии  $u'^2 = u^2 + 2(N - N')m_*/m_p$ , где  $m_* = m_e m_p / (m_e + m_p)$  – приведённая масса. Параметр  $u_s = k_s a_m$ , включённый в  $u_{\pm}$ , представляет собой безразмерный обратный радиус экранирования. Для нейтральной электрон-протонной плазмы при температуре  $T$  имеем  $k_s = \sqrt{8\pi n_e e^2 / T} = (1.584 \times 10^8 \text{ см}^{-1}) \rho_0^{1/2} T_6^{-1/2}$ . Формулы (4.124) и (4.125) следуют из (4.118) и (4.119) при  $Z_1 = Z_2 = 1$  и  $w_{NN'}^{(pe)}(u_{\pm}) = w_{0,N;0,N'}(u_{\pm})$ . Функция Лагерра  $I_{NN'}$  определена в (4.17).

Если распределения  $z$ -компонент скоростей электронов и протонов – максвелловские с температурами  $T_e$  и  $T_p$ , соответственно, не зависящими от номера уровня Ландау  $N$ , то относительные скорости вдоль  $z$ ,  $v_z = \hbar k / m_*$ , имеют максвелловское распределение (4.110), в котором

$$T = \frac{m_e + m_p}{m_e T_p^{-1} + m_p T_e^{-1}}. \quad (4.126)$$

В дальнейшем для упрощения записи предполагается, что  $T_e = T_p = T$ , если явно не указано обратное. Тогда усреднённая по скорости частота кулоновских переходов  $n_e \langle v_z \sigma_{NN'}^{(pe)} \rangle$  равна

$$\Gamma_{NN'}^{C(pe)} = 4(e^4 / \hbar^2) \sqrt{2\pi m_* / T} n_e a_m^2 \Lambda_{NN'}^{(pe)} \quad (4.127a)$$

$$= \frac{4\sqrt{2\pi}}{\tau_0} \left( \frac{m_* m_p}{m_e^2} \right)^{1/2} n_e a_m^3 \tilde{\Lambda}_{NN'}^{(pe)}, \quad (4.127b)$$

где

$$\Lambda_{NN'}^{(pe)} = \int_0^{\infty} \frac{du}{u'} e^{-\zeta_* u^2 / 2} \theta(u'^2) g(u) g(u') \left[ w_{NN'}^{(pe)}(u_+) + w_{NN'}^{(pe)}(u_-) \right]. \quad (4.128a)$$

$$\tilde{\Lambda}_{NN'}^{(pe)} = \sqrt{\zeta_i} \Lambda_{NN'}^{(pe)}, \quad (4.128b)$$

Здесь  $\theta(u'^2)$  [где  $u'^2 \equiv u^2 + 2(N - N')m_*/m_p$ ] – ступенчатая функция, обеспечивающая закон сохранения энергии,  $\zeta_* \equiv \hbar e B / m_* c T = \zeta_i m_p / m_*$ , а  $g(u)g(u')$  – введённый выше поправочный подынтегральный фактор, необходимый для приближённого учёта нарушения борновского приближения при малых относительных скоростях частиц. Он заметно отличается от единицы только при  $u \lesssim \gamma_Z^{-1/2}$ , где  $\gamma_Z = \hbar^3 B / (m_*^2 c e^3)$ . В случае электрон-протонных столкновений  $\gamma_Z^{-1/2} \approx \alpha_f / \sqrt{b_e} = 0.04848 B_{12}^{-1/2}$ . Малость

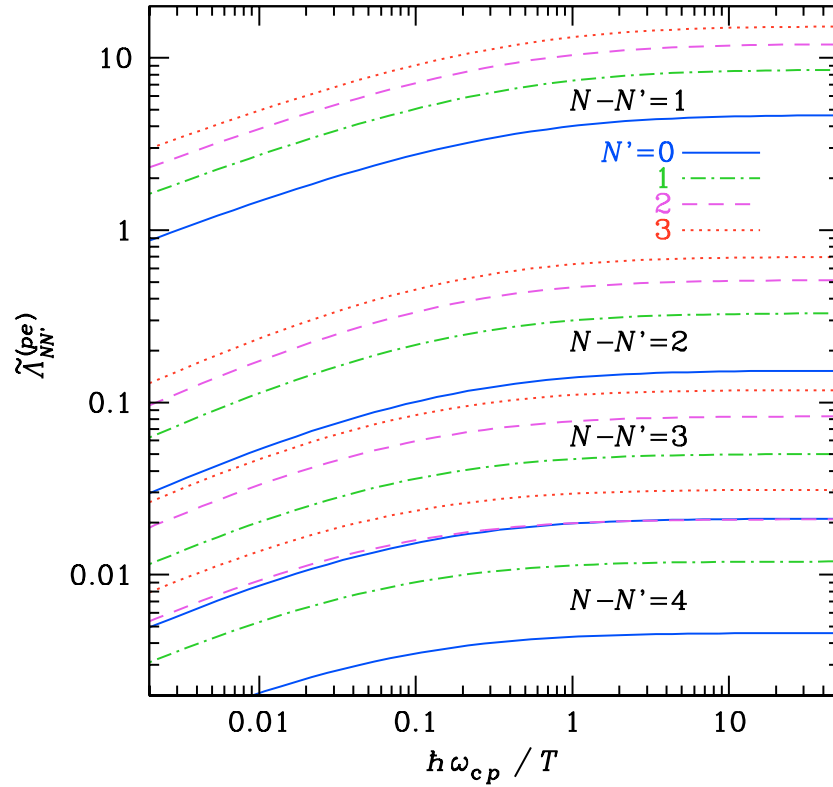


Рис. 4.4: Безразмерная величина  $\tilde{\Lambda}_{NN'}^{(pe)}$  [формула (4.128a)] как функция  $\zeta_i = \hbar\omega_{ci}/T$  для переходов между несколькими нижними протонными уровнями Ландау при нулевом экранировании  $u_s = 0$  [239].

величины  $\gamma_Z^{-1/2}$  гарантирует, что приближения, использованные при выводе формулы (4.128a), являются достаточно точными; в этом случае в (4.128a) зависимость от  $\gamma_Z$  является слабой (логарифмической).

Рисунок 4.4 изображает функцию  $\Lambda_{NN'}^{(pe)}$  ( $N > N'$ ) для переходов между несколькими низколежащими уровнями Ландау, вычисленную при  $u_s \rightarrow 0$  и  $\gamma_B^{-1} \rightarrow 0$ . На рис. 4.5 представлена та же функция при  $u_s = 0,5$ . Заметим, что  $u_s = k_s a_m = 0,041\rho_0^{1/2}T_6^{-1/2}B_{12}^{-1/2}$ . Таким образом, значение  $u_s = 0,5$  отвечает довольно высокой плотности плазмы. Мы видим, что при всех значениях  $B$  и  $u_s$  переходы между соседними уровнями ( $N - N' = 1$ ) сильно доминируют.

Путём замены переменной интегрирования  $u \rightarrow u'$  в (4.128a), с учётом равенства  $w_{NN'}^{(pe)}(u_{\pm}) = w_{N'N}^{(pe)}(u_{\pm})$ , можно проверить, что  $\Lambda_{NN'}^{(pe)} = e^{\zeta_i(N-N')}\Lambda_{N'N}^{(pe)}$ , и, таким образом,

$$\Gamma_{NN'}^{C(pe)} = e^{\zeta_i(N-N')}\Gamma_{N'N}^{C(pe)}. \quad (4.129)$$

Представление (4.127b) наиболее удобно, когда  $\zeta_i \gg 1$ , потому что в этом случае экспонента в (4.128a) изменяется намного быстрее, чем  $u'$  и  $w_{NN'}^{(pe)}$ , и её можно

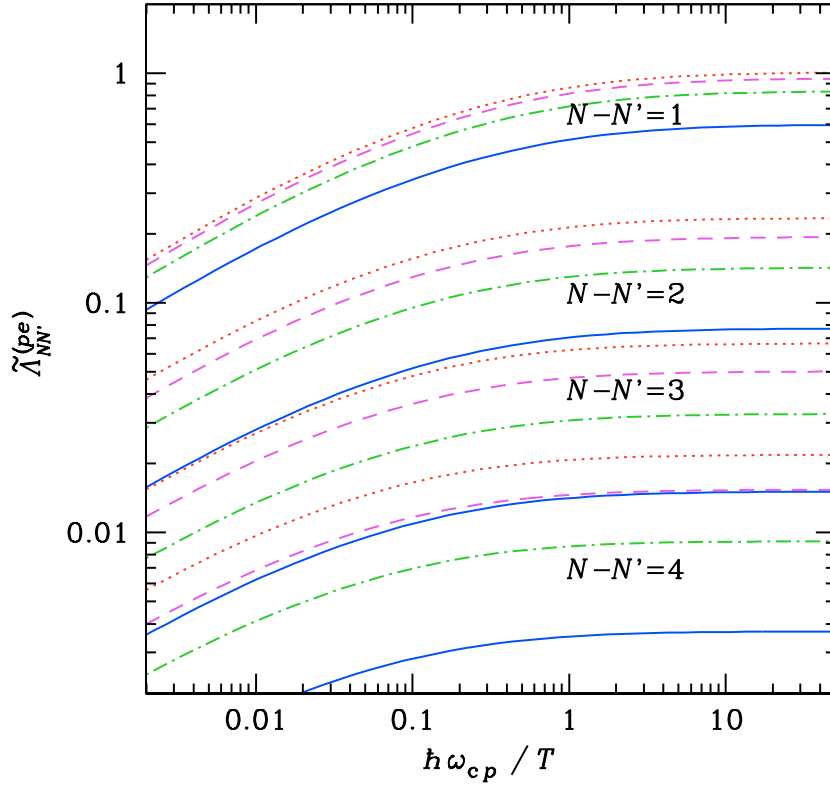


Рис. 4.5: То же, что на рис. 4.4, но с параметром экранирования  $u_s = 0.5$  [239].

проинтегрировать отдельно. Поэтому  $\tilde{\Lambda}_{NN'}^{(pe)}$  приближается к константе.

В противоположном предельном случае  $\zeta_i \ll 1$  может оказаться более удобным использовать представление (4.127а), потому что в этом случае  $\Lambda_{NN'}^{(pe)}$  является медленно меняющейся функцией  $\zeta_i$ .

На первый взгляд может показаться странным, что формула (4.127а) содержит множитель  $a_m^2$ , который обращается в бесконечность, когда  $B$  обращается в нуль. Однако этому есть простое объяснение. Раз номера уровней Ландау электрона (0) и протона ( $N, N'$ ) фиксированы, то формула (4.127а) описывает парциальные частоты тех столкновений, при которых переданная кинетическая энергия движения перпендикулярно магнитному полю,  $|N - N'| \hbar \omega_{ci}$ , линейно убывает с уменьшением  $B$ . В классической картине это соответствует столкновениям с прицельным параметром, увеличивающимся пропорционально  $a_m$ , сечение которых возрастает согласно формуле Резерфорда. Расходимость классического сечения при больших прицельных параметрах устраняется при учёте экранирования кулоновского потенциала. То же имеет место и в рассмотренном нами квантовом случае. Действительно,  $u_{\pm}^2$  в



знаменателе формулы (4.125) в общем случае включает член  $u_s^2 = k_s^2 a_m^2$ . Таким образом,  $w_{NN'}^{(pe)}(u_{\pm})$  (а значит, и  $\Lambda_{NN'}^{(pe)}$ ) становится пропорциональным  $(k_s a_m)^{-4}$ , когда магнитная длина  $a_m$  намного превосходит длину экранирования  $k_s^{-1}$ .

### 4.3.4 Протон-протонные столкновения

Рассмотрим теперь протон-протонные столкновения. Этот случай сложнее предыдущего в двух отношениях: во-первых, имеется обменное взаимодействие, результат которого описывается формулой (4.121), и во-вторых, каждая из сталкивающихся частиц может перескочить на другой уровень Ландау (ни одна из них не привязана, как электрон, к основному уровню).

Пусть  $n_N$  – концентрация протонов, находящихся на уровне  $N$ , и пусть  $f_N^{\uparrow}$  и  $f_N^{\downarrow}$  – доли таких протонов, спин которых направлен по полю и против поля, соответственно ( $f_N^{\uparrow} + f_N^{\downarrow} = 1$ ). Тогда средняя частота переходов протонов с уровня  $N$  на уровень  $N'$  вследствие кулоновских столкновений равна

$$\Gamma_{NN'}^{C(pp)} = \frac{1}{2} \sum_{N_2 N_2'} n_{N_2} \left[ (f_N^{\uparrow} f_{N_2}^{\downarrow} + f_N^{\downarrow} f_{N_2}^{\uparrow}) \langle v_z \sigma_{NN_2; N'N_2'}^{(pp)+} \rangle + (f_N^{\uparrow} f_{N_2}^{\uparrow} + f_N^{\downarrow} f_{N_2}^{\downarrow}) \langle v_z \sigma_{NN_2; N'N_2'}^{(pp)-} \rangle \right], \quad (4.130)$$

где  $\langle v_z \sigma_{NN_2; N'N_2'}^{(pp)\pm} \rangle$  – вероятность, в расчёте на единицу времени, события, при котором два протона, первоначально находящиеся на уровнях с номерами  $N$  и  $N_2$ , совершают переход в состояние, в котором они находятся на уровнях  $N'$  и  $N_2'$ , при условии, что проекции их спинов на  $\mathbf{B}$  одинаковы (символ  $-$ ) или противоположны (символ  $+$ ). Множитель  $\frac{1}{2}$  перед знаком суммы учитывает квантовую статистику тождественных частиц.

Для распределения Максвелла (4.110) с  $m_* = m_p/2$ , применяя результаты § 4.3.2, получим

$$\langle v_z \sigma_{NN_2; N'N_2'}^{(pp)\pm} \rangle = \frac{8 e^4}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\pi m_p}{T}} a_m^2 \int_0^{\infty} \frac{du}{u'} e^{-\zeta_i u^2} \left[ w_{NN_2; N'N_2'}(u_+) + w_{NN_2; N'N_2'}(u_-) \pm 2 w_{NN_2; N'N_2'}^x(u_-, u_+) \right], \quad (4.131)$$

где  $u_{\pm}^2 = (u \pm u')^2 + u_s^2$  и  $u' = [u^2 + N' - N + N_2' - N_2]^{1/2}$ . Функции  $w_{NN_2; N'N_2'}$  и  $w_{NN_2; N'N_2'}^x$  даны формулами (4.119) и (4.123), соответственно.

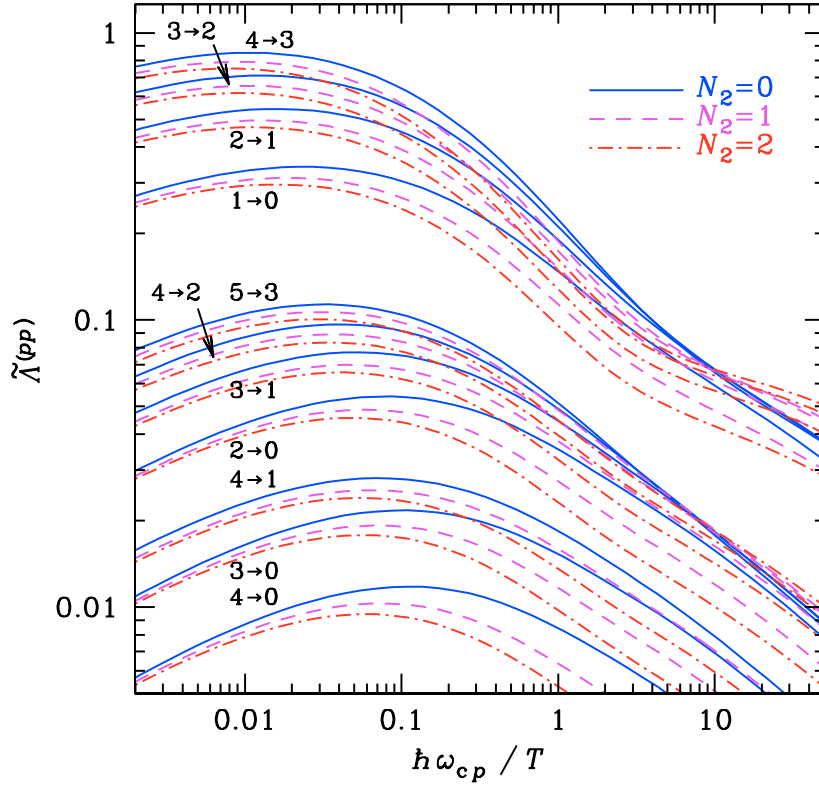


Рис. 4.6: Безразмерная функция  $\tilde{\Lambda}_{NN_2; N'}^{(pp)}$  (4.134а) без экранирования ( $u_s = 0$ ) для переходов между протонными уровнями Ландау, указанными у кривых [239]. Начальный номер уровня Ландау второго из сталкивающихся протонов равен  $N_2 = 0$  (сплошные кривые),  $N_2 = 1$  (пунктир), или  $N_2 = 2$  (штрихпунктир).

Уравнения (4.130) и (4.131) можно записать в форме, аналогичной (4.127b):

$$\Gamma_{NN'}^C = \sum_{N_2} n_{N_2} \langle v_z \sigma_{NN'}^{(N_2)} \rangle, \quad (4.132)$$

$$\langle v_z \sigma_{NN'}^{(N_2)} \rangle = 4\sqrt{\pi} \frac{a_m^3}{\tau_0} \frac{m_p}{m_e} \left[ \tilde{\Lambda}_{NN_2; N'}^{(pp)} - (f_N^\uparrow - f_N^\downarrow) (f_{N_2}^\uparrow - f_{N_2}^\downarrow) \tilde{\Lambda}_{NN_2; N'}^{(pp,x)} \right], \quad (4.133)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{NN_2; N'}^{(pp)} &= \sqrt{\zeta_i} \sum_{N_2'} \int_0^\infty \frac{du}{u'} e^{-\zeta_i u^2} \theta(u'^2) g(u) g(u') \\ &\quad \times [w_{NN_2; N'N_2'}(u_+) + w_{NN_2; N'N_2'}(u_-)], \end{aligned} \quad (4.134a)$$

$$\tilde{\Lambda}_{NN_2; N'}^{(pp,x)} = 2\sqrt{\zeta_i} \sum_{N_2'} \int_0^\infty \frac{du}{u'} e^{-\zeta_i u^2} \theta(u'^2) g(u) g(u') w_{NN_2; N'N_2'}^x(u_-, u_+). \quad (4.134b)$$

В этих формулах  $u'$  и  $u_\pm$  зависят от  $N_2'$ . Факторы  $g(u)g(u')$ , где  $g(u)$  определено в (4.113), учитывают поправку на нарушение борновского приближения, обсуждавшуюся выше. Однако, в отличие от § 4.3.3, здесь  $\gamma_B^{-1/2} = \alpha_f m_p / (2m_e \sqrt{b_e}) = 44,5 B_{12}^{-1/2}$

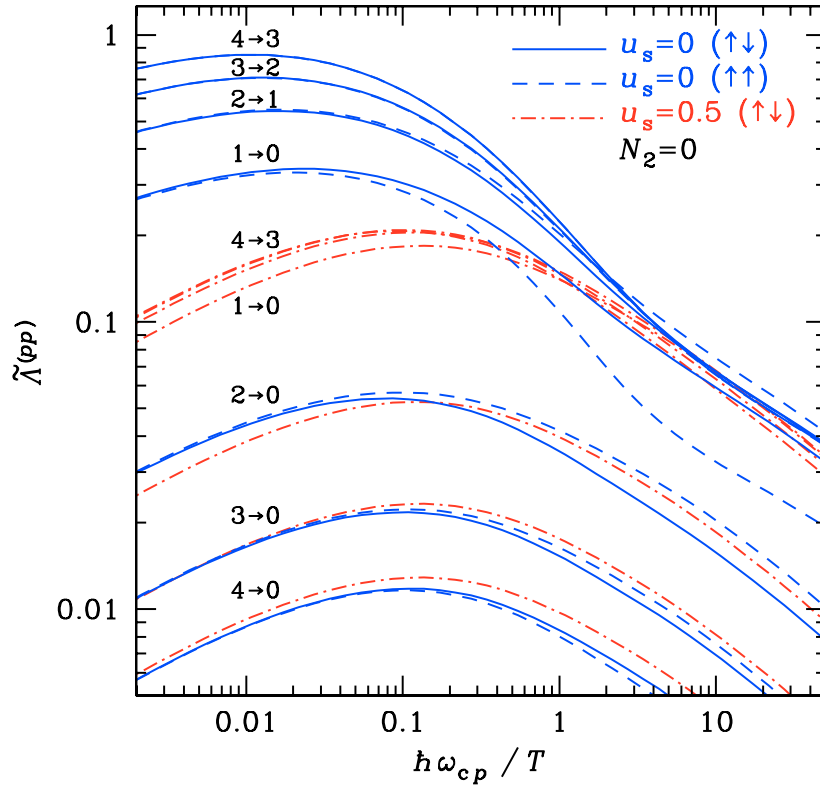


Рис. 4.7: Функции  $\tilde{\Lambda}_{NN_2; N'}^{(pp)}$  (сплошные кривые для случая без экранирования, штрихпунктир для параметра экранирования  $u_s = 0.5$ ) и  $\tilde{\Lambda}_{NN_2; N'}^{(pp)}$  (пунктир, без экранирования), представляющие выражение в квадратных скобках в (4.133) для хаотических ориентаций спина ( $f^\uparrow = f^\downarrow = 0.5$ ) и для спинов, выстроенных по полю ( $f^\uparrow = 1$ ), соответственно, для переходов  $N \rightarrow N - 1$  и  $N \rightarrow 0$ , с  $N = 1, 2, 3, 4$ ,  $N_2 = 0$ , как функции  $\zeta_i = \hbar\omega_{ci}/T_p$  [239].

больше единицы при  $B < 2 \times 10^{15}$  Гс, что является отражением того факта, что протоны двигаются намного медленнее электронов. Поэтому борновское и адиабатическое приближения при обычных для нейтронных звёзд значениях магнитной индукции, строго говоря, неприменимы. Тем не менее мы используем эти приближения, рассматривая их как оценки по порядку величины. Это оправдывается тем обстоятельством, что влияние протон-протонных столкновений на статистическое равновесие не очень существенно, как будет видно в § 5.2.

На рис. 4.6 показаны величины  $\tilde{\Lambda}_{NN_2; N'}^{(pp)}$  как функции  $\zeta_i$  для того случая, когда экранированием можно пренебречь ( $u_s = 0$ ), при  $\gamma_B = 1$ , для нескольких номеров начальных и конечных протонных уровней Ландау  $N, N'$ , для начальных уровней второго протона  $N_2 = 0, 1, 2$ . Уменьшение этих функций при  $\zeta_i \gg 1$  происходит из-за неборновской поправки. Это показывает, что аккуратная оценка частот переходов при протон-протонных столкновениях требует квантовых расчётов вне борновского

приближения, которые пока отсутствуют.

Рисунок 4.7 демонстрирует сравнение нескольких кривых, уже изображённых на рис. 4.6 (сплошные кривые), с зависимостями, отвечающими тому случаю, когда экранирование существенно,  $k_s a_m = u_s = 0,5$  (штрихпунктир), что может иметь место при достаточно высокой плотности. На этом же рисунке показано сравнение  $\tilde{\Lambda}_{NN_2; N'}^{(pp)}$  (сплошные кривые) с разностью  $\tilde{\Lambda}_{NN_2; N'}^{(pp)} - \tilde{\Lambda}_{NN_2; N'}^{(pp,x)}$  (пунктир), которая входит в формулу (4.133), когда спины протонов выстроены в одном направлении.

Необходимо отметить, что в том случае, когда  $T_e \neq T_p$ , в этом разделе следует заменить  $T$  на  $T_p$ . В частности,  $\zeta_i = \hbar\omega_{ci}/T_p$  формулах (4.131) и (4.134).

### 4.3.5 Обобщение для других ионов

Формулы, полученные в §§ 4.3.3 и 4.3.4 для протонов, можно обобщить на другие ядра с произвольными значениями чисел  $A$  и  $Z$ . Если они имеют спин  $\frac{1}{2}$ , то в формулах для вероятностей переходов при кулоновских столкновениях достаточно заменить массу  $m_p$  на  $m_{\text{ion}} = 0,9928 A m_p$  и использовать для обратного дебаевского радиуса формулу  $k_s^2 = 4\pi(1 + Z)n_e e^2/T$ . Кроме того, в формуле (4.125) следует вместо  $I_{NN'}(t/2)$  подставить  $I_{NN'}(t/2Z)$  и использовать выражение (4.120),  $u'^2 = u^2 + 2Z(N - N')m_*/m_{\text{ion}}$ . Также в (4.131) следует подставить  $w(u_{\pm})$  и  $w^x(u_+, u_-)$  из (4.119) (с  $Z_1 = Z_2 = Z$ ) и (4.123), и использовать определение  $u'^2 = u^2 + Z(N - N' + N_2 - N'_2)$  из (4.120).

Обобщение для ионов с другими значениями спинов также очевидно, но более трудоёмко, поскольку для него требуется переписать формулу (4.133) так, чтобы учесть различные значения проекций спинов на направление магнитного поля.

## 4.4 Взаимодействие с излучением

### 4.4.1 Взаимодействие атома водорода, движущегося в магнитном поле, с электромагнитным излучением

Общую формулу для дифференциального сечения поглощения плоской электромагнитной волны квантовомеханической системой можно записать в виде (напр., [299])

$$d\sigma = \frac{4\pi^2}{\omega c} |\mathbf{e} \cdot \langle f | \mathbf{j}_{\text{эф}} | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) d\nu_f, \quad (4.135)$$

где  $|i\rangle$  и  $|f\rangle$  – соответственно, начальное и конечное состояния системы,  $d\nu_f$  – число конечных состояний в рассматриваемом интервале энергий  $dE_f$ ,  $\mathbf{e}$  – вектор поляри-

зации электромагнитной волны,  $\hbar\omega$  – энергия поглощаемого фотона,  $\mathbf{j}_{\text{eff}} = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{j}$  – оператор электрического тока, и  $\mathbf{q}$  – волновое число фотона. Для двух заряженных частиц в магнитном поле

$$\mathbf{j}_{\text{eff}} = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_1} \frac{q_1 \boldsymbol{\pi}_1}{m_1} + e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_2} \frac{q_2 \boldsymbol{\pi}_2}{m_2}, \quad (4.136)$$

где  $q_i$  и  $m_i$  – массы и заряды этих частиц ( $i = 1, 2$ ), а оператор  $\boldsymbol{\pi}_i$  определяется формулой (4.24).

Выражение (4.136) является нерелятивистским. Учёт взаимодействия излучения со спинами частиц можно произвести в приближении Паули (напр., [164]). Тогда в рассматриваемом нами случае взаимодействия плоской волны ( $\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}) \propto e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}$ ,  $\mathbf{B}_{\text{rad}} = \nabla \times \mathbf{E}_{\text{rad}} \propto \mathbf{q} \times \mathbf{E}$ ) с системой из двух частиц к выражению (4.136) добавится оператор

$$-i(\mathbf{q} \times \mathbf{e}) \cdot (\hat{\boldsymbol{\mu}}_1 + \hat{\boldsymbol{\mu}}_2), \quad (4.137)$$

где  $\hat{\boldsymbol{\mu}}_i$  – оператор магнитного момента  $i$ -й частицы.

Рассмотрим атом водорода в магнитном поле, взаимодействующий с электромагнитным излучением. Используя результаты § 4.2.1, из формулы (4.135) получим [273]

$$d\sigma_{\kappa';\kappa}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{4\pi^2 e^2}{c\omega} |\mathbf{e} \cdot \mathcal{M}_{\kappa';\kappa}(\mathbf{q})|^2 \delta(E' - E - \hbar\omega) \frac{d\mathbf{K}'}{(2\pi\hbar)^3} d\nu', \quad (4.138)$$

где  $\kappa$  и  $\kappa'$  – полные наборы квантовых чисел (§ 4.2), описывающих начальное и конечное состояния атома, включая его начальный ( $\mathbf{K}$ ) и конечный ( $\mathbf{K}'$ ) обобщённые импульсы,  $\nu'$  – плотность конечных состояний при заданном  $\mathbf{K}'$ , описываемая дополнительными к  $\mathbf{K}'$  квантовыми числами<sup>8</sup>, так что  $d\nu_f = (2\pi\hbar)^{-3} d\mathbf{K}' d\nu'$ , а

$$\mathcal{M}_{\kappa';\kappa}(\mathbf{q}) = \langle \kappa' | \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{q}) | \kappa \rangle \quad (4.139)$$

– матричный элемент оператора

$$\hat{\mathcal{M}}(\mathbf{q}) = \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_e}}{m_e} \left( \mathbf{p}_e + \frac{e}{2c} \mathbf{B} \times \mathbf{r}_e + \frac{\hbar\mathbf{q}}{2} \right) - \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_p}}{m_p} \left( \mathbf{p}_p + \frac{e}{2c} \mathbf{B} \times \mathbf{r}_p + \frac{\hbar\mathbf{q}}{2} \right) \quad (4.140)$$

( $\mathbf{p}_{e,p} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_p}$ ). Введя координаты центра масс  $\mathbf{R}$ , используя формулу (4.28) для собственных функций и произведя интегрирование по  $\mathbf{R}$ , получим закон сохранения обобщённого импульса

$$|\mathbf{e} \cdot \mathcal{M}_{\kappa';\kappa}(\mathbf{q})|^2 = 2\pi^3 \hbar e^4 |\langle f | \mathbf{e} \cdot \hat{\mathcal{M}} | i \rangle|^2 \delta(\mathbf{K}' - \mathbf{K} - \mathbf{q}), \quad (4.141)$$

<sup>8</sup>Здесь мы пока проводим рассмотрение в общем виде для дискретного и непрерывного спектра.

позволяющий переписать формулу (4.138) в виде [273, 278]

$$d\sigma_{\kappa';\kappa}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{\pi^2 e^6}{\omega c \hbar^2} |\langle f | \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{M}} | i \rangle|^2 \delta(E' - E - \hbar\omega) d\nu', \quad (4.142)$$

где  $\hat{\mathbf{M}}$  – безразмерный оператор взаимодействия, который для волновых функций в обычном представлении ( $\eta = 0$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{ep}$ ) записывается в виде

$$\hat{\mathbf{M}} = 2a_B \left\{ \exp \left( i \frac{m_p}{m_H} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \right) \left( \frac{\boldsymbol{\pi}}{\hbar} + \frac{m_e}{m_H} \frac{\mathbf{K}}{\hbar} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \left( \frac{m_e}{m_p} \frac{\boldsymbol{\Pi}}{\hbar} - \frac{m_e}{m_H} \frac{\mathbf{K}}{\hbar} \right) \right\} \quad (4.143)$$

(здесь и далее мы опускаем пренебрежимо малые члены  $\sim qm_e/m_p$ ). В (4.143)  $\boldsymbol{\pi}$  и  $\boldsymbol{\Pi}$  – операторы, определённые формулами (4.33) и (4.38).

Согласно (4.137), для учёта спиновой части взаимодействия к оператору  $\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{M}}$  в (4.142) следует добавить оператор взаимодействия с магнитными моментами электрона и протона. В рассматриваемом нами нерелятивистском пределе при наличии магнитного поля предпочтительным является представление, в котором спины частиц имеют определённые проекции  $\pm \hbar/2$  на ось  $z$ , которые мы будем обозначать индексами  $\sigma = \pm 1$  для электрона и  $\sigma_p = \pm 1$  для протона, соответственно. Тогда

$$\hat{M}_{\text{spin}} = -(ia_B/2) [g_{\text{mag}}^{(e)} \sigma + g_{\text{mag}}^{(p)} (m_e/m_p) \sigma_p] (\mathbf{q} \times \mathbf{e})_z \approx ia_B \sigma (\mathbf{q} \times \mathbf{e})_z, \quad (4.144)$$

где  $g_{\text{mag}}^{(e)} = -2,0023 \approx -2$  и  $g_{\text{mag}}^{(p)} = 5,5857$  – магнитные  $g$ -факторы электрона и протона. Мы будем использовать вторую (приближённую) часть равенства (4.144).

Преобразование (4.44) волновых функций начального и конечного состояний индуцирует соответствующее преобразование оператора  $\hat{\mathbf{M}}$ . В частности, если для конечного состояния используется представление с полным сдвигом ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{ep} - \mathbf{r}_c$ ), а для начального – с произвольным сдвигом ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{ep} - \eta \mathbf{r}_c$ ), то

$$\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{M}} + \hat{M}_{\text{spin}} = \frac{2\hbar}{e^2} \exp \left[ -\frac{i}{2} \frac{m_p - m_e}{m_H} (1 - \eta) \mathbf{K} \mathbf{r}_\perp \right] \left( e^{i(\mathbf{q} \mathbf{r}_\perp / 2 + q_z z)} \hat{\mathbf{V}}_e + e^{-i\eta \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{q} - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_\perp / 2} \hat{\mathbf{V}}_p \right), \quad (4.145)$$

где векторные операторы  $\hat{\mathbf{V}}_e$  и  $\hat{\mathbf{V}}_p$  в циклических координатах (4.39) выражаются как

$$\hat{V}_{e,+1} = \frac{\pi_{+1}}{m_e} + (1 - \eta) \frac{K_{+1}}{m_H} + \frac{\hbar q_{+1}}{m_e}, \quad \hat{V}_{e,-1} = \frac{\pi_{-1}}{m_e} + (1 - \eta) \frac{K_{-1}}{m_H}, \quad (4.146a)$$

$$\hat{V}_{p,\pm 1} = \frac{\Pi_{\pm 1}}{m_p} - (1 - \eta) \frac{K_{\pm 1}}{m_H}, \quad \hat{V}_{e,z} = \frac{1}{m_e} (p_z + \hbar q_z / 2), \quad \hat{V}_{p,z} = \frac{p_z}{m_p}. \quad (4.146b)$$

Эти операторы имеют размерность скорости и в дипольном приближении ( $q \rightarrow 0$ ) при  $B \rightarrow 0$  переходят в операторы скоростей электрона и протона в сопутствующей инерциальной системе отсчёта.

#### 4.4.1a Матричные элементы оператора взаимодействия

Обратимся к вычислению матричных элементов оператора  $\hat{M}$ . Используя технику, развитую в [273], получаем соотношение [278]

$$\begin{aligned} & \left\langle n's'\eta', \mathbf{K}_\perp + \mathbf{q}_\perp \left| \exp \left[ -\frac{i}{2} \frac{m_p - m_e}{m_H} (\eta' - \eta) \mathbf{K} \mathbf{r}_\perp + i\tilde{\mathbf{q}} \mathbf{r}_\perp / 2 \right] \right| ns\eta, \mathbf{K}_\perp \right\rangle_\perp = \\ & = J_{nn'}(\xi_e) J_{n+s, n'+s'}(\xi_p), \end{aligned} \quad (4.147)$$

где  $\tilde{\mathbf{q}}$  – произвольный вектор,

$$\xi_e = -ia_m \left( \frac{m_e}{m_H} (\eta' - \eta) K_{+1} / \hbar + (\tilde{q}_{+1} + \eta' q_{+1}) / 2 \right), \quad (4.148a)$$

$$\xi_p = -ia_m \left( \frac{m_p}{m_H} (\eta' - \eta) K_{-1} / \hbar - (\tilde{q}_{-1} - \eta' q_{-1}) / 2 \right), \quad (4.148b)$$

$$J_{nn'}(|\xi| e^{i\varphi}) = e^{i(n-n')\varphi} I_{nn'}(|\xi|^2), \quad (4.149)$$

а  $I_{nn'}$  – функции Лагерра (4.17). Применяя (4.147) к (4.145), находим [278]

$$\langle f | \mathbf{e} \cdot \hat{M} | i \rangle = 2\sqrt{\gamma} \sum_{n's'ns} \left[ e_{+1} M_{n's'ns}^{(-)} + e_{-1} M_{n's'ns}^{(+)} + e_z M_{n's'ns}^{(0)} \right], \quad (4.150)$$

где  $e_{\pm 1}$  – циклические координаты вектора поляризации  $\mathbf{e}$ ,

$$\begin{aligned} M_{n's'ns}^{(-1)} & = - \left[ \sqrt{n} J_{n-1, n'}(\xi_{e,+}) + \tilde{\xi}_{e,-} J_{nn'}(\xi_{e,+}) \right] J_{n+s, n'+s'}(\xi_{p,+}) \mathcal{Z}_{n's'ns}^{(e)} - \\ & - \frac{m_e}{m_p} \exp(-i\eta \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{q}) \left[ \sqrt{n+s+1} J_{n+s+1, n'+s'}(\xi_{p,-}) - \tilde{\xi}_{p,-} J_{n+s, n'+s'}(\xi_{p,-}) \right] \times \\ & \times J_{nn'}(\xi_{e,-}) \mathcal{Z}_{n's'ns}^{(p)}, \end{aligned} \quad (4.151a)$$

$$\begin{aligned} M_{n's'ns}^{(+1)} & = \left[ \sqrt{n+1} J_{n+1, n'}(\xi_{e,+}) - \tilde{\xi}_{e,+} J_{nn'}(\xi_{e,+}) \right] J_{n+s, n'+s'}(\xi_{p,+}) \mathcal{Z}_{n's'ns}^{(e)} + \\ & + \frac{m_e}{m_p} \exp(-i\eta \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{q}) \left[ \sqrt{n+s} J_{n+s+1, n'+s'}(\xi_{p,-}) + \tilde{\xi}_{p,+} J_{n+s, n'+s'}(\xi_{p,-}) \right] \times \\ & \times J_{nn'}(\xi_{e,-}) \mathcal{Z}_{n's'ns}^{(p)}, \end{aligned} \quad (4.151b)$$

$$\begin{aligned} M_{n's'ns}^{(0)} & = \left[ \tilde{\mathcal{Z}}_{n's'ns}^{(e)} + \frac{i}{2} a_m q_z \mathcal{Z}_{n's'ns}^{(e)} \right] J_{nn'}(\xi_{e,+}) J_{n+s, n'+s'}(\xi_{p,+}) + \\ & + \frac{m_e}{m_p} \exp(-i\eta \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{q}) \left[ \tilde{\mathcal{Z}}_{n's'ns}^{(p)} - \frac{i}{2} a_m q_z \mathcal{Z}_{n's'ns}^{(p)} \right] \times \\ & \times J_{nn'}(\xi_{e,-}) J_{n+s, n'+s'}(\xi_{p,-}), \end{aligned} \quad (4.151c)$$

и введены обозначения

$$\tilde{\xi}_{e,+} = -\frac{ia_m}{\hbar} \left( \frac{m_e}{m_H} (1 - \eta) K_{+1} + \hbar q_{+1} \right), \quad \tilde{\xi}_{e,-} = -\frac{ia_m}{\hbar} \frac{m_e}{m_H} (1 - \eta) K_{-1}, \quad (4.152a)$$

$$\tilde{\xi}_{p,\pm} = -\frac{ia_m}{\hbar} \frac{m_p}{m_H} (1 - \eta) K_{\pm}, \quad (4.152b)$$

а  $\xi_{e,\pm}$  и  $\xi_{p,\pm}$  определяются из (4.148) при  $\eta' = 1$  и  $\tilde{\mathbf{q}} = \pm \mathbf{q}$ . Факторы

$$\mathcal{Z}_{n's'ns}^{(e)} = \langle n's', f | e^{iqz} | ns\eta, i \rangle_{\parallel}, \quad \mathcal{Z}_{n's'ns}^{(p)} = \langle n's', f | ns\eta, i \rangle_{\parallel}, \quad (4.153a)$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}_{n's'ns}^{(e)} = \langle n's', f | e^{iqz} a_m \partial / \partial z | ns\eta, i \rangle_{\parallel}, \quad \tilde{\mathcal{Z}}_{n's'ns}^{(p)} = \langle n's', f | a_m \partial / \partial z | ns\eta, i \rangle_{\parallel} \quad (4.153b)$$

– это продольные матричные элементы, подлежащие численному определению.

Выражения (4.151) для матричных элементов, явно выписанные здесь для частного случая  $\eta' = 1$ , легко обобщаются на случай произвольного  $\eta'$  путём использования уравнения (A15) из статьи [273], а также соотношений (4.147) и (4.148) с последовательной подстановкой в них  $\tilde{\mathbf{q}} = [2m_e + \eta'(m_p - m_e)]\mathbf{q}/m_H$  и  $\tilde{\mathbf{q}} = -[2m_p + \eta'(m_e - m_p)]\mathbf{q}/m_H$ .

#### 4.4.1b Альтернативные формы матричных элементов

Как известно, используя уравнение Шрёдингера и коммутационные соотношения гамильтониана с оператором взаимодействия с излучением, матричные элементы оператора взаимодействия можно преобразовать от «представления со скоростью», соответствующего исходной форме (4.143) или (4.145), к другим представлениям, в которых вводятся другие эффективные операторы взаимодействия, матричные элементы которых для решений уравнения Шрёдингера идентичны исходным матричным элементам. Конкретно нас будет интересовать «представление с координатой», которое часто является наиболее удобным для численных оценок. Для краткости изложения опишем его, следуя нашей статье [272], используя обычное представление для волновых функций без сдвига ( $\eta = \eta' = 0$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{ep}$ ). В этом случае искомым матричный элемент оператора (4.143) можно записать в виде

$$\langle f | \hat{M} | i \rangle = \frac{2\hbar}{e^2} \left\langle f \left| A_0^- \frac{1}{m_H} \left[ \mathbf{K} + \frac{e}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \right] + A_1^+ \left( \frac{\boldsymbol{\pi}}{m_e} + \frac{\boldsymbol{\Pi}}{m_p} \right) \right| i \right\rangle, \quad (4.154)$$

где для сокращения записи мы ввели обозначение

$$A_n^{\pm} = \left( \frac{m_p}{m_H} \right)^n \exp \left( i \frac{m_p}{m_H} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \right) \pm \left( \frac{m_e}{m_H} \right)^n \exp \left( -i \frac{m_e}{m_H} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \right). \quad (4.155)$$

Примем во внимание, что волновые функции  $\psi_{\mathbf{K}}$ , введённые в (4.28), для начального  $|i\rangle$  и конечного  $|f\rangle$  состояний удовлетворяют уравнениям (4.29)  $H_{\text{rel}}|i\rangle = E_i|i\rangle$  и  $H_{\text{rel}}|f\rangle = E_f|f\rangle$  с гамильтонианом (4.31), причём, согласно закону сохранения энергии,  $E_f = E_i + \hbar\omega$ . Тогда, используя коммутационные соотношения

$$[H_{\text{rel}}, \mathbf{r}] = -i\hbar \left( \frac{\boldsymbol{\pi}}{m_e} + \frac{\boldsymbol{\Pi}}{m_p} \right), \quad [H_{\text{rel}}, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}] = e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \left( \frac{\hbar^2 q^2}{2m_*} + \frac{\hbar\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\pi}}{m_e} + \frac{\hbar\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\Pi}}{m_p} \right), \quad (4.156)$$



где  $m_* = m_e m_p / m_H$  – приведённая масса, можно преобразовать (4.154) к выражению

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{\mathbf{M}}^{(r)} | i \rangle &= \frac{2i\hbar\omega}{e^2} \left\langle f \left| \mathbf{r} \left\{ A_1^+ \left[ 1 - \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{K} + e\mathbf{B} \times \mathbf{r}/c)}{m_H \omega} \right] - A_2^+ \frac{\hbar q^2}{2m_* \omega} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - A_2^- \frac{\mathbf{q}}{\omega} \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\pi}}{m_e} + \frac{\boldsymbol{\Pi}}{m_p} \right) \right\} - iA_1^- \frac{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{K} + e\mathbf{B} \times \mathbf{r}/c)}{m_H \omega} \right| i \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.157)$$

В дипольном приближении ( $q \rightarrow 0$ ) выражения (4.154) и (4.157) переходят в

$$\langle f | \hat{\mathbf{M}} | i \rangle = \frac{2\hbar}{e^2} \left\langle f \left| \frac{\boldsymbol{\pi}}{m_e} + \frac{\boldsymbol{\Pi}}{m_p} \right| i \right\rangle, \quad (4.158)$$

и

$$\langle f | \hat{\mathbf{M}}^{(r)} | i \rangle = \frac{2i\hbar\omega}{e^2} \langle f | \mathbf{r} | i \rangle. \quad (4.159)$$

Отметим, что в дипольном приближении

$$|\mathbf{e} \cdot \langle f | \hat{\mathbf{M}} | i \rangle|^2 = \sum_{\alpha=-1}^1 |e_\alpha|^2 |\langle f | \hat{\mathbf{M}} | i \rangle_{-\alpha}|^2. \quad (4.160)$$

Если не ограничиваться обычным представлением, а использовать произвольные параметры сдвига  $\eta$  и  $\eta'$  для волновых функций начального и конечного состояний, то вместо формул (4.158) и (4.159) получаются выражения, отличающиеся от них соответствующим фазовым множителем [273]:

$$\langle f, \eta' | \hat{\mathbf{M}} | i, \eta \rangle = \frac{2\hbar}{e^2} \left\langle f, \eta' \left| \exp \left[ i \frac{m_p - m_e}{2m_H} (\eta - \eta') \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_\perp \right] \left( \frac{\boldsymbol{\pi}}{m_e} + \frac{\boldsymbol{\Pi}}{m_p} \right) \right| i, \eta \right\rangle, \quad (4.161)$$

и

$$\langle f, \eta' | \hat{\mathbf{M}}^{(r)} | i, \eta \rangle = \frac{2i\hbar\omega}{e^2} \left\langle f, \eta' \left| \exp \left[ i \frac{m_p - m_e}{2m_H} (\eta - \eta') \mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_\perp \right] \mathbf{r} \right| i, \eta \right\rangle. \quad (4.162)$$

Равенство  $\langle f | \hat{\mathbf{M}} | i \rangle = \langle f | \hat{\mathbf{M}}^{(r)} | i \rangle$  является точным, если при вычислении матричных элементов для начальных и конечных состояний используются точные решения уравнения Шрёдингера. Однако это равенство может нарушаться, если точные решения заменяются на приближённые. В прошлом это не раз приводило к недоразумениям при рассмотрении фотоионизации водорода в сильном магнитном поле. Как отмечено выше, в ранних работах использовалось адиабатическое приближение (4.20), а масса ядра полагалась бесконечной. Соотношения (4.37а), однако, показывают, что операторы  $\pi_{\pm 1}$  переводят функции Ландау, соответствующие основному уровню Ландау, в функции, описывающие выше- или нижележащий уровень. Отсюда сразу же видно, что при использовании адиабатического приближения и пренебрежении конечной массой ядра матричный элемент оператора «со скоростью» в дипольном приближении (4.158) оказывается тождественно равным нулю для поперечной (правой

и левой круговой) поляризации излучения по отношению к магнитному полю, если электрон не переходит на другой уровень Ландау:  $M_{n's'ns}^{(\pm)} = 0$  при  $n' = n$ . В статье [300] было доказано, что ответ остаётся строго нулевым для покоящегося атома ( $\mathbf{K} = 0$ ) и вне рамок дипольного приближения, если одновременно учесть поправку на взаимодействие фотона с магнитным моментом электрона. Отсюда в работах [300–302] делался вывод, что сечение фотоионизации покоящегося атома водорода под действием излучения, поляризованного перпендикулярно магнитному полю, равно нулю в области частот  $\omega < \omega_c$ , важнейшей для моделирования атмосфер нейтронных звёзд. Однако в других работах [250, 275, 284], в которых использовалась форма «с координатой» (4.159), для этой области частот были представлены ненулевые коэффициенты поглощения. Противоречие было разрешено нашими работами [272, 285, 291], в которых было показано, что малые поправки к адиабатическому приближению для волновых функций приводят к появлению такой неадиабатической поправки к матричному элементу в представлении «со скоростью»  $\langle f | \hat{M}_{\pm 1} | i \rangle$ , которая в первом приближении как раз и равна величине  $\langle f | \hat{M}_{\pm 1}^{(r)} | i \rangle$ , рассчитанной в адиабатическом приближении. По сравнению с этой поправкой, рассмотренные в [300] поправки на спин и недипольность оказываются пренебрежимо малыми при нерелятивистских энергиях фотоионизации. Таким образом, при использовании адиабатического приближения форма «с координатой» является предпочтительной.

#### 4.4.2 Связанно-связанные переходы в атомах водорода

Излучательные переходы между дискретными уровнями атома водорода (связанно-связанные переходы) можно рассматривать в дипольном приближении, так как энергии связи сугубо нерелятивистские, а атомные размеры намного меньше длин волн, соответствующих рассматриваемым переходам. При наличии сильного магнитного поля удобно раскладывать вектор поляризации по циклическому базису (4.39) и рассматривать переходы под действием электромагнитных волн, имеющих правую либо левую круговую, либо продольную поляризацию по отношению к  $\mathbf{B}$  (как мы уже делали в § 4.4.1).

Согласно (4.142) и (4.150), парциальное сечение поглощения излучения атомом для определённого перехода  $|\kappa\rangle \rightarrow |\kappa'\rangle$  и для поляризации с индексом  $\alpha$  ( $\alpha = 0, \pm 1$ ), соответствующего циклической координате  $e_\alpha$  вектора  $\mathbf{e}$ , можно записать в виде

$$\sigma_{\kappa';\kappa}^\alpha = \frac{\pi^2 e^6}{\omega c \hbar^3} |M_{\kappa;\kappa}^{(-\alpha)}|^2 \phi_{\kappa\kappa'}(\omega - \omega_{\kappa'\kappa}), \quad (4.163)$$

где  $\phi_{\kappa\kappa'}(\Delta\omega)$  описывает профиль спектральной линии, нормированный условием

$$\int \phi_{\kappa\kappa'}(\Delta\omega)d\Delta\omega = 1, \quad (4.164)$$

а  $\omega_{\kappa'\kappa} = (E_{\kappa'} - E_{\kappa})/\hbar$  – резонансная частота. В дипольном приближении из (4.159) получаем

$$\sigma_{\kappa';\kappa}^{\alpha} = \frac{2\pi^2 e^2}{m_e c} f_{\kappa';\kappa}^{\alpha} \phi_{\kappa\kappa'}(\omega - \omega_{\kappa'\kappa}), \quad (4.165)$$

где использовано определение силы осциллятора

$$f_{\kappa';\kappa}^{\alpha} = \frac{2m_e \omega}{\hbar} |\langle \kappa' | r_{-\alpha} | \kappa \rangle|^2. \quad (4.166)$$

Альтернативная «форма со скоростью» для силы осциллятора очевидным образом получается при замене (4.159) на (4.158), а более общие выражения для представлений со сдвигами – при использовании (4.162) или (4.161), соответственно.

После того как произведено вычисление волновых функций начального и конечного состояний, рассмотренное в § 4.2.2, не представляет большого труда путём простого численного интегрирования рассчитать силы осцилляторов, что и было выполнено в [271, 303]. При этом принималось во внимание, что как энергии связи и, соответственно, резонансные частоты  $\omega$ , так и матричные элементы координаты и скорости зависят от величины поперечного обобщённого импульса  $K_{\perp}$ .

Рисунки 4.8 и 4.9 показывают примеры зависимостей сил осцилляторов  $f_{\kappa';\kappa}^{\alpha}$  от  $K_{\perp}$  для поглощательных переходов с основного уровня. На этих рисунках представлены те переходы, в которых меняется только одно из квантовых чисел  $s$  или  $\nu$ .

На верхнем рис. 4.8 представлены силы осцилляторов атома водорода в магнитном поле  $B = 7,05 \times 10^{11}$  Гс ( $\gamma = 300$ ) для трёх первых переходов с основного уровня под действием продольно поляризованного излучения, разрешённых отбором по чётности: это переходы в водородоподобные состояния  $|n's'\nu'\rangle = |00\nu'\rangle$  с  $\nu' = 1, 3$  и 5. Область  $K_{\perp} \sim 10^2$  а.е.и., в которой наблюдается глубокая депрессия показанных функций, соответствует положению критического импульса  $K_{\text{кр}}$  для основного уровня. Искажение волновой функции вблизи  $K_{\text{кр}}$ , обсуждавшееся в § 4.2.2, и служит объяснением этой депрессии. Резонанс при  $K_{\perp} = 40$  а.е.и. для перехода на уровень с  $\nu' = 3$  связан с антипересечением этого уровня с уровнем  $|0, 2, 1\rangle$  (см. подробности в [303]). Аналогичный резонанс имеется для перехода на уровень с  $\nu' = 5$  при  $K_{\perp} = 120$  а.е.и., но на рисунке он практически сливается с общим резким ростом функций  $f_{\kappa';\kappa}^{\alpha}$  при переходе от области максимального смешивания орбиталей к области децентрированных состояний при  $K_{\perp} > K_{\text{кр}}$ .

На нижнем рис. 4.8 представлены силы осцилляторов для шести первых переходов с основного уровня в состояния  $|0s'0\rangle$  под действием правополяризованного излучения  $\alpha = +1$  (сплошные кривые) и трёх переходов для случая левой поляризации  $\alpha = -1$  (штрихпунктир). Для атома, обладающего нулевой скоростью – то есть в пределе  $K_{\perp} \rightarrow 0$  или  $K_{\perp} \rightarrow \infty$ , – все такие переходы, кроме одного, запрещены в силу закона сохранения проекции полного углового момента системы атома и фотона на направление  $\mathbf{B}$ , поэтому все силы осцилляторов, кроме одной (для  $s' = 1$  и  $\alpha = +1$ ), в этих пределах обращаются в нуль. С ростом  $K_{\perp}$  от нуля они сначала растут по закону  $f_{\kappa';\kappa}^{\alpha} \propto K_{\perp}^{2s'+1-\alpha}$ , достигают максимума при  $K_{\perp} \approx K_{\text{cr}}$ , а затем быстро убывают при дальнейшем увеличении  $K_{\perp}$ . Резонансы и особенности на кривых, как и на верхнем рисунке, вызваны антипересечениями уровней при увеличении  $K_{\perp}$ .

На рис. 4.9 представлены аналогичные силы осцилляторов для двух других значений магнитного поля –  $B = 2,35 \times 10^{12}$  Гс ( $\gamma = 10^3$ ) и  $B = 7,05 \times 10^{12}$  Гс ( $\gamma = 3 \times 10^3$ ). Здесь кривые для продольной поляризации (штрихпунктир) нанесены на те же графики, что и кривые для правой (сплошные) и левой (пунктир) поляризаций. Все кривые помечены двумя квантовыми числами верхнего уровня как  $|s', \nu'\rangle$  (подразумевается  $n' = 0$ ). С увеличением поля, как обсуждалось в § 4.2.3, расстояние между тесно связанными уровнями растёт, число этих уровней под уровнем континуума уменьшается, антипересечения становятся более широкими, и в целом спектр упрощается. Соответственно, резонансы становятся менее сильно выраженными, а их число уменьшается. В качестве наглядной демонстрации образования резонансов при антипересечениях на рис. 4.9 дополнительно показана функция  $f_{0,0,2;0,0,0}^{+1}(K_{\perp})$ . Верхний уровень этого перехода  $|0, 0, 2\rangle$  испытывает антипересечение с уровнем  $|0, 1, 0\rangle$  при  $K_{\perp} = 953$  и  $840$  а.е.и. (при указанных значениях  $B$ ). В точке этого антипересечения  $f_{0,0,2;0,0,0}$  имеет узкий неглубокий провал, а  $f_{0,0,2;0,0,0}^{+1}$  – высокий острый пик, так что их значения примерно сравниваются между собой. Узкий провал на кривой  $f_{0,0,2;0,0,0}^{+1}(K_{\perp})$  слева от этого пика на верхнем рисунке связан с антипересечением уровней  $|0, 0, 2\rangle$  и  $|0, 2, 0\rangle$  при  $K_{\perp} = 453$  а.е.и. (на нижнем рисунке он не разрешён сеткой по  $K_{\perp}$ ).

В статье [280] построены аналитические аппроксимации для основных сил осцилляторов, требующихся для моделирования атмосфер нейтронных звёзд с обычным магнитным полем. Обе ненулевые силы осцилляторов для поглощения излучения покоящимся атомом в основном состоянии в интервале  $\gamma$  от 0 до  $10^4$  описываются с

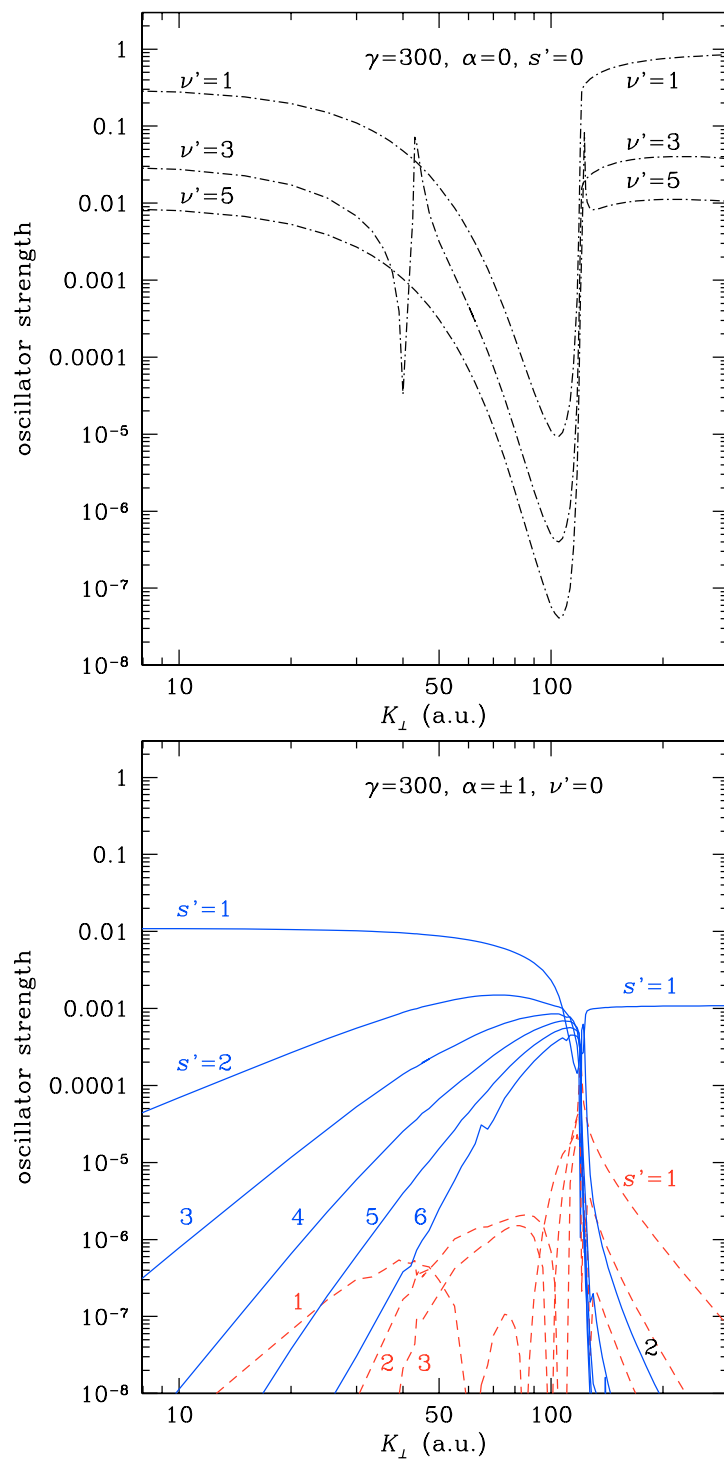


Рис. 4.8: Силы осцилляторов как функции поперечного обобщённого импульса при  $B = 7,05 \times 10^{11}$  Гс для дипольных переходов с основного уровня под действием излучения, поляризованного вдоль поля (*верхний рисунок*) и для круговой поляризации (*нижний рисунок*; сплошные линии соответствуют  $\alpha = +1$ , пунктирные –  $\alpha = -1$ ).

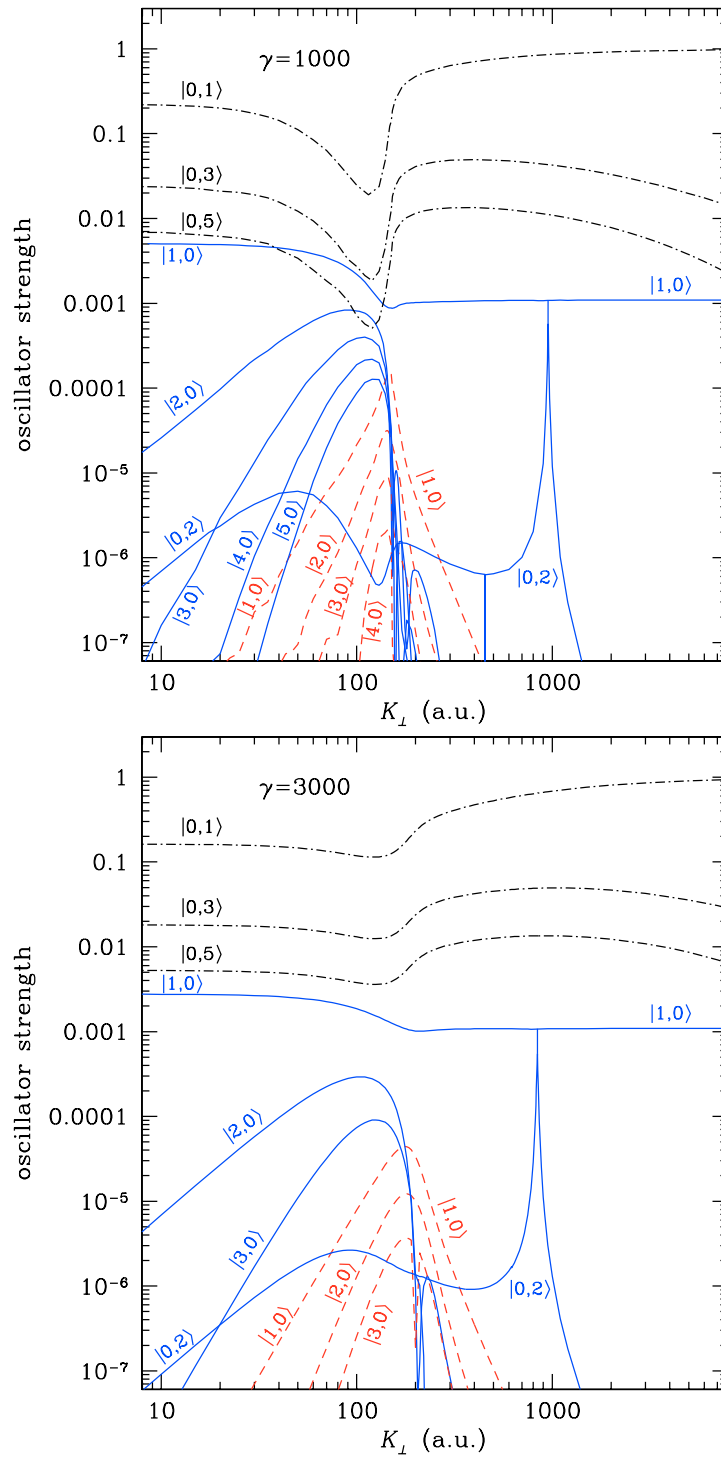


Рис. 4.9: Силы осцилляторов как функции поперечного обобщённого импульса при  $B = 2,35 \times 10^{12}$  Гс (верхний рисунок) и  $B = 7,05 \times 10^{12}$  Гс (нижний рисунок) для дипольных переходов с основного уровня для трёх базовых поляризаций ( $\alpha = +1$  – сплошные кривые,  $\alpha = -1$  – штриховые кривые,  $\alpha = 0$  – штрихпунктир).

погрешностью, не превышающей 1–2%, единой формулой

$$f_{nsv}^{\alpha}(0) = \left(1 - \frac{0,584}{1 + u_1\gamma^{u_2}}\right) \frac{1 + u_3\gamma}{1 + u_4\gamma^{u_5}}, \quad (4.167)$$

в которой  $u_i$  – численные параметры. Для  $f_{010}^{(+1)}(0)$  они принимают значения  $u_1 = 12$ ,  $u_2 = 1,43$ ,  $u_3 = 9,8 \times 10^{-5}$ ,  $u_4 = 1,585$  и  $u_5 = 0,713$ , а для  $f_{001}^{(0)}(0)$  –  $u_1 = 2,64$ ,  $u_2 = 1,076$ ,  $u_3 = 6 \times 10^{-6}$ ,  $u_4 = 0,247$  и  $u_5 = 0,381$ .

Для движущегося атома в области значений магнитного параметра  $300 \leq \gamma \leq 10^4$  мы для этих же переходов полагаем

$$f_{010}^{+}(K_{\perp}) = f_{010}^{+}(0) \frac{1 - a(K_{\perp}/K_{\text{cr}})^b}{1 + (K_{\perp}/K_{\text{cr}})^{1/\alpha'}} + \frac{2(m_e/m_p)}{1 + (K_{\text{cr}}/K_{\perp})^{1/\alpha'}}, \quad (4.168)$$

$a = 1,28 - 0,267 \ln(1 + \gamma/240)$ ,  $b = 1 + 3/[1 + \ln^2(1 + \gamma/90)]$ ,  $\alpha' = 0,012 [1 + \ln^2(1 + \gamma/90)]$ ;

$$f_{001}^{\parallel}(K_{\perp}) = f_{001}^{\parallel}(0) \exp[-(a'K_{\perp}/K_{\text{cr}})^2] + \frac{\exp[-(b'K_{\perp}/K_{\text{cr}})^{-\beta}]}{1 + 0,5\sqrt{K_{\text{cr}}/K_{\perp}}}, \quad (4.169)$$

$a' = 0,877 \ln(13100/\gamma)$ ,  $b' = 0,89 - \gamma/17000$  и  $\beta = 0,61 (1 + 2410/\gamma)^{3/2}$ . Вторые слагаемые в формулах (4.168), (4.169) обеспечивают выполнение точных пределов при больших  $K_{\perp}$  ( $2m_e/m_p$  и 1, соответственно).

Поскольку переходы, запрещённые при  $K_{\perp} = 0$ , дают существенный вклад в поглощение только в области  $K_{\perp} \sim K_{\text{cr}}$ , для них построены аппроксимации только для этой области, точные в пределах до  $\sim 10\%$ . Переход в состояние  $|0s0\rangle$  представляет собой доминирующий канал поглощения для циркулярно поляризованного излучения в спектральном диапазоне  $E_{000}^{(0)} - E_{0,s-1,0}^{(0)} < \hbar\omega < E_{000}^{(0)} - E_{0s0}^{(0)}$ . Для правой круговой поляризации мы полагаем

$$f_{0s'0}^{(+1)}(K_{\perp}) = \frac{0,012 (K_{\perp}/K_{\text{cr}})^{2s'} (1 - K_{\perp}/K_{\text{cr}})}{1 + 11 \ln(1 + (\gamma/3300)^2)} \quad \text{при } K_{\perp} < K_{\text{cr}}, \quad s' \geq 2 \quad (4.170)$$

и пренебрегаем этими переходами при  $K_{\perp} \geq K_{\text{cr}}$ . Для левой круговой поляризации при произвольном  $K_{\perp}$  имеем

$$f_{0s'0}^{-}(K_{\perp}) = \frac{1,3 \times 10^{-4} (K_{\perp}/K_{\text{cr}})^{2(s'+1)}}{2^{s'} [1 + (K_{\perp}/K_{\text{cr}})^{5(s'+1)}]} \quad (s' \geq 1). \quad (4.171)$$

### 4.4.3 Фотоионизация

Сечения фотоионизации атома водорода в сильных магнитных полях рассмотрены нами в статьях [272, 273, 278, 291].

Работа [272] посвящена главным образом разрешению противоречий между результатами предыдущих работ, проистекающих из использования разных форм матричных элементов оператора взаимодействия с излучением при пренебрежении вкладом в волновые функции от орбиталей, принадлежащих к возбуждённым уровням Ландау, о чём мы упоминали конце § 4.4.1. Был сделан вывод о том, что в адиабатическом приближении следует использовать форму «с координатой» (4.159), как это делалось в статьях [250, 275, 284], а не «со скоростью» (4.158), как в [301, 302]. При этом, как и в указанных работах, рассматривался в основном покоящийся атом водорода, а для вычислений использовалось адиабатическое приближение (4.20).

Кроме того, в [272] были найдены аппроксимационные формулы для различных парциальных сечений фотоионизации атома водорода в зависимости от энергии фотона  $\hbar\omega$  и магнитной индукции  $B$ , имеющие точность порядка нескольких процентов при том, что сами сечения в рассмотренном диапазоне энергий изменяются на несколько порядков величины.

Статья [273] была посвящена, во-первых, выводу формул для матричных элементов взаимодействия при использовании волновых функций «со сдвигом» (§§ 4.2.2, 4.4.1), а во-вторых – впервые, расчёту сечений фотоионизации атома, *движущегося* в магнитном поле. Для этих расчётов использовалось адиабатическое приближение, которое модифицировалось использованием параметров сдвига  $\eta$  для начальных и  $\eta'$  для конечных состояний. Были рассчитаны также сечения фотоионизации с использованием адиабатического приближения только для конечного состояния, тогда как для расчёта волновой функции начального (связанного) состояния применялось точное численное решение, описанное выше в § 4.2.2. Была предпринята попытка определить, какое из представлений и с какими значениями начального и конечного сдвигов является оптимальным для расчёта сечений фотоионизации.

Основная проблема при таком подходе заключается в том, что при использовании разных приближений (в том числе адиабатического приближения с разными сдвигами) для начального и конечного состояний волновые функции этих состояний утрачивают взаимную ортогональность. В результате рассчитанный таким образом матричный элемент начинает зависеть от произвольной постоянной, которую можно добавить к оператору взаимодействия. В статье [273] была предложена процедура ортогонализации волновых функций для этого случая. Тем не менее, как выяснилось впоследствии [278], ни один из рассмотренных в [273] приёмов не приводит к достаточно точному результату сразу для всех поляризаций излучения: если для одной поляризации ближе к точным численным результатам оказывается один набор



параметров сдвига и ортогонализации, то для другой оптимальным является другой вариант. Поэтому необходим точный численный расчёт сечений вне адиабатического приближения. Процедура такого расчёта была разработана и осуществлена в статье [278] (§ 4.4.3b ниже).

#### 4.4.3a Покоящийся атом. Резонансы

В работе [291] был осуществлён выход за рамки адиабатического приближения для состояний не только дискретного, но и *непрерывного спектра* атома водорода, *покоящегося* в сильном магнитном поле. Были рассчитаны соответствующие сечения фотоионизации и подтверждён как численно, так и аналитически (с использованием теории возмущений) вывод работы [272] о том, что адиабатическое приближение даёт качественно верный ответ для сечений при использовании формы «с координатой» (4.157) (ранее этот вывод оспаривался в статье [300]). Кроме того, выход за рамки адиабатического приближения для непрерывного спектра позволил изучить резонансы фотоионизации – резонансы Фано, возникающие из-за наличия метастабильных состояний (напр., [289]).

Для заданных квантовых номеров  $n_f, s_f$  и знака проекции на ось  $z$  относительного импульса  $\hbar k_f$  в конечном состоянии, число конечных состояний в формуле (4.135) равно

$$d\nu_f = \frac{L_z dk_f}{2\pi} = \frac{L_z}{2\pi} \frac{m_*}{\hbar^2 |k_f|} dE_f, \quad (4.172)$$

где  $L_z$  – длина в направлении  $z$ , на которую нормированы волновые функции непрерывного спектра согласно (4.82). Следовательно, используя формулу (4.142), можно выразить парциальное сечение фотоионизации атома с его переходом из связанного состояния  $|i\rangle = |n_i, s_i, \nu_i\rangle$  в состояние непрерывного спектра  $|f\rangle = |n_f, s_f, \nu_f\rangle$  в виде

$$\sigma_{i \rightarrow f}^{\text{bf}} = \pi \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\text{Ry}}{\hbar \omega} \left( \frac{\text{Ry}}{E_f^{\parallel}} \frac{m_*}{m_e} \right)^{1/2} L_z a_B |\langle f | e \cdot \hat{\mathbf{M}} + \hat{M}_{\text{spin}} | i \rangle|^2. \quad (4.173)$$

Когда энергия электрона оказывается вблизи метастабильного уровня, то, согласно уравнениям (4.87) и (4.88) (для  $n' = n - 1$ ), матричный элемент перехода из начального состояния в конечное можно представить в виде

$$\langle f | \hat{M} | i \rangle = M_1 \cos \delta_c (1 - q \operatorname{tg} \delta_c), \quad (4.174)$$

где

$$q = \frac{M_2}{M_1} \frac{U_f}{\Gamma_f^a / 2} \quad (4.175)$$

$(U_f \equiv U_{ns_f\nu_f, n-1}, \Gamma_f^a \equiv \Gamma_{ns_f\nu_f, n-1}^a - \text{см. (4.90), (4.91)})$ ,

$$M_1 = \langle g_{n-1, s_f}^{\text{ad}} | \langle n-1, s_f | \hat{M} | n_i s_i \rangle_{\perp} | g_{n_i s_i \nu_i} \rangle_{\parallel} \quad (4.176)$$

– матричный элемент в отсутствие связи между каналами, и

$$M_2 = -\frac{\Gamma_f^a}{2U_f} \left( \langle \bar{g}_{n-1, s_f}^{\text{ad}} | \langle n-1, s_f | \hat{M} | n_i s_i \rangle_{\perp} | g_{n_i s_i \nu_i} \rangle_{\parallel} + \langle g_{ns_f\nu_f}^{\text{ad}} | \langle ns_f | \hat{M} | n_i s_i \rangle_{\perp} | g_{n_i s_i \nu_i} \rangle_{\parallel} \right) \quad (4.177)$$

– поправка, обусловленная наличием такой связи. Сечение фотопоглощения пропорционально

$$|\langle f | \hat{M} | i \rangle|^2 = |M_1|^2 \cos^2 \delta_c |1 - q \operatorname{tg} \delta_c|^2 = |M_1|^2 F(\epsilon, q), \quad (4.178)$$

где

$$F(\epsilon, q) = \frac{|q + \epsilon|^2}{1 + \epsilon^2} \quad (4.179)$$

– функция Бейтлера–Фано [289], и

$$\epsilon = -\operatorname{ctg} \delta_c = 2(E - E_{ns_f\nu_f})/\Gamma_f^a. \quad (4.180)$$

Функция  $F(\epsilon, q)$  стремится к единице в далёких крыльях резонанса, при  $|\epsilon| \gg \max(1, |q|)$ . Если  $q$  – вещественная величина (например, это так в дипольном приближении), то  $F(\epsilon, q)$  обращается в нуль при  $\epsilon = -q$  и имеет максимум ( $F_{\max} = 1 + q^2$ ) при  $\epsilon = 1/q$ . В пределе очень слабой связи,  $U_f \rightarrow 0$ , мы имеем  $q \propto U_f^{-1} \rightarrow \infty$ , причём величина  $q^2 \Gamma_f^a$  остаётся конечной, и резонанс Фано превращается в дельта-функцию (наложенную на континуум), которая описывает переход из связанного в дискретное метастабильное состояние.

На рис. 4.10 представлены примеры сечений фотоионизации, рассчитанных для покоящегося атома водорода [291]. В основной серии расчётов использовалось представление оператора  $\hat{M}$  «со скоростью» (§ 4.4.1) с учётом недипольности, конечной массы ядра и взаимодействия излучения со спином. Для сравнения проводились аналогичные расчёты в представлении «с координатой», а также с использованием различных приближений – адиабатического и дипольного. Некоторые детали вычислений освещены в [291].

Работа [291] подтвердила основные результаты и выводы статей [272, 285] для фотоионизации в области частот  $\omega < \omega_c$ . Была явно продемонстрирована пренебрежимо малая роль члена  $\hat{M}_{\text{spin}}$ . Поправки же за счёт конечной массы ядра оказались заметными (до  $\sim 20\%$  для сечений при  $\gamma = 10^3$ ). Вторым результатом стали выводы относительно резонансов.

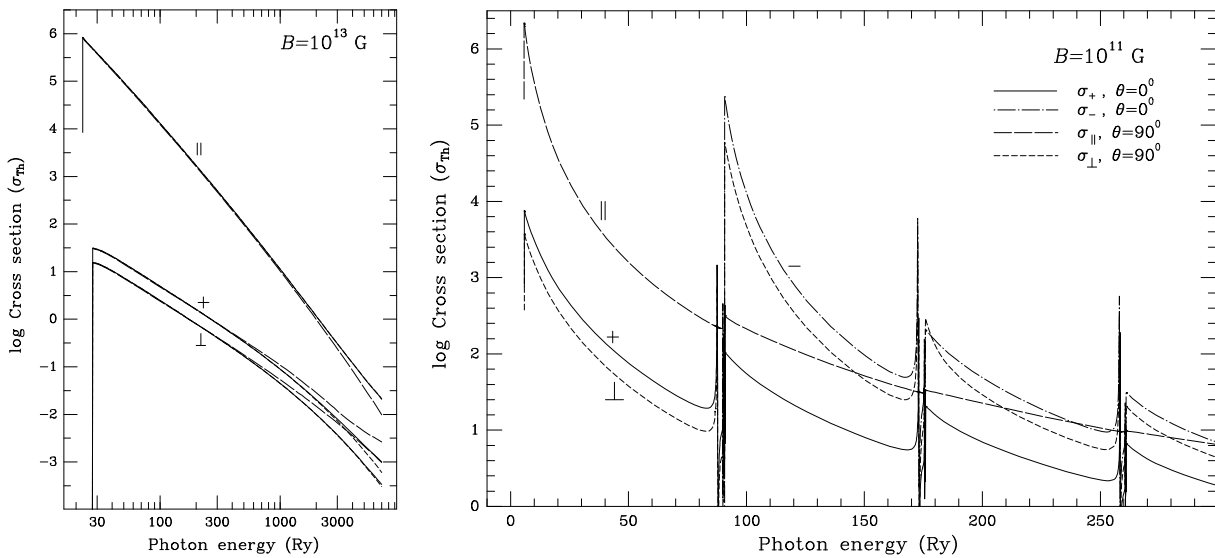


Рис. 4.10: Сечения фотоионизации (в десятичном логарифмическом масштабе в единицах томсоновского сечения  $\sigma_T$ ) атома водорода в основном состоянии, покоящегося в магнитном поле  $B = 10^{13}$  Гс (левый рисунок) и  $B = 10^{11}$  Гс (правый рисунок) в зависимости от энергии поглощаемого фотона  $\hbar\omega$  (в ридберговских единицах) [291]. Кривые, помеченные значками “+”, “-” и “||”, показывают сечения для круговой и продольной поляризации  $\alpha = +1, -1$  и  $0$ , соответственно, а кривая, помеченная значком “ $\perp$ ”, – для излучения, поляризованного перпендикулярно полю; при этом предполагается, что волновой вектор  $\mathbf{q}$  направлен вдоль поля при  $\alpha \pm 1$  и поперёк – в остальных двух случаях. На левом рисунке в дополнение к точным расчётам (сплошные кривые) приведены результаты расчётов в дипольном приближении (короткий пунктир) и в адиабатическом приближении (длинный пунктир).

На рис. 4.10 показаны сечения фотоионизации атома водорода в основном состоянии, покоящегося в магнитном поле  $B = 10^{13}$  Гс (левый рисунок) и  $B = 10^{11}$  Гс (правый рисунок). Сечения  $\sigma_\alpha^{\text{bf}}$  изображены для излучения, распространяющегося вдоль поля при круговой поляризации  $\alpha = \pm 1$  и поперёк поля – при продольной линейной поляризации  $\alpha = 0$ , а также (на правом рисунке) для поперечной поляризации ( $\sigma_\perp^{\text{bf}}$ ), отвечающей полусумме матричных элементов для  $\alpha = \pm 1$ . Направление  $\mathbf{q}$  в данном случае имеет значение, так как расчёты ведутся вне рамок дипольного приближения. Дипольное же приближение показано коротким пунктиром на левом рисунке. Видно, что поправки на недипольность незначительны при энергиях  $\hbar\omega \lesssim 10^4$  Ry ( $\lesssim 100$  кэВ) при распространении поперёк поля, но становятся заметными уже при  $\hbar\omega \sim (2-3) \times 10^4$  Ry ( $\sim 30$  кэВ) при продольном распространении. Это соответствует различию размеров атома вдоль и поперёк поля.

Для сравнения на левом рис. 4.10 показаны также результаты работ [272, 285], выполненных в адиабатическом приближении. Видно, что они достаточно точны при  $\hbar\omega \lesssim 10^3$  Ry. Неточность адиабатического приближения нарастает с приближением к порогу перехода на возбуждённый уровень Ландау  $\omega \approx \omega_c$ , что связано с возраста-

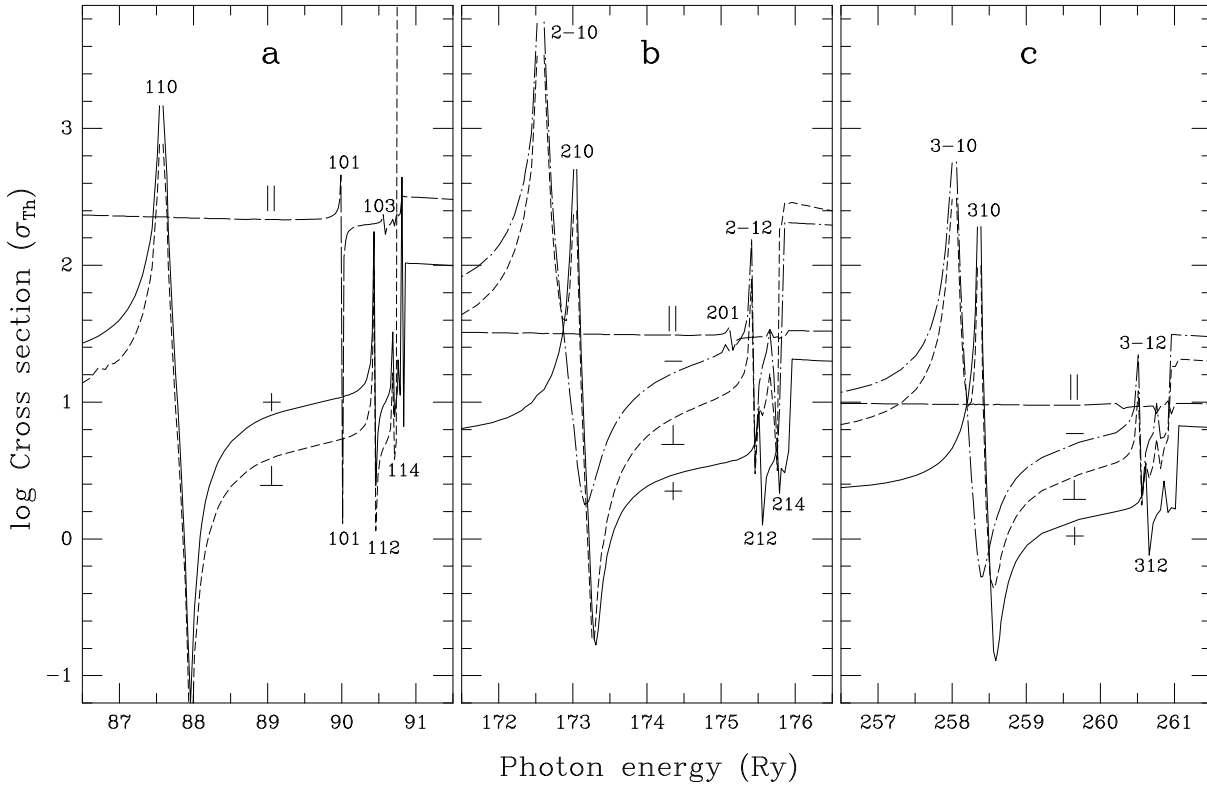


Рис. 4.11: То же, что на правом рис. 4.10, для интервалов энергии фотона вблизи частичных порогов фотоионизации с переходом электрона на уровни Ландау  $n = 1, 2$  и  $3$  (рисунки **a**, **b** и **c**, соответственно) [291].

ющей ролью каналов  $n > 0$ , закрытых при  $\omega < \omega_c$ .

На правом рис. 4.10 выбрано меньшее значение магнитной индукции, при котором  $\hbar\omega_c$  уменьшается настолько, что переходы на уровни с  $n_f > 0$  происходят уже при сравнительно умеренных энергиях  $\lesssim$  кэВ. В этом случае адиабатическое приближение не работает. Рисунок 4.11 в увеличенном масштабе демонстрирует резонансы, возникающие в этом случае вблизи частичных порогов с энергиями  $n_f \hbar\omega_c$ . Сечение для правой круговой поляризации  $\alpha = +1$  при векторе  $\mathbf{q}$ , направленном вдоль поля (сплошные кривые), обнаруживает сравнительно широкие резонансы под каждым  $n$ -м порогом Ландау, ассоциированные с тесно связанными метастабильными состояниями  $|n, 1, 0\rangle$  (пики этих резонансов располагаются при  $\hbar\omega = 87,6, 173,0$  и  $258,4$  Ry, а ширины автоионизации равны  $\Gamma^a = 0,014, 0,016$  и  $0,014$  Ry для  $n = 1, 2, 3$ , соответственно). Последовательность более слабых и узких резонансов справа от них сходится к соответствующему порогу. Они относятся к чётным водородоподобным метастабильным уровням  $|n, 1, 2\rangle, |n, 1, 4\rangle, \dots$

Аналогичные особенности для левой поляризации (штрихпунктир), ассоцииро-

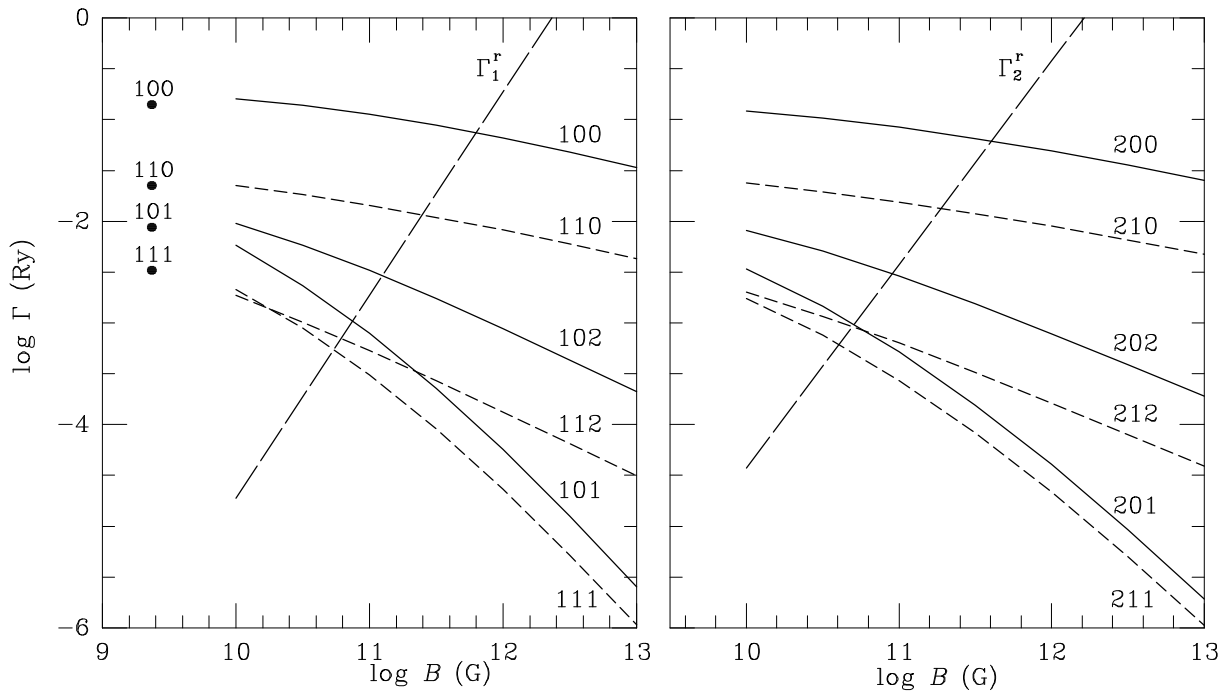


Рис. 4.12: Ширины автоионизации (в ридбергах) нескольких метастабильных уровней  $|n, s, \nu\rangle$  (цифры у кривых) в зависимости от десятичного логарифма магнитной индукции в гауссах [291]. Для  $n = 2$  показаны суммарные ширины  $\Gamma_{2s\nu}^a = \Gamma_{2s\nu,0}^a + \Gamma_{2s\nu,1}^a$ . Ширины состояний  $|2, -1, \nu\rangle$  совпадают с ширинами состояний  $|1, 1, \nu\rangle$ . Длинным пунктиром показана радиационная ширина  $\Gamma_n^r$  [288]. Жирные точки слева показывают значения ширин автоионизации состояний (снизу вверх)  $|1, 0, 0\rangle$ ,  $|1, 1, 0\rangle$ ,  $|1, 0, 1\rangle$  и  $|1, 1, 1\rangle$ , рассчитанные в работе [290] для  $B = 2,35 \times 10^9$  G ( $\gamma = 1$ ).

ванные с состояниями  $|n, -1, 0\rangle$ ,  $|n, -1, 2\rangle$ , ..., видны при  $n \geq 2$ . В отсутствие движения поперёк поля состояния  $|1, -1, \nu\rangle$  не связаны с континуумом и не дают вклада в сечение фотоионизации. Напротив, связь состояний  $|n, -1, 0\rangle$  для  $n \geq 2$  с континуумом является сравнительно сильной (например,  $\Gamma_{n-10}^a = 0,014$  и  $0,016$  Ry для  $n = 2$  и  $3$ , соответственно), и соответствующие резонансы доминируют на рис. 4.11b и 4.11c. Сечения  $\sigma_{\perp}$  для поперечной поляризации и поперечного распространения волны (короткий пунктир) проявляют резонансы, ассоциированные как с  $|n, 1, \nu\rangle$  (для  $n \geq 1$ ), так и с  $|n, -1, \nu\rangle$  (для  $n \geq 2$ ), потому что  $e_{\perp} = (e_{+1} + e_{-1})/\sqrt{2}$  содержит обе круговые компоненты.

При продольной поляризации (длинный штриховой пунктир) при поперечном распространении разрешены только переходы в нечётные состояния. Самый сильный из резонансов (при  $\hbar\omega = 90.0$  Ry) на рис. 4.11a соответствует состоянию  $|1, 0, 1\rangle$  ( $\Gamma_{101}^a \simeq 0,0008$  Ry). Другие резонансы, связанные с нечётными уровнями, намного слабее (они едва заметны на рис. 4.11a).

Резонансы были рассчитаны в предположении, что автоионизация является единственным каналом распада метастабильных состояний. Однако любое возбуждённое состояние может распадаться и путём спонтанного излучения фотона. Относительное значение этих двух каналов распада определяется отношением ширины автоионизации  $\Gamma^a$  к естественной радиативной ширине  $\Gamma^r$ . Поэтому, чтобы оценить, какой из процессов важнее, надо сравнить  $\Gamma^a$  и  $\Gamma^r$  для каждого метастабильного уровня. Полные ширины автоионизации для нескольких уровней  $|1, s, \nu\rangle$  и  $|2, s, \nu\rangle$  изображены как функции  $B$  на рис. 4.12. Видно, что они уменьшаются с ростом  $B$ . Причины этого раскрыты в [291] на основе качественного анализа, который позволил также получить аналитические оценки быстроты такого хода  $\Gamma^a$  с  $B$  для разных метастабильных уровней. Естественные ширины обусловлены главным образом переходами  $|n s \nu\rangle \rightarrow |n-1, s+1, \nu\rangle$ ; при  $\gamma \gg 1$  они зависят только от номера уровня Ландау  $n$  и величины магнитного поля:  $\Gamma_n^r = \frac{8}{3} \alpha_f^3 n \gamma^2 \text{ Ry}$  [304]. На рис. 4.12 мы наблюдаем, что естественные ширины превышают ширины автоионизации при  $B \gtrsim 6 \times 10^{11} \text{ Гс}$  для  $n = 1$  и  $B \gtrsim 4 \times 10^{11} \text{ Гс}$  для  $n = 2$ . Это означает, что в достаточно сильном магнитном поле метастабильные состояния распадаются скорее вследствие спонтанного излучения, чем вследствие автоионизации. В этих условиях форма резонансных особенностей сечений фотоионизации будет определяться в основном радиативным уширением.

#### 4.4.3b Атом, движущийся в магнитном поле

Фотоионизация атома, движущегося в сильном магнитном поле, изучена в работе [278]. Для этого применялась формула (4.173), в которую подставлялись выражения для матричных элементов (4.150)–(4.151). Как и в случае покоящегося атома, за основу брались матричные элементы в представлении «со скоростью», явно выписанные в § 4.4.1, но для проверки точности вычислений применялась и альтернативная форма «с координатой» (4.157). Для волновых функций непрерывного спектра использовалось представление со сдвигом  $\eta' = 1$ . Для волновых функций дискретного спектра, как правило, использовалось обычное представление ( $\eta = 0$ ) при  $K_{\perp} < K_{\text{cr}}$  и представление со сдвигом ( $\eta = 1$ ) при  $K_{\perp} > K_{\text{cr}}$ , однако точность расчётов проверялась в тестовых вычислениях с использованием разных параметров сдвига  $0 \leq \eta \leq 1$ . «Продольные» матричные элементы (4.153) рассчитывались в два этапа: сначала наборы подобных элементов для каждого открытого канала определялись путём численного интегрирования одновременно с вычислением продольных коэффициентов

$R$ -матрицы, описанным в § 4.2.6, а затем путём линейной комбинации в соответствии с (4.85) они преобразовывались в набор продольных матричных элементов, соответствующих уходящим волнам.

На основе полученных численных данных были проанализированы ранее опубликованные расчётные методики и результаты для сечений фотоионизации атома водорода, движущегося поперёк сильного магнитного поля [273, 300]. Выяснилось, что адиабатическое приближение со сдвигом, предложенное в [273], в целом даёт верное качественное описание сечений фотоионизации для поляризаций  $\alpha = -1$  и  $\alpha = 0$  при  $K_{\perp} \lesssim K_{\text{cr}}$ , если использовать форму матричного элемента «со скоростью», количественно отличаясь от точных результатов на единицы и десятки процентов. Для  $\alpha = +1$ , а в представлении «с координатой» и для  $\alpha = -1$ , это приближение удовлетворительно работает только при  $K_{\perp} \ll K_{\text{cr}}$ , но сильно нарушается при приближении  $K_{\perp}$  к  $K_{\text{cr}}$  (количественное отличие для сечения может быть больше, чем в 10 раз). При этом, однако, сохраняется качественно верная форма функциональной зависимости  $\sigma^{\text{bf}}(\hbar\omega)$ .

Напротив, подход, применённый в статье [300], – пренебрежение каналами с  $n' > 0$  при использовании формы «со скоростью» – при любых значениях  $K_{\perp}$  приводит для  $\sigma_{\pm 1}^{\text{bf}}$  к результатам, неверным как количественно (отличия на порядки величины), так и качественно (неверный показатель степенной зависимости при больших энергиях).

Оба приближения [273, 300] довольно неплохо описывают сечение для продольной поляризации,  $\sigma_0^{\text{bf}}$ , хотя второй подход [300] даёт более существенные (десятки процентов) количественные ошибки.

Рисунок 4.13 показывает представительную выборку аккуратных численных результатов при  $\gamma = 1000$ . В соответствии с зависимостями энергий от  $K_{\perp}$ , показанными на рис. 4.1, порог ионизации сдвигается влево с увеличением  $K_{\perp}$ . Так как при данной величине магнитного поля  $K_{\text{cr}} \approx 150$  а.е.и., левые окна на этом рисунке соответствуют центрированным, а правые – децентрированным состояниям атома.

Для центрированных атомов наклоны кривых для каждой поляризации практически совпадают с наклонами при  $K_{\perp} = 0$ . Значения сечений для  $\alpha = 0$  и  $+1$ , соответствующие переходам с  $s' = s$  и  $s' = s + 1$ , разрешённым при  $K_{\perp} = 0$ , лишь немного убывают с увеличением  $K_{\perp}$  от 0 до  $K_{\text{cr}}$ . Для  $\alpha = -1$  переходы с поглощением фотона из основного состояния запрещены при  $K_{\perp} = 0$  [272], но с увеличением  $K_{\perp}$  вследствие появления и усиления связи между разными  $s$ -каналами сечение  $\sigma_{-1}^{\text{bf}}$  увеличивается ( $\propto K_{\perp}^2$  при  $K_{\perp} \ll K_{\text{cr}}$ ), пока не становится сравнимым с  $\sigma_{+1}^{\text{bf}}$  при  $K_{\perp} \sim K_{\text{cr}}$ .

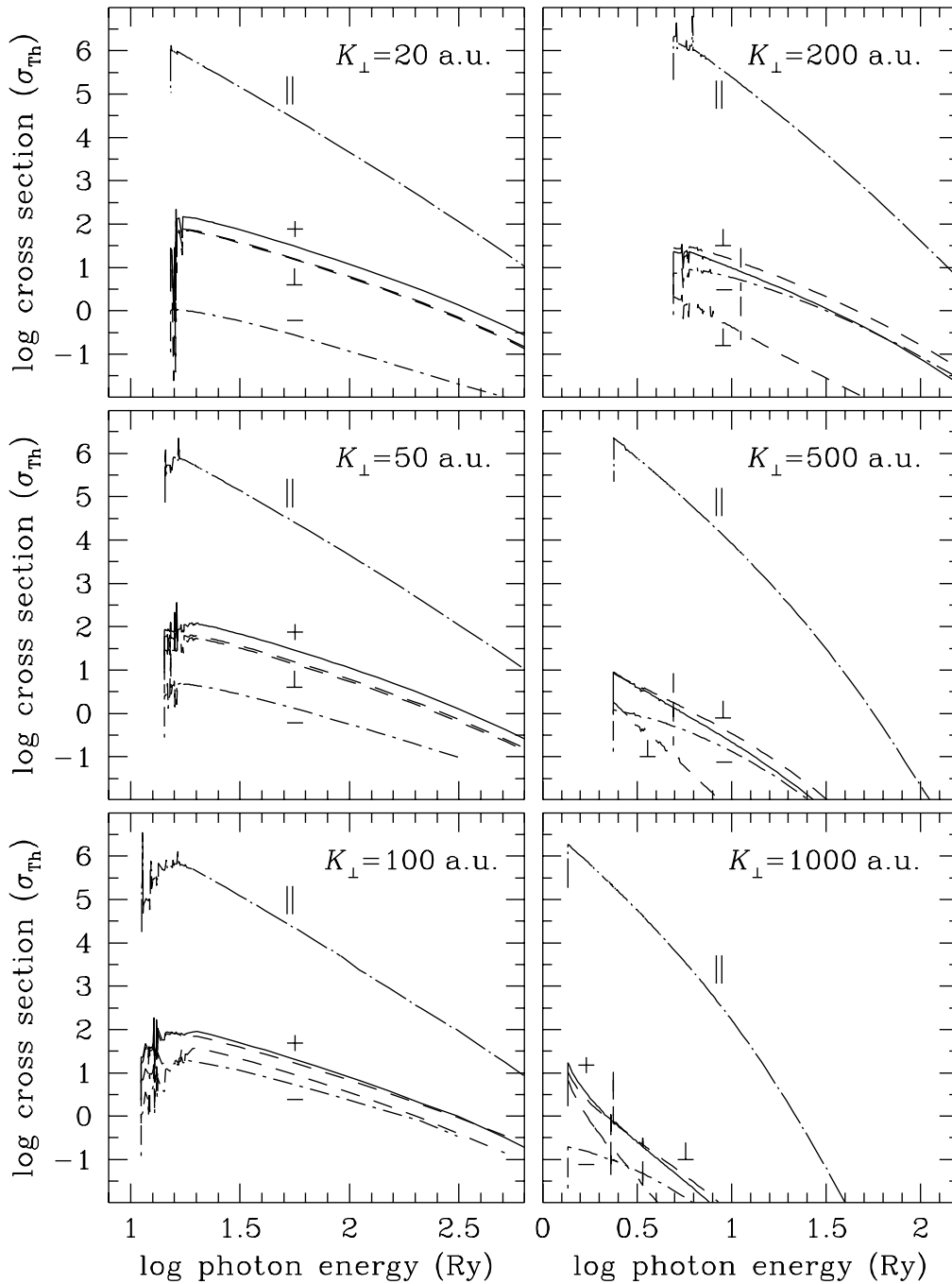


Рис. 4.13: Сечения фотоионизации (в десятичном логарифмическом масштабе в единицах томсоновского сечения  $\sigma_T$ ) атома водорода в основном состоянии, движущегося в магнитном поле  $B = 2,35 \times 10^{12}$  Гс с разными значениями  $K_{\perp}$  [278]. Сплошные и штрихпунктирные линии с короткими штрихами соответствуют круговой поляризации  $\alpha = +1$  и  $-1$ , соответственно; штрихпунктирные линии с длинными штрихами соответствуют линейной поляризации вдоль поля  $\mathbf{B}$  ( $\alpha = 0$ ); штриховыми линиями показан случай линейной поляризации поперёк поля. Волновой вектор  $\mathbf{q}$  направлен вдоль  $\mathbf{B}$  для  $\alpha = \pm 1$  и поперёк  $\mathbf{B}$  в случаях линейной поляризации; в последнем случае верхняя кривая данного типа соответствует направлениям  $\mathbf{q}$  параллельно, а нижняя – перпендикулярно  $K_{\perp}$ .



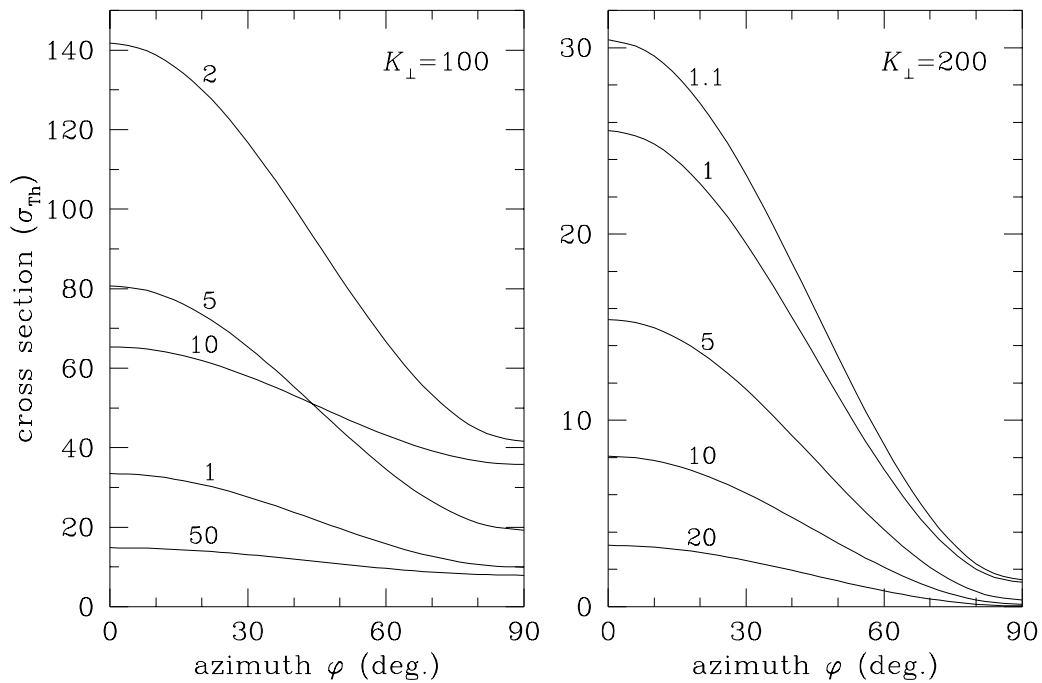


Рис. 4.14: Угловая зависимость сечений фотоионизации  $\sigma_{\perp}^{\text{bf}}$  атома водорода в основном состоянии, движущегося с обобщённым импульсом  $K_{\perp} = 100$  (слева) и  $K_{\perp} = 200$  (справа) в магнитном поле  $B = 2,35 \times 10^{12}$  Гс [278]. Волновой вектор и поляризация излучения перпендикулярны магнитному полю. Числа у кривых указывают (в ридбергах) энергию электрона в конечном состоянии.

Для децентрированных атомов ( $K_{\perp} > K_{\text{cr}}$ , правая колонка рисунков) зависимость  $\sigma^{\text{bf}}(\omega)$  становится круче с ростом  $K_{\perp}$ . Это объясняется изменением эффективного потенциала (4.49), имеющего кулоновский характер при  $K_{\perp} \lesssim K_{\text{cr}}$  и осцилляторный при  $K_{\perp} \gg K_{\text{cr}}$ . Эффективные потенциалы, соответствующие разным  $s$ , становятся почти идентичными, а в результате продольные волновые функции начального и конечного состояний становятся почти ортогональными, и  $\sigma_{+1}^{\text{bf}}$  быстро спадает. Ещё более быстрый спад  $\sigma_{-1}^{\text{bf}}$  с ростом  $\hbar\omega$  связан с восстановлением применимости адиабатического приближения при больших  $K_{\perp}$  (но только уже для волновых функций со сдвигом) и связанных с ним правил отбора. При этом пороговая величина  $\sigma_0^{\text{bf}}$  почти не зависит от  $K_{\perp}$ .

Поскольку движущийся атом уже не является цилиндрически симметричным, сечения поглощения зависят от угла  $\varphi$  между  $\mathbf{K}_{\perp}$  и поперечной полю составляющей волнового вектора  $\mathbf{q}$ . Зависимость от  $\varphi$  наиболее сильна, когда векторы  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{e}$  перпендикулярны к  $\mathbf{B}$ . Сечения  $\sigma_{\parallel}^{\text{bf}}$  (то есть  $\sigma_0^{\text{bf}}$  при  $\mathbf{q} \perp \mathbf{B}$ ) и  $\sigma_{\perp}^{\text{bf}}$  нанесены на рис. 4.13 штрихпунктиром с длинными штрихами и обычным пунктиром, соответственно. Сечение  $\sigma_{\parallel}^{\text{bf}}$  в дипольном приближении не зависит от  $\varphi$ , а поправки на недипольность

(4.151с) малы и приводят к зависимости от  $\varphi$  с амплитудой  $\ll 1\%$ . Поэтому для этого сечения в каждом окне на рис. 4.13 видна только одна кривая. Для  $\sigma_{\perp}^{\text{bf}}$  зависимость от  $\varphi$  становится сильной при  $K_{\perp} \gtrsim \hbar/a_{\text{м}} \approx 30$  а.е.и. В этом случае верхняя и нижняя пунктирные кривые, хорошо различимые на рисунке, соответствуют наибольшему и наименьшему из возможных значений  $\sigma_{\perp}(\varphi)$  – соответственно, при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 90^{\circ}$ . Физическое объяснение такой зависимости состоит в том, что фотоны, поляризованные перпендикулярно магнитному полю, «видят» наибольший поперечный размер атома (вытянутого перпендикулярно  $\mathbf{K}_{\perp}$ ) в том случае, когда они распространяются вдоль  $\mathbf{K}_{\perp}$ , и наименьший – когда они направлены перпендикулярно. Зависимость от  $\varphi$  между этими двумя экстремумами, показанными на рис. 4.13, описывается формулой

$$\sigma_{\perp}^{\text{bf}}(\varphi) = \frac{\sigma_{+1}^{\text{bf}} + \sigma_{-1}^{\text{bf}}}{2} + A \cos 2\varphi . \quad (4.181)$$

В отсутствие связи между различными  $s$ -каналами в представлении со сдвигом амплитуда  $A$  в формуле (4.181) была бы равна  $\sqrt{\sigma_{+1}^{\text{bf}}\sigma_{-1}^{\text{bf}}}$ . Истинное значение  $A$ , рассчитанное численно, оказывается всегда меньше этой оценки. Примеры зависимостей  $\sigma^{\text{bf}}(\varphi)$  приведены на рис. 4.14 (их обсуждение см. в [278]).

Аналогично резонансам, ассоциированным с возбуждёнными электронными уровнями Ландау  $n > 0$ , которые рассмотрены выше, наличие связи между  $s$ -каналами для движущегося атома приводит к появлению резонансов, ассоциированных с различными уровнями  $s$  (с физической точки зрения – с возбуждёнными протонными уровнями Ландау). Они видны как пики и провалы вблизи парциальных порогов на рис. 4.13. Они наиболее сильны при  $K_{\perp} \sim K_{\text{cr}}$  из-за сильной связи между  $s$ -каналами в этой области значений обобщённого импульса. Однако эти пики являются очень узкими. На рис. 4.15 показаны некоторые из соответствующих ширин автоионизации  $\Gamma_{\text{а}}$ , рассчитанные согласно формулам (4.90) и (4.91) (с очевидным обобщением на случай движения). На левом рисунке представлены ширины для тесно связанных уровней от  $s = 1$  до  $s = 4$ , которые входят в континуум при  $K_{\perp} \approx 1200, 560, 340$ , и  $237$  а.е.и., соответственно (см. рис. 4.1). Благодаря близости друг к другу эффективных потенциалов, относящихся к разным значениям  $s$ , скачки на кривых, отвечающие открытию дополнительных каналов автоионизации, располагаются при почти одних и тех же значениях  $K_{\perp}$  для разных  $s$ . Водородоподобные уровни многообразия  $s = 1$  (правое окно на рис. 4.15) принадлежат к континууму при любых  $K_{\perp}$  (для данного магнитного поля). Ширины автоионизации стремятся к нулю при  $K_{\perp} \ll K_{\text{cr}}$  и при  $K_{\perp} \gg K_{\text{cr}}$  вследствие восстановления цилиндрической симметрии волновых функ-

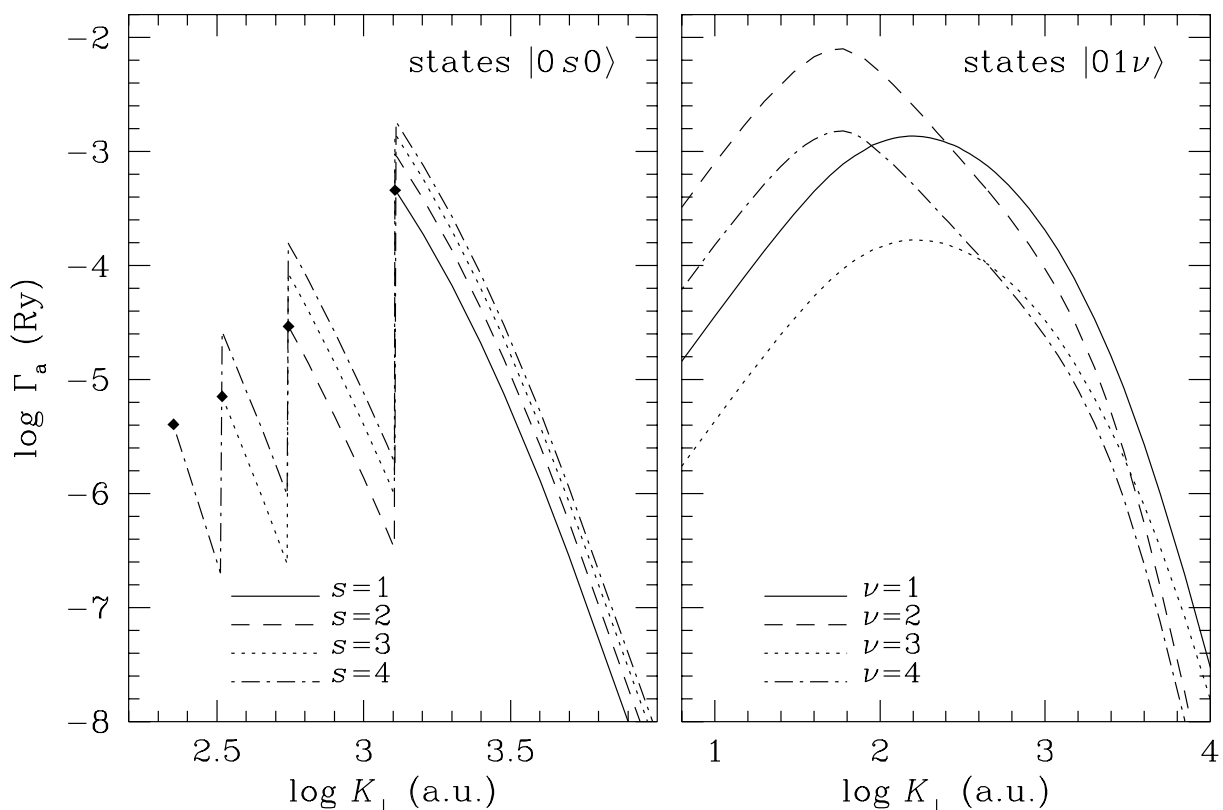


Рис. 4.15: Ширина автоионизации для нескольких тесно связанных (слева) и водородоподобных (справа) атомных резонансов как функция  $K_{\perp}$  при  $B = 2,35 \times 10^{12}$  Гс. Каждая из кривых в левом окне начинается в точке, в которой соответствующий уровень входит в континуум.

ций.

#### 4.4.4 Свободно-свободное поглощение

Свободно-свободным поглощением в астрофизике называют поглощение фотонов, происходящее за счёт переходов в непрерывном спектре атома, молекулы или иона, – иными словами, поглощение фотона свободной заряженной частицей, в котором участвует её кулоновское взаимодействие с другой частицей. В магнитном поле возможно также циклотронное поглощение фотона, при котором электрон переходит на более высокий уровень Ландау. Однако если затем происходит обратный безызлучательный переход за счёт кулоновских столкновений, то первый и второй процессы, будучи когерентными, совместно представляют собой не что иное, как свободно-свободное поглощение. Если же обратный переход происходит в результате спонтанного испускания фотона, то эти два процесса совместно представляют собой рассея-

ние.

Рассеяние фотонов электронами в условиях, характерных для фотосфер нейтронных звёзд с сильными магнитными полями, тщательно изучены (напр., [305–307] и ссылки там). Сечение рассеяния на электроне  $\sigma_{-1}^{s,e}$  имеет резонанс на циклотронной частоте  $\omega_c$ . Вне узкого (порядка доплеровской ширины) интервала частот вокруг  $\omega_c$ , сечения рассеяния для базовых поляризаций  $\alpha = 0, \pm 1$  записываются как

$$\sigma_{\alpha}^{s,e} = \frac{\omega^2}{(\omega + \alpha\omega_c)^2 + \nu_{e,\alpha}^2} \sigma_T, \quad (4.182)$$

где  $\sigma_T$  – немагнитное томсоновское сечение (1.5), а  $\nu_{e,\alpha}$  – эффективные частоты затухания, включающие в общем случае, кроме рассеяния, и другие процессы.

Рассеяние фотонов на ионах, которым можно полностью пренебречь в отсутствие магнитного поля, приобретает значение в сильных полях, потому что соответствующее сечение

$$\sigma_{\alpha}^{s,i} = \left( \frac{m_e}{m_{\text{ion}}} \right)^2 \frac{\omega^2 Z^4}{(\omega - \alpha\omega_{ci})^2 + \nu_{i,\alpha}^2} \sigma_T. \quad (4.183)$$

имеет резонанс на ионной циклотронной частоте  $\omega_{ci}$ . Аналогично случаю рассеяния на электронах,  $\nu_{i,\alpha}$  – полная эффективная частота затухания.

Перейдём теперь к рассмотрению свободно-свободного фотопоглощения в водородной плазме. В классическом приближении холодной плазмы (напр., [212]) при учёте взаимодействия электромагнитной волны только с электроном оно описывается формулой

$$\sigma_{\alpha}^{\text{ff}} = \frac{1}{(\omega + \alpha\omega_c)^2 + \nu_{e,\alpha}^2} \frac{4\pi e^2}{m_e c} \nu_{\alpha}^{\text{ff}}(\omega), \quad (4.184)$$

где  $\nu_{\alpha}^{\text{ff}}$  – эффективная частота электрон-протонных столкновений, ведущих к поглощению электромагнитных волн. Уширение электронного циклотронного резонанса в (4.182) и (4.184) при этом определяется суммой эффективных частот поглощения и рассеяния,

$$\nu_{e,\alpha} = \nu_{\alpha}^{\text{ff}} + \nu_e^s, \quad (4.185)$$

где

$$\nu_e^s = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e c^3} \omega^2 \quad (4.186)$$

– естественная (радиативная) ширина резонанса. Частота затухания, задаваемая формулой (4.185), обеспечивает правильное значение для интегрального по частотам сечения резонансного циклотронного поглощения [305]:

$$\int_{\omega_c - \Delta\omega}^{\omega_c + \Delta\omega} [\sigma_{-1}^{s,e}(\omega) + \sigma_{-1}^{\text{ff}}(\omega)] d\omega = \frac{4\pi^2 e^2}{m_e c}, \quad (4.187)$$

где мы предполагаем, что  $\nu_{e,\alpha} \ll \Delta\omega \ll \omega_c$ .

Точные значения  $\nu_\alpha^{\text{ff}}$  дают только квантовомеханические расчёты. Принято (напр., [299, 308]) выражать  $\sigma^{\text{ff}}$  через фактор Гаунта, усреднённый по тепловому распределению,  $\bar{g}$ , или, эквивалентно, через кулоновский логарифм  $\Lambda^{\text{ff}} = (\pi/\sqrt{3})\bar{g}$ . Принимая во внимание формулу (4.184), можно написать

$$\nu_\alpha^{\text{ff}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m_e k_B T}} \frac{n_e e^4}{\hbar\omega} \Lambda_\alpha^{\text{ff}}, \quad (4.188)$$

В плазме в условиях ЛТР вынужденное излучение обычно учитывается путём домножения выражения (4.188) на фактор  $(1 - e^{-u})$ , где

$$u \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B T}. \quad (4.189)$$

#### 4.4.4a Приближение бесконечной массы протона

В отсутствие магнитного поля сечение свободно-свободного поглощения фотона электроном можно вычислить в предположении, что электрон рассеивается на кулоновском центре, положение которого фиксировано в пространстве. Учёт конечной массы ядра сводится просто к замене  $m_e$  на приведённую массу  $m_*$ . Борновское приближение даёт хорошо известную формулу для сечения поглощения света электроном, имеющим начальный импульс  $p_i$  и конечный импульс  $p_f = (p_i^2 + 2m_e\hbar\omega)^{1/2}$  [309],

$$\sigma^{\text{ff}}(p_i, \omega) = \frac{16\pi^2 n_e e^6}{3 m_e c \hbar \omega^3} \frac{1}{p_i} \ln \left| \frac{p_f + p_i}{p_f - p_i} \right|. \quad (4.190)$$

Усреднение этого выражения по распределению Максвелла приводит к классическому кулоновскому логарифму

$$\Lambda_{\text{cl}}^{\text{ff}} = e^{u/2} K_0(u/2), \quad (4.191)$$

где  $K_0(u/2)$  – модифицированная функция Бесселя [225]. В работе [310] фактор  $\bar{g}^{\text{ff}}$  вычислен с на основе результатов точных неборновских квантовомеханических расчётов [311] и аппроксимирован по методу Паде. Этот немагнитный фактор применим, если магнитное поле некантованное. В кантованном магнитном поле свободно-свободное поглощение рассчитывалось в работах [297, 312] в борновском приближении. В этом приближении кулоновский логарифм  $\Lambda_\alpha^{\text{ff}}$ , являющийся, вообще говоря, функцией  $B$ ,  $T$  и  $\omega$ , зависит только от двух безразмерных аргументов  $\zeta_e$  и  $u$ , определённых в (4.2) и (4.189). Результат работы [297] – более общий<sup>9</sup>, а записать его

<sup>9</sup>В статье [312], результат которой воспроизведён в монографии [307], не учитывались виртуальные переходы на возбуждённые уровни Ландау, поэтому результат неприменим при  $\omega \gtrsim \omega_c$ .

можно в таком виде<sup>10</sup>:

$$\Lambda_{\alpha}^{\text{ff}} = \frac{3}{4} e^{u/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} Q_n^{\alpha}(\zeta_e, u, y) dy, \quad (4.192a)$$

где

$$Q_n^{\alpha}(\zeta_e, u, y) = \frac{y}{\zeta} \frac{A_n^{\alpha}}{[(y + \theta + \zeta) \sinh(\zeta_e/2)]^{|n|}} \quad (4.192b)$$

$$A_n^0 = \frac{x_n K_1(x_n)}{y + \zeta_e/4}, \quad A_n^{\pm 1} = \frac{y + \theta + |n|\zeta}{\zeta^2} K_0(x_n), \quad (4.192c)$$

$$\zeta = \sqrt{1 + 2\theta y + y^2}, \quad \theta = \frac{1 + \exp(-\zeta_e)}{1 - \exp(-\zeta_e)}, \quad (4.192d)$$

$$x_n = |u - n\zeta_e| \sqrt{0.25 + y/\zeta_e}, \quad (4.192e)$$

$K_0(x)$  и  $K_1(x)$  – модифицированные функции Бесселя [225].

Формулы (4.192) получены в предположении, что электрон рассеивается на закреплённом в пространстве кулоновском потенциале. На самом деле протоны тоже движутся и могут поглощать излучение при своём рассеянии. Хотя этот процесс и не играет значения при  $B = 0$ , он может быть важен при  $\omega$  вблизи или ниже  $\omega_{ci}$ . В ряде работ четырёх различных научных групп [313–317], посвящённых моделированию атмосфер нейтронных звёзд с сильными магнитными полями, авторы добавляли к  $\sigma_{\alpha}^{\text{ff}}$  сечение «свободно-свободного ионного поглощения»  $\sigma_{\alpha}^{\text{ff,p}}$ . Для водородной плазмы, учитывая выражения (4.182) и (4.183), их формулы можно записать в виде

$$\sigma_{\alpha}^{\text{a}} = \sigma_{\alpha}^{\text{ff}} + \sigma_{\alpha}^{\text{ff,p}}, \quad \sigma_{\alpha}^{\text{ff,p}}/\sigma_{\alpha}^{\text{s,p}} = \sigma_{\alpha}^{\text{ff}}/\sigma_{\alpha}^{\text{s,e}}. \quad (4.193)$$

Сечение  $\sigma_{\alpha}^{\text{ff,p}}$ , выражающееся здесь второй формулой, получено из  $\sigma_{\alpha}^{\text{ff}}$  простым масштабированием по массе и заряду. Однако мы сейчас убедимся в том, что такое масштабирование неприменимо, а формула (4.193) неверна.

#### 4.4.4b Поглощение фотонов при протонных столкновениях

Имеются два рода влияния конечной массы протона на поглощение: во-первых, поглощение может происходить при протон-протонных столкновениях, а во-вторых, поглощение, происходящее при электрон-протонных столкновениях, изменяется вследствие движения протонов.

<sup>10</sup>Система (4.192) фактически равносильна формулам (27) из статьи [297], за тем лишь исключением, что в нашей формуле (4.192c) для  $A_n^{\pm 1}$  восстановлен показатель степени 2 при  $\zeta$ , отсутствующий в [297], вероятно, вследствие опечатки.

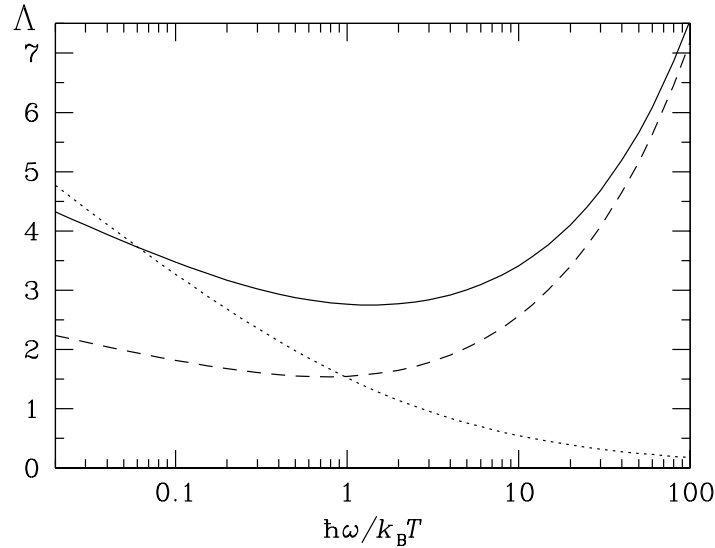


Рис. 4.16: Кулоновские логарифмы для поглощения фотонов при столкновениях нерелятивистских протонов ( $\Lambda_{pp}$ , сплошная кривая), при столкновениях одинаковых, но различных частиц (штриховая линия) и при кулоновском рассеянии электронов ( $\Lambda_{cl}^{ff}$ , точечный пунктир).

Следуя [274], начнём с рассмотрения первого эффекта. По аналогии с (4.184), запишем сечение рассматриваемого процесса в виде

$$\sigma_{\alpha}^{pp} = \frac{1}{(\omega - \alpha\omega_{ci})^2 + \nu_{i,\alpha}^2} \frac{4\pi e^2}{m_p c} \nu_{\alpha}^{pp}(\omega), \quad (4.194)$$

где  $\nu_{\alpha}^{pp}$  – эффективная частота, которую нам предстоит определить.

При классическом подходе [212] ион-ионные столкновения не меняют полный электрический ток и поэтому не вызывают диссипации. Следовательно, они не вносят вклада в затухание электромагнитной волны. В квантовой механике это соответствует тому, что дипольный матричный элемент для поглощения обращается в нуль.

Оценим ненулевой квадрупольный матричный элемент при условии, что магнитное поле не является квантующим для протонов, то есть  $\zeta_i < 1$ . Обратимся снова к общему выражению (4.136). Вводя, как обычно, координаты и канонические импульсы центра масс ( $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{P}$ ) и относительного движения ( $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$ ) и используя аксиальную калибровку (4.14), получаем

$$\mathbf{j}_{\text{eff}} = e^{i\mathbf{k}_{\gamma} \cdot \mathbf{R}} \frac{e}{m_p} \left[ \mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{R} + i(\mathbf{k}_{\gamma} \cdot \mathbf{r}) \left( \mathbf{p} - \frac{e}{4c} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \right) \right] + O(\mathbf{k}_{\gamma} \cdot \mathbf{r})^2. \quad (4.195)$$

Первые два слагаемых не дают вклада в поглощение, связанное со свободно-свободными переходами, поскольку эти слагаемые не содержат переменных  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$  и,

следовательно, никак не могут быть связаны с кулоновским взаимодействием между частицами. Оставшиеся слагаемые похожи на оператор тока  $\mathbf{j}_{\text{eff}}$ , описывающий взаимодействие излучения с частицей заряда  $e/2$  и массы  $m_p$ , за исключением множителя  $\mathbf{k}_\gamma \cdot \mathbf{r}$ , который мал при  $\hbar\omega \ll m_p c^2$ . Сечение поглощения можно записать в виде (4.194). Неквантовое магнитное поле,  $\zeta_i \ll 1$ , не влияет на эффективную частоту столкновений  $\nu_\alpha^{\text{pp}}$ , которая в этом случае не зависит от  $\alpha$ . Оценку сечения можно осуществить в нерелятивистском борновском приближении, используя метод преобразований Фурье (описанный, напр., в [309], § 77). Опуская громоздкие выкладки, приведём окончательный результат. Для двух различных частиц равной массы  $m_p$  и заряда  $e$  сечение равно

$$\sigma_*^{\text{pp}}(p_i, \omega) = \frac{256\pi^2}{3} \frac{n_p e^6}{m_p c \hbar \omega^3} \frac{1}{p_i} \left\{ \frac{p_i p_f}{(m_p c)^2} + \frac{3}{10} \frac{p_i^2 + p_f^2}{(m_p c)^2} \ln \left| \frac{p_f + p_i}{p_f - p_i} \right| \right\}. \quad (4.196)$$

Но учитывая, что сталкивающиеся протоны идентичны и имеют спин  $\frac{1}{2}$ , следует вычислять матричный элемент в (4.135) для симметричных и антисимметричных конечных состояний и складывать получающиеся сечения со статистическими весами  $\frac{1}{4}$  и  $\frac{3}{4}$ , соответственно [164]. В результате получаем:

$$\sigma^{\text{pp}}(p_i, \omega) = 2\sigma_*^{\text{pp}}(p_i, \omega) - \sigma_\times^{\text{pp}}(p_i, \omega), \quad (4.197)$$

где  $\sigma_*^{\text{pp}}(p_i, \omega)$  дано выражением (4.196) и

$$\begin{aligned} \sigma_\times^{\text{pp}}(p_i, \omega) = & \frac{128\pi^2}{3} \frac{n_p e^6}{m_p c \hbar \omega^3} \frac{1}{p_i} \left\{ \frac{6}{5} \frac{p_i p_f}{(m_p c)^2} \frac{p_i^4 + p_f^4}{(p_i^2 + p_f^2)^2} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\hbar\omega}{c} \right)^2 \frac{p_i^4 + p_f^4 + 0.8 p_i^2 p_f^2}{(p_i^2 + p_f^2)^3} \ln \left| \frac{p_f + p_i}{p_f - p_i} \right| \right\}. \quad (4.198) \end{aligned}$$

В формулах (4.196) и (4.198)  $p_f^2 = p_i^2 + m_p \hbar \omega$ , так как приведённая масса равна  $m_p/2$ .

Распределение Максвелла для относительных импульсов даётся выражением  $\mathcal{F}_{\text{pp}}(p_i) = (4/\sqrt{\pi}) (m_p k_B T)^{-3/2} p_i^2 \exp(-p_i^2/m_p k_B T)$ . Производя усреднение (4.197) по этому распределению и записывая сечение в форме (4.194), находим, что эффективная частота  $\nu^{\text{pp}}$  даётся формулой

$$\nu^{\text{pp}} = \frac{256}{3} \sqrt{\frac{\pi}{m_p k_B T}} \frac{n_p e^4}{\hbar \omega} \frac{k_B T}{m_p c^2} (1 - e^{-u}) \Lambda_{\text{pp}}, \quad (4.199)$$

в которой  $\Lambda_{\text{pp}}$  рассчитывается путём усреднения факторов, зависящих от  $p_i$ , в (4.196) и (4.198).

На рис. 4.16 сплошной кривой изображена функция  $\Lambda_{\text{pp}}(u)$ . Для сравнения показаны также кулоновские логарифмы  $\Lambda$  для различных частиц [формула (4.196);



штриховая линия], и классический кулоновский логарифм  $\Lambda_{\text{cl}}^{\text{ff}}$  [(4.191); точечный пунктир]. Приближённая формула

$$\Lambda_{\text{pp}} \approx 0.6 \ln(22 u^{-1} + 9 u^{-0.3}) + 0.4 \sqrt{\pi u} \quad (4.200)$$

точно воспроизводит  $\Lambda_{\text{pp}}$  при малых и больших значениях  $u$  и имеет погрешность, не превосходящую 1.5%, при промежуточных  $u$ .

Мы видим, что истинное сечение  $\sigma_{\alpha}^{\text{pp}}$  отличается от сечения  $\sigma_{\alpha}^{\text{ff,p}}$ , определённого формулой (4.193) с использованием (4.184) и (4.188), множителем

$$32 \sqrt{\frac{2m_p}{m_e}} \frac{k_B T}{m_p c^2} \frac{\Lambda_{\text{pp}}}{\Lambda_{\text{cl}}^{\text{ff}}} \sim \frac{T}{10^9} \text{ К}. \quad (4.201)$$

Используя формулы (4.194)–(4.201), не будем забывать, что они получены в нерелятивистском приближении и не учитывают процессы с переворотом спина. Поэтому они неприменимы при столь высоких значениях  $T$  или  $\omega$ , при которых для протонов могли бы быть важны релятивистские поправки.

#### 4.4.4с Поглощение фотонов при столкновениях электронов с протонами

Поглощение фотона системой, состоящей из электрона и протона, взаимодействующих посредством кулоновского потенциала, но не находящихся в связанном состоянии, можно рассматривать как поглощение при переходах в непрерывном спектре атома водорода. Точные функции непрерывного спектра атома водорода в сильном магнитном поле обсуждались в § 4.2.6 и использовались в § 4.4.3. Здесь, однако, мы не станем использовать точный формализм матрицы рассеяния для начальных и конечных состояний, а воспользуемся первым борновским приближением.

Представим волновую функцию  $\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\mathbf{K}}^{(1)}(\mathbf{r})$ , описывающую относительное движение электрона и протона (4.44), в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \psi_1(\mathbf{r}), \quad (4.202)$$

где  $\psi_0(\mathbf{r})$  описывает свободное движение с  $z$ -составляющей относительного импульса, равной  $\hbar k_0$ ,  $L_z$  – нормировочная длина, а  $\psi_1(\mathbf{r})$  – возмущение, возникающее из-за кулоновского взаимодействия. Для его вычисления применим одномерное преобразование Фурье

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}_{\perp}, k) = \frac{1}{\sqrt{L_z}} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} e^{-ikz} \psi(\mathbf{r}) dz. \quad (4.203)$$

**1. Аксиальная калибровка.** В статье [274] для вывода выражения для  $\sigma_\alpha^{\text{ff}}$  мы пользовались аксиальной калибровкой (4.14). В этом случае

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_0 z}}{\sqrt{L_z}} \Phi_{ns}(\mathbf{r}_\perp), \quad (4.204)$$

и в пределе  $L_z \rightarrow \infty$  мы имеем  $\tilde{\psi}_0(\mathbf{r}_\perp, k) \rightarrow (2\pi/L_z) \delta(k - k_0) \Phi_{ns}(\mathbf{r}_\perp)$ . Разложение (4.45) для  $\psi_1(\mathbf{r})$ ,

$$\tilde{\psi}_1(\mathbf{r}_\perp, k) = \sum_{n's'} \tilde{g}_{n's'}(k) \Phi_{n's'}(\mathbf{r}_\perp), \quad (4.205)$$

равносильно замене  $g_{n's'}(z)$  на  $L_z^{-1/2} \exp(ik_0 z) \delta_{nn'} \delta_{ss'} + g_{n's'}(z)$  в формулах (4.45) и (4.47). Тогда, применяя преобразование Фурье к системе (4.47) с  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_c$  и рассматривая  $\tilde{\psi}_1$  как малое возмущение, в первом приближении получаем

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m_*} (k^2 - k_0^2) + E_{n's'}^\perp - E_{ns}^\perp \right] \tilde{g}_{n's'}(k) = -L_z^{-1} \tilde{V}_{ns,n's'}(r_c, k - k_0), \quad (4.206)$$

где

$$\tilde{V}_{ns,n's'}(r_c, k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} V_{ns,n's'}(r_c, z) dz. \quad (4.207)$$

Используя формулы (4.49)–(4.53), можно преобразовать  $\tilde{V}_{ns,n's'}(r_c, k)$  к виду

$$\tilde{V}_{ns,n's'}(r_c, k) = -e^2 \tilde{v}_{ns,n's'} \left( \frac{r_c}{a_m \sqrt{2}}, \sqrt{2} a_m k \right), \quad (4.208)$$

где

$$\tilde{v}_{ns,n's'}(\rho, \varsigma) = (-1)^{(|s|-s+|s'|-s')/2} \sum_{l=0}^{n_\rho+n'_\rho} (-1)^l \sum_{m=\max(0, l-n'_\rho)}^{\min(n_\rho, l)} a_{mn\rho|s|} a_{l-m, n'_\rho, |s'|} \sqrt{\tilde{s}! \tilde{s}'!} \tilde{v}_{0\tilde{s}, 0\tilde{s}'}(\rho, \varsigma), \quad (4.209)$$

и для  $q \geq 0$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{0,s,0,s+q}(\rho, \varsigma) &= \tilde{v}_{0,s+q,0,s}(\rho, \varsigma) = \rho^q \sum_{m=0}^s a_{msq} \rho^{2m} \int_0^1 \exp \left[ -\frac{\varsigma^2}{4} \frac{1-t}{t} - \rho^2 t \right] \times \\ &\times t^{2m+q-1} (1-t)^{s-m} dt. \end{aligned} \quad (4.210)$$

С учётом того, что плотность конечных состояний определяется формулой (4.172), из (4.142) получаем сечение поглощения фотона парой электрон–протон с начальными квантовыми числами  $n_i$  и  $s_i$ , продольным волновым числом  $k_i$  и поперечным обобщённым импульсом  $K_\perp$ :

$$\sigma(k_i, K_\perp, n_i, s_i, \omega) = \sum_{n_f, s_f, \text{sign} k_f} \frac{\pi L_z m_* e^6}{2\hbar^4 |k_f| \omega c} \left| \mathbf{e} \cdot \langle f | \hat{\mathbf{M}} | i \rangle \right|^2. \quad (4.211)$$

Сумма здесь берётся по тем  $n_f$  и  $s_f$ , которые разрешены законом сохранения энергии

$$E_{n_f s_f}^\perp + \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m_*} = E_{n_i s_i}^\perp + \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m_*} + \hbar\omega. \quad (4.212)$$

В первом приближении, применяя формулы (4.206), (4.212), (4.158) и (4.37), получаем:

$$\langle f | \hat{\mathcal{M}} | i \rangle_0 = \frac{2\hbar}{L_z m_* \omega e^2} (k_i - k_f) \tilde{V}_{n_i s_i n_f s_f}, \quad (4.213a)$$

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{\mathcal{M}} | i \rangle_{-1} = & -\frac{2i\hbar}{L_z a_m e^2} \left[ \frac{\sqrt{n_f + 1} \tilde{V}_{n_i s_i n_f + 1, s_f - 1} - \sqrt{n_i} \tilde{V}_{n_i - 1, s_i + 1, n_f s_f}}{m_e (\omega + \omega_c)} + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{n_f + s_f} \tilde{V}_{n_i s_i n_f, s_f - 1} - \sqrt{n_i + s_i + 1} \tilde{V}_{n_i, s_i + 1, n_f s_f}}{m_p (\omega - \omega_{ci})} \right], \end{aligned} \quad (4.213b)$$

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{\mathcal{M}} | i \rangle_{+1} = & \frac{2i\hbar}{L_z a_m e^2} \left[ \frac{\sqrt{n_f} \tilde{V}_{n_i s_i n_f - 1, s_f + 1} - \sqrt{n_i + 1} \tilde{V}_{n_i + 1, s_i - 1, n_f s_f}}{m_e (\omega - \omega_c)} + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{n_f + s_f + 1} \tilde{V}_{n_i s_i n_f, s_f + 1} - \sqrt{n_i + s_i} \tilde{V}_{n_i, s_i - 1, n_f s_f}}{m_p (\omega + \omega_{ci})} \right]. \end{aligned} \quad (4.213c)$$

Здесь для сокращения записи подразумевается  $\tilde{V}_{n s n' s'} \equiv \tilde{V}_{n s n' s'}(r_c, k_f - k_i)$ .

Формулы (4.211) и (4.213) определяют парциальные сечения поглощения одной электрон-протонной парой в заданном состоянии. Если имеется  $n_e$  электронов в единице объёма, то число электронов, взаимодействующих с данным протоном и имеющих волновые числа  $k_i$  в интервале  $dk_i$ , а  $r_c$  – в элементе площади  $d^2 r_c$ , равно

$$dN_i = n_e L_z d^2 r_c \mathcal{F}_\parallel(k_i) dk_i \mathcal{F}_{n_i s_i}. \quad (4.214)$$

Здесь

$$\mathcal{F}_\parallel(k_i) = \hbar (2\pi m_* k_B T)^{-1/2} \exp(-\hbar^2 k_i^2 / 2m_* k_B T) \quad (4.215)$$

– максвелловское распределение состояний непрерывного спектра по  $k_i$ , а  $\mathcal{F}_{n_i s_i}$  – распределение по  $n_i \geq 0$  и  $s_i \geq -n_i$ . При ЛТР мы имеем больцмановское распределение

$$\mathcal{F}_{n_i s_i} = (1 - e^{-\zeta_e}) (1 - e^{-\zeta_i}) \exp[-n_i \zeta_e - (n_i + s_i) \zeta_i] \quad (4.216)$$

Условия осуществления этого распределения будут определены § 5.2.

Для свободных электрона и протона имеется соответствие квантовых чисел  $n+s = N$ , где  $N$  – номер протонного уровня Ландау. Следовательно,  $\mathcal{F}_{ns} = f_n^e f_N^p$ , где  $f_n^e$  и  $f_N^p$  – доли электронов и протонов, находящихся на своих уровнях Ландау  $n$  и  $N$ , соответственно.

Таким образом, полное сечение равно

$$\sigma(\omega, T, B) = n_e L_z \pi a_m^4 \sum_{n_i s_i} \mathcal{F}_{n_i s_i} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_{\parallel}(k_i) dk_i \int_0^{\infty} K_{\perp} dK_{\perp} \sigma(k_i, K_{\perp}, n_i, s_i, \omega). \quad (4.217)$$

Для трёх базовых поляризаций  $\alpha = 0, \pm 1$  отсюда выводим

$$\sigma_{\alpha}^{\text{ff}}(\omega) = \frac{4\pi e^2}{m_e c} \frac{\omega^2 \nu_{\alpha}^{\text{ff}}(\omega)}{(\omega + \alpha\omega_c)^2 (\omega - \alpha\omega_{ci})^2 + \omega^2 \tilde{\nu}_{\alpha}^2(\omega)}, \quad (4.218)$$

$$\nu_{\alpha}^{\text{ff}}(\omega) = \sum_{n, N} f_n^e f_N^p \sum_{n', N'} \nu_{n, N; n', N'}^{\text{ff}, \alpha}(\omega), \quad (4.219)$$

$$\nu_{n, N, n', N'}^{\text{ff}, \alpha}(\omega) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m_e T}} \frac{n_e e^4}{\hbar \omega} \Lambda_{n, N; n', N'}^{\text{ff}, \alpha}(\zeta_*, \omega/\omega_*), \quad (4.220)$$

где для  $\alpha = 0$

$$\Lambda_{n, N; n', N'}^{\text{ff}, 0}(\zeta_*, \omega/\omega_*) = \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{du}{u'} e^{-\zeta_* u^2/2} \theta(u'^2) \sum_{\pm} (u' \pm u)^2 w_{n, N; n', N'}^{(0)}(u_{\pm}), \quad (4.221)$$

а для  $\alpha = \pm 1$

$$\begin{aligned} \Lambda_{n, N; n', N'}^{\text{ff}, \alpha}(\zeta_*, \omega/\omega_*) &= \frac{3}{2} \int_0^{\infty} \frac{du}{u'} e^{-\zeta_* u^2/2} \theta(u'^2) \sum_{\pm} \left[ \frac{m_*^2}{m_e^2} \left(1 - \alpha \frac{\omega_{ci}}{\omega}\right)^2 w_{n, N; n', N'}^{e, \alpha}(u_{\pm}) + \right. \\ &+ \frac{2m_p m_e}{(m_p + m_e)^2} \left(1 - \alpha \frac{\omega_{ci}}{\omega}\right) \left(1 + \alpha \frac{\omega_c}{\omega}\right) w_{n, N; n', N'}^{x, \alpha}(u_{\pm}) + \\ &\left. + \frac{m_*^2}{m_p^2} \left(1 + \alpha \frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 w_{n, N; n', N'}^{i, \alpha}(u_{\pm}) \right]. \end{aligned} \quad (4.222)$$

Здесь  $\zeta_* = \hbar\omega_*/T = \hbar eB/m_* cT = \zeta_i m_p/m_*$ , аргументы  $u_{\pm} = [(u \pm u')^2 + u_s^2]^{1/2}$ ,  $u = |k_z|a_m$ ,  $u_s = k_s a_m$  и

$$u' = \left[ u^2 + \frac{2m_*}{m_p} (N - N') + \frac{2m_*}{m_e} (n - n') + \frac{2\omega}{\omega_*} \right]^{1/2} \quad (4.223)$$

имеют тот же физический смысл, что и в § 4.3.2, а функции  $w(u_{\pm})$  определяются следующими формулами:

$$w_{n, N; n', N'}^{(0)}(u) = \int_0^{\infty} \rho d\rho \tilde{\nu}_{n, s, n', s'}^2(\rho, u\sqrt{2}), \quad (4.224)$$

$$w_{n, N; n', N'}^{e, +1}(u) = \int_0^{\infty} \rho d\rho \left[ \sqrt{n' + 1} \tilde{\nu}_{n, s, n'+1, s'-1}(\rho, u\sqrt{2}) - \sqrt{n} \tilde{\nu}_{n-1, s+1, n', s'}(\rho, u\sqrt{2}) \right]^2, \quad (4.225a)$$

$$w_{n, N; n', N'}^{p, +1}(u) = \int_0^{\infty} \rho d\rho \left[ \sqrt{N'} \tilde{\nu}_{n, s, n', s'-1}(\rho, u\sqrt{2}) - \sqrt{N + 1} \tilde{\nu}_{n, s+1, n', s'}(\rho, u\sqrt{2}) \right]^2, \quad (4.225b)$$

$$w_{n,N;n',N'}^{x,+1}(u) = \int_0^\infty \rho d\rho \left[ \sqrt{n'+1} \tilde{v}_{n,s,n'+1,s'-1}(\rho, u\sqrt{2}) - \sqrt{n} \tilde{v}_{n,s+1,n',s'}(\rho, u\sqrt{2}) \right] \times \\ \times \left[ \sqrt{N'} \tilde{v}_{n,s,n',s'-1}(\rho, u\sqrt{2}) - \sqrt{N+1} \tilde{v}_{n,s+1,n',s'}(\rho, u\sqrt{2}) \right]. \quad (4.225c)$$

Благодаря свойствам симметрии потенциалов  $\tilde{v}_{n,s,n',s'}(\rho, \varsigma)$ , имеем соотношения  $w_{n,N;n',N'}^{(e,p,x),-1}(u) = w_{N,n;n',n'}^{(e,p,x),+1}(u)$ . Можно показать, что функции (4.225) симметричны по отношению к взаимной перестановке индексов  $n, n'$  и  $N, N'$ , и больше того, все они совпадают друг с другом. Следовательно, формула (4.222) приводится к виду

$$\Lambda_{n,N;n',N'}^{\text{ff},\pm 1}(\beta_*, \omega/\omega_*) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{du}{u'} e^{-\beta_* u'^2/2} \theta(u'^2) \left[ w_{n,N;n',N'}^{(1)}(u_+) + w_{n,N;n',N'}^{(1)}(u_-) \right], \quad (4.226)$$

где  $w_{n,N;n',N'}^{(1)}(u)$  – любой из интегралов (4.225).

Интеграл (4.226) расходится при  $\omega \rightarrow \omega_{\text{ci}}(N' - N) + \omega_c(n' - n)$ , что связано с нарушением условий применимости борновского приближения при медленном относительном движении электрона и протона. Как обсуждалось в § 4.3.1, эта расходимость снимается введением поправочных множителей (4.113).

**2. Калибровка Ландау.** Приведённые выкладки можно повторить, используя вместо аксиальной калибровки калибровку Ландау (4.4). Это было сделано в статье [239]. В этом случае применяются те же формулы для волновых функций, что и в § 4.3.2, но вместо матричного элемента  $\langle N'_1, N'_2, k'_{x,1}, k'_{x,2}, k'_z | N_1, N_2, k_{x,1}, k_{x,2}, k_z \rangle$  в (4.116) вычисляется матричный элемент радиативного перехода

$$\langle n', N', k'_{x,e}, k'_{x,p}, k'_z | \hat{M} | n, N, k_{x,e}, k_{x,p}, k_z \rangle,$$

где  $n$  и  $k_{x,e}$  – номер уровня Ландау и волновое число в по оси  $x$  для электрона (частица 1) в начальном состоянии,  $N$  и  $k_{x,p}$  – то же для и протона (частица 2) в начальном состоянии, а  $n', k'_{x,e}, N', k'_{x,p}$  – аналогичные характеристики для конечного состояния. Используем формулу (4.158) и следующие свойства операторов  $\boldsymbol{\pi}$  и  $\boldsymbol{\Pi}$ , которые эквивалентны свойствам (4.37) с учётом изменения представления волновых функций:

$$\pi_{+1}|n, N\rangle_\perp = -\frac{i\hbar}{a_m} \sqrt{n+1} |n+1, N\rangle_\perp, \quad \pi_{-1}|n, N\rangle_\perp = \frac{i\hbar}{a_m} \sqrt{n} |n-1, N\rangle_\perp, \quad (4.227)$$

$$\Pi_{+1}|n, s\rangle_\perp = -\frac{i\hbar}{a_m} \sqrt{N} |n, N-1\rangle_\perp, \quad \Pi_{-1}|n, s\rangle_\perp = \frac{i\hbar}{a_m} \sqrt{N+1} |n, N+1\rangle_\perp. \quad (4.228)$$

С учётом равенства (4.99) и рекуррентного соотношения  $L_n^s(x) - L_{n-1}^s(x) = L_n^{s-1}(x)$  снова приходим к формулам (4.221) и (4.226), но с функциями  $w_{n,N;n',N'}^{(0,1)}(u)$  в виде

$$w_{n,N;n',N'}^{(\alpha)}(u) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^{|\alpha|} dt}{(t + u^2/2)^2} I_{n',n}^2(t) I_{N',N}^2(t). \quad (4.229)$$

Численные расчёты подтверждают эквивалентность (4.229) формулам (4.224) и (4.225).

Можно заметить, что  $w_{n,N;n',N'}^{(0)}(u)$  совпадает с  $w_{n,N;n',N'}(u)$  в (4.119) при  $Z_1 = Z_2 = 1$ . Значит, при заданных начальных  $(n, N)$  и конечных  $(n', N')$  квантовых числах, эффективные частоты квантовых радиативных и безызлучательных переходов электрон-протонной пары при любых значениях  $B, T$  и  $\omega$  определяются одномерными интегралами, в которые входят только две универсальные функции  $w_{n,N;n',N'}^{(0,1)}(u)$ . Эти функции – гладкие и монотонно убывающие. При  $u \ll 1$  они стремятся к постоянным значениям, за исключением следующих случаев: (i) если  $n' = n$  и  $N' = N$ , то  $w_{n,N;n',N'}^{(1)}(u) \sim \ln u$  и  $w_{n,N;n',N'}^{(0)}(u) \sim u^{-2}$ ; (ii) если  $n' = n$  и  $N' = N \pm 1$  (или  $N' = N$  и  $n' = n \pm 1$ ), то  $w_{n,N;n',N'}^{(0)}(u) \sim n_* \ln u$ , где  $n_* = \max(N, N')$  (или  $n_* = \max(n, n')$ , соответственно). При  $u \gg 1$ ,  $w_{n,N;n',N'}^{(\alpha)}(u) \propto u^{-4}$ .

Приближение бесконечно массивных ионов [297] воспроизводится, если в (4.218) положить  $\omega_{ci} = 0$ , а в (4.229) заменить  $I_{N',N}^2(t)$  на  $\sum_{N'=0}^{\infty} I_{N',N}^2(t) = 1$ .

**3. Окончательная формула для сечения и обсуждение результатов.** Приведённый квантовомеханический вывод формул для сечений свободно-свободного поглощения не учитывает фактора затухания, поэтому функция (4.218) обращается в бесконечность в точках электронного (для  $\alpha = -1$ ) и протонного (для  $\alpha = +1$ ) циклотронных резонансов. Чтобы оценить фактор затухания, воспользуемся классической моделью [212].

Пусть  $\nu_e$  и  $\nu_p$  – электронная и протонная эффективные частоты столкновений, не связанные с электрон-протонными столкновениями. Для процессов, рассмотренных ранее в данном параграфе – рассеяния излучения и поглощения при протон-протонных столкновениях<sup>11</sup>, будем иметь  $\nu_e = \nu_e^s$  и  $\nu_p = \nu_p^s + \nu^{pp}$ , где  $\nu_p^s = 2e^2 \omega^2 / (3 m_p c^3)$  – естественная ширина протонного циклотронного резонанса. Усреднение ньютоновских уравнений движения для электронов и протонов приводит к выражению для комплексного тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon'$  (ср. [212], §10). Пренебрегая  $\sqrt{m_e/m_p}$  по сравнению с единицей и предполагая, что

<sup>11</sup>Мы не рассматриваем электрон-электронные столкновения. Известно, что при  $B = 0$  они не дают существенного вклада при нерелятивистских энергиях [309]. Учёт магнитного поля не изменяет этого вывода, потому что резонанс, возникающий при  $\omega = \omega_c$  для этого процесса, поглощается более мощным классическим циклотронным резонансом, возникающим на той же частоте в процессах свободно-свободного поглощения и рассеяния.

$\nu_p \ll \nu_e \ll \omega$ , имеем

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varepsilon'_{xx} + i\alpha\varepsilon'_{xy}) &= \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \left[ \omega_{cp}(\omega_c + \alpha\omega)\nu_p + \omega(\omega - \alpha\omega_{cp})\nu_e + \omega^2\nu_\alpha^{\text{ff}} \right] \times \\ &\times \left\{ [(\omega + \alpha\omega_c)(\omega - \alpha\omega_c) - \nu_\alpha^{\text{ff}}(\nu_p + \nu_e m_e/m_p) - \nu_p\nu_e]^2 + \right. \\ &\left. + [\omega\nu_\alpha^{\text{ff}} + (\omega + \alpha\omega_c)\nu_p + (\omega - \alpha\omega_{cp})\nu_e]^2 \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.230)$$

где  $\alpha = \pm 1$ , и  $\text{Im}$  обозначает мнимую часть. Пренебрегая ничтожным сдвигом положения циклотронных резонансов, вызванным затуханием, из (4.230) получаем формулу (4.218), в которой теперь определён фактор затухания:

$$\tilde{\nu}_\alpha(\omega) = \left(1 + \alpha \frac{\omega_c}{\omega}\right) \nu_p(\omega) + \left(1 - \alpha \frac{\omega_{ci}}{\omega}\right) \nu_e(\omega) + \nu_\alpha^{\text{ff}}(\omega). \quad (4.231)$$

В качестве простого приближения для оценки сечения можно использовать для  $\nu_\alpha^{\text{ff}}$ , вместо (4.219), формулу (4.188), в которой  $\Lambda_\alpha^{\text{ff}}$  определяется в приближении бесконечной массы протона, (4.192). Точные расчёты воспроизводятся, если домножить такое приближённое выражение на поправочный множитель порядка единицы. Оказывается, что этот поправочный множитель один и тот же для  $\alpha = +1$  и  $\alpha = -1$ . Таким образом, две эффективные частоты столкновений (для продольной,  $\nu_0^{\text{ff}}$ , и круговой поляризации,  $\nu_{\pm 1}^{\text{ff}} = \nu_{\mp 1}^{\text{ff}}$ ) достаточны для определения трёх  $\sigma_\alpha^{\text{ff}}$ .

Вблизи электронного циклотронного резонанса ( $\omega \approx \omega_c$ ,  $\alpha = -1$ ), эффективная частота  $\tilde{\nu}_\alpha$  приближённо воспроизводит  $\nu_{e,\alpha}$  в формуле (4.185), что обеспечивает выполнение условия (4.187). Вблизи протонного циклотронного резонанса ( $\omega \approx \omega_{ci}$ ,  $\alpha = +1$ ), эффективная частота затухания равна  $\tilde{\nu}_\alpha\omega/\omega_c \approx \tilde{\nu}_\alpha m_e/m_p \approx \nu_{i,\alpha}$ , где

$$\nu_{i,\alpha} = \nu_\alpha^{\text{ff,p}} + \nu_p^s + \nu_\alpha^{\text{pp}}, \quad \nu_\alpha^{\text{ff,p}} \equiv \frac{m_e}{m_p} \nu_\alpha^{\text{ff}}. \quad (4.232)$$

Уравнение (4.232) согласуется с требованием сохранения силы осциллятора для протонного циклотронного резонанса в поляризации  $\alpha = +1$ , аналогичного (4.187).

Из соотношений

$$\frac{\nu_\alpha^{\text{pp}}}{\nu_\alpha^{\text{ff,p}}} = 1,78 \times 10^{-4} T_6 \frac{\Lambda_{\text{pp}}}{\Lambda_\alpha^{\text{ff}}}, \quad \frac{\nu_\alpha^{\text{pp}}}{\nu_p^s} = \frac{3,6\rho_0}{T_6^{5/2}} \frac{\Lambda_{\text{pp}}}{u^3}, \quad (4.233)$$

видно, что протон-протонными столкновениями можно смело пренебречь при любых значениях  $T$  и  $\rho$ , характерных для внешних оболочек нейтронной звезды.

На рисунке 4.17 сплошными кривыми нанесены рассчитанные значения сечений (4.218) для двух круговых поляризаций ( $\alpha = \pm 1$ ), нормированных, как эффективный кулоновский логарифм в приближении бесконечной массы, в соответствии с (4.184)

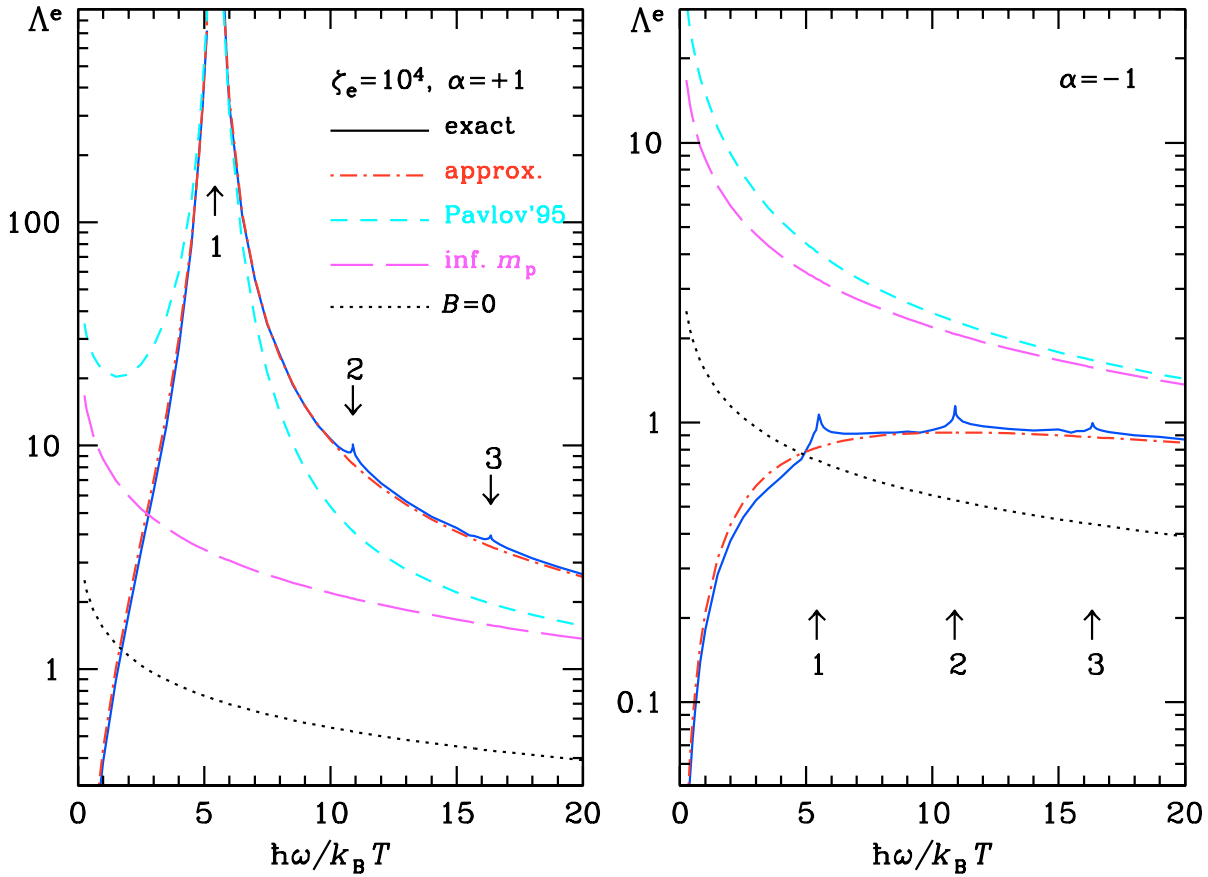


Рис. 4.17: Сравнение точных и приближённых нормированных сечений (кулоновских логарифмов) свободно-свободного поглощения для круговых поляризаций  $\alpha = +1$  (левый рисунок) и  $-1$  (правый рисунок) при  $\zeta_e = 10^4$ . Сплошные линии – расчёт по формулам (4.218)–(4.225) [274]; штрихпунктир – формула (4.218) с использованием приближения (4.192); короткие штрихи – приближение (4.193); использовавшееся в ранних работах [313]; длинные штрихи – величина  $\Lambda_\alpha^{\text{ff}}$ , (4.192); точечный пунктир –  $\Lambda_{\text{cl}}^{\text{ff}}$ , (4.191). Стрелками показаны положения протонных циклотронных гармоник.

и (4.188). Для третьей, продольной поляризации ( $\alpha = 0$ ), такая нормировка хорошо воспроизводит кулоновский логарифм (4.192). Но для круговых поляризаций, показанных на рисунке, результат иной. Как и ожидалось, при  $\alpha = +1$  наблюдается сильный протонный циклотронный резонанс, обусловленный знаменателем  $\omega - \omega_{\text{ci}}$  в (4.218). Кроме того, на обеих сплошных кривых для круговых поляризаций наблюдаются маленькие пики на протонных циклотронных гармониках, возникающие в (4.225) из-за логарифмических сингулярностей функций  $\tilde{v}_{n's'n's}(\rho, \varsigma)$  при  $\varsigma \rightarrow 0$  [см. (4.210)]. За исключением этих пиков, сечения аккуратно описываются приближением, в котором  $\nu_\alpha^{\text{ff}}$  вычисляется при помощи формул (4.188) и (4.192) (штрихпунктир на рисунке 4.17).



Для сравнения на рис. 4.17 показаны: немагнитный кулоновский логарифм  $\Lambda_{cl}^{ff}$  (точечный пунктир), функция  $\Lambda_{\alpha}^{ff}$  (4.192) (длинные штрихи), соответствующая пренебрежению конечной массой протона при вычислении не только эффективной частоты, но и сечения, (4.184), а также результат, который получился бы при использовании соотношений (4.193), традиционно применявшихся ранее (короткие штрихи). Сразу видно отличие (4.218) от рецепта (4.193): в последнем фактически упускается из виду интерференционный член (4.225с) (вторая строчка в (4.222)), который при  $\omega < \omega_{ci}$  в значительной мере компенсирует вклад других слагаемых. С точки зрения классической физики, этот эффект можно наглядно объяснить следующим образом: очень медленные ( $\omega \ll \omega_{ci}$ ) электромагнитные колебания, ортогональные к постоянному магнитному полю, приводят к адиабатическому дрейфу обеих частиц, электрона и протона, со скоростью  $(c/B^2)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , так что в собственной системе отсчёта они почти не «чувствуют» воздействие электрического поля волны и, соответственно, почти не поглощают её.

## 4.5 Заключение

В данной главе мы изучили все характеристики системы, состоящей из электрона и протона в сильном (по атомным масштабам) магнитном поле, взаимодействующих посредством кулоновского потенциала, необходимые для построения моделей атмосфер нейтронных звёзд, включая и взаимодействие этой системы с электромагнитным излучением. Главным отличием изложенного в данной главе рассмотрения от предыдущих работ явился последовательный и строгий учёт специфических эффектов, связанных с движением электрон-протонной системы поперёк сильного магнитного поля.

К изученным характеристикам относятся: уровни энергии; характерные особенности волновых функций; геометрические размеры атома водорода; его дипольный момент (а в случае покоящегося атома, дипольный момент которого равен нулю, – квадрупольный момент); взаимодействие атома водорода с излучением – силы осцилляторов для связанно-связанных переходов и сечения фотоионизации с учётом резонансов, возникающих за счёт наличия метастабильных уровней; а также, в первом борновском приближении, вероятности переходов между протонными уровнями Ландау при кулоновском протон-протонном и протон-электронном рассеянии и сечения свободно-свободных переходов.

Изучено поведение всех рассмотренных характеристик системы при изменении

параметров – магнитной индукции и обобщённого импульса.

Данные результаты необходимы для построения уравнения состояния и вычисления непрозрачностей водородной плазмы в условиях, характерных для атмосфер нейтронных звёзд с сильным магнитным полем (эти задачи будут решаться в главах 5 и 7).

В ряде случаев в данной главе мы указывали способы возможного обобщения полученных результатов на случай, когда зарядовое число иона  $Z$  отличается от единицы. Однако в целом задача подобного обобщения ещё далека от решения. Краткий обзор имеющихся в литературе результатов был приведён в § 4.1.3. Рассмотрение взаимодействия излучения с атомом гелия в сильном магнитном поле проводилось также и в нашей статье [318]. Как и в большинстве работ, перечисленных в § 4.1.3, и в отличие от рассмотрения, проведённого в данной главе для водорода, основные расчёты в этой статье были основаны на модели покоящегося атома с бесконечно массивным ядром. Как и во многих этих работах, в основе метода лежало «одномерное» приближение Хартри–Фока. В отличие от большинства предыдущих работ, были рассчитаны не только уровни энергии, но и силы осцилляторов. В отличие от всех предыдущих работ, за исключением [250], были рассчитаны также сечения фотоионизации. При этом впервые были учтены двухэлектронные переходы и построены аппроксимационные формулы для сечений фотоионизации гелия в сильном магнитном поле. При этом оказалось, что приближённые формулы, найденные в статье [272] для сечений фотоионизации атома водорода в сильном магнитном поле, годятся и для гелия, если в них подходящим образом заменить параметры. Кроме того, на основе теории возмущений [270] и аналитических выражений для одноэлектронных матричных элементов оператора взаимодействия с излучением, полученных в [278] (см. § 4.4.1), были приближённо учтены эффекты, связанные с конечной массой ядра и с движением.

Тем не менее, необходимо признать, что перечисленные результаты для гелия (как и результаты других авторов для атомов и ионов с числом электронов больше единицы) – лишь первые грубые оценки, и требуются дальнейшие глубокие исследования и расчёты эффектов движения атомов и ионов в сильных магнитных полях для того, чтобы можно было строить детальные модели атмосфер, включающих такие атомы и ионы. В этом смысле атом водорода, рассмотренный в данной главе, представляет исключение, так как для него задача решена полностью.

## Глава 5

# Влияние сильного магнитного поля на термодинамические и кинетические свойства вещества

В данной главе мы рассмотрим уравнение состояния полностью ионизованной плазмы, уравнение состояния частично ионизованной водородной плазмы, а также электронный перенос тепла и заряда в плазме с сильным магнитным полем.

В § 5.1 рассмотрено уравнение состояния полностью ионизованной термодинамически равновесной неидеальной плазмы и выписаны прикладные формулы для вычисления всех вкладов (идеальных и неидеальных, классических и квантовых) в свободную энергию и производные термодинамические функции такой плазмы в произвольном, в том числе квантующем, магнитном поле. Оригинальными и новыми по сравнению с немагнитным случаем в этом разделе являются интерполяционная формула для вклада электронного взаимодействия в произвольном магнитном поле (§ 5.1.3), трактовка случая сильно вырожденных электронов с учётом магнитного квантования, а также разработанный на основе приведённых формул комплекс программ для быстрого расчёта термодинамических функций полностью ионизованной плазмы при произвольных значениях  $\rho$ ,  $B$  и  $T$ . В § 5.2 рассмотрено кинетическое равновесие заселённостей ионных уровней Ландау в полностью ионизованной электрон-ионной плазме в сильном магнитном поле без предположения о локальном термодинамическом равновесии (ЛТР) и определены условия наличия ЛТР. В § 5.3 разработана термодинамическая модель частично ионизованной водородной плазмы в сильном магнитном поле. Раздел 5.4 посвящён исследованию коэффициентов

электронного переноса тепла и заряда в квантующем магнитном поле и выводу аналитических формул для расчёта этих коэффициентов при произвольной величине магнитного поля.

## 5.1 Полностью ионизованная плазма в сильном магнитном поле при ЛТР

### 5.1.1 Идеальный газ ионов в магнитном поле

Рассмотрим невырожденные нерелятивистские ионы<sup>1</sup>. В этом случае

$$F_{\text{id}}^{(i)} = N_{\text{ion}} k_B T \{ \ln(2\pi n_{\text{ion}} \lambda_{\text{ion}} a_m^2 / Z) + \ln(1 - e^{-\zeta_i}) - 1 \} + N_{\text{ion}} \frac{\hbar \omega_{ci}}{2} + F_{\text{mag}}^{(i)}. \quad (5.1)$$

Последнее слагаемое возникает из-за энергии магнитного момента:

$$F_{\text{mag}}^{(i)} = -N_{\text{ion}} k_B T \ln \left[ \frac{\text{sh}(g_{\text{mag}}^{(i)} \zeta_i g_{\text{spin}}^{(i)} / 4)}{\text{sh}(g_{\text{mag}}^{(i)} \zeta_i / 4)} \right], \quad (5.2)$$

где  $g_{\text{spin}}^{(i)}$  – мультипликативность иона по спину, а  $g_{\text{mag}}^{(i)}$  – ионный  $g$ -factor ( $g_{\text{mag}}^{(i)} = 5,5857$  для протонов,  $-4,2552$  для ядер  ${}^3\text{He}$ ,  $1,4048$  для ядер  ${}^{13}\text{C}$ ,  $0,1809$  для ядер  ${}^{57}\text{Fe}$  в основном состоянии [321]). Для ионов с нулевым спином  $F_{\text{mag}}^{(i)} = 0$ , а для ионов со спином  $\frac{1}{2}$  выражение в квадратных скобках в (5.2) переходит в  $2 \text{ch}(g_{\text{mag}}^{(i)} \zeta_i / 4)$ .

Для давления ионов сохраняется соотношение  $P_{\text{id}}^{(i)} = n_{\text{ion}} k_B T$ , но выражения для внутренней энергии и теплоёмкости изменяются:

$$\frac{U_{\text{id}}^{(i)}}{N_{\text{ion}} k_B T} = \frac{1}{2} + \frac{\zeta_i}{e^{\zeta_i} - 1} + \frac{\zeta_i}{2} + u_{\text{mag}}^{(i)}, \quad (5.3)$$

$$\frac{C_{V,\text{id}}^{(i)}}{N_{\text{ion}} k_B} = \frac{1}{2} + \left( \frac{\zeta_i}{e^{\zeta_i} - 1} \right)^2 + c_{\text{mag}}^{(i)}. \quad (5.4)$$

Здесь слагаемые  $u_{\text{mag}}^{(i)}$  и  $c_{\text{mag}}^{(i)}$  происходят от  $F_{\text{mag}}^{(i)}$ :

$$u_{\text{mag}}^{(i)} = \frac{g_{\text{mag}}^{(i)} \zeta_i / 4}{\text{th}(g_{\text{mag}}^{(i)} \zeta_i / 4)} - \frac{g_{\text{mag}}^{(i)} \zeta_i g_{\text{spin}}^{(i)} / 4}{\text{th}(g_{\text{mag}}^{(i)} \zeta_i g_{\text{spin}}^{(i)} / 4)}, \quad (5.5)$$

$$c_{\text{mag}}^{(i)} = \left( \frac{g_{\text{mag}}^{(i)} \zeta_i / 4}{\text{sh}(g_{\text{mag}}^{(i)} \zeta_i / 4)} \right)^2 - \left( \frac{g_{\text{mag}}^{(i)} \zeta_i g_{\text{spin}}^{(i)} / 4}{\text{sh}(g_{\text{mag}}^{(i)} \zeta_i g_{\text{spin}}^{(i)} / 4)} \right)^2. \quad (5.6)$$

<sup>1</sup>Обсуждение уравнения состояния вырожденной релятивистской ядерной материи см., например, в статьях [319, 320].

Их вид упрощается при  $g_{\text{spin}}^{(i)} = 2$ :

$$u_{\text{mag}}^{(i)} = -\frac{g_{\text{mag}}^{(i)}\zeta_i}{4} \text{th} \left( \frac{g_{\text{mag}}^{(i)}\zeta_i}{4} \right), \quad c_{\text{mag}}^{(i)} = \left( \frac{g_{\text{mag}}^{(i)}\zeta_i/4}{\text{ch}(g_{\text{mag}}^{(i)}\zeta_i/4)} \right)^2. \quad (5.7)$$

### 5.1.2 Идеальный электронный газ

Термодинамические функции электронного газа в магнитном поле выводятся из первых принципов согласно [72]. Число квантовых состояний на интервал продольных импульсов  $\Delta p_z$  для электрона с заданными квантовыми числами  $(s, m, n)$  в объёме  $V$  равно  $V\Delta p_z/(4\pi^2 a_m^2 \hbar)$  [164], что позволяет выразить концентрацию электронов  $n_e$  и термодинамический потенциал  $\Omega = -PV$  как

$$n_e = \frac{1}{(2\pi a_m)^2 \hbar} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_{-\infty}^{\infty} f^{(0)}(\epsilon_e - \mu_e, T) dp_z, \quad (5.8)$$

$$\Omega = -\frac{Vk_B T}{2\pi^2 a_m^2 \hbar} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_0^{\infty} \ln \left( 1 + \exp \left[ \frac{\mu_e - \epsilon_e}{k_B T} \right] \right) dp_z, \quad (5.9)$$

где  $f^{(0)}$  – функция Ферми (3.3), а кинетическая энергия  $\epsilon_e$  определяется формулой (4.8). Интегрируя (5.8) по частям, получаем

$$n_e = \int_{m_e c^2}^{\infty} \mathcal{N}_B(\epsilon) \left( -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \epsilon_e} \right) d\epsilon_e, \quad (5.10)$$

где

$$\mathcal{N}_B(\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2 a_m^2 \hbar} \sum_{n=0}^{n_{\text{max}}} g_n p_n(\epsilon_e), \quad (5.11)$$

а  $n_{\text{max}}$  определяется формулой (4.10). Если  $n_{\text{max}} \gg 1$ , то сумму в (5.11) можно приближённо заменить интегралом, что приводит к классическому результату (3.95):

$$\mathcal{N}_0(\epsilon) = p_0^3(\epsilon_e)/(3\pi^2 \hbar^3). \quad (5.12)$$

Используя (5.10), можно записать квадрат волнового числа Томаса–Ферми (2.17) как

$$k_{\text{TF}}^2 = 4\pi e^2 \int_{m_e c^2}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{N}_B}{\partial \epsilon_e} \left( -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \epsilon_e} \right) d\epsilon_e = \frac{2\alpha_f}{\pi a_m^2} g_n \int_{m_e c^2}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_{\text{max}}(\epsilon_e)} \frac{\epsilon_e}{c p_n} \left( -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \epsilon_e} \right) d\epsilon_e. \quad (5.13)$$

Удобно переписать равенства (5.9) и (5.10) в виде

$$P_{\text{id}}^{(e)} = \frac{k_B T}{\pi^{3/2} a_m^2 \lambda_e} \sum_{n=0}^{\infty} g_n (1 + 2bn)^{1/4} I_{1/2}(\chi_n, \tau_n), \quad (5.14)$$

$$n_e = \frac{1}{\pi^{3/2} a_m^2 \lambda_e} \sum_{n=0}^{\infty} g_n (1 + 2bn)^{1/4} \frac{\partial I_{1/2}(\chi_n, \tau_n)}{\partial \chi_n}, \quad (5.15)$$

где введены обозначения  $\tau_n = t_r/\sqrt{1+2bn}$  и  $\chi_n = \chi_e + t_r^{-1} - \tau_n^{-1}$ .

Вычисление  $P_{\text{id}}^{(e)}$  и  $n_e$  с их производными при заданных  $\chi_e$  и  $t_r$  можно выполнить с помощью формул (5.14), (5.15) и тех же аналитических приближений для интегралов Ферми–Дирака, что и в случае немагнитного электронного газа (§ 2.3.1). Нормированный на температуру химический потенциал  $\chi_e$  при постоянных  $n_e$  и  $T$  следует определять путём численного решения уравнения (5.15). Тогда термодинамические функции второго порядка определяются при помощи соотношений (2.51) и (2.52).

Формулы (5.14) и (5.15) можно существенно упростить в различных предельных случаях, рассмотренных ниже.

### 5.1.2а Сильно квантующее магнитное поле

В сильно квантующем магнитном поле ферми-импульс электрона равен  $p_F = 2\pi^2 a_m^2 \hbar n_e$ . Следовательно,  $\epsilon_F = m_e c^2 \sqrt{1+x_B^2}$ , где

$$x_B = \frac{2x_r^3}{3b} \approx 30,2 \frac{Z}{A} \frac{\rho_6}{B_{12}} \quad (5.16)$$

– параметр релятивизма, модифицированный сильным полем, а  $x_r$  – тот же параметр в отсутствие магнитного поля, определяемый правой частью формулы (2.10). С увеличением  $n_e$  при фиксированном  $B$  вырожденные электроны начинают заполнять первый уровень Ландау, когда  $n_e$  достигает значения  $n_B = (\pi^2 \sqrt{2} a_m^3)^{-1}$ . Следовательно, поле является сильно квантующим при  $T \ll T_{\text{cycl}}$  и  $\rho < \rho_B$ , где  $T_{\text{cycl}} = \hbar \omega_c / k_B$  и

$$\rho_B = m_{\text{ion}} n_B / Z \approx 7045 (A/Z) B_{12}^{3/2} \text{ г см}^{-3}. \quad (5.17)$$

Условие  $\rho < \rho_B$  можно переписать как  $\gamma_r^2 > \frac{1}{2}(3\pi)^{2/3}$ . В этом режиме температура Ферми  $T_F$  уменьшается по сравнению с её значением  $T_{F0}$  при той же плотности в отсутствие магнитного поля:

$$T_F = \frac{\sqrt{1+x_B^2} - 1}{\gamma_r - 1} T_{F0}. \quad (5.18)$$

Здесь и далее через  $\gamma_r$  обозначается то значение фактора Лоренца электронов на поверхности Ферми, которое они имели бы при данной плотности в отсутствие магнитного поля ( $\gamma_r \equiv \sqrt{1+x_r^2}$ ). Соотношение (5.18) показывает, что сильно квантующее поле откладывает начало вырождения до более высоких значений  $n_e$ .

### 5.1.2b Неквантующее магнитное поле

Когда распределение электронов размазано по многим уровням Ландау, поле становится *неквантующим*. Это происходит при  $T \gg T_B$ , где

$$T_B = \begin{cases} T_{\text{cycl}}, & \text{если } \rho < \rho_B, \\ T_{\text{cycl}}/\gamma_r, & \text{если } \rho > \rho_B \end{cases} \quad (5.19)$$

(в предположении, что  $T \ll T_r$ ). В этом случае сумму по номерам уровней Ландау  $n$  можно приближённо заменить интегралом. Тогда, интегрируя по частям, можно привести выражения (5.14) и (5.15) к виду (2.32) и (2.33), соответственно. В приложениях магнитное поле можно приближённо трактовать как неквантующее также и при  $\rho \gg \rho_B$ , даже если  $T < T_B$ .

### 5.1.2c Невырожденные нерелятивистские электроны

Для невырожденных нерелятивистских электронов уравнение состояния выражается в элементарных функциях. Это выражение можно получить либо как частный случай формул § 5.1.1, путём замены в них  $\zeta_i$ ,  $g_{\text{mag}}^{(i)}$  и  $g_{\text{spin}}^{(i)}$  на  $\zeta_e$  и  $g_{\text{mag}}^{(e)} = g_{\text{spin}}^{(e)} = 2$ , либо из формул (5.14) и (5.15), учитывая, что в рассматриваемом пределе интегралы Ферми можно аппроксимировать как  $I_\nu(\chi_e) \approx \exp(\chi_e)\Gamma(\nu+1)$ , где  $\Gamma(x)$  – стандартная гамма-функция [225]. В результате получим (напр., [155])

$$\chi_e = \ln\left(\frac{n_e \lambda_e^3}{2}\right) + \ln\left(\frac{\text{th}(\zeta_e/2)}{\zeta_e/2}\right) \quad (5.20)$$

и  $P_{\text{id}}^{(e)} = n_e k_B T$ , откуда

$$F_{\text{id}}^{(e)} = N_e k_B T \left[ \ln\left(\frac{n_e \lambda_e^3}{2}\right) + \ln\left(\frac{\text{th}(\zeta_e/2)}{\zeta_e/2}\right) - 1 \right]. \quad (5.21)$$

В частности, если при этом поле является *сильно квантующим*, то последнее слагаемое в формуле (5.20) исчезает, и выражение (5.21) упрощается:

$$F_{\text{id}}^{(e)} = N_e k_B T \left[ \ln(2\pi a_m^2 \lambda_e n_e) - 1 \right]. \quad (5.22)$$

### 5.1.2d Сильно вырожденные электроны

Если электроны сильно вырождены, то можно использовать разложение термодинамических функций по степеням  $t_r^2$ , аналогичное формулам (2.53)–(2.58). Тогда удобно записать  $F_{\text{id}}^{(e)} \approx F_0^{(e)} + \Delta F$ , где

$$F_0^{(e)} = \epsilon_F N_e - P_0^{(e)} V \quad (5.23)$$

– свободная энергия при нулевой температуре. В последнем равенстве

$$P_0^{(e)} = \frac{P_r b}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} g_n (1 + 2bn) \mathcal{I}_{1/2}^{(0)}(\epsilon_n) \quad (5.24)$$

– давление электронов в магнитном поле при нулевой температуре,

$$\epsilon_n \equiv \tilde{\epsilon} - \sqrt{1 + 2bn} + 1, \quad (5.25)$$

$n_{\max}$  определяется формулой (4.10), а энергия Ферми  $\epsilon_F$  определяется из условия

$$n_e = \left( \frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \frac{b}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} g_n (1 + 2bn) \sqrt{1 + 2bn} \mathcal{I}_{1/2}^{(1)}(\epsilon_n). \quad (5.26)$$

Повторяя вывод § 2.3.1b для рассматриваемого здесь случая квантующего магнитного поля, находим, что формулу (2.54) для тепловой поправки к химическому потенциалу следует заменить на

$$\Delta \tilde{\epsilon}_F \approx \frac{\pi^2 t_r^2 \sum_{n=0}^{n_{\max}} g_n (1 + 2bn)^{-1/2} \mathcal{I}_{1/2}^{(3)}(\epsilon_n)}{6 \sum_{n=0}^{n_{\max}} g_n (1 + 2bn)^{1/2} \mathcal{I}_{1/2}^{(2)}(\epsilon_n)}. \quad (5.27)$$

Тепловая поправка к давлению равна

$$\Delta P = P_r b \sum_{n=0}^{n_{\max}} g_n (1 + 2bn) \left[ \frac{t_r^2}{12} \mathcal{I}_{1/2}^{(2)}(\epsilon_n) - \frac{\Delta \tilde{\epsilon}_F}{2\pi^2} \mathcal{I}_{1/2}^{(1)}(\epsilon_n) \right]. \quad (5.28)$$

Отсюда находим

$$\Delta U = -\Delta F = m_e c^2 N_e \Delta \tilde{\epsilon}_F + V \Delta P \quad (5.29)$$

и  $C_V^{(e)} \approx 2\Delta U/T$ .

В частном случае сильно квантующего магнитного поля имеем

$$F_0^{(e)}/V = \left( \sqrt{1 + x_B^2} - 1 \right) n_e - P_0^{(e)}, \quad (5.30)$$

где

$$P_0^{(e)} = \frac{P_r b}{(2\pi)^2} \left[ x_B \sqrt{1 + x_B^2} - \ln \left( x_B + \sqrt{1 + x_B^2} \right) \right]. \quad (5.31)$$

В нерелятивистском ( $x_B \ll 1$ ) и ультрарелятивистском ( $x_B \gg 1$ ) пределах  $P_0^{(e)} \simeq P_r b x_B^3 / 6\pi^2 \propto n_e^3$  и  $P_0^{(e)} \simeq P_r b x_B^2 / 4\pi^2 \propto n_e^2$ , соответственно. В сравнении с немагнитным выражением (2.57), зависимость давления от плотности круче, но величина давления меньше при всех плотностях, кроме непосредственной окрестности границы области сильного квантования  $n_e \approx n_B$ . Это означает, что уравнение состояния вырожденных электронов в сильно квантующем магнитном поле смягчается.



Для тепловых поправок к химическому потенциалу, давлению, внутренней и свободной энергиям и теплоёмкости в сильно квантующем магнитном поле получаем следующие соотношения:

$$\Delta\tilde{\epsilon}_F \approx \frac{\pi^2 t_r^2}{6\sqrt{1+x_B^2}x_B}, \quad \Delta P = P_r \frac{bt_r^2}{12} \frac{2+x_B^2}{\sqrt{1+x_B^2}x_B}, \quad (5.32)$$

$$\frac{\Delta U}{V} = -\frac{\Delta F}{V} = P_r \frac{bt_r^2}{12} \frac{\sqrt{1+x_B^2}}{x_B}, \quad \frac{C_V^{(e)}}{N_e k_B} \approx \frac{\pi^2 t_r}{3} \frac{\sqrt{1+x_B^2}}{x_B^2}. \quad (5.33)$$

### 5.1.3 Обменно-корреляционное взаимодействие электронов

Влияние магнитного поля на вклад в свободную энергию, возникающий из-за обменно-корреляционного взаимодействия между электронами, изучался в предшествующих работах либо в режиме низких температур и высоких плотностей [322, 323], либо при низких плотностях [324–326]. В статье [155] мы проанализировали результаты этих исследований и на этой основе предложили аналитическую модификацию формулы (2.124) для  $F_{ee}$ , позволяющую расширить её область применимости на случай наличия квантующего магнитного поля. Состоит она в том, что в коэффициентах (2.125)–(2.129) выражения (2.124) вместо параметра  $\theta \equiv T/T_F$  подставляется эффективный параметр вырождения  $\theta^*$ , определяемый формулами

$$\theta^* = \theta_0 \frac{1 + \theta_m/\theta_0}{1 + \phi(\zeta_e) \exp(-\theta_m^{-1}) \theta_m/\theta_0}, \quad \phi(\zeta_e) = \frac{\text{ch } \zeta_e}{\text{ch}^2(\zeta_e/2)} \frac{\text{th}(\zeta_e/2)}{\zeta_e/2} \frac{\text{arth } \xi_e}{\xi_e} \quad (5.34)$$

и  $\xi_e = [1 - (2/\zeta_e) \text{th}(\zeta_e/2)]^{1/2}$ . Здесь

$$\theta_m = \frac{8\gamma^2 r_s^5}{9\pi^2 \Gamma_e} = 0,166 \theta_0 \gamma^2 r_s^4 \quad (5.35)$$

– выражение для отношения  $T/T_F$  в сильно квантующем магнитном поле, а  $\theta_0$  – то значение, которое имело бы это отношение при  $B = 0$  и при той же плотности и температуре.

Скейлинг (5.34) воспроизводит все известные предельные случаи: (1) при  $r_s \gg 1$  воспроизводится выражение для корреляционного вклада в свободную энергию классической однокомпонентной плазмы, не зависящее от значения магнитной индукции; (2) в случае неквантующего поля  $\gamma r_s^2 \ll 1$ , поэтому  $\theta^* = \theta_0$ , и воспроизводятся результаты [127], представленные в § 2.3.8; (3) в случае сильно квантующего поля и вырожденных электронов,  $\gamma r_s^2 \gg 1$  и  $\theta_m \ll 1$ , получаем правильное значение параметра вырождения  $\theta^* = \theta_m$ ; и (4) в случае сильно квантующего поля и невырожденных электронов,  $\gamma r_s^2 \gg 1$  и  $\theta_m \gg 1$ , воспроизводятся результаты работы [326] в той области, к которой они применимы, то есть при  $(\Gamma_e r_s)^{-1} \approx 3,16 T_6 \gtrsim 1$ .

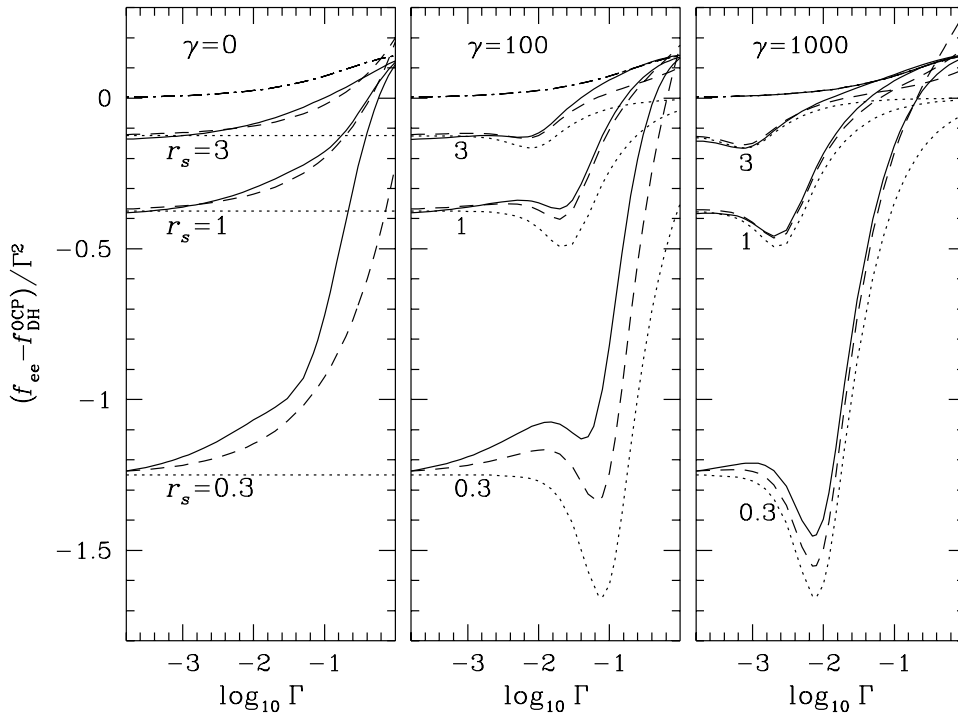


Рис. 5.1: Отличие нормированной свободной энергии электронов от приближения Дебая–Хюккеля,  $(f_{ee} - f_{DH}^{OCP})/\Gamma_e^2$ , в зависимости от кулоновского параметра  $\Gamma_e$  при трёх значениях магнитного поля:  $B = 0$  (левый рисунок),  $B = 2,35 \times 10^{11}$  Гс (средний рисунок) и  $B = 2,35 \times 10^{12}$  Гс (правый рисунок) и при трёх значениях параметра плотности  $r_s$  (указаны около кривых). Аналитическая аппроксимация, описанная в тексте – сплошные кривые; высокотемпературное разложение до  $e^2$  и до  $e^4$  – точечный и штриховой пунктир, соответственно; классическая ОСР – штрихпунктир. Из статьи [155].

Рисунок 5.1 демонстрирует применимость принятой нами модификации  $F_{ee}$  при  $\Gamma_e < 1$  для трёх значений параметра плотности  $r_s$ , для которых квантовые эффекты могли бы существенно повлиять на  $F_{ex}$  (2.29). Показано *отличие* функции  $f_{ee}$  от её значений в приближении Дебая–Хюккеля для ОСР, для удобства поделенное на  $\Gamma_e^2$ . Штрихпунктир соответствует классической ОСР согласно (2.64), точечный и штриховой пунктиры соответствуют высокотемпературному разложению – поправкам Хартри–Фока ( $\propto e^2$ ) и Монтролла–Уорда ( $\propto e^4$ ) согласно [326], а сплошные кривые – нашей аппроксимации.

В левом окне рисунка показан случай отсутствия магнитного поля. В этом случае сплошная кривая отвечает формуле (2.124). Область согласия этой формулы с высокотемпературным разложением можно рассматривать как область применимости последнего. При больших  $r_s$  она ограничена условием  $\sqrt{\Gamma_e r_s} \ll 1$ , а при малых  $r_s$  – условием  $\sqrt{\Gamma_e} \ll r_s$ .

Среднее и правое окна рисунка демонстрируют изменения  $F_{ee}$  в магнитном поле для двух значений  $\gamma - 10^2$  и  $10^3$ . Из рисунков видно, что формула (2.124), масштабированная согласно (5.34), удовлетворительно воспроизводит высокотемпературное разложение в области его применимости.

#### 5.1.4 Ион-ионные и электрон-ионные корреляции

На основе теории линейного отклика в пределе Томаса–Ферми в работе [323] была оценена энергия поляризации электронов для плотной плазмы в сильно квантующем магнитном поле при нулевой температуре в предположении, что ионы остаются классическими и не затрагиваются действием магнитного поля. Сравнение с аналогичным результатом в отсутствие магнитного поля показывает [155], что сильно квантующее поле ( $\gamma r_s^2 > 2,23$ ) увеличивает энергию поляризации при высоких плотностях ( $r_s \ll 1$ ) на множитель  $0,8846 \gamma^2 r_s^4$ . При конечной температуре, а также для случая, когда магнитное поле не является сильно квантующим, подобные исследования не проводились.

Дальнейшее изменение вклада электрон-ионных и ион-ионных корреляций в свободную энергию может быть связано с магнитным квантованием движения ионов. При этом следует различать жидкую и кристаллическую фазы. Обзоры соответствующих работ даны в диссертации Д. А. Байко [102] и в § 4.1.6 нашей монографии [5]. Кроме того, в статье [155] мы предложили аналитическую аппроксимацию, описывающую влияние квантующего магнитного поля на  $F_{ie}$  при слабой вырожденности электронов и слабом кулоновском взаимодействии. Однако ограниченность имеющихся результатов не позволяет построить аппроксимацию, охватывающую все практически важные случаи, аналогичную той, что описана в предыдущем параграфе для  $F_{ee}$ . Поэтому в настоящее время в нашем комплексе компьютерных программ для расчёта уравнения состояния используются немагнитные выражения для  $F_{ii}$  и  $F_{ie}$ .

#### 5.1.5 Магнитные осцилляции; общее обсуждение

В формулах § 5.1.2 суммирование по уровням Ландау  $n$  отражает последовательное заполнение всё более высоких уровней Ландау с увеличением плотности, что приводит к магнитным квантовым осцилляциям термодинамических и кинетических функций плазмы. Частными случаями подобных осцилляций являются эффекты де Гааза–ван Альфена (напр., [327], § 63) и Шубникова–де Гааза (напр., [210], § 90). В

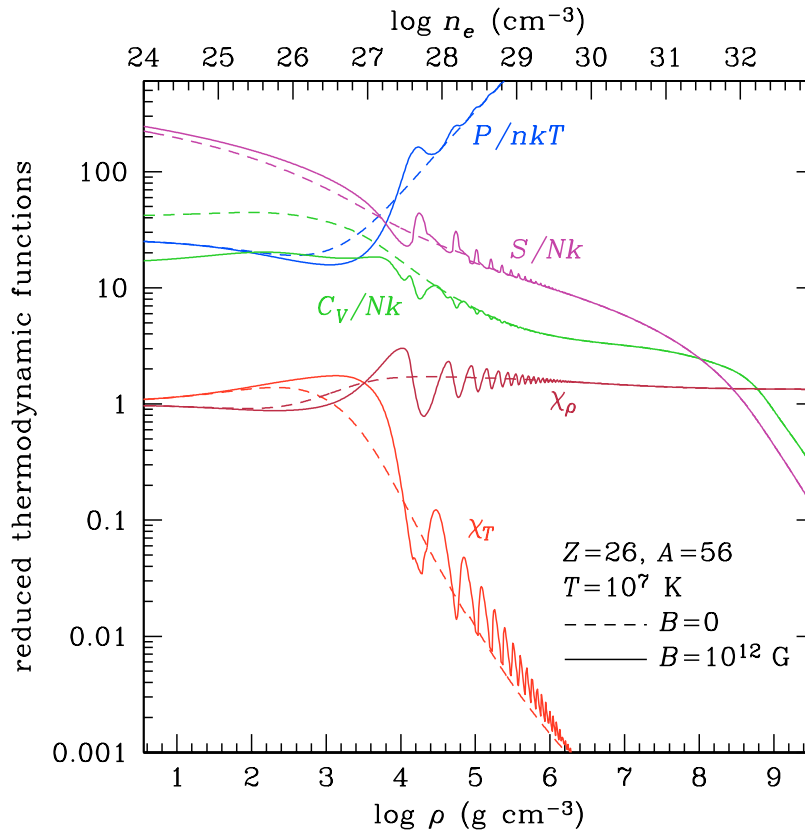


Рис. 5.2: Нормированные термодинамические функции:  $P/n_{\text{ion}}k_B T$ ,  $S/N_{\text{ion}}k_B$ ,  $C_V/N_{\text{ion}}k_B$ ,  $\chi_\rho$  и  $\chi_T$  – для полностью ионизованной неидеальной немагнитной (пунктир) и магнитоактивной ( $B = 10^{12}$  К, сплошные кривые) плазмы  $^{56}\text{Fe}$  при  $T = 10^7$  К. Из статьи [85].

слабо квантующем магнитном поле эти осцилляции происходят, как правило, вокруг тех значений соответствующих величин, которые получаются в пренебрежении квантованием Ландау. Для термодинамических функций первого порядка ( $P$ ,  $U$ ,  $\mu_e$ ), осцилляции относительно слабы, а для термодинамических функций второго порядка ( $\chi_\rho$ ,  $\chi_T$ ,  $C_V$ ,  $C_P$ ,  $k_{\text{TF}}$ ) они сильнее. Осцилляции сглаживаются тепловым усреднением – они тем более плавные, чем выше температура, – и столкновительным уширением уровней Ландау (см. [238, 239]).

Примеры магнитных осцилляций различных термодинамических функций показаны на рис. 5.2. Этот же рисунок можно рассматривать и как иллюстрацию работы компьютерной программы на Фортране, реализующей вышеописанные аналитические приближения для вычисления различных идеальных и неидеальных вкладов в свободную энергию полностью ионизованной плазмы в произвольном магнитном поле, а также вычисляемых на этой основе термодинамических функций первого и вто-

рого порядка. Параметры плазмы для этого рисунка выбраны типичными для внешних оболочек нейтронной звезды: рассматривается полностью ионизованная плазма  $^{56}\text{Fe}$  при  $T = 10^7$  К и  $B = 10^{12}$  Гс. Кривыми на рисунке показаны изотермы нормированных (обезразмеренных) давления  $p = P/n_{\text{ion}}k_B T$ , энтропии  $S/N_{\text{ion}}k_B$ , теплоёмкости при постоянном объёме  $c_V = C_V/N_{\text{ion}}k_B$  и логарифмических производных давления по плотности  $\chi_\rho$  и по температуре  $\chi_T$ . Для сравнения пунктиром нанесены те же изотермы в отсутствие магнитного поля.

При низких плотностях воспроизводятся значения, получаемые для идеального бoльцмановского газа:  $p = 1 + Z = 27$ ,  $\chi_\rho = \chi_T = 1$ ,  $c_V = 1 + 3Z/2$  при  $B = 0$ , и  $c_V = 1 + Z/2$  при  $B = 10^{12}$  Гс. Последнее отличие связано с тем обстоятельством, что магнитное поле  $B = 10^{12}$  Гс при низкой плотности на рис. 5.2 является сильно квантующим для электронов, и поэтому их свободное движение ограничено одной степенью свободы – направлением вдоль магнитного поля, так что упомянутый бoльцмановский газ является одномерным. Математически это связано с обсуждавшимся в § 5.1.2 поведением последнего слагаемого в формуле (5.20) для  $\chi_e$ , которое не затрагивает давление, но приводит с увеличением  $B$  к уменьшению внутренней энергии от  $\frac{3}{2}k_B T$  до  $\frac{1}{2}k_B T$  на частицу.

С увеличением плотности давление сначала уменьшается по сравнению с его значением для идеального газа из-за кулоновского взаимодействия в плазме, а затем увеличивается из-за вырождения электронов. В магнитном поле это увеличение начинается позже, чем в отсутствие поля, что иллюстрирует отложенное начало вырождения, упомянутое в § 5.1.2. Когда плотность превышает  $\rho_B \approx 1,5 \times 10^4$  г см $^{-3}$ , давление постепенно приближается к своему немагнитному значению, испытывая при этом магнитные осцилляции, наложенные на общий тренд. Другие термодинамические функции также с увеличением плотности постепенно приближаются к своим немагнитным значениям, испытывая при этом магнитные осцилляции.

В условиях рисунка 5.2 плазма затвердевает при  $\rho \approx 8,25 \times 10^4$  г см $^{-3}$ . С дальнейшим увеличением плотности ( $\rho \gtrsim 10^6$ ) электронное вырождение настолько усиливается, что давление определяется почти исключительно электронами. Поскольку при этом удельная энергия и давление всё меньше зависят от  $T$ , то  $\chi_T$  уменьшается, а нормированная теплоёмкость приближается к значению  $c_V = 3$ , определяемому ионами в классическом кристалле. В дальнейшем, при  $\rho \gtrsim 10^8$  г см $^{-3}$ , движение ионов становится квантованным ( $T_{\text{pi}} \approx 3,64 \times 10^7 [\rho/10^8 \text{ г см}^{-3}]^{1/2}$  К  $\gg T$ ), что ведёт к быстрому спаду теплоёмкости и энтропии.

## 5.2 Заселённости уровней Ландау вне рамок ЛТР

При исследовании атмосфер нейтронных звёзд с сильным магнитным полем обычно предполагают, что все электроны находятся на основном уровне Ландау, и пренебрегают безызлучательными переходами между уровнями, потому что при  $B \gtrsim 1011$  Гс энергия первого уровня Ландау  $\hbar\omega_c = 11,577 B_{12}$  кэВ намного превышает тепловую кинетическую энергию, а скорость спонтанного распада возбуждённых уровней намного превышает частоту кулоновских столкновений (напр., [307]). Однако для протонов расстояние между уровнями Ландау и скорость их спонтанного распада намного меньше, поэтому ситуация не столь очевидна. В статьях [155, 274, 279, 281, 315, 317] и других предполагалось, что протоны имеют больцмановское распределение по своим уровням Ландау. В данном параграфе, следуя статье [239], мы рассчитаем статистическое распределение протонов по уровням Ландау без предположения о ЛТР и выясним, при каких условиях это предположение справедливо.

Для расчёта статистического равновесия необходимо знать вероятности радиативных и безызлучательных переходов. Последние были получены в § 4.3, а к вычислению радиативных вероятностей мы сейчас приступим.

### 5.2.1 Вероятности радиативных переходов между уровнями Ландау

#### 5.2.1a Предварительные сведения и обозначения

Как известно (напр., [212]), электромагнитное излучение распространяется в замагниченной плазме в форме двух нормальных мод  $j = 1, 2$  с векторами поляризации  $e^j(\omega, \mathbf{n})$ , где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, направленный вдоль волнового вектора. Следовательно, скорости радиативных переходов зависят не только от круговой частоты  $\omega$ , но и от  $j$  и  $\mathbf{n}$ .

Пусть  $\Gamma_{NN'}^A$ ,  $\Gamma_{NN'}^B$ , и  $\hat{\Gamma}_{NN'}^B$  – частоты переходов с уровня  $N$  на  $N'$  в результате спонтанного излучения, поглощения фотона и вынужденного излучения, соответственно.<sup>2</sup> Эти вероятности определим как *полные* (для обеих поляризаций, проинтегрированные по частоте и углу) вероятности переходов в единицу времени для одного занятого начального уровня. Их можно выразить через коэффициенты Эйнштейна  $A_{NN'}$  и

---

<sup>2</sup>Здесь  $N$  и  $N'$  могут принимать любые значения. Например, возможно свободно-свободное поглощение с  $N' \leq N$  (т.е., поглощение фотона с одновременным переходом протона на более низкий уровень) наряду со случаем  $N' > N$ .

$\hat{B}_{NN'}$  (для излучения) или  $B_{NN'}$  (для поглощения). Эти коэффициенты определяются в литературе по-разному (напр., ср. [212], [328] и [329]). Мы примем определение [329], при котором число фотонов с угловыми частотами в интервале  $d\omega$  волновыми векторами в элементе телесного угла  $d\mathbf{n}$ , спонтанно излучённых в единице объёма за единицу времени, равно  $n_N A_{NN'} d\omega d\mathbf{n}$ , а число фотонов, испущенных или поглощённых под действием излучения с лучевой интенсивностью  $I_\omega$ , равно  $n_N \hat{B}_{NN'} I_\omega d\omega d\mathbf{n}$  или  $n_N B_{NN'} I_\omega d\omega d\mathbf{n}$ , соответственно. Это определение (или аналогичное в [212], но не то, которое дано в [328]) подходит для рассмотрения случая, когда излучение поляризовано и анизотропно. Тогда

$$\Gamma_{NN'}^B = \sum_{j=1,2} \int d\mathbf{n} \int d\omega B_{NN'}(j, \omega, \mathbf{n}) I_{\omega,j}(\mathbf{n}), \quad (5.36)$$

$$\Gamma_{NN'}^A = \sum_{j=1,2} \int d\mathbf{n} \int d\omega A_{NN'}(j, \omega, \mathbf{n}), \quad (5.37)$$

а выражение для  $\hat{\Gamma}_{NN'}^B$  полностью аналогично (5.36).

Величины  $A_{NN'}$ ,  $\hat{B}_{NN'}$  и  $B_{N'N}$  связаны соотношениями Эйнштейна<sup>3</sup>

$$\hat{B}_{NN'} = B_{N'N}, \quad A_{NN'} = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} B_{N'N}. \quad (5.38)$$

Из первого соотношения следует, что вероятность вынужденного излучения равна вероятности поглощения фотона при перестановке начального и конечного уровней:  $\hat{\Gamma}_{NN'}^B = \Gamma_{N'N}^B$ .

Вероятности спонтанного циклотронного излучения были выведены в [330] (см. также [304, 331–333] и ссылки там). В нерелятивистском пределе ( $Nb_1 \ll 1$ ), они пропорциональны величине  $b_1^{N-N'+1}$ , помноженной на комбинаторный фактор. Хотя этот фактор может быть велик, переходы  $N \rightarrow N' = N - 1$  всё же преобладают в нерелятивистском режиме. Соответствующие частоты переходов равны  $\Gamma_{N,N-1}^A = N\Gamma_{r,p}$ , где

$$\Gamma_{r,p} = \frac{4}{3} \frac{e^2 \omega_{ci}^2}{m_p c^3} \quad (5.39)$$

– естественная ширина протонной циклотронной линии.

Переходы с переворотом спина неважны в нерелятивистском случае, так как их вероятности содержат дополнительный множитель  $b_1$  по сравнению с доминирующими переходами, при которых проекция спина не меняется (напр., ср. [331]).

<sup>3</sup>В формуле (5.38) мы пренебрегли различием групповой и фазовой скоростей. Соотношения Эйнштейна с учётом этого различия даны, напр., в [212, 329]. Учёт этого отличия потребовал бы соответствующего изменения выражений для сечения свободно-свободного поглощения.

Коэффициент Эйнштейна  $B_{NN'}$  даётся соотношением

$$B_{NN'}(j, \omega, \mathbf{n}) = \sigma_{NN'}(j, \omega, \mathbf{n})/\hbar\omega, \quad (5.40)$$

где  $\sigma_{NN'}$  – парциальное сечение фотоионизации для перехода  $N \rightarrow N'$ . Формула (5.40) следует непосредственно из определения  $B_{NN'}$ . Благодаря соотношениям Эйнштейна она также позволяет выразить  $\Gamma_{NN'}^A$  через парциальные сечения свободно-свободного поглощения фотонов.

Вектор поляризации каждой из мод  $\mathbf{e}^j(\omega, \mathbf{n})$  имеет в циклических координатах (4.39) компоненты  $e_\alpha^j$ ,  $\alpha = 0, \pm 1$ . В дипольном приближении из (4.160) следует

$$\sigma(j, \omega, \mathbf{n}) = \sum_{\alpha=-1}^1 \sigma_\alpha(\omega) |e_\alpha^j(\omega, \mathbf{n})|^2. \quad (5.41)$$

Из формул (5.37), (5.38) и (5.40), находим

$$\Gamma_{N'N}^A = \sum_{j=1,2} \int d\mathbf{n} \int \frac{\omega^2 d\omega}{8\pi^3 c^2} \sigma_{NN'}(j, \omega, \mathbf{n}). \quad (5.42)$$

Как отмечено в сноске 3 на стр. 253, мы пренебрегаем различием групповой и фазовой скоростей. Это равносильно «полупоперечному приближению» [305], при котором предполагается, что показатели преломления плазмы близки к единице, и  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}^j \approx 0$ . В этом приближении выполняется соотношение  $\sum_{j=1,2} A_\alpha^j = 1$ , где

$$A_\alpha^j \equiv \frac{3}{8\pi} \int |e_\alpha^j(\omega, \mathbf{n})|^2 d\mathbf{n}. \quad (5.43)$$

При этом формулы (5.41) и (5.42) дают

$$\Gamma_{N'N}^A = \sum_\alpha \int \frac{\omega^2 d\omega}{3\pi^2 c^2} \sigma_{\alpha, NN'}(\omega). \quad (5.44)$$

Пусть переходу  $N \rightarrow N'$  отвечает линия поглощения с профилем  $\phi(\Delta\omega)$ , нормированным условием (4.164), который обладает резким пиком при  $\omega = \omega_0$  с характерной полушириной  $\nu \ll \omega_0$  для поляризации  $\alpha$ . При  $\omega \sim \omega_0$ , запишем сечение в виде  $\sigma_{\alpha, NN'}(\omega) = 2\nu\bar{\sigma}_{\alpha, NN'}\phi(\omega)$ . Тогда выражение (5.44) даёт

$$\Gamma_{N'N}^A \approx \frac{2\nu\bar{\sigma}_{\alpha, NN'}\omega_0^2}{3\pi^2 c^2}. \quad (5.45)$$

Предположим вдобавок, что  $I_{\omega, j}(\mathbf{n})$  в (5.36) можно заменить на среднее по углам, которое мы обозначим  $\bar{I}_{\omega, j}$  (такая замена является точной в диффузионном приближении). Тогда, применяя (5.40) и (5.43), получим

$$\Gamma_{N'N}^B = \hat{\Gamma}_{N'N}^B = \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega_0^3} \Gamma_{N'N}^A \sum_{j=1,2} A_\alpha^j J_j, \quad (5.46)$$



где

$$J_j \equiv \int \bar{I}_{\omega,j} \phi_j(\omega) d\omega. \quad (5.47)$$

### 5.2.1b Сечение протонного циклотронного резонанса

**1. Свободно-свободные переходы.** Спектральное сечение свободно-свободного поглощения определяется формулами (4.218), (4.219) и (4.231). Представим его как сумму слагаемых, соответствующих переходам протона с уровня Ландау  $N$  на уровень  $N'$ :

$$\sigma_{\alpha}^{\text{ff}}(\omega) = \sum_N f_N^p \sum_{N'} \sigma_{\alpha,NN'}^{\text{ff}}(\omega), \quad (5.48)$$

где  $f_N^p$  – доля ионов на уровне Ландау  $N$ , и

$$\sigma_{\alpha,NN'}^{\text{ff}}(\omega) = \frac{4\pi e^2}{m_e c} \frac{\omega^2 \sum_n f_n^e \sum_{n'} \nu_{n,N;n',N'}^{\text{ff},\alpha}(\omega)}{(\omega + \alpha\omega_{\text{ci}})^2 (\omega - \alpha\omega_{\text{ci}})^2 + \omega^2 \tilde{\nu}_{\alpha}^2(\omega)}, \quad (5.49)$$

а  $f_n^e$  – доля электронов на своём уровне Ландау  $n$ ,  $\tilde{\nu}_{\alpha}(\omega)$  – фактор затухания.

При  $\omega \sim \omega_{\text{ci}}$  и  $\alpha = +1$  имеется резонанс:

$$\sigma_{+1}^{\text{ff}}(\omega) \approx \frac{4\pi e^2}{m_p c} \frac{\nu_p^{\text{ff}}}{(\omega - \omega_{\text{ci}})^2 + \nu^2}, \quad (5.50)$$

где  $\nu = (m_e/m_p)\tilde{\nu}_+(\omega_{\text{ci}}) = \hat{\nu}_p + \nu_p^{\text{ff}}$ , причём  $\hat{\nu}_p = \nu_p(\omega_{\text{ci}}) = \Gamma_{r,p}/2$  – радиативная полуширина, а  $\nu_p^{\text{ff}}$  – эффективная частота электрон-протонных столкновений с поглощением фотона:

$$\nu_p^{\text{ff}} = (m_e/m_p) \nu_{+1}^{\text{ff}}(\omega_{\text{ci}}), \quad (5.51)$$

где для  $\nu_{+1}^{\text{ff}}(\omega)$  применяется формула (4.219). Из (5.44) при условии  $\nu \ll \omega_{\text{ci}}$  получим частоту переходов  $N' \rightarrow N$ , вызванных резонансным свободно-свободным излучением:

$$\Gamma_{+1,N'N}^{\text{ff}} \approx \frac{4\sqrt{2\pi}}{\tau_0} \left(\frac{m_p}{m_e}\right)^{1/2} n_e a_m^3 \frac{\sqrt{\zeta_i}}{3\pi} \int \frac{\Gamma_{r,p} \Lambda_{0,N;0,N'}^{\text{ff},+1}}{(\omega - \omega_{\text{ci}})^2 + \nu^2} d\omega, \quad (5.52)$$

где  $\Lambda_{n,N;n',N'}^{\text{ff},+1}$  определяется формулой (4.226). Этот результат здесь записан в той же форме, что и уравнение (4.127b), для простоты их сравнения, которое показывает, что по порядку величины

$$\Gamma^{\text{ff}}/\Gamma^{C(pe)} \sim \Gamma_{r,p}/\nu. \quad (5.53)$$

Фактор затухания  $\nu$  обсудим чуть ниже; сейчас отметим только, что отношение  $\Gamma^{\text{ff}}/\Gamma^{C(pe)}$  не может быть велико, поскольку  $\nu \geq \Gamma_{r,p}/2$ .

**2. Рассеяние.** Сечение рассеяния фотонов на протонах определяется формулой (4.183). Определение фактора затухания  $\nu_{i,\alpha}$  в этой формуле является нетривиальной задачей. Вообще говоря, она требует трактовки вне рамок теории возмущений (напр., [335]). Однако можно оценить  $\nu(\omega)$  на основе принципа соответствия с классической физикой.

Наивная оценка  $\nu$  как суммы двух полуширин привела бы к замене (4.183) на сумму двух лоренцевских профилей для разных протонных уровней  $N$ . Ясно, что это неверно. Причина в том, что такая оценка игнорирует когерентность переходов между эквидистантными уровнями. Интерференция амплитуд переходов между разными состояниями приводит к появлению общего фактора затухания для всех переходов, имеющих одну и ту же частоту (напр., [335], Ex. 15). Поэтому в (4.183) следует подставлять тот же фактор, что и в (5.50),  $\nu = \hat{\nu}_p + \nu_p^{\text{ff}}$  при  $\omega \approx \omega_{\text{ci}}$ . Зависимость  $\nu$  от частоты подсказывает аналогия со случаем классического осциллятора [336]:

$$\nu(\omega) = \nu_p(\omega) + (m_e/m_p) \nu_{+1}^{\text{ff}}(\omega), \quad \nu_p(\omega) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_p c^3} \omega^2. \quad (5.54)$$

Таким образом мы приходим к фактору затухания, который ранее был дан без обсуждения в статье [313]. Очевидно, что в точке резонанса  $\nu_p(\omega_{\text{ci}}) = \hat{\nu}_p = \Gamma_{r,p}/2$ .

Заметим, что для фактора затухания при свободно-свободном поглощении надо учесть, кроме  $\nu_p(\omega)$ , также и  $\nu_e(\omega) = (2/3)(e^2/m_e c^3) \omega^2$ . Тогда слагаемые в формуле (4.231), содержащие множитель  $\alpha$ , взаимно уничтожаются вблизи резонансной частоты, и мы получаем

$$\tilde{\nu}_\alpha(\omega) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_* c^3} \omega^2 + \nu_\alpha^{\text{ff}}(\omega). \quad (5.55)$$

## 5.2.2 Статистическое равновесие

### 5.2.2a Двухуровневая система

Двухуровневая модель допускает аналитическое решение и потому полезна для понимания основных черт формирования статистического равновесия. Она может быть также применена к описанию формирования протонной циклотронной линии в случае, когда основной уровень Ландау заселён намного больше, чем возбуждённые.

Статистическое равновесие заселённостей двух протонных уровней Ландау определяется уравнением

$$n_0 (\Gamma_{01}^B + \Gamma_{01}^C) = n_1 (\Gamma_{10}^A + \hat{\Gamma}_{10}^B + \Gamma_{10}^C). \quad (5.56)$$

Рассмотрим сначала случай, когда протон-протонные столкновения не играют роли. Тогда, учитывая формулу (5.46) и соотношение  $\Gamma_{01}^{C(pe)} = \Gamma_{10}^{C(pe)} e^{-\zeta_i}$  (4.129), уравнение (5.56) можно записать в виде

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-\zeta_i} \frac{1 + \epsilon R / (1 - e^{-\zeta_i})}{1 + R + \epsilon R / (e^{\zeta_i} - 1)}, \quad R \equiv \frac{\Gamma_{r,p}}{\Gamma_{10}^C} \quad (5.57)$$

где параметр  $\epsilon = 2 \sum_j A_+^j J_j / B_\omega$  (при  $\omega = \omega_{ci}$ ) характеризует отношение эффективной плотности энергии в линии к её равновесному значению

$$B_\omega(T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{e^{\hbar \omega / T} - 1}, \quad (5.58)$$

(величины  $A_+^j$  и  $J_j$  определены в § 5.2.1а).

Отметим три важных предельных случая.

1. Если  $R \ll 1$  или  $\epsilon = 1$ , то воспроизводится больцмановское отношение  $n_1/n_0 = e^{-\zeta_i}$ . Это ситуация ЛТР, при которой коэффициенты поглощения и испускания фотонов связаны законом Кирхгофа.
2. Если  $R \gg 1$  и  $\epsilon R \ll 1$ , то  $n_1/n_0 = e^{-\zeta_i}/R = \Gamma_{01}^C/\Gamma_{r,p}$ , то есть возбуждение уровня  $N = 1$  – столкновительное, а релаксация – радиативная.
3. Если  $\epsilon \ll 1$  и  $\epsilon R \gg 1$ , то уровень  $N = 1$  возбуждается путём поглощения фотона и релаксирует посредством спонтанного излучения. В этом случае  $n_1/n_0 = (8\pi^3 c^2 / \hbar \omega^3) \sum_j A_+^j J_j$ , и

$$n_1 \sum_j \int d\mathbf{n} A_{10}(j, \omega, \mathbf{n}) = n_0 \sum_j \int d\mathbf{n} B_{01}(j, \omega, \mathbf{n}) \bar{I}_{\omega,j}.$$

При этом оба процесса – радиативного возбуждения и релаксации – можно трактовать совместно как некогерентное рассеяние. Последняя ситуация наиболее типична для электронного циклотронного резонанса в сильных магнитных полях [305, 307, 337], но не для протонного резонанса.

С учётом протон-протонных столкновений (§ 4.3.4), из (5.56) получаем

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{1}{2 + 2c_{10}^{(1)}} \left\{ [(1 + c_{10}^{(0)} - c_{01}^{(1)} - x_1)^2 + 4(1 + c_{10}^{(1)})(x_1 + c_{01}^{(0)})]^{1/2} - (1 + c_{10}^{(0)} - c_{01}^{(1)} - x_1) \right\}, \quad (5.59)$$

где

$$c_{NN'}^{(N_2)} = \frac{1}{2} \frac{n_{\text{ion}} \langle v_z \sigma_{NN'}^{(N_2)} \rangle}{\Gamma_{10}^A + \Gamma_{01}^B + \Gamma_{10}^{C(pe)}}, \quad (5.60)$$

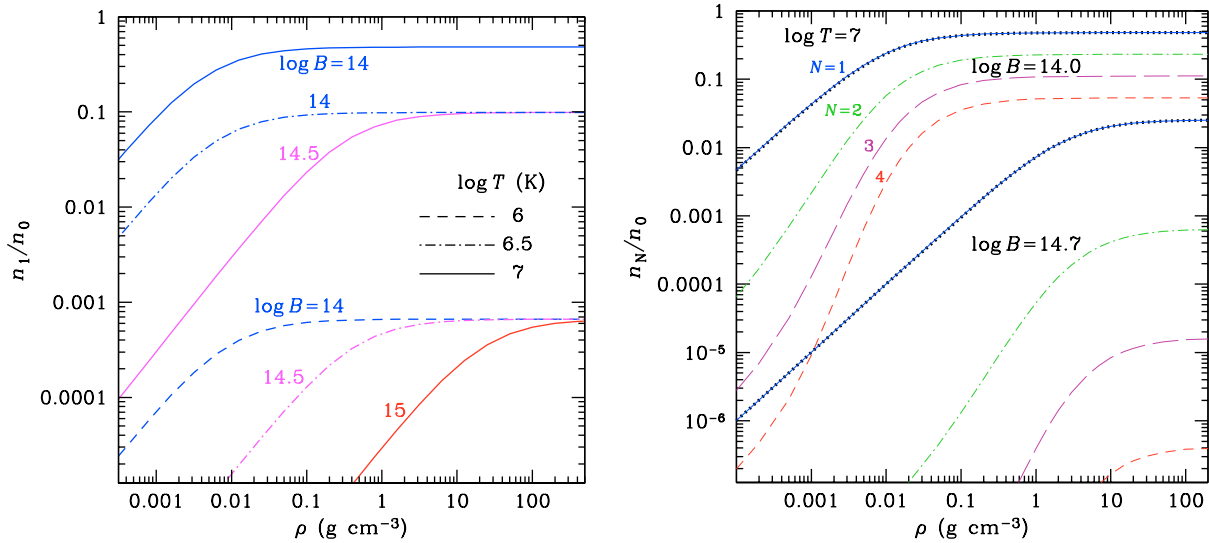


Рис. 5.3: *Левый рисунок*: Заселённость протонного уровня Ландау  $N = 1$  относительно  $N = 0$  как функция плотности при различных значениях  $B$  и  $T$ . *Правый рисунок*: Заселённости уровней  $N = 1, 2, 3, 4$  относительно  $N = 0$  как функции плотности при  $T = 10^7$  К и двух значениях  $B$ . Сплошные кривые показывают заселённость уровня  $N = 1$ , штрихпунктир –  $N = 2$ , длинные штрихи –  $N = 3$ , короткие штрихи –  $N = 4$ . Точечный пунктир соответствует отношению  $n_1/n_0$  в двухуровневой модели.

фактор  $\langle v_2 \sigma_{NN'}^{(N_2)} \rangle$  даётся формулой (4.133), а  $x_1$  определяется формулой (5.57), которая воспроизводится при  $c_{NN'}^{(0,1)} \rightarrow 0$ .

В левом окне на рис. 5.3 в логарифмическом масштабе показана относительная заселённость возбуждённого протонного уровня ( $N = 1$ ) как функция плотности, согласно формуле (5.59), для нескольких значений  $B$  и  $T$ . Здесь предполагалось, что вынужденное излучение несущественно, и соответственно  $\epsilon = 0$  в (5.57). При высокой плотности все кривые стремятся к своим равновесным значениям  $n_1/n_0 = e^{-\zeta_1}$ . При более низких плотностях преобладает спонтанная релаксация, и возбуждённый уровень становится незаселённым.

Для рассмотренных параметров плазмы, скорости переходов за счёт протон-протонных столкновений имеют такой же или меньший порядок величины, чем скорости переходов за счёт столкновений протонов с электронами. Поэтому пренебрежение протон-протонными столкновениями не приводит к существенному воздействию на статистическое равновесие. В частности, в условиях, представленных в левом окне на рис. 5.3 учёт протон-протонных столкновений привёл бы к изменению  $n_1/n_0$  не более чем на 6%. Таким образом, статистическое равновесие можно приближённо оценить на основе учёта только протон-электронных столкновений.

### 5.2.2b Многоуровневая система

При учёте всех уровней Ландау, статистическое равновесие определяется балансом всех скоростей переходов с каждого и на каждый уровень  $N$ :

$$n_N \left[ \sum_{N' < N} \Gamma_{NN'}^A + \sum_{N' \neq N} (\Gamma_{NN'}^B + \Gamma_{NN'}^C) \right] = \sum_{N' > N} n_{N'} \Gamma_{N'N}^A + \sum_{N' \neq N} n_{N'} (\Gamma_{N'N}^B + \Gamma_{N'N}^C), \quad (5.61)$$

Здесь  $\Gamma_{NN'}^C = \Gamma_{NN'}^{C(pe)} + \Gamma_{NN'}^{C(pp)}$ . Система (5.61) дополняется условием  $\sum_N n_N = n_{\text{ion}}$ . Эта система *нелинейна*, так как, согласно (4.130), величины  $\Gamma_{NN'}^{C(pp)}$  зависят от распределения  $n_N$ . Мы решаем систему (5.61) методом итераций, в качестве начального приближения принимая больцмановское распределение  $n_N$ .

Пример такого численного решения показан в правом окне на рис. 5.3. Здесь мы также пренебрегли  $\Gamma^B$  по сравнению с  $\Gamma^C$ . Кривые разного типа соответствуют отношениям  $n_N/n_0$  как функциям  $\rho$  для разных  $N$  от 1 до 4. Точками показано отношение  $n_1/n_0$  в двухуровневом приближении (как на левом рисунке). Мы видим, что это приближение даёт результат для  $n_1/n_0$ , совпадающий с точным решением в пределах различимости линий на рисунке.

## 5.3 Частично ионизованная плазма в сильном магнитном поле

### 5.3.1 Модель свободной энергии

Модель свободной энергии, которую мы будем использовать, является непосредственным обобщением модели, описанной в § 2.4.1, на случай сильного магнитного поля:

$$F = F_{\text{id}}^{(e)} + F_{\text{id}}^{(p)} + F_{\text{id}}^{\text{neu}} + F_{\text{rad}} + F_{\text{ex}}^C + F_{\text{ex}}^{\text{neu}}. \quad (5.62)$$

Идеальные составляющие – электронная  $F_{\text{id}}^{(e)}$  и протонная  $F_{\text{id}}^{(p)}$  – представлены в §§ 5.1.2 и 5.1.1, соответственно;  $F_{\text{rad}}$  по-прежнему даётся уравнением (2.9); неидеальная кулоновская составляющая  $F_{\text{ex}}^C$  обсуждалась в §§ 5.1.3 и 5.1.4. Рассмотрим теперь идеальный  $F_{\text{id}}^{\text{neu}}$  и неидеальный  $F_{\text{ex}}^{\text{neu}}$  вклады связанных состояний.

Поскольку квантовомеханические характеристики атома в сильном магнитном поле нетривиальным образом зависят от поперечного обобщённого импульса  $K_{\perp}$ , распределение атомов по  $K_{\perp}$  не может быть записано в замкнутой форме, и только распределение по продольным импульсам  $K_z$  остаётся максвелловским.

Пусть  $p_{s\nu}(K_\perp)d^2K_\perp$  – вероятность обнаружить атом с данными квантовыми номерами  $(s, \nu)$  в элементе  $d^2K_\perp$  вблизи точки  $\mathbf{K}_\perp$  на плоскости поперечных обобщённых импульсов. Для максвелловского распределения мы бы имели  $p_{s\nu}(K_\perp) = (2\pi\hbar)^{-2}\lambda_{\text{H}}^2 \exp[-K_\perp^2/(2m_{\text{H}})]$ . В общем же случае число атомов в элементе  $d^3K$  пространства обобщённых импульсов равно

$$dN(\mathbf{K}) = N_{s\nu} \frac{\lambda_{\text{H}}}{2\pi\hbar} \exp\left(-\frac{K_z^2}{2m_{\text{H}}k_{\text{B}}T}\right) p_{s\nu}(K_\perp)d^3K, \quad (5.63)$$

где  $N_{s\nu} = \int dN_{s\nu}(\mathbf{K})$  – полное число атомов с заданными дискретными квантовыми числами. Распределение  $N_{s\nu}p_{s\nu}(K_\perp)$  заранее не известно, а должно вычисляться самосогласованным образом при минимизации полной свободной энергии, включая неидеальные слагаемые.

Удобно определить отклонения от максвелловского распределения при помощи вероятностей заполнения состояний  $w_{s\nu}(K_\perp)$ :

$$p_{s\nu}(K_\perp) = \left(\frac{\lambda_{\text{H}}}{2\pi\hbar}\right)^2 \frac{w_{s\nu}(K_\perp) \exp[-E_{ns\nu}(K_\perp)/k_{\text{B}}T]}{\mathcal{Z}_{s\nu}}, \quad (5.64)$$

$$N_{s\nu}/N_{\text{H}} = \mathcal{Z}_{s\nu}/\mathcal{Z}_w, \quad (5.65)$$

где  $E_{ns\nu}(K_\perp)$  – энергия связанного состояния,

$$\mathcal{Z}_{s\nu} = \frac{\lambda_{\text{H}}^2}{2\pi\hbar^2} \int_0^\infty w_{s\nu}(K_\perp) e^{-E_{s\nu}(K_\perp)/(k_{\text{B}}T)} K_\perp dK_\perp, \quad (5.66)$$

$$\mathcal{Z}_w = \sum_{s\nu} \mathcal{Z}_{s\nu}. \quad (5.67)$$

Число атомов в единичной ячейке фазового пространства равно  $[dN(\mathbf{K})/d^3K] \times (2\pi\hbar)^3/V$ . Вычисляя  $(U - TS)$  для этого распределения, получаем вклад в свободную энергию за счёт атомарной фракции

$$\begin{aligned} F_{\text{id}}^{\text{H}} &= k_{\text{B}}T \sum_{s\nu} N_{s\nu} \int \left\{ \ln [n_{s\nu}\lambda_{\text{H}}(2\pi\hbar)^2 p_{s\nu}(K_\perp)] - 1 + \frac{E_{s\nu}(K_\perp)}{k_{\text{B}}T} \right\} p_{s\nu}(K_\perp) d^2K_\perp = \\ &= k_{\text{B}}T \sum_{s\nu} N_{s\nu} \int \ln \left[ n_{s\nu}\lambda_{\text{H}}^3 \frac{w_{s\nu}(K_\perp)}{\exp(1)\mathcal{Z}_{s\nu}} \right] p_{s\nu}(K_\perp) d^2K_\perp, \end{aligned} \quad (5.68)$$

где  $n_{s\nu}$  – объёмная концентрация всех атомов, имеющих дискретные квантовые числа  $s$  и  $\nu$ . К этому выражению, вообще говоря, следует добавить вклад молекул. Мы будем оценивать этот вклад приближённо, принимая во внимание только молекулы, находящиеся в основном состоянии. Такое приближение является приемлемым при  $B \gtrsim 10^{12}$  Г, так как энергии различных типов молекулярных возбуждений ненамного меньше энергий электронных возбуждений атомов [338] (в отличие от случая

без поля), и потому возбуждённые состояния не дают значительного вклада в молекулярную статистическую сумму при тех сравнительно низких температурах, при которых молекулярная фракция может стать заметной [339]. Мы также пренебрегаем неизученным изменением молекулярного спектра за счёт движения центра масс (как отмечено в § 4.1.3).

Итак, мы включаем в идеальную составляющую свободной энергии связанных состояний  $F_{\text{id}}^{\text{neu}}$  слагаемые  $F_{\text{id}}^{\text{H}}$  (5.68) и

$$F_{\text{id}}^{\text{H}_2} = N_{\text{H}_2} k_B T [\ln(n_{\text{H}_2} \lambda_{\text{H}_2}^3) - 1 + E_{\text{H}_2}], \quad (5.69)$$

где  $-E_{\text{H}_2} = -2E_{00}(0) + Q_2$  – полная энергия связи молекулы, а  $Q_2$  – энергия её диссоциации, для которой используем приближённую формулу из [338, 339].

Неидеальная составляющая  $F_{\text{ex}}^{\text{neu}}$  вычисляется по модели твёрдых сфер согласно формулам (2.152)–(2.154), где мы полагаем  $\kappa = (s\nu K_{\perp})$  и применяем очевидное обобщение  $\sum_{\kappa}$ , включая  $\int p_{s\nu}(K_{\perp}) d^2 K_{\perp}$ . Эффективный размер атома  $l_{\kappa} = l_{s\nu}(K_{\perp})$  рассмотрен в § 4.2.4. Эффективный размер молекулы  $\text{H}_2$  в основном состоянии оценивается как  $l_{\text{H}_2} = [2a_{\text{m}}^2 + l_{z,\text{H}_2}^2]^{1/2}$ , где продольный размер  $l_{z,\text{H}_2} \approx l_{z0} + r_0$ . Здесь  $l_{z0}$  – продольный размер атома, определяемый формулами (4.68), (4.69), а  $r_0 \approx 12,7 (\ln \gamma)^{-2,2}$  – равновесное расстояние между ядрами согласно [339].

### 5.3.2 Условия равновесия

Термодинамическое равновесие в модели (5.62) находится путём обобщения уравнений из § 2.4.2 с учётом того, что теперь статистические суммы атомов включают интегрирование по  $K_{\perp}$ . В частности,  $\partial F_{\text{ex}}/\partial N_{\kappa}$  в (2.145) заменяется функциональной производной.

В рассматриваемых условиях ( $B \gtrsim 10^{11}$  Гс) нейтральные атомы существуют только в режиме сильного магнитного квантования и слабой вырожденности. Поэтому удобно записать обобщённое уравнение Саха, используя (5.21), и описывать отклонения от него отдельным фактором  $\Lambda$ . Для идеальной составляющей свободной энергии протонов мы используем формулу (5.1), а для атомов – (5.68). Таким образом, обобщённое уравнение Саха запишется в виде

$$n_{\text{H}} = n_p n_e \frac{\lambda_p \lambda_e (2\pi a_{\text{m}}^2)^2}{\lambda_{\text{H}}^3} [1 - \exp(-\zeta_i)] \mathcal{Z}_w e^{\Lambda}, \quad (5.70)$$

где фактор

$$\Lambda = \mu_e - k_B T \ln(2\pi a_{\text{m}}^2 \lambda_e n_e) + \left( \frac{\partial \mu_e}{\partial \ln n_e} - \frac{\partial P_e}{\partial n_e} \right) \quad (5.71)$$

учитывает отклонение точного значения  $F_{\text{id}}^{(e)}$  от того, которое даёт формула (5.21), возникающее из-за частичной вырожденности электронов и частичного заселения возбуждённых уровней Ландау. Распределения атомов по дискретным квантовым состояниям и по поперечным обобщённым импульсам даются формулами (5.65) и (5.64), соответственно.

Вероятности заполнения можно представить как произведение двух множителей, происходящих от  $F_{\text{ex}}^C$  и  $F_{\text{HS}}$ :

$$w_{s\nu}(K_{\perp}) = w^C w_{s\nu}^{\text{HS}}(K_{\perp}). \quad (5.72)$$

Далее мы будем исключать из наших формул  $N_e$ , явно используя условие электронейтральности  $N_e = N_{\text{ion}}$ . Тогда кулоновский сомножитель равен

$$\ln w^C = \frac{1}{k_{\text{B}}T} \frac{\partial F_{\text{ex}}^C}{\partial N_{\text{ion}}} = 2f_{\text{ex}}^C + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial f_{\text{ex}}^C}{\partial \ln \Gamma} - \frac{\partial f_{\text{ex}}^C}{\partial \ln r_s} \right), \quad (5.73)$$

где  $f_{\text{ex}}^C(r_s, \Gamma) \equiv F_{\text{ex}}^C / (2N_{\text{ion}}k_{\text{B}}T)$ . В пределе Дебая–Хюккеля  $w^C$  определяется как [146]

$$\ln w_{\text{DH}}^C = -\sqrt{8\pi n_p [e^2 / (k_{\text{B}}T)]^3}. \quad (5.74)$$

Второй сомножитель равен

$$\ln w_{s\nu}^{\text{HS}}(K_{\perp}) = \frac{(1 - \eta/2) \ln w_{s\nu}^{(0)}(K_{\perp}) - 5\eta^2 + 3\eta^3}{(1 - \eta)^3}, \quad (5.75)$$

где  $\ln w^{(0)} = (\partial / \partial N_{\text{ion}} - \partial / \partial n_{\kappa}) [4N_{\text{tot}}\eta]$  – асимптотика  $\ln w^{\text{HS}}$  при низкой плотности,  $N_{\text{tot}}$  – полное число частиц в плазме, а  $\eta$  – эффективный параметр упаковки (2.153).

В явном виде

$$\begin{aligned} \ln w_{s\nu}^{(0)}(K_{\perp}) = & -\frac{4\pi}{3} \{ (n_{\text{H}} + n_p) l_{s\nu}^3(K_{\perp}) + n_{\text{H}_2} [l_{s\nu}(K_{\perp}) + l_{\text{H}_2}]^3 \\ & + 3n_{\text{H}} [l_{s\nu}(K_{\perp}) \langle l^2 \rangle + l_{s\nu}^2(K_{\perp}) \langle l \rangle] \}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{\pi}{3N_{\text{tot}}V} [N_{\text{H}}^2 \langle l^3 \rangle + 3\langle l^2 \rangle \langle l \rangle + N_{\text{H}} N_{\text{ion}} \langle l^3 \rangle + \\ & + N_{\text{H}} N_{\text{H}_2} (\langle l^3 \rangle + 3\langle l^2 \rangle l_{\text{H}_2} + 3\langle l \rangle l_{\text{H}_2}^2 + l_{\text{H}_2}^3) + N_{\text{ion}} N_{\text{H}_2} l_{\text{H}_2}^3 + 4N_{\text{H}_2}^2 l_{\text{H}_2}^3], \end{aligned} \quad (5.77)$$

где

$$\langle l^k \rangle \equiv \frac{1}{N_{\text{H}}} \sum_{s\nu} N_{s\nu} \int l_{s\nu}^k(K_{\perp}) p(K_{\perp}) d^2 K_{\perp}. \quad (5.78)$$

Диссоциативное равновесие задаётся уравнением (2.167), где  $\mathcal{Z}_{w_2}$  заменяется на  $w_{\text{H}_2} \exp(-E_{\text{H}_2})$ , а  $\mathcal{Z}_w$  изменено согласно (5.66) и (5.67). Из (2.168) находим  $w_{\text{H}_2} =$



$(w^C)^2 w_{\text{H}_2}^{\text{HS}}$ , где

$$\ln w_{\text{H}_2}^{\text{HS}} = \frac{(1 - \eta/2) \ln w_{\text{H}_2}^{(0)} - 15\eta^2 + 9\eta^3}{(1 - \eta)^3}, \quad (5.79)$$

$$\ln w_{\text{H}_2}^{(0)} = -\frac{4\pi}{3} [n_{\text{H}}(3\langle l^2 \rangle l_{\text{H}_2} + 3\langle l \rangle l_{\text{H}_2}^2 - \langle l^3 \rangle) + (n_{\text{H}} + n_p + 6n_{\text{H}_2})l_{\text{H}_2}^3]. \quad (5.80)$$

Решение системы уравнений (5.70)–(5.80), дополненной стехиометрической связью  $n_p + n_{\text{H}} + 2n_{\text{H}_2} = n_0$ , даёт значения равновесных заселённостей и свободной энергии. Решение ищется методом итераций по аналогии со случаем без магнитного поля, описанного в § 2.4.2. В сильно квантующем магнитном поле, в невырожденном случае уравнение состояния можно представить в виде трёх слагаемых: идеальный больцмановский вклад равен  $P_{\text{id}} = n_{\text{tot}} k_B T$ , вклад от кулоновской неидеальности вычисляется путём дифференцирования приближённой формулы, представленной в § 5.1.3, а вклад от слагаемого, отвечающего за эффекты исключённого объёма в модели взаимодействия твёрдых сфер, равен  $P_{\text{HS}} = 4\eta(1 - \eta/2)(1 - \eta)^{-3} n_{\text{tot}} k_B T$ . При необходимости можно добавить давление излучения  $(4\sigma_{\text{SB}}/3c) T^4$ .

### 5.3.3 Особенности расчётов для сверхсильного поля

В работах [155, 274] мы рассматривали область значений  $\rho$ ,  $T$  и  $B$ , охватывающую значения, характерные для большинства типичных нейтронных звёзд, таких как изолированные радиопульсары. При этом использовались приближённые формулы для атомных характеристик, приведённые в §§ 4.2.3 и 4.2.4. Однако большинство этих формул были получены лишь для  $B \lesssim 10^{13,5}$  Гс.

В статье [279] были рассмотрены более сильные магнитные поля, характерные для магнитаров. В этом случае расчёт уравнения состояния для каждого значения  $B$  состоял из двух этапов.

Сначала численно рассчитывались таблицы требуемых атомных характеристик (энергий связи, размеров) как функций  $K_{\perp}$ . При этом для каждого набора дискретных квантовых чисел атома при каждом значении  $B$  использовалась репрезентативная сетка из  $\approx 50$  равномерно распределённых значений  $\lg K_{\perp}$ . Немаловажно, что построение таких таблиц и работа с ними значительно проще при сверхсильных, чем при «обычных» магнитных полях нейтронных звёзд, потому что в сверхсильном поле требуется рассматривать лишь небольшое число дискретных уровней. Например, при  $B > 2 \times 10^{13}$  Гс не остаётся связанных состояний с  $s \geq 2$ , а при  $B > 6 \times 10^{13}$  Гс – и с  $s = 1$ . Последнее обстоятельство иллюстрирует рис. 5.4, на котором показаны энергии важнейших переходов между уровнями атома водорода в магнитном

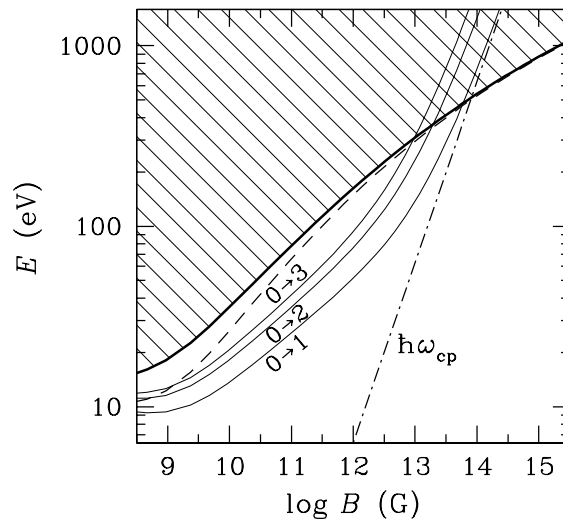


Рис. 5.4: Энергии переходов между уровнями атома водорода с  $K_{\perp} = 0$  из основного состояния в низковозбуждённые тесносвязанные состояния ( $\nu = 0$ ,  $s = 1, 2, 3$ ; тонкие сплошные кривые) и водородоподобные состояния ( $s = 0$ ,  $\nu = 1$ ; пунктир); порог фотоионизации показан жирной сплошной линией, а протонная циклотронная энергия – штрихпунктиром. Заштрихованная область соответствует переходам в континуум. (Из статьи [279]).

поле при  $K_{\perp} = 0$  как функции  $B$ . С ростом  $B$  тесносвязанные уровни  $s = 3, 2$ , и  $1$  последовательно уходят в континуум. Водородоподобные состояния с  $s = 0$  и любым  $\nu$  остаются связанными при любом  $B$ , но при типичных плотностях в атмосферах нейтронных звёзд большинство из них разрушено взаимодействием с окружающими частицами и формирует квазиконтинуум.

На втором этапе расчёта ионизационное равновесие, распределение атомов по квантовым уровням и по обобщённым импульсам и свободная энергия рассчитывались с использованием кубической интерполяции по таблицам квантовомеханических характеристик атома, предвычисленным на первом этапе.

### 5.3.4 Распределение по состояниям

#### 5.3.4а Числа заполнения

На рис. 5.5 показано распределение атомов по квантовым состояниям в соответствии с уравнением (5.65) при  $B = 10^{12}$  и  $10^{13}$  Гс,  $T = 10^6$  К и при двух относительно низких плотностях  $\rho = 0,001$  г см $^{-3}$  и  $0,1$  г см $^{-3}$ . На левом рисунке представлены относительные числа заполнения при  $\nu = 0$  для различных квантовых чисел  $s$ . Распределение уширяется с ростом плотности. Это на первый взгляд неожидан-

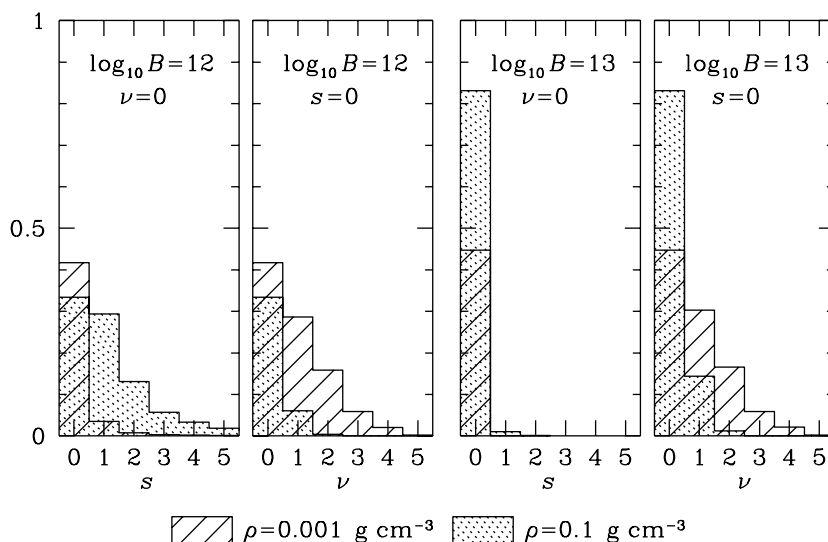


Рис. 5.5: Распределение атомных чисел заполнения при  $T = 10^6$  К для магнитных полей  $B = 10^{12}$  и  $10^{13}$  Гс [155]. Для каждого  $B$  показано распределение по квантовым числам  $s$  при  $\nu = 0$  и по  $\nu$  при  $s = 0$  для двух значений плотности:  $\rho = 0,001$  г см $^{-3}$  (заштрихованные гистограммы) и  $0,1$  г см $^{-3}$  (гистограммы, затенённые точками).

ное свойство легко объясняется наличием третьего, непрерывного квантового числа  $K_{\perp}$ , в дополнение к  $s$  и  $\nu$ . При низкой плотности большинство атомов находятся в состояниях с высокими значениями  $K_{\perp}$  вследствие большого статистического веса таких состояний, и при этом все они имеют  $s = 0$  (§ 4.2). При более высокой плотности эти сильно децентрированные состояния исчезают из-за эффектов исключённого объёма, и распределение по  $s$  становится шире. И наоборот, на соседнем рисунке наблюдается более узкое распределение по  $\nu$  при более высокой плотности, потому что эффекты исключённого объёма удаляют из распределения высоколежащие водородоподобные состояния. Чуть ниже мы увидим, что в конечном итоге, при ещё более высокой плотности, выживет только основное центрированное состояния ( $s = \nu = 0$ ,  $K_{\perp} < K_{\text{cr}}$ ).

Два правых рисунка показывают, что произойдёт при усилении магнитного поля до  $B = 10^{13}$  Гс. Из-за больших энергий связи распределение при  $\rho = 0,1$  г см $^{-3}$  сужается, с большей долей атомов в основном состоянии. Однако при более низкой плотности распределение по  $\nu$  меняется с увеличением  $B$  не столь сильно, потому что увеличение энергий связи сопровождается уменьшением размеров атомов и, соответственно, уменьшением эффектов неидеальности.

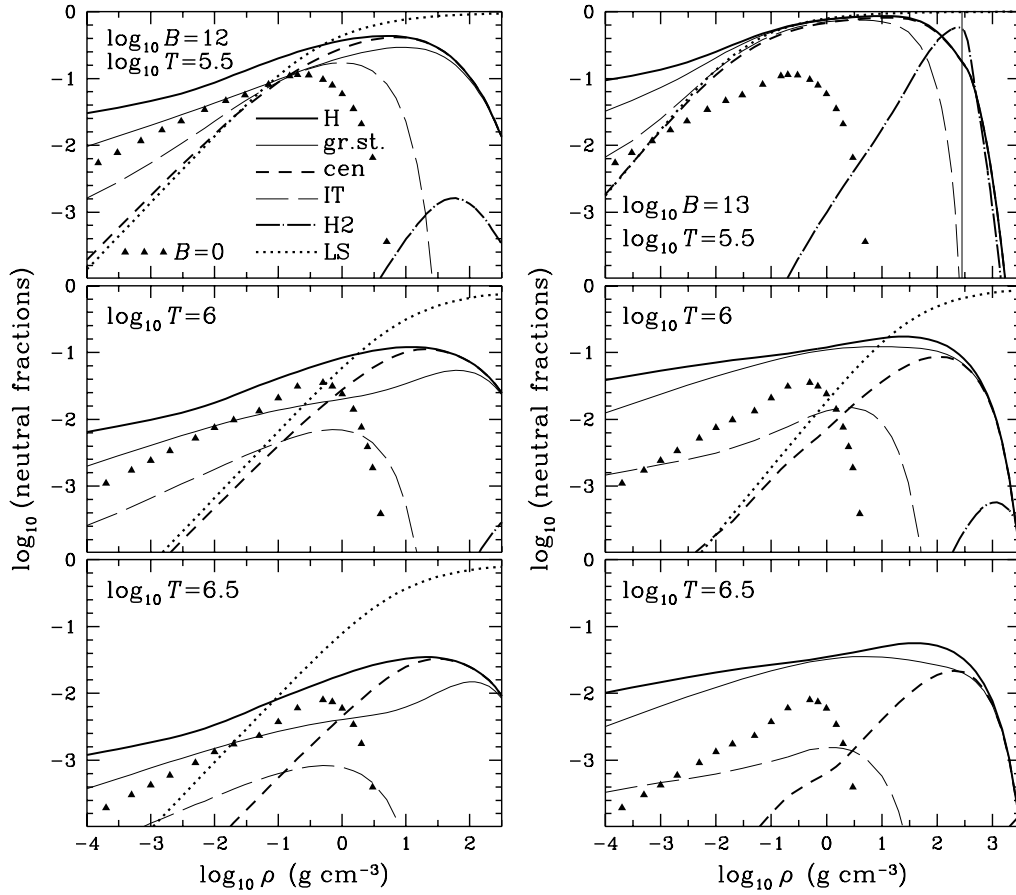


Рис. 5.6: Ионизационные изотермы при  $B = 10^{12}$  Гс (слева) и  $10^{13}$  Гс (справа), и при трёх значениях  $T$ , указанных на кривых: полная доля нейтральных атомов  $f_{\text{H}} = n_{\text{H}}/n_0$  (жирные сплошные линии) и доли атомов в основном состоянии (тонкие сплошные линии), центрированных (короткий штриховой пунктир), и спектроскопически идентифицируемые согласно критерию Инглиса–Теллера (длинный штриховой пунктир). Штрихпунктир показывает долю молекул  $f_{\text{H}_2} = 2n_{\text{H}_2}/n_0$ . Для сравнения показаны также  $f_{\text{H}}$  в немагнитном случае (треугольники) и в приближении Лая–Солпитера [339] (точечный пунктир). Вертикальная линия на верхнем правом рисунке отделяет область термодинамической неустойчивости.

### 5.3.4b Ионизационное равновесие

Рисунок 5.6 демонстрирует кривые ионизации при трёх значениях  $T$  для  $B = 10^{12}$  Гс. Жирные сплошные линии показывают полную долю атомов  $f_{\text{H}} = n_{\text{H}}/n_0$  по отношению к полному числу протонов  $n_0$  (связанных и свободных) во всех квантовых состояниях, рассчитанную согласно уравнению (5.70). Тонкие сплошные линии показывают долю  $f_{00}$  атомов в основном состоянии ( $s = \nu = 0$ , но  $K_{\perp}$  может быть любым), а пунктиром показана доля атомов в центрированных состояниях ( $K_{\perp} < K_{\text{cr}}$ , любые  $s$  и  $\nu$ ). Для сравнения треугольники показывают долю атомов при тех же температуре и плотности, но в отсутствие магнитного поля, определяемую уравнением (2.161).

Таким образом, сильное магнитное поле в целом увеличивает нейтральную фракцию. При низкой плотности имеется существенный вклад возбуждённых состояний, в том числе децентрированных. Поскольку их эффективный размер пропорционален  $K_{\perp}$ , интегрирование (5.66) даёт приблизительную пропорциональность  $\mathcal{Z}_{s\nu} \propto n_0^{-2/3}$ ; следовательно,  $f_{00}$  асимптотически убывает как  $n_0^{1/3}$ . Вследствие уширения распределения по  $\nu$  с уменьшением плотности (из оценки атомных размеров, приблизительно  $\max \nu \propto n_0^{-1/6}$ ), левое (соответствующее малой плотности) крыло кривой для полной нейтральной фракции имеет наклон  $f_{\text{H}} \propto n_0^{1/6}$ , очень пологий по сравнению с  $f_{\text{H}} \propto n_0^{1/2}$  в немагнитном случае (треугольники).

Статистическая сумма центрированных атомов, поперечные обобщённые импульсы которых ограничены сверху критическим значением  $K_{\text{cr}}$ , почти не зависит от плотности  $\rho$ , когда последняя мала. Поэтому их доля ведёт себя как  $f_{\text{cen}} \propto n_0$ , и они исчезают из распределения значительно быстрее при уменьшении  $\rho$  и особенно при увеличении  $T$  (ср. пунктир на верхнем и нижнем рисунках).

При высокой плотности, напротив, децентрированные состояния исчезают вследствие эффектов исключённого объёма, так что пунктирная кривая на рисунке сливается со сплошной при  $\rho \gtrsim 10 \text{ г см}^{-3}$ . При ещё более высокой плотности,  $\rho \gtrsim 10^2 \text{ г см}^{-3}$ , исчезают все возбуждённые состояния, и выживает только центрированное состояние  $s = \nu = 0$ . При  $\rho \sim 10^2 - 10^3 \text{ г см}^{-3}$  происходит ионизация давлением. Эффекты исключённого объёма и кулоновские ей способствуют [как  $w^{\text{HS}}$ , так и  $w^{\text{C}}$  в (5.72) меньше единицы], а вырождение электронов препятствует ( $\Lambda > 0$ ). Из-за того, что объём атома в сильном магнитном поле меньше, чем без поля, ионизация давлением происходит при плотностях, на порядки превосходящих те, при которых она происходит в отсутствие поля [156]. При  $T = 10^{5,5} \text{ К}$  становится заметной молекулярная фракция при  $\rho \sim 10^2 \text{ г см}^{-3}$ .

Не все нейтральные атомы, дающие вклад в уравнение состояния, дают также вклад в спектральные линии. Вследствие их возмущения плазменными микрополями, атомы, не удовлетворяющие критерию Инглиса–Теллера, образуют «оптический континуум». Приближённая оценка доли атомов, идентифицируемых спектроскопически (т.е. не входящих в оптический континуум) даётся обобщением оптических вероятностей заполнения  $\tilde{w}_{\kappa}$  – вероятностей того, что атом в данном квантовом состоянии не подвергается сильному (разрушающему оптический спектр) влиянию микрополя (ср. § 2.4.1) – на случай сильного магнитного поля. Такое обобщение было предложено нами в работе [303]; формула для него будет выписана в главе 7, посвящённой вычислению спектральных непрозрачностей и моделированию атмосфер

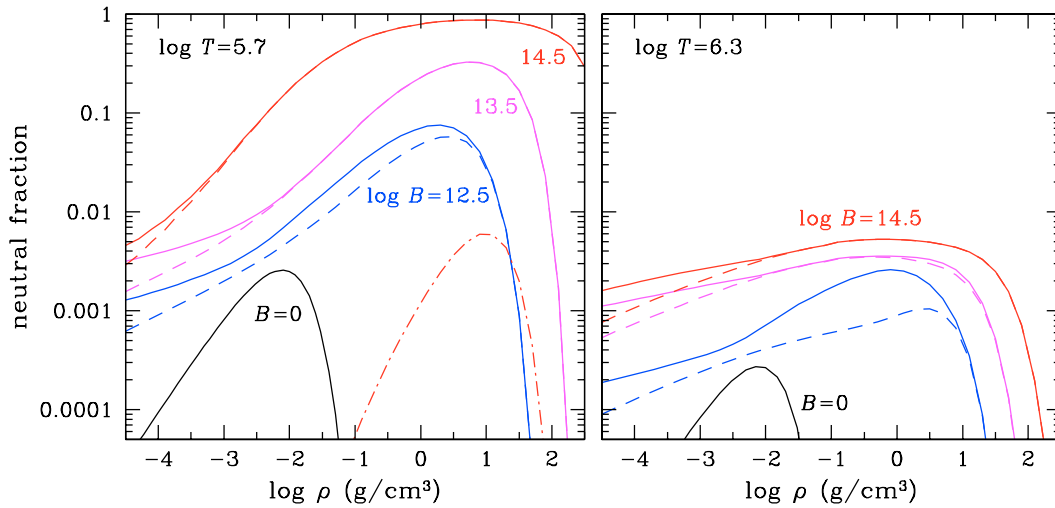


Рис. 5.7: Доля нейтральных атомов во всех квантовых состояниях (сплошные линии) и в основном состоянии (пунктир) в зависимости от плотности при напряжённостях магнитного поля  $B = 0, 10^{12,5}, 10^{13,5}$  и  $10^{14,5}$  Гс. Штрихпунктир показывает долю молекул  $\text{H}_2$  при наибольшем  $B$ . *Левый рисунок* –  $T = 5 \times 10^5$  К; *правый рисунок* –  $T = 2 \times 10^6$  К.

[формула (7.27)]. Эта «оптическая», или «инглис-теллеровская» (IT) фракция показана на рисунке длинной штриховой пунктирной линией. Её быстрый спад указывает на исчезновение таких невозмущённых атомов, происходящее при  $\rho \sim 10 \text{ г см}^{-3}$ , задолго до истинной (термодинамической) ионизации давлением.

Приближение, предлагавшееся в более ранней работе Лая и Солпитера [339] и показанное на рисунке точечным пунктиром, явно недооценивает нейтральную фракцию при низких и переоценивает её при высоких плотностях, особенно в высокотемпературном случае (причины этого проанализированы в [155]).

Правая часть рис. 5.6 показывает кривые ионизации для более сильного поля  $B = 10^{13}$  Гс. Здесь доля нейтралей увеличивается ещё сильнее. При  $T = 10^{5,5}$  К (верхний правый рисунок)  $f_{\text{H}}$  превышает  $\frac{1}{2}$  при  $\rho > 0,1 \text{ г см}^{-3}$  и достигает максимума, равного 85%, при  $\rho \approx 10$ . В этом случае большинство атомов находятся в основном центрированном состоянии. Но при  $T = 10^{5,5}$  К и  $\rho \sim 10^2 - 10^3 \text{ г см}^{-3}$  доминируют молекулы; в этой области  $\rho - T$  представленная модель может быть неточна из-за приближённой трактовки молекулярного вклада.

На рис. 5.7 приведены кривые ионизации для других значений  $B$ . Здесь мы тоже наблюдаем увеличение нейтральной фракции с усилением поля при всех плотностях. При наименьшей температуре  $T$  и наибольшем  $B$  из показанных на рис. 5.7, при  $\rho \gtrsim 1 \text{ г см}^{-3}$  становится весьма существенной доля молекул  $\text{H}_2$  (штрихпунктир

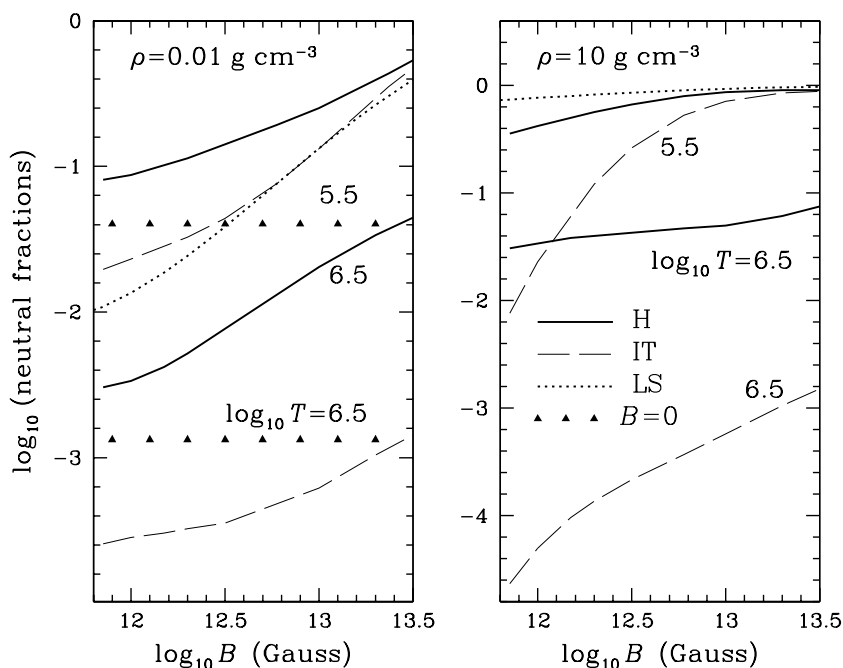


Рис. 5.8: Зависимость доли всех атомов  $f_{\text{H}}$  (сплошные кривые) и доли спектроскопически идентифицируемых атомов (штриховой пунктир) от напряжённости магнитного поля при двух значениях плотности  $\rho$  (указанных на рисунке), при  $T = 10^{5,5}$  К (верхние кривые) и  $10^{6,5}$  К (нижние кривые). Доля атомов при  $B = 0$  (треугольники) и приближение Лая–Солпитера [339] (точечный пунктир) даны для сравнения.

на левом рисунке). При тех же  $T$  и  $B$  и более высокой плотности  $\rho \sim 100$  г см $^{-3}$  молекулы  $\text{H}_2$  исчезают, но становятся обильными цепи и кластеры  $\text{H}_n$  (на рисунке не представлены). Как отмечено выше, при таких условиях используемая микроскопическая модель утрачивает свою надёжность.

Зависимости доли атомов от  $B$  при двух значениях  $T$  и двух значениях  $\rho$  показаны на рис. 5.8.

В более ранних работах [284, 340] делался вывод, что степень ионизации убывает с ростом  $B$  выше  $\sim 10^{12}$  Гс только при  $T \lesssim 5 \times 10^5$  К, но возрастает (в противоположность нашим результатам) при более высоких температурах. Представленный нами результат отличается от этих более ранних результатов потому, что при его получении учтено влияние движения атомов поперёк поля на их свойства: во-первых, увеличение  $B$  увеличивает эффективную поперечную массу  $m_{\text{eff}}$ , а значит и статистический вес центрированных атомов, а во-вторых, при достаточно низкой плотности статистическая сумма атомов дополнительно увеличивается с ростом  $B$  за счёт вклада децентрированных состояний.

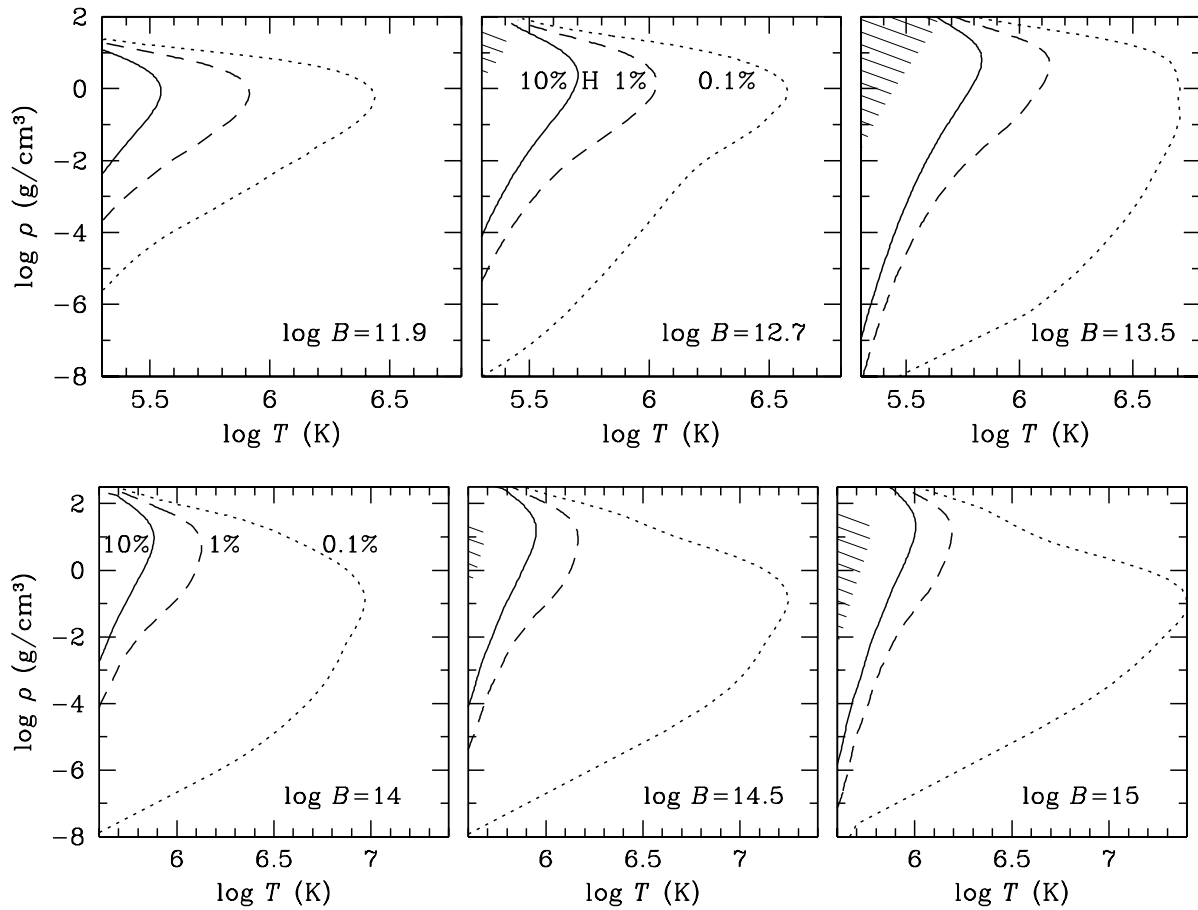


Рис. 5.9: Области частичной ионизации при  $\lg B/\text{Гс} = 11,9, 12,7, 14,0, 14,5$  и  $15,0$ . Контуры ограничивают области, в которых неионизованная фракция превышает 0,1% (точечный пунктир), 1% (штриховой пунктир) или 10% (сплошные линии). Заштрихована область, в которой доля молекул  $\text{H}_2$  превышает 1%.

На рис. 5.9 показаны области частичной ионизации на плоскости  $(T, \rho)$  при 6 значениях  $B$ . С ростом  $B$  те участки, где неионизованная фракция превышает заданный уровень, существенно расширяются в область высоких температур.

### 5.3.5 Фазовый переход

При достаточно низкой температуре в некотором интервале плотности в области ионизации давлением возникает термодинамическая неустойчивость ( $\partial P/\partial \rho < 0$ ), ведущая к фазовому переходу. Устойчивость восстанавливается при  $\rho \gtrsim 8000 \text{ г см}^{-3}$ , где плазма полностью ионизована. Этот фазовый переход – полный аналог плазменного фазового перехода, предсказывавшегося в случае нулевого поля в ряде теоретических работ [156, 341–344]. Он вызван сильным электростатическим притяжением



между частицами ионизованной компоненты плазмы, дающим отрицательный вклад в давление, который не может быть скомпенсирован при низких температурах до тех пор, пока электроны с ростом плотности не станут вырожденными.

В статье [155] мы аппроксимировали критическую температуру  $T_c$  и плотность  $\rho_c$  этого фазового перехода зависимостями

$$T_c = 3 \times 10^5 B_{12}^{0,39} \text{ К}, \quad \rho_c = 143 B_{12}^{1,18} \text{ г см}^{-3}, \quad (5.81)$$

которые имеют погрешность в пределах нескольких процентов при  $7 \times 10^{11} \text{ Гс} < B < 3 \times 10^{13} \text{ Гс}$ .

В области этого фазового перехода происходит разделение фаз на неидеальную газовую (при меньшей плотности) и жидкую или твёрдую (при более высокой плотности). Колонковая концентрация вещества в газовой фазе может быть оптически тонкой в тепловой области спектра. В последнем случае говорят о возникновении *конденсированной поверхности* нейтронной звезды, излучение с которой достигает наблюдателя, практически не претерпев рассеяния и поглощения в атмосфере. Для такой звезды в статье [345] введён термин «обнажённая нейтронная звезда» (*naked neutron star*).

Образование конденсированной поверхности нейтронной звезды обсуждалось и изучалось в статьях Дуна Лая с соавторами [241, 255, 339]. Зависимости плотности конденсированной поверхности и критической температуры от магнитного поля, полученные в этих статьях, неплохо согласуются с нашими расчётами. Плотность конденсированной поверхности при нулевой температуре оценена в статье [339] как

$$\rho_s \approx 560 B_{12}^{6/5} \text{ г см}^{-3}. \quad (5.82)$$

то есть ведёт себя с изменением  $B$  сходно с нашей оценкой  $\rho_c^4$ , Значение критической температуры в статьях Лая получается в 2–3 раза ниже нашего.

В реальности плазменного фазового перехода нет уверенности ни в магнитном, ни в немагнитном случае из-за его сильной модельной зависимости и отсутствия на сегодняшний день чётких экспериментальных подтверждений. В частности, в рассматриваемом здесь случае сильного магнитного поля количественное расхождение наших расчётов с результатами Лая в определении критической температуры можно отнести, с одной стороны, за счёт приближённой трактовки молекул и полимеров в нашем подходе, а с другой – за счёт лишь частичного и неточного учёта эффектов

---

<sup>4</sup>Численно при  $B = 10^{15} \text{ Гс}$  эта оценка даёт  $\rho_s \approx 2,2 \times 10^6 \text{ г см}^{-3}$ , тогда как мы при таком поле и при  $T \ll T_c$  имеем  $\rho_s \approx 1,7 \times 10^6 \text{ г см}^{-3}$ .

движения поперёк магнитного поля в работах [241, 339] и их игнорирования в работе [255].

### 5.3.6 Термодинамические функции

На рис. 5.10 приведены изотермы давления частично ионизованной водородной плазмы в сильных магнитных полях. Для сравнения показано также уравнение состояния полностью ионизованного водорода в магнитном поле и уравнение состояния водорода без поля. Вертикальными линиями отмечены значения  $\rho = \rho_B$ , при которых из-за вырожденности электронов начинает заполняться возбуждённый уровень Ландау.

При низкой плотности,  $\rho \lesssim 10 \text{ г см}^{-3}$ , и при  $T \gtrsim 10^6 \text{ К}$ , справедливо уравнение состояния идеального газа  $P = n_0 k_B T$ . При более низких температурах на левом рисунке давление уменьшается из-за частичной рекомбинации атомов, причём это уменьшение более значительно в сильном магнитном поле, чем без поля, в соответствии с обсуждавшимся выше увеличением доли нейтральных атомов в сильном магнитном поле.

При промежуточных значениях плотности различия между разными уравнениями состояния, показанными на рисунке, наиболее заметны. В этой области немагнитная плазма полностью ионизована, а электроны частично вырождены, что даёт более жёсткое уравнение состояния. Как мы видели в § 5.1.2, в сильном магнитном поле вырождение электронов наступает при более высокой плотности, поэтому уравнение состояния становится мягче. Однако при приближении  $\rho$  к  $\rho_B$  наступает вырождение, и давление быстро растёт.

Ионизация давлением имеет двойное влияние на уравнение состояния: положительный вклад в давление за счёт идеальной составляющей высвобождающихся при ионизации электронов конкурирует с отрицательным кулоновским вкладом. При низких температурах это приводит к термодинамической неустойчивости, обсуждавшейся в § 5.3.5, которая проявляется в виде разрывов на нижних изотермах. Вторая снизу изотерма на левом рисунке является слегка надкритической по отношению к этому фазовому переходу.

При ещё более высоких плотностях  $\rho \gtrsim \rho_B$ , рост электронной энергии Ферми приводит к заселению возбуждённых уровней Ландау, и в конечном итоге при  $\rho \gg \rho_B$  восстанавливается немагнитное уравнение состояния.

Нормированная теплоёмкость частично ионизованной водородной плазмы  $c_V = C_V/k_B N_{\text{tot}}$ , где  $N_{\text{tot}} = N_e + N_{\text{ion}} + N_{\text{H}} + N_{\text{H}_2}$ , показана на рис. 5.11. В немагнитном

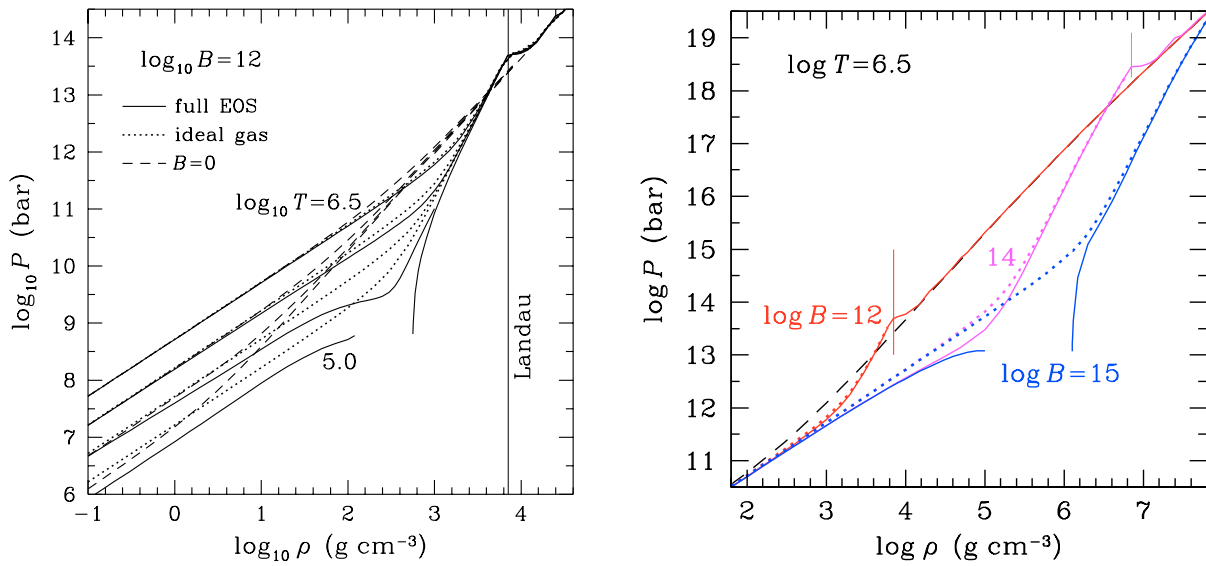


Рис. 5.10: Изотермы давления частично ионизованного водорода в сильных магнитных полях (сплошные кривые;  $B = 10^{12}$ ,  $10^{14}$  and  $10^{15}$  Гс, как помечено у кривых) и (слева, сверху вниз) при  $\lg T$  [К] = 6,5, 6,0, 5,5 и 5,0. Для сравнения показаны изотермы давления полностью ионизованной электрон-протонной плазмы при тех же условиях (точечный пунктир) и частично ионизованного водорода при  $B = 0$  (штриховой пунктир). Вертикальные линии соответствуют плотности  $\rho_B$ , выше которой становятся существенно заселёнными возбуждённые уровни Ландау. Разрывы на нижних кривых соответствуют области гипотетического фазового перехода (§ 5.3.5).

случае (пунктир) при низкой плотности  $c_V$  несколько превосходит классическое значение  $\frac{3}{2}$  из-за термической ионизации атомов, а при высокой плотности убывает из-за электронного вырождения.

В сильном магнитном поле теплоёмкость такой плазмы испытывает влияние нескольких эффектов. При низкой плотности  $C_V$  уменьшается по сравнению с немагнитным значением по причине квантования поперечного движения электронов и протонов (ср. § 5.1.5). В сильно квантующем поле вклад идеального газа электронов в  $C_V$  становится равным  $\frac{1}{2} N_e k_B$ . Если при этом протоны не квантованы и плазма полностью ионизована, то  $c_V = 1$ . Если же протоны сильно квантованы ( $\hbar\omega_{ci} \gg k_B T$ ), то для полностью ионизованной плазмы при низкой плотности  $c_V \rightarrow \frac{1}{2}$ . На рис. 5.11, однако, этот предел не достигается из-за вклада нейтральных атомов. В рассматриваемой области  $\rho$ - $T$ - $B$  они подвергаются термической ионизации и в результате дают большой вклад в теплоёмкость. Таким образом,  $c_V$  увеличивается с увеличением  $B$  из-за роста нейтральной фракции. Два горба на каждой из показанных изотерм соответствуют областям разрушения давлением сначала возбуждённого состояния  $s = 1$ ,  $\nu = 0$ , а затем основного  $s = \nu = 0$ . В последнем случае из-за отложенного начала вырождения  $C_V$  даже превышает своё немагнитное значение.

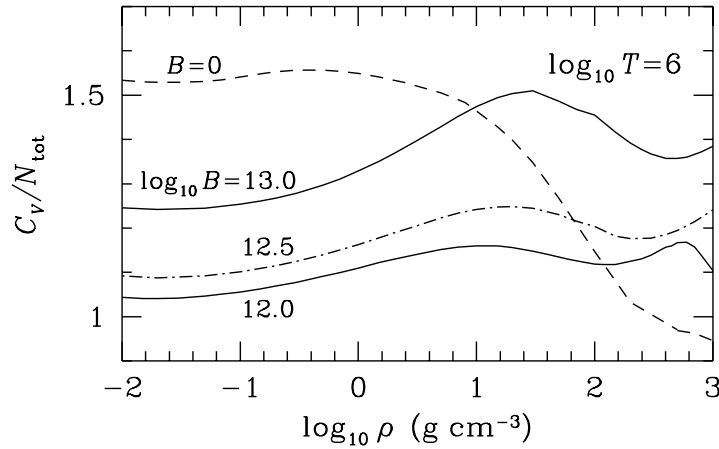


Рис. 5.11: Нормированная теплоёмкость при  $T = 10^6$  К без поля (пунктир) и в сильном магнитном поле разной напряжённости (штрихпунктирные и сплошные кривые).

Подобные же глубокие изменения сильно квантующее магнитное поле вызывает и у других термодинамических функций, рассчитанных в данной работе. Например, на рис. 5.12 показан адиабатический градиент  $\nabla_{\text{ad}}$  при разных  $B$ . При низкой плотности магнитное поле увеличивает адиабатический градиент, тем самым стабилизируя вещество против конвекции. Этот термодинамический эффект является дополнительным к магнитогидродинамической стабилизации, рассмотренной, например, в [346]. Однако при высокой плотности,  $\rho \sim (1-100)$  г см $^{-3}$ , наблюдается существенное уменьшение  $\nabla_{\text{ad}}$ , происходящее вследствие частичной рекомбинации атомов. При ещё более высокой плотности, когда плазма ионизуется давлением, адиабатический градиент снова возрастает.

### 5.3.7 Расчёт таблиц

Так как реализация метода расчёта модели уравнения состояния, описанного в § 5.1, требует большого объёма вычислений, непрактично пытаться проводить эти вычисления для каждой требуемой точки в конкретных астрофизических приложениях. Поэтому мы затабулировали термодинамические величины, представляющие интерес, на заранее заданной сетке значений плотности, температуры и магнитного поля и снабдили эти таблицы интерполяционной программой, позволяющей найти интересующую функцию в любой точке из области  $\rho$ ,  $T$  и  $B$ , покрываемой разработанной моделью уравнения состояния.

Как отмечено выше, развитая нами модель становится менее надёжной при срав-

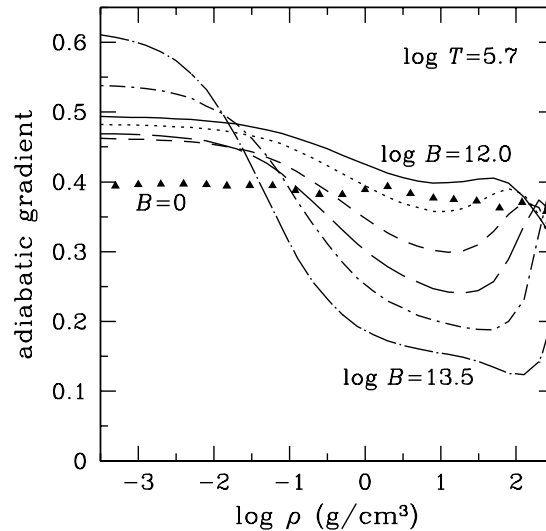


Рис. 5.12: Адиабатический градиент давления  $\nabla_{\text{ad}}$  при  $T = 5 \times 10^5$  К для разных напряжённостей магнитного поля:  $\lg B/\text{Гс} = 12,0, 12,3, 12,6, 12,9, 13,2, \text{ и } 13,5$ . Треугольниками показан случай без поля.

нительно низких температурах и высоких плотностях, в частности, из-за формирования молекул и цепочек  $\text{H}_n$ , которые рассмотрены весьма приближённо. В этой области парциальные концентрации частиц и термодинамические величины становятся модельно-зависимыми. Однако эта область не имеет большого значения для моделирования атмосфер большинства нейтронных звёзд, так как температура растёт вглубь оболочки, и реальный её профиль, как правило, проходит выше зоны неопределённости. По этой причине в качестве одного из входных параметров при построении таблиц мы вместо плотности выбрали «астрофизический параметр плотности»  $R = \rho_0/T_6^3$  (где  $\rho_0 \equiv \rho/(1 \text{ г см}^{-3})$ ), обычно используемый при расчётах непрозрачностей в моделях звёздных атмосфер (напр., [144, 347]), и ограничились значениями  $R < 4 \times 10^3$ . Заметим, что критические значения температуры и плотности для фазового перехода, рассмотренного в § 5.3.5, соответствуют  $\lg R_c \approx 3,7$ , что находится за границами выбранной области  $R$ , поэтому плазменный фазовый переход не влияет на составление таблиц.

Таблицы содержат информацию о равновесном составе замагниченной водородной плазмы (значения полной доли атомов, атомов в основном состоянии, молекул и кластеров) при каждом значении  $R$ ,  $T$  и  $B$ , а также значения термодинамических функций – давления  $P$ , внутренней энергии  $U$ , энтропии  $S$ , теплоёмкости  $C_V$  и логарифмических производных давления  $\chi_T = (\partial \ln P / \partial \ln T)_V$  и  $\chi_\rho = -(\partial \ln P / \partial \ln V)_T$ .

Остальные функции можно вычислить из приведённых в таблицах, используя соотношения Максвелла (см. § 2.1).

Затабулированные значения магнитного поля лежат в пределах  $11,9 \leq \lg B [\text{Гс}] \leq 15,0$ . Чем сильнее магнитное поле, тем выше та верхняя граница температуры, при которой молекулы и кластеры дают существенный вклад в уравнение состояния. Чтобы избежать этой области неопределённости, при составлении таблиц для сверхсильного поля  $13,5 \leq \lg B [\text{Гс}] \leq 15,0$  [279] мы подняли нижнюю границу температуры по сравнению со случаем обычных полей  $11,9 \leq \lg B [\text{Гс}] \leq 13,5$  [274] с  $2 \times 10^5$  К до  $5 \times 10^5$  К. С другой стороны, температура, при которой атомы термически ионизируются, возрастает с ростом  $B$ , и поэтому мы также сдвинули и верхнюю температурную границу с  $10^7$  К к  $4 \times 10^7$  К (рассматривать ещё более высокие  $T$  не имело бы смысла, потому что при такой температуре водород испытывает эффективное термоядерное горение – напр., [348]).

Кроме ионизационного состава и термодинамических функций, таблицы содержат также эффективные росселандовы непрозрачности для распространения излучения вдоль и поперёк магнитного поля (вычисление непрозрачностей будет обсуждаться в главе 7).

## 5.4 Электронные кинетические коэффициенты плазмы в сильном магнитном поле

В этом параграфе мы рассмотрим влияние сильного магнитного поля на тензоры электронной теплопроводности и электропроводности и термоэлектрические коэффициенты полностью ионизованной плазмы.

### 5.4.1 Введение

Существуют различные эффекты, которые магнитное поле оказывает на кинетические свойства плазмы (см., напр., обзор [349]). В данном введении мы опишем их на качественном уровне, а количественные критерии и оценки будут приведены в последующих разделах параграфа.

Любое магнитное поле делает перенос заряженных частиц – в нашем случае электронов – анизотропным. Оно препятствует их движению – и, соответственно, электронному переносу тепла и заряда – в направлении, перпендикулярном полю, и приводит к возникновению холловских токов. Эти эффекты существенны, когда цик-

лотронная частота  $\omega_c$  намного превосходит эффективное время столкновений. При этом само эффективное время столкновений остаётся неизменным в некантованном магнитном поле.

Квантованное магнитное поле оказывает более глубокое воздействие на процессы переноса. В слабо квантованном магнитном поле, в котором электроны распределены по нескольким уровням Ландау, при наличии вырождения кинетические коэффициенты осциллируют с изменением плотности вещества около тех значений, которые они имели бы в отсутствие квантования. Сильно квантованное магнитное поле, в котором практически все электроны привязаны к своему основному уровню Ландау, приводит к сильным отличиям кинетических коэффициентов от их классических значений.

Проблема влияния квантованного магнитного поля на процессы электронного переноса в плазме изучалась разными авторами не одно десятилетие (см. обзор [242] и ссылки в нём). Адекватное кинетическое уравнение для вычисления коэффициентов электронного переноса тепла и заряда в квантованном магнитном поле в вырожденной плазме было предложено Д. Г. Яковлевым [350] и затем использовалось в статьях [351–354]. Эти исследования, однако, не были полностью достаточными по трём причинам. Во-первых, использовавшийся формализм, основанный на функциях распределения, не был инвариантным: результаты для переноса *вдоль магнитного поля* слегка зависели от выбора электронного базиса – см. формулу (4.11). При этом оставался невыясненным вопрос о том, как изменятся результаты при проведении инвариантной трактовки. Во-вторых, результаты были получены лишь численно, и в отсутствие аппроксимационных формул или подробных таблиц их было затруднительно использовать на практике. В третьих, в последующее после этих работ десятилетие произошёл заметный прогресс в понимании и трактовке электронного переноса в кулоновской плазме в области её затвердевания в отсутствие магнитного поля, описанный выше в главе 3, и требовалось учесть этот прогресс при наличии магнитного поля. Эти проблемы были решены в наших работах [296], [231] и [226]. Краткий обзор их результатов и представлен ниже в данном параграфе.

Так как при тех условиях в оболочках нейтронных звёзд, при которых влияние магнитного поля на процессы электронного переноса велико, основным механизмом рассеяния электронов являются их столкновения с ионами, принимающие в кристаллической фазе форму рассеяния на фононах, именно этот механизм мы и будем рассматривать.

## 5.4.2 Продольный перенос: формализм матрицы плотности

### 5.4.2а Очерк теории

В статье [296] для описания электронного переноса вдоль квантующего магнитного поля впервые был применён формализм квантовой матрицы плотности, инвариантный по отношению к выбору базиса (4.11). Матрица плотности определяется формулой

$$\rho_{\kappa'\kappa} = \langle \psi_{\kappa'} | \hat{\rho} | \psi_{\kappa} \rangle, \quad (5.83)$$

где  $\psi_{\kappa}$  – волновые функции, входящие в формулу (4.5) и описывающие квантовые состояния  $|\kappa\rangle = |p_x, p_z, n, s\rangle^5$ , а  $\hat{\rho}$  – статистический оператор (напр., [72]). Рассмотрим упругие столкновения и предположим, что матрица плотности диагональна по энергиям:  $\tilde{\epsilon}' = \tilde{\epsilon}$ , где  $\tilde{\epsilon}$  – энергия электрона в релятивистских единицах, определённая в § 4.1.2. Предположим также диагональность по импульсам. В [296] было проверено, что это свойство не нарушается при рассматриваемых столкновениях электронов с тяжёлыми ионами. Диагональность по  $\tilde{\epsilon}$  и  $p_z$  приводит к диагональности по  $n$ , а диагональность по  $p_x$  и  $p_z$  позволяет трактовать зависимость  $\rho_{\kappa'\kappa}$  от  $x$  и  $z$  параметрически, без использования преобразования Вигнера. Таким образом,

$$\rho_{\kappa'\kappa} = \delta_{n'n} \delta_{p'_x p_x} \delta_{p'_z p_z} \rho_{ns's}(x, z, p_x, p_z), \quad (5.84)$$

где  $\delta_{p'_\alpha p_\alpha} \equiv (2\pi\hbar/L_\alpha) \delta(p'_\alpha - p_\alpha)$ . Так как анализируется перенос вдоль поля (для поперечного переноса, рассмотренного в [238], проблема неинвариантности не возникает), то можно предположить независимость  $\hat{\rho}$  от  $x$ . Введём спиновую поляризационную матрицу плотности равенством,

$$\rho_{ns's}(z, \text{sign}(p_z), \epsilon) = \int \rho_{ns's}(z, p_x, p_z) \frac{L_x}{2\pi\hbar} dp_x. \quad (5.85)$$

Тогда для неё получается кинетическое уравнение с классической больцмановской левой частью

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} - e\mathcal{E} \frac{\partial}{\partial p_z} \right) \rho_{ns_1s_2}(z, \text{sign}(p_z), \epsilon) = \left[ \frac{d\rho_{ns_1s_2}}{dt} \right]_c, \quad (5.86)$$

где  $\mathcal{E}$  – продольное электрическое поле и  $v_z$  – скорость. Зависимость от  $p_z$  входит в  $\rho_{ns_1s_2}$  через  $\epsilon$  и  $\text{sign}(p_z)$ . В правой части (5.86) стоит интеграл столкновений, вычисляемый квантовомеханически. В статье [296] он был вычислен на основе рассмотрения

---

<sup>5</sup> В данной главе мы используем для спинового индекса букву  $s$  вместо буквы  $\sigma$ , применявшейся в главе 4.



матрицы рассеяния во втором порядке теории возмущений (чтобы не утомлять читателя, здесь мы не воспроизводим эти выкладки).

Равновесная матрица плотности,  $\rho_{s_1 s_2}^{(0)}(\epsilon) = f_0(\epsilon) \delta_{s_1 s_2}$ . Для неё интеграл столкновений равен нулю. Отклонения от равновесия рассматриваются как малые возмущения. В нулевом приближении матрица плотности равна  $\rho^{(0)}$ ; она зависит от  $z$  параметрически через  $\mu$  и  $T$ . В первом приближении можно написать, по аналогии с [351],

$$\begin{aligned} \rho_{ns_1 s_2}(z, \text{sign}(p_z), \epsilon) &= \rho_{s_1 s_2}^{(0)}(\epsilon) + \text{sign}(p_z) l \frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon} \times \\ &\times \left[ e\mathcal{E} + \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\epsilon - \mu}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right] \varrho_{ns_1 s_2}(\text{sign}(p_z), \epsilon), \end{aligned} \quad (5.87)$$

где  $l$  – длина масштабирования, выбираемая в зависимости от потенциала рассеяния [351], а  $\varrho_{ns_1 s_2}(\text{sign}(p_z), \epsilon)$  – функция, подлежащая определению. Удерживая в левой части (5.86) только члены нулевого порядка, мы приходим к линейной системе алгебраических уравнений для поправок  $\varrho$ , которая записывается в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{s'} (A_{ns_1 s'} \varrho_{ns' s_2} + A_{ns' s_2}^* \varrho_{ns_1 s'}) - \sum_{\zeta, n' s' s''} \varsigma a_{ns_1 s_2, n' s' s''}^{(\zeta)} \varrho_{n' s' s''} = \delta_{s_1 s_2}, \quad (5.88)$$

где  $\varsigma = -1$ , если  $s' = s''$  и  $\text{sign}(p'_z) = \text{sign}(p_z)$ , и  $\varsigma = 1$  в остальных случаях. Суммирование производится по  $n' \leq n_{\max}(\epsilon)$ ,  $\varsigma = \pm 1$ , и  $s' = \pm 1$  при  $n' \geq 1$  (но  $s' = -1$ , если  $n' = 0$ ). Здесь мы не станем выписывать коэффициенты  $A_{ns s'}$  и  $a_{ns_1 s_2, n' s' s''}^{(\zeta)}$  в явном виде (интересующиеся могут обратиться к статье [296]), а лишь отметим, что эта система уравнений, как и должно быть, переходит в систему, полученную Д. Г. Яковлевым в [351] без учёта недиагональности по спине, если в ней оставить только диагональные по спине элементы  $\varrho$  и положить  $s_1 = s_2$ :

$$\sum_{\zeta n' s'} a_{ns \rightarrow n' s'}^{(\zeta)}(\epsilon) [\varrho_{ns}(\epsilon) - \gamma \varrho_{n' s'}(\epsilon)] = 1. \quad (5.89)$$

При этом  $a_{ns \rightarrow n' s'}^{(\zeta)}$  имеет смысл безразмерной вероятности перехода электрона из состояния с квантовыми числами  $n$  и  $s$  в состояние с  $n'$  and  $s'$ , с изменением ( $\varsigma = -1$ ) или без изменения ( $\varsigma = 1$ ) направления движения вдоль  $\mathbf{B}$ .

Решение системы (5.88) позволяет определить коэффициенты в уравнениях (3.10), записанных для переноса вдоль магнитного поля, и, используя (3.13), найти продольные коэффициенты проводимости  $\sigma$ , теплопроводности  $\kappa$ , и термоэлектрический коэффициент  $Q_T$ . Эти коэффициенты в сильно вырожденной плазме фактически опре-

деляются функцией

$$\Phi(\tilde{\epsilon}_F) = \frac{1}{2} \sum_{\text{sign}(p_z)=\pm 1} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{s=\pm 1} \varrho_{nss}(\text{sign}(p_z), \tilde{\epsilon}_F), \quad (5.90)$$

через которую выражается эффективное время релаксации. Здесь верхний предел суммирования  $n_{\max}$  задан формулой (4.10).

### 5.4.2b Результаты

В статье [296] была рассчитана матрица поправок первого порядка к матрице плотности,  $\varrho_{ns_1s_2}(\epsilon)$ , и вычислен её след  $\Phi(\epsilon)$  в диапазоне магнитных полей от  $10^{11}$  до  $10^{14}$  Гс. Коэффициенты системы (5.88) вычислялись на основе формул, выведенных в рамках теории возмущений второго порядка для  $S$ -матрицы, а для решения системы (5.88) применялась  $LU$ -факторизация по Флетчеру [277]. Как матрица плотности, так и электронные функции распределения были вычислены в двух представлениях, соответствующих двум значениям параметра  $\varphi$  в (4.11) –  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \varphi_n$ , согласно (4.12).

При относительно низких значениях  $B$  формализм матрицы плотности даёт практически те же результаты, что и формализм функции плотности с базисом (4.6) ( $\varphi = 0$ ), что соответствует предсказанию Д. Г. Яковлева [351]. Неточность формализма функции плотности с таким базисом составляет около 0.1% для  $B \lesssim 10^{12}$  Гс. Результаты, полученные при альтернативном представлении функции плотности в базисе с фиксированной спиральностью (4.12), использовавшемся в статьях [352, 354], отличаются от точных результатов на несколько процентов.

Различия между разными представлениями растёт с ростом поля. Некоторые численные результаты работы [296] для примера показаны на рис. 5.13. На этом рисунке каждое из четырёх окон разделено на две части: в верхней части каждого окна показана функция (5.90), напрямую связанная с эффективным временем релаксации, а в нижней – её относительное отличие от результатов, которые получаются при использовании формализма функции (а не матрицы) плотности для двух вариантов выбора электронного базиса. По горизонтальной оси отложена переменная

$$\nu = \frac{\epsilon - m_e c^2}{\hbar \omega_B} \cdot \frac{\epsilon + m_e c^2}{2m_e c^2} = \frac{\tilde{\epsilon}^2 - 1}{2b}. \quad (5.91)$$

Расчёты проводились для полностью ионизованного железа ( $Z = 26$ ). В целях количественного сравнения с результатами предшествующих работ [351, 352] в расчётах

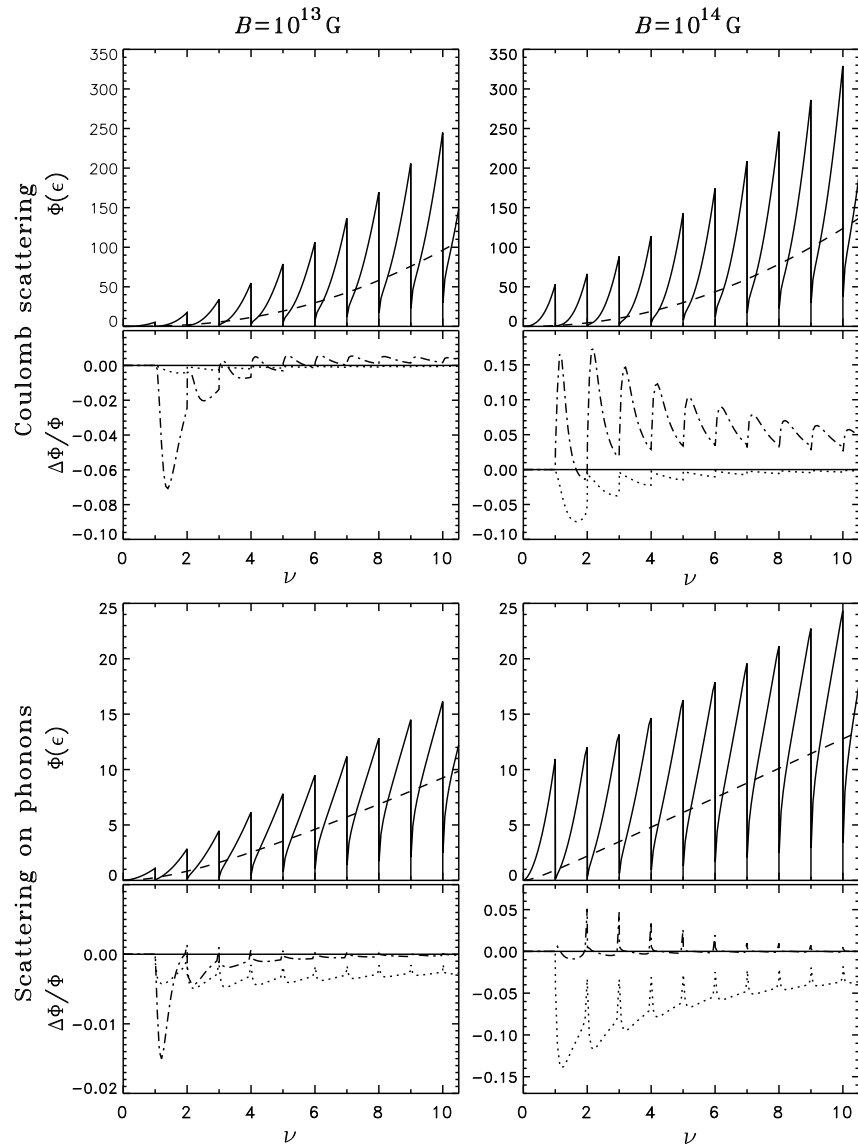


Рис. 5.13: Нормированная поправка к следу матрицы плотности  $\Phi(\epsilon)$ , определённая формулой (5.90), как функция энергетической переменной  $\nu$ , определённой формулой (5.91) [296]. Функция  $\Phi(\epsilon)$  в формализме матрицы плотности показана сплошными кривыми. Штриховые линии показывают результат для той же энергии Ферми в отсутствие магнитного поля. Точечный пункт и штрихпунктир показывают относительные ошибки  $\Delta\Phi/\Phi = (\Phi_{\text{appr}}/\Phi - 1)$  приближения  $\Phi_{\text{appr}}$ , в котором используется формализм функции плотности с базисом (4.6) или (4.11), (4.12), соответственно. На левых рисунках показан случай магнитной индукции  $B = 10^{13}$  Гс, на правых –  $B = 10^{14}$  Гс. Надписи «Coulomb scattering» и «Scattering on phonons» соответствуют выбору разных эффективных потенциалов рассеяния для расчётов, которые в целях сравнения с предыдущими работами брались из [351].

использовались те же эффективные потенциалы электронного рассеяния, что и в этих работах.

Сильные квантовые осцилляции  $\Phi(\epsilon)$  на рис. 5.13 вызваны той же причиной, что и осцилляции термодинамических функций, обсуждавшиеся в § 5.1: резкие провалы при целых значениях  $\nu$  обусловлены сингулярностью электронной плотности состояний вследствие магнитного квантования при тех значениях энергии Ферми, при которых электроны начинают заселять очередной уровень Ландау.

Относительные неточности формализма функции плотности, показанные в нижних частях рисунков, доходят до 20% при  $B = 10^{14}$  Гс. Их зависимость от энергии немонотонна. В большинстве рассмотренных случаев (но не во всех) базис (4.6) обеспечивает более высокую точность, чем базис (4.11), (4.12).

В целом относительные различия между результатами, полученными в разных представлениях, уменьшаются с ростом энергии, и при  $\nu > 50$  они не превышают 1% даже при  $B = 10^{14}$  Гс. Вычисления для столь высоких  $\nu$  (не проводившиеся в более ранних работах) были выполнены с использованием выведенных в [296] квазиклассических формул для интегралов, через которые выражаются коэффициенты системы (5.88).

На основе приведённых результатов можно сделать вывод, что формализм функции плотности при выборе базиса электронных волновых функций в форме (4.6) обеспечивает точность, достаточную для астрофизических приложений. В то же время, этот формализм требует гораздо меньшего объёма вычислений, чем более строгий формализм матрицы плотности. Ввиду этого он и будет использоваться в дальнейшем. Требуемый объём вычислений при использовании формализма функции плотности ещё более уменьшается благодаря тому, что в статье [226] выведены явные выражения для коэффициентов системы (5.89) в терминах интегральных экспонент.

### 5.4.3 Общий случай. Прикладные формулы

#### 5.4.3а Общие соотношения

Рассмотрим токи тепла и заряда, индуцированные в замагниченной плазме слабым электрическим полем  $\mathbf{E}$  и малыми градиентами химического потенциала,  $\nabla\mu_e$ , и температуры,  $\nabla T$ . Ток можно разложить на составляющие, связанные с переносом заряда и с намагниченностью (напр., [352]). Последние относятся к поверхностным эффектам, и их можно вычесть. Пусть  $\mathbf{j}_e$  и  $\mathbf{j}_T$  – плотности электрического тока и потока энергии, обуславливающих перенос заряда и тепла. Их можно записать как

(напр., [355])

$$\mathbf{j}_e = \sigma \cdot \mathbf{E}^* - \alpha \cdot \nabla T, \quad \mathbf{j}_T = \tilde{\alpha} \cdot \mathbf{E}^* - \tilde{\kappa} \cdot \nabla T, \quad (5.92)$$

где  $\mathbf{E}^*$  определено формулой (3.5). В отличие от (3.10), где  $\sigma$ ,  $\alpha$  и  $\tilde{\kappa}$  представляли скалярные величины, здесь это тензоры второго ранга ( $\sigma$  – тензор электрической проводимости). Из принципа симметрии Онзагера (напр., [72]) следует  $\tilde{\alpha}_{ij}(\mathbf{B}) = T\alpha_{ji}(-\mathbf{B}) = T\alpha_{ij}(\mathbf{B})$ .

Аналогично (3.12), формулы (5.92) можно переписать как

$$\mathbf{E}^* = R \cdot \mathbf{j}_e - Q \cdot \nabla T, \quad \mathbf{j}_T = -TQ \cdot \mathbf{j}_e - \kappa \cdot \nabla T, \quad (5.93)$$

где  $R = \sigma^{-1}$ ,  $\kappa = \tilde{\kappa} + T\alpha \cdot Q$  и  $Q = -R \cdot \alpha$  – тензоры электросопротивления, теплопроводности и термоэлектрический.

Компоненты тензоров  $\sigma$ ,  $\alpha$  и  $\tilde{\kappa}$  можно выразить в виде интегралов, аналогичных (3.11):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ij} \\ \alpha_{ij} \\ \tilde{\kappa}_{ij} \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} e^2 \\ e(\mu - \epsilon)/T \\ (\mu - \epsilon)^2/T \end{bmatrix} \frac{\mathcal{N}_B(\epsilon)}{\epsilon/c^2} \tau_{ij}(\epsilon) \left( -\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) d\epsilon, \quad (5.94)$$

где  $\mathcal{N}_B(\epsilon)$  определяется формулой (5.11), а функции  $\tau_{ij}(\epsilon)$  играют роль эффективных времён релаксации. Вследствие свойств симметрии тензоров  $\sigma$ ,  $\alpha$  и  $\tilde{\kappa}$ , только три компоненты  $\tau_{ij}(\epsilon)$  являются независимыми. В системе координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль  $\mathbf{B}$ , это компонента  $\tau_{zz}$ , относящаяся к продольным токам, компоненты  $\tau_{xx} = \tau_{yy}$ , относящиеся к токам поперёк поля, и  $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ , относящиеся к холловским токам.

#### 5.4.3b Неквантующее магнитное поле

Как хорошо известно (напр., [204] и ссылки там), в неквантующем магнитном поле

$$\tau_{zz}(\epsilon) = \tau_0(\epsilon), \quad \tau_{xx}(\epsilon) = \frac{\tau_0(\epsilon)}{1 + [\omega_g \tau_0(\epsilon)]^2}, \quad \tau_{yx}(\epsilon) = \frac{\omega_g \tau_0^2(\epsilon)}{1 + [\omega_g \tau_0(\epsilon)]^2}, \quad (5.95)$$

где  $\tau_0(\epsilon)$  – немагнитное время релаксации, которое в этом случае равно обратной эффективной частоте столкновений, а  $\omega_g = \omega_c/\gamma_r$  – гирочастота электрона. Произведение  $\omega_g \tau_0(\epsilon_F)$  называется параметром замагниченности или параметром Холла. Функция  $\tau_0(\epsilon)$  выражается согласно (3.29):

$$\tau_0(\epsilon) = \frac{p_0^2 v_0}{4\pi n_i Z^2 e^4 \Lambda_0(\epsilon)}, \quad (5.96)$$

где  $v_0 = p_0 c^2 / \epsilon$  – скорость электрона, а  $\Lambda_0(\epsilon)$  – кулоновский логарифм. Предположим, что  $T \gg T_u$ , где  $T_u$  – характерная температура «вымораживания» процессов переброса, определённая в (3.72). Тогда можно не проводить различия между эффективными временами столкновений для теплопроводности и проводимости и использовать в качестве  $\Lambda_0(\epsilon)$  аппроксимацию  $\Lambda_\sigma^{\text{fit}}$  из формулы (3.83).

### 5.4.3с Произвольное магнитное поле

Согласно § 5.4.2, кинетические коэффициенты для переноса вдоль магнитных силовых линий можно записать в виде (5.94), если определить эффективное время релаксации  $\tau_{zz} = \tau_{\parallel}$  соотношением

$$\frac{\mathcal{N}_B(\epsilon)c^2}{\epsilon} \tau_{\parallel}(\epsilon) = \frac{(eB)^2}{4\pi^3 \hbar Z^2 e^4 n_i} \Phi(\epsilon), \quad (5.97)$$

где безразмерная функция  $\Phi(\epsilon)$  определена формулой (5.90).

Рассмотрение переноса в плоскости  $(xy)$ , перпендикулярной магнитным силовым линиям, начнём со случая, когда параметр Холла велик:  $\tau_0 \omega_g \gg 1$ . Если бы поле было неквантуемым, то в этом случае мы имели бы, согласно (5.95),

$$\tau_{yx} \approx 1/\omega_g \quad \text{и} \quad \tau_{xx} \approx (\omega_g^2 \tau_0)^{-1}. \quad (5.98)$$

Случай квантуемого поля был изучен в статьях [238, 352]. Полученные в них выражения для коэффициентов электронного переноса можно представить в форме (5.94), если определить, по аналогии с (5.98),

$$\tau_{yx} = 1/\omega_g \quad \text{и} \quad \tau_{xx} = (\omega_g^2 \tau_{\perp})^{-1}, \quad (5.99)$$

причём

$$\frac{\mathcal{N}_B(\epsilon)c^2}{\epsilon} \frac{1}{\omega_g^2 \tau_{\perp}(\epsilon)} = \frac{Z^2 e^4 n_i}{2\pi \hbar^3 \omega_c^2} \Psi(\epsilon), \quad (5.100)$$

$$\Psi(\epsilon) = \sum_{nn'\gamma} \frac{b}{2\tilde{p}_n \tilde{p}_{n'}} \left[ (\tilde{\epsilon}^2 + 1 + \gamma \tilde{p}_n \tilde{p}_{n'}) (Q_1^{\perp} + Q_2^{\perp}) + 4b \sqrt{nn'} Q_3^{\perp} \right], \quad (5.101)$$

функции  $Q_i^{\perp}$  определяются формулами

$$Q_1 = \int_0^{\infty} u I_{n-1, n'-1}^2(u) \tilde{\phi}^2(u) du, \quad (5.102a)$$

$$Q_2 = \int_0^{\infty} u I_{nn'}^2(u) \tilde{\phi}^2(u) du, \quad (5.102b)$$

$$Q_3 = \int_0^{\infty} u I_{nn'}(u) I_{n-1, n'-1}(u) \tilde{\phi}^2(u) du, \quad (5.102c)$$

$I_{nn'}(u)$  – функции Лагерра (4.17), переменная интегрирования  $u = a_m^2 q^2 / 2$ , а  $\tilde{\phi}^2(u) = 2|\phi_q|/a_m^2$ , где  $\phi_q$  – функция экранирования, введённая в (3.26), а  $\hbar q$  – величина импульса, переданного при рассеянии.

В слабо квантующем магнитном поле  $\tau_{\perp}(\epsilon)$  осциллирует вокруг  $\tau_0(\epsilon)$  и стремится к  $\tau_0(\epsilon)$  в пределе неквантующего поля. Это позволяет нам ввести следующую интерполяцию между режимами большого и умеренно-малого значений параметра Холла:

$$\tau_{xx} = \frac{\tau_{\perp}}{1 + (\omega_g \tau_{\perp})^2}, \quad \tau_{yx} = \frac{\omega_g \tau_{\perp}^2}{1 + (\omega_g \tau_{\perp})^2}. \quad (5.103)$$

Формулы (5.103) соотносят эффективные времена релаксации  $\tau_{xx}$  и  $\tau_{yx}$  с эффективной частотой столкновений для переноса в направлении, перпендикулярном полю,  $\tau_{\perp}^{-1}$ , и правильно воспроизводят известные пределы (5.95) (неквантующее поле, произвольный параметр Холла) и (5.99) (произвольное поле, большой параметр Холла).

Вдобавок наша интерполяция (5.103) для  $\tau_{xx}$  устраняет хорошо известную расходимость, возникающую при прямой подстановке (5.100) под интеграл (5.94) из-за обращения  $\Psi(\epsilon)$  в бесконечность на каждом пороге Ландау по закону  $(\nu - n_{\max})^{-1}$ . Можно показать, что вывод [238, 352], приводящий к формулам, эквивалентным (5.99)–(5.101), подразумевает, что  $\omega_g \tau_{\perp} \gg 1$ . Корректируя выражение (5.99) в случае, когда параметр  $\omega_g \tau_{\perp}$  не является большим, формула (5.103) обеспечивает конечность  $\tau_{xx}$  и одновременно позволяет вычислять кинетические коэффициенты при произвольных соотношениях между параметрами задачи.

#### 5.4.3d Аналитические формулы для $\tau_{\parallel}(\epsilon)$ и $\tau_{\perp}(\epsilon)$

На основе представленной теории в [226] были выполнены представительные серии расчётов эффективных времён столкновений  $\tau_{\parallel}$  и  $\tau_{\perp}$ . При этом варьировались ключевые параметры, от которых зависит эффективная функция экранирования  $|\phi_q^{\text{eff}}|$  (3.75), использованная при проведении расчётов:

- параметр Дебая–Валлера  $a_{\text{DW}} = 4s_0 k_{\text{F0}}^2 \approx u_{-2} (2k_{\text{F0}} r_{\text{D}})^2$ , где параметр  $s_0$  определён формулой (3.78), а  $\hbar k_{\text{F0}} = x_{\text{r}} m_e c$  – значение, которое имел бы электронный импульс Ферми при  $B = 0$  и заданной концентрации электронов;

- параметр кулоновского экранирования  $a_s = (q_s / 2k_{\text{F0}})^2$ , где параметр  $q_s$  определён формулой (3.76);

- магнитная индукция в релятивистских единицах  $b$  (варьировалась в расчётах от  $10^{-4}$  до  $10^2$ );

- энергетическая переменная  $\nu$  (5.91) (при каждом  $b$  варьировалась от 0 до 25, принимая по 5–10 значений на каждом целочисленном интервале).

В случае *сильно квантующего* магнитного поля ( $\nu < 1$ ) функции  $\Phi$  и  $\Psi$ , определяющие  $\tau_{\parallel}$  и  $\tau_{\perp}$ , даются точными аналитическими формулами, полученными в [226]:

$$\Phi(\epsilon) = \frac{\tilde{p}_0^2}{2Q_{\parallel}(\xi)}, \quad \Psi(\epsilon) = \frac{b}{\tilde{p}_0^2} [\tilde{\epsilon}^2 Q^{\perp}(\xi) + Q^{\perp}(0)], \quad (5.104)$$

где

$$Q_{\parallel}(\xi) = u_0^{-1}(1 - e^{-\zeta\xi}) - e^{u_0} E_1(u_0) + (1 + \zeta) e^{u_0 + \zeta\xi_s} E_1(u_0 + \zeta u_0), \quad (5.105)$$

$$Q^{\perp}(\xi) = (1 + u_0) e^{u_0} E_1(u_0) - 1 + e^{-\zeta\xi} - (1 + u_0 + \zeta u_0) e^{u_0 + \zeta\xi_s} E_1(u_0 + \zeta u_0), \quad (5.106)$$

$\xi = 2\tilde{p}_0^2/b$ ,  $\zeta = 2s_0 a_m^2$ ,  $\xi_s = \frac{1}{2}(a_m q_s)^2$ ,  $u_0 = \xi + \xi_s$ , а функция  $E_1$  легко вычисляется при помощи полиномиальных аппроксимаций [225].

В случае, когда  $\nu > 1$ , явное точное аналитическое выражение отсутствует. Поэтому для этого случая мы сконструировали приближённые выражения, позволяющие воспроизвести результаты расчётов [226]. Запишем эффективные времена столкновений в виде

$$\tau_{\parallel}(\epsilon) = \frac{\mathcal{N}_0(\epsilon)}{\mathcal{N}_B(\epsilon)} \frac{p_0^2 v_0}{4\pi n_i Z^2 e^4 \Lambda_{\parallel}(\epsilon)}, \quad \tau_{\perp}(\epsilon) = \frac{\mathcal{N}_B(\epsilon)}{\mathcal{N}_0(\epsilon)} \frac{p_0^2 v_0}{4\pi n_i Z^2 e^4 \Lambda_{\perp}(\epsilon)}. \quad (5.107)$$

Как можно видеть из (5.96), функции  $\Lambda_{\parallel}$  и  $\Lambda_{\perp}$  должны обращаться в  $\Lambda_0$  для неквантующего поля. В случае квантующих полей для отношений  $\Lambda_{\parallel}/\Lambda_0$  и  $\Lambda_{\perp}/\Lambda_0$  построены следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_{\parallel}}{\Lambda_0} = & \left\{ D \left[ 1 + \frac{\sqrt{b}}{\tilde{p}_0} \left( \frac{A}{x} - B \sqrt{x} + C \frac{x - \sqrt{x}}{n_{\max}} \right) \right]^{-2} + \right. \\ & \left. + L^2 x^2 \left[ \frac{3x^2 - 1}{2n_{\max} + 1.5x^2/(1 + 2b)^2} + 0.07 + \frac{E}{5} \right]^2 \right\}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.108)$$

$$\frac{\Lambda_{\perp}}{\Lambda_0} = 1 + \frac{b}{\tilde{p}_0^2} \frac{\tilde{A}}{x^2} + (\sqrt{b}/\tilde{p}_0) \left[ (\tilde{B} \ln n_{\max}) x^{-1} - (\tilde{C} + \tilde{D} \ln n_{\max}) \sqrt{x} \right], \quad (5.109)$$

где  $n_{\max}$  определяется согласно (4.10),  $x = \tilde{p}_n/\sqrt{b} = \sqrt{2(\nu - n_{\max})}$ ,

$$\begin{aligned} A &= \frac{30 - 15E - (15 - 6E)v_0^2}{30 - 10E - (20 - 5E)v_0^2}, \quad B = \frac{3}{2} - \frac{E}{2} + \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{1 - 2v_0^2/3}, \\ C &= \frac{1 - E + 0.75v_0^2}{1 + v_0^2}, \quad D = 1 + 0.06 \frac{L^2}{n_{\max}^2}, \quad E = \frac{1 - \exp(-a_{\text{DW}})}{a_{\text{DW}}}, \\ \tilde{A} &= 0.8(1 + \tilde{L}) + 0.2L, \quad \tilde{B} = (0.68 - 1.3\tilde{E})\tilde{L}^{1/6}, \\ \tilde{C} &= 1.42 - \tilde{E} + \tilde{L}^{1/2}/3, \quad \tilde{D} = (0.52 - \tilde{E})\tilde{L}^{1/4}, \quad \tilde{E} = (10 + 5/b)^{-1}, \\ L &= \ln(1 + \tilde{a}^{-1}), \quad \tilde{L} = \tilde{a}L, \quad \tilde{a} = [\sqrt{a_s} + (2 + 0.5a_{\text{DW}})^{-1}]^2. \end{aligned}$$



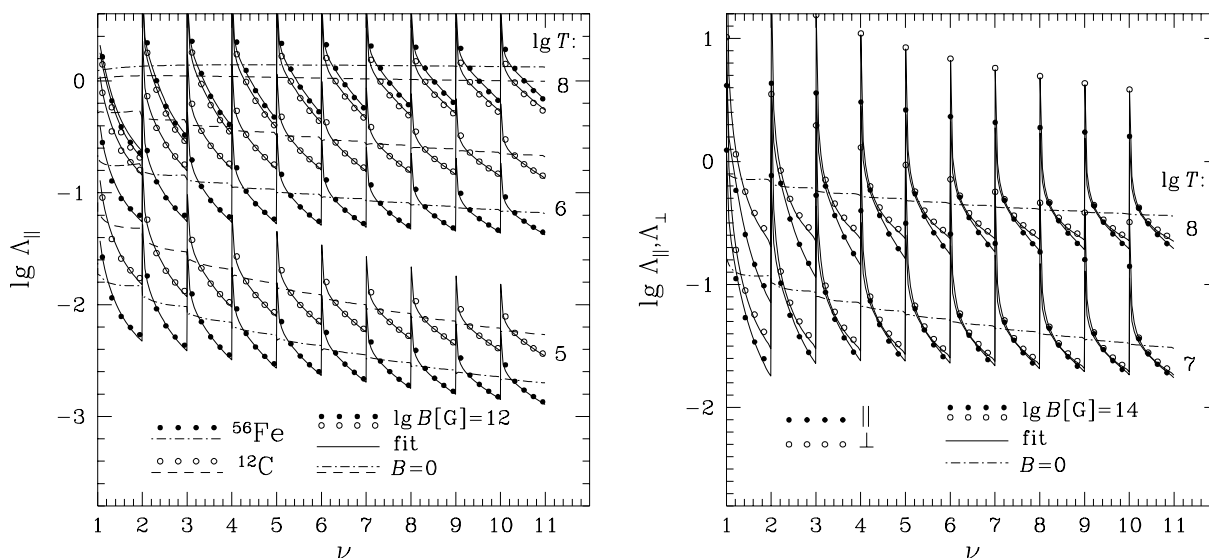


Рис. 5.14: Вычисленные (кружки и окружности) и аппроксимированные эффективные продольные  $\Lambda_{\parallel}$  и поперечные  $\Lambda_{\perp}$  кулоновские логарифмы как функции энергетической переменной, определённой формулой (5.91) [226]. Для сравнения пунктиром и штрихпунктиром нанесены значения немагнитного кулоновского логарифма  $\Lambda_0$ .

При  $x \rightarrow 0$  ведущие члены в (5.108) и (5.109) пропорциональны  $x^{-1}$  и  $x^{-2}$  и воспроизводят точное асимптотическое поведение функций  $\Phi$  и  $\Psi$ , соответственно. Аппроксимация проверялась количественно при  $\nu - n_{\max} \geq 0.01$ , что вполне достаточно для большинства приложений. Её типичная погрешность при этом оказалась порядка нескольких процентов.

Рисунок 5.14 иллюстрирует поведение эффективных кулоновских логарифмов, а также точность аппроксимации, при физических условиях, типичных для теплоизолирующих оболочек нейтронных звёзд.

#### 5.4.4 Кинетические коэффициенты с учётом теплового усреднения

Приведённые в предыдущем подразделе формулы позволяют выразить в явном аналитическом виде электронные кинетические коэффициенты полностью ионизованной плазмы, обусловленные электрон-ионным рассеянием, для произвольного магнитного поля при сильном вырождении, если пренебречь конечной шириной поверхности Ферми. Однако даже в условиях сильного вырождения такое пренебрежение не вполне оправдано, если поле квантующее. В самом деле, на рис. 5.14 мы видим очень узкие и резкие пики вблизи порогов Ландау. Несомненно, ненулевая температура способна привести к размыванию этих пиков даже при выполнении условия  $T \ll T_F$ .

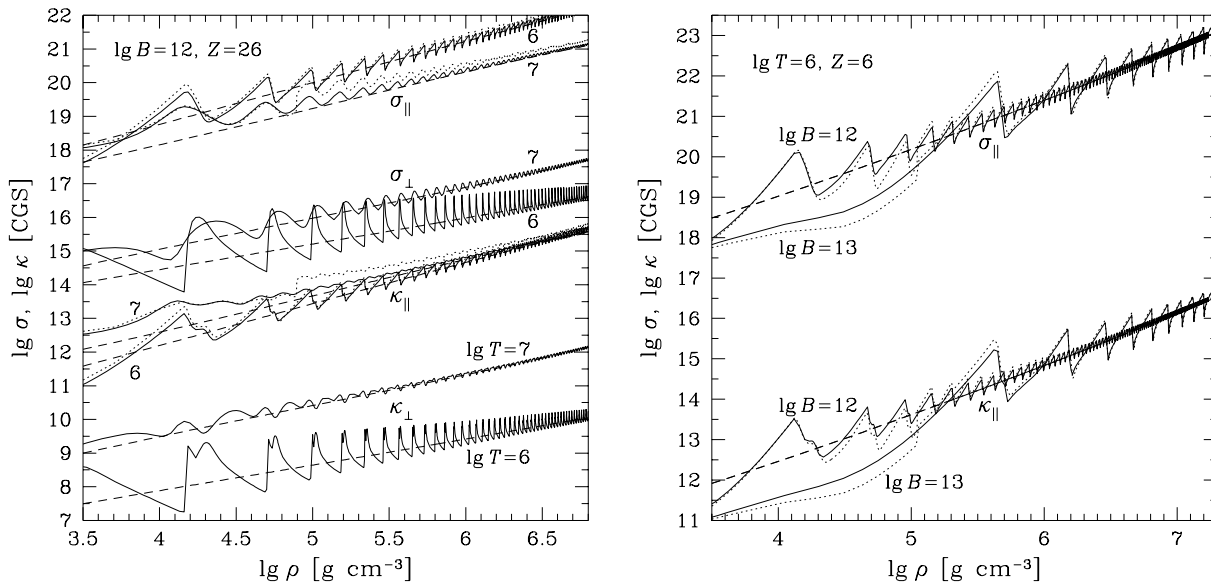


Рис. 5.15: Продольные ( $\parallel$ ) и поперечные ( $\perp$ ) по отношению к  $\mathbf{B}$  компоненты тензоров проводимости ( $\sigma$ ) и теплопроводности ( $\kappa$ ) во внешней оболочке нейтронной звезды как функции плотности в единицах СГС в логарифмическом масштабе [226]. Для сравнения штриховыми линиями нанесены значения проводимости и теплопроводности при тех же параметрах плазмы, но без учёта квантующего характера магнитного поля. Точечный пунктир показывает результат применения приближений, использовавшихся в более ранних работах. *Левый рисунок* – для  $^{56}\text{Fe}$  при магнитной индукции  $B = 10^{12}$  Гс для двух значений  $\lg T$ , указанных у кривых. *Правый рисунок* – продольные компоненты тензоров для  $^{12}\text{C}$  при температуре  $T = 10^6$  К для двух значений  $\lg B$ , указанных у кривых.

Поэтому на практике приближённые формулы, приведённые выше, мы подставляем в интегралы (5.94), которые берутся численно.

На рис. 5.15 представлены теплопроводности и проводимости для переноса, параллельного магнитным силовым линиям, а в левом окне – также и перпендикулярного к ним, для железной (слева) и углеродной (справа) плазмы при разных значениях  $T$  и  $B$ , указанных на рисунке. Квантовые осцилляции заметнее при более низких температурах, но даже в этом случае видно, что тепловое усреднение по формуле (5.94) весьма существенно. Для теплопроводности, в частности, оно приводит к наличию двух пиков около каждого порога Ландау, которые отсутствуют в исходных кулоновских логарифмах. Классические формулы (пунктир) правильно воспроизводят крупномасштабный тренд кривых и уменьшение поперечных коэффициентов по сравнению с продольными (при этом продольные коэффициенты совпадают с теми, которые были бы в отсутствие поля). В режиме сильного квантования квантовые осцилляции, несмотря на применение теплового усреднения, достигают порядков величины. Для сравнения точечным пунктиром нанесены результаты наших расчётов, в которых намеренно были использованы приближения из более ранних работ, в ко-

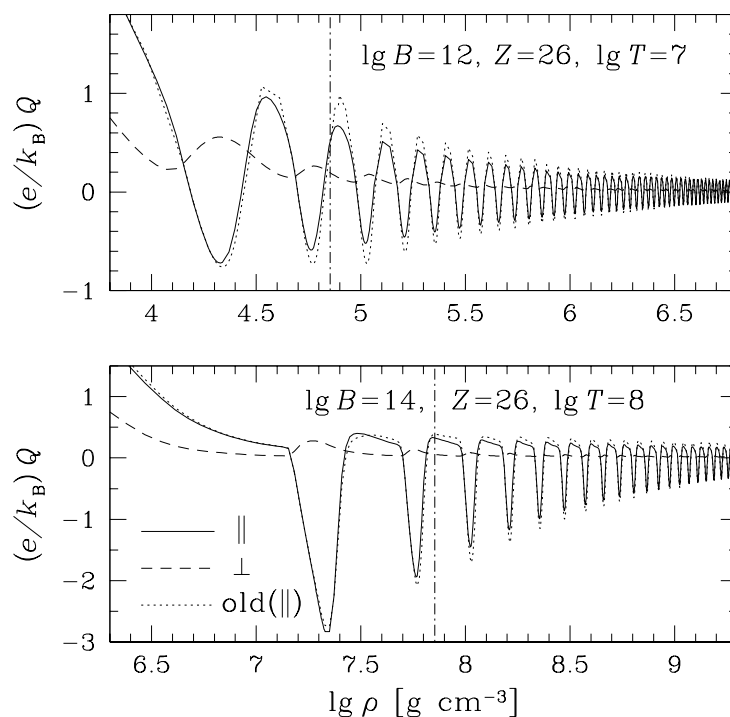


Рис. 5.16: Продольные (сплошные кривые) и поперечные (штриховые линии) по отношению к  $\mathbf{B}$  компоненты термоэлектрического тензора, нормированные на  $k_B/e$ .

торых не учитывались многофононные процессы в кулоновском кристалле и зарождение дальнего порядка в кулоновской жидкости вблизи точки плавления (см. § 3.2). Скачки на точечных кривых происходят в точке кристаллизации кулоновской плазмы. Заметное отличие в области кулоновской жидкости (слева от скачков) связано с более точным структурным фактором, использованным в [224, 226], по сравнению с более ранними работами.

Недиагональные (холловские) компоненты тензоров проводимости и теплопроводности (не показанные на рисунке) не испытывают значительных магнитных осцилляций и практически совпадают со значениями, полученными без учёта квантования Ландау.

На рис. 5.16 показаны продольная и перпендикулярная компоненты термоэлектрического тензора, как функции плотности для железной плазмы [226]. Точечный пунктир показывает результат применения приближений, использовавшихся в более ранних работах, для продольной компоненты, а вертикальная штрихпунктирная линия показывает положение точки кристаллизации.

На рис. 5.17 – показана холловская компонента термоэлектрического тензора. В противоположность холловским компонентам проводимости и теплопроводности,

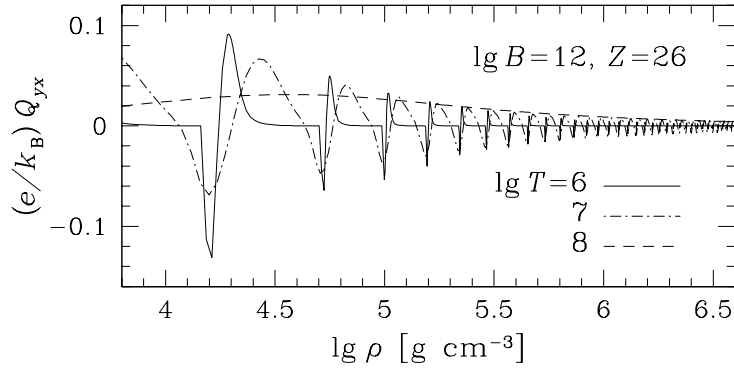


Рис. 5.17: Холловская компонента термоэлектрического тензора для  $^{12}\text{C}$  при  $B = 10^{12}$  Гс для трёх значений  $\lg T$ , каждому из которых соответствует свой тип кривой, как указано на рисунке.

холловская компонента термоэлектрического тензора испытывает сильные магнитные осцилляции наряду с двумя другими его компонентами при  $T = 10^6$  К, которые, однако, полностью замываются при  $T = 10^8$  К.

Наконец, отметим, что процедура усреднения, определённая в (5.94), совместно с представленными аналитическими формулами для  $\tau_{\parallel}$  и  $\tau_{\perp}$  позволяет получать правильные результаты для проводимости и теплопроводности не только при сильной вырожденности электронов,  $T \ll T_F$ , для которой она была получена, но и в невырожденной области, и, таким образом, оказывается применимой при любых соотношениях между  $T$  и  $T_F$ . Это обстоятельство иллюстрируется рисунком 5.18 из нашей статьи [227]. При сравнительно низкой плотности – слева от вертикальной линии, – где электроны являются невырожденными, теплопроводность может быть оценена простой формулой

$$\kappa \approx 5 \times 10^{10} Z^{-1} T_6^{5/2} \text{ эрг}/(\text{см с К}), \quad (5.110)$$

которую можно получить из выражений, приведённых в § 3.1.4. Соответствующая величина  $\kappa$  показана горизонтальной линией в левой части рисунка. Видно, что численный расчёт (сплошная кривая) довольно неплохо сходится к этой оценке.

Вывод [227] о том, что представленные в данном параграфе формулы для проводимости и теплопроводности при использовании (5.94) применимы при любой степени вырождения, был подтверждён в ряде последующих работ, как наших (напр., [230]), так и независимых (напр., [356, 357]).

Рисунок 5.18 демонстрирует также недостаточную точность формул для тензора теплопроводности без теплового усреднения по (5.94). Соответствующие значения  $\kappa_{\parallel}$  и  $\kappa_{\perp}$  показаны точечным пунктиром. Заметим между прочим, что сделанный в статье

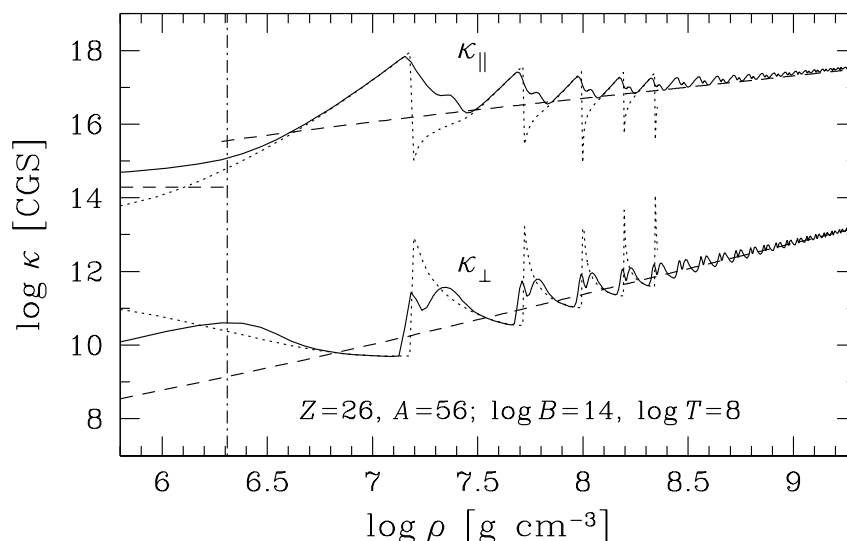


Рис. 5.18: Продольная ( $\parallel$ ) и поперечная ( $\perp$ ) теплопроводности в состоящей из железа внешней оболочке нейтронной звезды при  $T = 10^8$  К и  $B = 10^{14}$  Г [227]. Сплошные кривые – результаты расчёта по формуле 5.94, штриховая линия – классическая модель, точечный пунктир – результат пренебрежения тепловым усреднением. Электроны являются вырожденными справа от вертикальной штрихпунктирной линии, положение которой соответствует равенству  $T_F = T$ . Горизонтальная пунктирная линия в невырожденной области показывает теплопроводность, которую даёт формула (5.110).

[358] ошибочный вывод о том, что в сильном магнитном поле при низкой плотности компонента  $\kappa_{\perp}$  может стать сравнимой с  $\kappa_{\parallel}$ , обусловлен именно тем, что авторы пренебрегли тепловым усреднением: действительно, на рис. 5.18 видно, что точечные линии имеют в области низких плотностей неверные асимптотики, соответствующие возрастанию  $\kappa_{\perp}$  и убыванию  $\kappa_{\parallel}$ .

## 5.5 Резюме

Представленные в § 5.1 результаты, часть из которых была известна ранее, а часть получена в данной работе, позволяют находить термодинамические функции полностью ионизованной плазмы во внешних оболочках нейтронных звёзд при произвольной температуре и плотности и произвольном – в том числе квантующем – магнитном поле. Компьютерная программа, реализующая их вычисление, предоставлена в свободное пользование на специально созданной странице в Интернете<sup>6</sup>.

В § 5.2 представлены формулы и результаты для оценки статистического распределения протонов по уровням Ландау в квантующем магнитном без использования

<sup>6</sup><http://www.ioffe.ru/astro/EIP/>

предположения о выполнении условий ЛТР. На их основе легко выписать простые формулы для приближённой оценки относительной заселённости основного и первого возбуждённого уровней:

$$\frac{n_1}{n_0} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{ci}}{k_B T}\right) \left[1 + \frac{\Gamma_{10}^A}{\Gamma_{10}^C}\right]^{-1}, \quad (5.111)$$

где  $\Gamma_{10}^A$  – естественная ширина первого уровня, а  $\Gamma_{10}^{C(pe)}$  – его уширение за счёт кулоновских столкновений протонов с электронами, которые можно оценить по формулам

$$\Gamma_{10}^A = \frac{4}{3} \frac{e^2 \omega_{cp}^2}{m_p c^3}, \quad \frac{\Gamma_{10}^{C(pe)}}{\Gamma_{10}^A} = 2,86 \times 10^8 \rho_0 B_{12}^{-7/2} \tilde{\Lambda}_{10}^{(pe)}. \quad (5.112)$$

Отношение (5.112) больше единицы в атмосферах обычных нейтронных звёзд, но может стать меньше единицы для магнитаров.

В § 5.3 представлен и осуществлён метод расчёта ионизационного равновесия и термодинамических функций частично ионизованной водородной плазмы, основанный на минимизации свободной энергии, с учётом влияния сильного магнитного поля на квантовомеханические свойства атома водорода, а также с учётом теплового движения атома и изменений его квантовомеханических характеристик, связанных с таким движением поперёк магнитных силовых линий. На основе применения этого метода рассчитаны таблицы ионизационного равновесия и уравнения состояния, которые вместе с программой, осуществляющей интерполяцию по этим таблицам, предоставлены в свободное пользование на специально созданной странице в Интернете<sup>7</sup>.

Наконец, в § 5.4 представлена теория и результаты расчёта электронных кинетических коэффициентов, обусловленных рассеянием электронов на ионах в полностью ионизованной кулоновской плазме в квантующем магнитном поле. Результаты аппроксимированы аналитическими формулами, позволяющими производить расчёт тензоров теплопроводности и проводимости, а также термоэлектрического тензора, при любых величинах температуры, плотности и магнитного поля посредством однократного интегрирования представленных аналитических функций. Комплекс компьютерных программ, реализующих эти аппроксимации и интегрирование, предоставлен в свободное пользование на специально созданной странице в Интернете<sup>8</sup>.

<sup>7</sup><http://www.ioffe.ru/astro/NSG/Hmagnet/>

<sup>8</sup><http://www.ioffe.ru/astro/conduct/>

## Глава 6

# Тепловая структура и эволюция нейтронных звёзд

Данная глава посвящена изучению тепловой структуры и эволюции нейтронных звёзд на основе результатов для уравнения состояния и коэффициентов теплопроводности плотной плазмы в оболочках нейтронных звёзд, представленных в главах 2, 3 и 5.

Раздел 6.1 носит, в основном, вводный характер. В нём будут выписаны дифференциальные уравнения теплового баланса, управляющие тепловой структурой и эволюцией звезды с учётом эффектов ОТО, а также кратко охарактеризованы две взаимно дополнительные компьютерные программы, разработанные в секторе теоретической астрофизики ФТИ им. А. Ф. Иоффе, для численного решения этих уравнений. Одна из этих программ реализует расчёт общего теплового баланса и эволюции звезды, а другая, разработанная автором на основе результатов, представленных в предшествующих главах диссертации, реализует расчёт тепловой структуры оболочек.

В § 6.2 на основе применения этой программы с использованием коэффициентов теплопроводности, описанных в главе 3, изучается тепловая структура и остывание немагнитных нейтронных звёзд среднего возраста либо с теплоизолирующими оболочками, составленными полностью из железа и других тяжёлых элементов, близких к основному состоянию вещества в оболочках, либо с оболочками, верхние слои которых содержат более лёгкие элементы от Н до О, которые могут появиться в результате аккреции вещества на звезду после её рождения.

В § 6.3 описаны применения результатов расчётов тепловой структуры, полученных в § 6.2, к изучению тепловой релаксации коры молодых нейтронных звёзд, а

также к интерпретации наблюдений нагревания и остывания рентгеновских транзиентов.

В § 6.4 с использованием коэффициентов теплопроводности, описанных в § 5.4, изучается тепловая структура и остывание нейтронных звёзд с сильными магнитными полями.

В § 6.5 описаны применения результатов расчётов тепловой структуры, полученных в § 6.4, к изучению тепловой структуры, энергетического баланса и светимости магнитаров в сравнении с наблюдательными данными.

## 6.1 Уравнения тепловой структуры и их решение

Полный набор уравнений, описывающих механическую и тепловую структуру и эволюцию сферически симметричной звезды при гидростатическом равновесии в рамках ОТО был получен К. Торном [359]. Эти уравнение легко преобразовать к виду, справедливому для оболочки звезды с радиальным теплопереносом, плавным распределением температуры по поверхности и бессильным магнитным полем. В предположении о квазистационарности теплопереноса и нейтринного излучения эти уравнения сводятся к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для метрической функции  $\Phi$ , определённой в § 1.5, локальной плотности радиального теплового потока  $F_r$ , температуры  $T$  и гравитирующей массы  $m$ , заключённой внутри сферы радиуса  $r$ , как функций давления  $P$ :

$$\frac{d\Phi}{d \ln P} = -\frac{1}{\mathcal{K}_h} \frac{P}{\rho c^2}, \quad (6.1a)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 F_r)}{d \ln P} = \frac{P}{\rho g \mathcal{K}_h \mathcal{K}_g} Q - 2F_r \frac{d\Phi}{d \ln P}, \quad (6.1b)$$

$$\frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{3}{16} \frac{F_r}{\sigma_{\text{SB}} T^4} \frac{\varkappa' P}{g} \frac{1}{\mathcal{K}_h \mathcal{K}_g} - \frac{d\Phi}{d \ln P}, \quad (6.1c)$$

$$\frac{dr}{d \ln P} = -\frac{P}{\rho g} \frac{\mathcal{K}_r}{\mathcal{K}_h \mathcal{K}_g}, \quad (6.1d)$$

$$\frac{dm}{d \ln P} = -\frac{4\pi r^2 P \mathcal{K}_r}{g \mathcal{K}_h \mathcal{K}_g}. \quad (6.1e)$$

Здесь  $\rho$  – массовая плотность,  $Q$  – полные потери энергии в единице объёма за единицу времени ( $Q = Q_\nu - Q_h$ , где  $Q_\nu$  – плотность мощности нейтринного излучения, а  $Q_h$  – плотность энергии, выделяющейся в единицу времени, например, в результате ядерных реакций),  $\varkappa' = \varkappa \rho_{\text{bar}} / \rho$ ,  $\varkappa$  – непрозрачность,  $\rho_{\text{bar}} = n_b m_H$  – так называемая «барионная массовая плотность»,  $n_b$  – концентрация барионов (§ 2.2.1),  $m_H$  –



масса атома водорода,  $g = Gm/(r^2\mathcal{K}_r)$  – локальное гравитационное ускорение,  $G$  – постоянная гравитации. Также в уравнениях (6.1) введены функции:

$$\mathcal{K}_r = (1 - 2Gm/rc^2)^{1/2}, \quad \mathcal{K}_h = 1 + P/\rho c^2, \quad \mathcal{K}_g = 1 + 4\pi r^3 P/mc^2 \quad (6.2)$$

– релятивистские поправки к радиусу, энтальпии и гравитационному ускорению, соответственно.

Здесь использовано стандартное определение непрозрачности  $\varkappa$ , также использованное Торном [359]. В наших обозначениях можно записать:

$$\varkappa' = 16\sigma_{\text{SB}}T^3/(3\kappa\rho), \quad (6.3)$$

где  $\kappa$  – полная теплопроводность. В оболочках нейтронных звёзд с хорошей точностью выполняются приближённые равенства  $\rho \approx \rho_{\text{bar}}$  и  $\varkappa' \approx \varkappa$ .

Эффективная радиальная теплопроводность на локальном участке поверхности в магнитном поле равна

$$\kappa = \kappa_{\parallel} \cos^2 \Theta_B + \kappa_{\perp} \sin^2 \Theta_B, \quad (6.4)$$

где  $\Theta_B$  – угол между магнитными силовыми линиями и нормалью к поверхности, а  $\kappa_{\parallel}$  и  $\kappa_{\perp}$  – компоненты тензора теплопроводности, отвечающие за перенос вдоль и поперёк силовых линий, соответственно. Каждая из компонент  $\kappa_{\parallel}$  и  $\kappa_{\perp}$  в теплоизолирующей оболочке нейтронной звезды складывается из фотонной и электронной теплопроводностей,

$$\kappa = \kappa_r + \kappa_c, \quad \varkappa^{-1} = K_r^{-1} + K_c^{-1}, \quad (6.5)$$

где  $\kappa_r$ ,  $\kappa_c$  и  $K_r$ ,  $K_c$  обозначают фотонную (*radiative*, индекс “r”) и электронную (*conduction*, индекс “c”) составляющие теплопроводности и непрозрачности.

Фотонная теплопроводность доминирует ( $\kappa_r > \kappa_c$ ) в самых внешних слоях, как правило, невырожденных, а электронная играет главную роль ( $\kappa_c > \kappa_r$ ) в более глубоких, умеренно и сильно вырожденных слоях.

Полный тепловой поток на данном радиусе  $r$  (локальная светимость, связанная с тепловыми, но не нейтринными потерями) определяется интегралом плотности потока по сфере этого радиуса,

$$L_r = \int \sin \theta d\theta d\varphi r^2 F_r(\theta, \varphi), \quad (6.6)$$

где  $(\theta, \varphi)$  – полярный и азимутальный углы.

К уравнениям (6.1) следует поставить граничные условия:

$$\Phi_s = \ln \mathcal{K}_{rs}, \quad F_{rs} = F_R = \sigma T_s^4, \quad r_s = R, \quad m_s = M, \quad (6.7)$$

где индекс «s» означает значение на поверхности, а  $R$  и  $M$  – радиус звезды и её полная масса. Положение поверхности в случае наличия оптически толстой атмосферы определяется из решения уравнения переноса излучения и второго условия (6.7). В приближении Эддингтона [308], которое для определения тепловой структуры является достаточно точным (что будет подтверждено в § 6.2.2b), это условие выполняется при

$$\kappa_{\text{rad,s}} P_s / g_s \approx 2/3, \quad (6.8)$$

где  $\kappa_{\text{rad}}$  – *оптическая* непрозрачность.

Поправочные факторы  $\mathcal{K}_r$ ,  $\mathcal{K}_h$  и  $\mathcal{K}_g$  в (6.2) во внешних оболочках почти постоянны, так как на границе внешней и внутренней коры  $(M - m)/M \sim 10^{-5}$  и  $P/\rho c^2 \sim 10^{-2}$ . Если пренебречь их зависимостью от  $r$ , то для расчёта тепловой структуры достаточно решать упрощённое *уравнение тепловой структуры* [353, 360]

$$\frac{d \log T}{d \log P} = \frac{3}{16} \frac{P \kappa T_s^4}{g T^4}. \quad (6.9)$$

Уравнения (6.1b) и (6.1c) – одномерные, что предполагает, что средний радиальный градиент температуры должен быть много больше латерального, то есть  $\epsilon \equiv |\partial T / \partial x| / |\partial T / \partial r| \ll 1$ , где  $x$  – координата вдоль поверхности звезды. Оценка характерной величины  $\epsilon$  для дипольного поля, приведённая нами в [361], показывает, что  $\epsilon \lesssim 10^{-3}$ . Тем не менее, в [361] также отмечено, что одномерное приближение становится локально неприменимым вблизи тех участков поверхности, где магнитное поле близко к тангенциальному, потому что в этом случае нельзя пренебрегать кривизной магнитных силовых линий,  $\partial \Theta_B / \partial x$ . Для крупномасштабного магнитного поля ( $\partial \Theta_B / \partial x \sim R^{-1}$ ) максимальный размер  $a$  таких участков можно оценить как расстояние, на котором магнитная силовая линия, касательная к поверхности, опускается на глубину  $l_0$ , на которой распределение температуры практически изотропно. Для дипольного поля получаем  $a \lesssim \sqrt{R l_0}$ . Мажорирующую количественную оценку получим, приравняв  $l_0$  к полной геометрической глубине внешней оболочки. Для «канонической» нейтронной звезды с массой  $1,4 M_\odot$  значение  $l_0 \lesssim 0,1 R$ , откуда имеем  $a \lesssim 0,3 R$ . Так как  $T_s$  минимально на участках, где поле тангенциально, то поправки на отклонения от одномерного приближения вносят пренебрежимо малый вклад в полную светимость звезды, поэтому ими в первом приближении можно пренебречь.

Нестационарная задача описывается теми же уравнениями (6.1), но во втором из

них величина  $Q = Q_\nu - Q_h$  заменяется на

$$Q = Q_\nu - Q_h + C_p e^{-\Phi} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (6.10)$$

где  $C_p$  – теплоёмкость единицы объёма. Строго говоря, в правую часть (6.10) следует добавить ещё слагаемое, учитывающее выделение скрытой теплоты плавления при перемещении фазовой границы между кулоновской жидкостью и кристаллом с изменением температуры, согласно результатам § 2.3, но в существующих программах расчёта тепловой эволюции нейтронных звёзд этим слагаемым всегда пренебрегают. Зависимость от времени  $t$ , введённую согласно (6.10), обычно, следуя классической работе [360], учитывают во внутренней области нейтронной звезды, плотность которой превышает некоторое пороговое значение  $\rho_b$ , а для внешних оболочек при  $\rho < \rho_b$ , время релаксации которых мало по сравнению с рассматриваемыми характерными временами тепловой эволюции, решается стационарная система уравнений (6.1). Обычно, также традиционно следуя [360], для этой условной границы выбирают  $\rho_b = 10^{10}$  г см<sup>-3</sup>, но мы рассмотрим и другие способы выбора  $\rho_b$ , в зависимости от конкретной изучаемой проблемы. Соотношение между потоком тепла через границу  $\rho_b$  и температурой  $T_b$  на этой границе, полученное в результате решения стационарной задачи для оболочек, служит граничным условием к нестационарной задаче во внутренней области. Традиционно это соотношение называют соотношением внешней и внутренней температур – «соотношение  $T_s - T_b$ », – так как полный поток через границу  $\rho_b$  равен полной фотонной светимости  $L_\gamma = L_R$ , определяемой соотношением

$$L_\gamma \equiv 4\pi\sigma_{\text{SB}}R^2T_{\text{eff}}^4 = \int F d\Sigma = \sigma_{\text{SB}} \int T_s^4 d\Sigma, \quad (6.11)$$

где  $d\Sigma$  – элемент площади поверхности. Здесь и далее мы проводим различие между локальной поверхностной температурой  $T_s$  и интегральной эффективной температурой  $T_{\text{eff}}$ , так как  $T_s$  может не быть постоянной вдоль поверхности.

Величины  $T_s$ ,  $T_{\text{eff}}$  и  $L_\gamma$  определяются по отношению к локальной системе отсчёта на поверхности нейтронной звезды. «Видимые» величины, регистрируемые удалённым наблюдателем, должны быть скорректированы на красное смещение [359] (см. § 1.1):  $T_s^\infty = T_s \sqrt{1 - x_g}$ ,  $T_{\text{eff}}^\infty = T_{\text{eff}} \sqrt{1 - x_g}$  и  $L_\gamma^\infty = (1 - x_g) L_\gamma$ , где  $x_g = r_g/R$  – параметр компактности.

Соотношение  $T_s - T_b$  сильнее всего зависит от теплопроводности в «полоске чувствительности» (*sensitivity strip*) на плоскости  $\rho - T$ , расположенной вблизи «точки поворота» (*turning point*), в которой  $\kappa_c \sim \kappa_r$  [360]. Аналитические оценки для положения этой точки получены в [227].

Компьютерная программа для расчёта нестационарных процессов во внутренней области нейтронной звезды при  $\rho > \rho_b$  была разработана первоначально О. Ю. Гнединым под руководством Д. Г. Яковлева [37, 363], а затем улучшалась разными авторами в секторе теоретической астрофизики ФТИ им. А. Ф. Иоффе и продолжает совершенствоваться по мере появления новой физической информации и новых задач для её применения (об улучшениях, касающиеся включения новой информации о нейтринных потерях и теплоёмкости, сообщалось, например, в статье [364]).

Для определения тепловой структуры оболочек при  $\rho < \rho_b$  нами была разработана компьютерная программа, реализующая численное интегрирование уравнений (6.1) с граничными условиями (6.7) по методу Рунге–Кутты с переменным шагом интегрирования. Эта программа также неоднократно модернизировалась путём учёта новых результатов по мере их появления. Кроме того, в [361] мы перешли от традиционного решения редуцированного уравнения (6.9) без учёта нейтринного излучения в оболочках к решению полной системы (6.1) с учётом как релятивистских поправок (6.2), так и всех типов нейтринных потерь на основе результатов, опубликованных в [46]. Численное решение устойчиво при интегрировании в сторону увеличения температуры, поэтому в моделях без источников тепла в оболочке интегрирование начиналось в точке  $\rho = \rho_s$  на поверхности и заканчивалось при  $\rho = \rho_b$ . В моделях с источниками использовались два встречных решения, которые согласовывались методом пристрелки.

## 6.2 Тепловая структура и остывание немагнитных нейтронных звёзд

Как обсуждалось § 1.5, тепловая светимость и остывание нейтронных звёзд во многом регулируются теплоизолирующими оболочками. Традиционно с целью моделирования остывания нейтронных звёзд рассматривались оболочки, состоящие из железа. Классическим эталоном такого рассмотрения стала работа [360].

В статьях [215, 365] впервые была рассмотрена возможность того, что теплоизолирующие оболочки состоят из лёгких элементов, появившихся на поверхности в результате аккреции (и, возможно, также при участии последующих ядерных превращений). Трактовка [215, 365] была затем улучшена в [366]. Для моделирования тепловой структуры и остывания была применена трактовка теплопроводностей, обсуждавшаяся в § 3.2. Кроме того, в [215, 365, 366] использовалось современное урав-

нение состояния и таблицы непрозрачностей OPAL [143, 144].

### 6.2.1 Тепловая структура железной оболочки

При рассмотрении теплоизолирующей оболочки, состоящей из железа, мы использовали данные OPAL в той области, где эти данные доступны, а именно – при сравнительно низких плотностях ( $\rho < \rho_{\text{OPAL}} \approx 10 T_6^3 \text{ г см}^{-3}$  – см. § 2.4.1). При  $\rho > \rho_{\text{rigid}}$  применялось уравнение состояния полностью ионизованной плазмы (§ 2.3). В промежуточной области, где железо может быть не полностью ионизованным, а расчётных данных для его уравнения состояния нет, применялась интерполяция, подробно описанная в [215].

На рис. 6.1 в логарифмическом масштабе показана зависимость  $T_{\text{eff}}(\rho)$  для «канонической» нейтронной звезды с  $R = 10 \text{ км}$  и  $M = 1.4 M_{\odot}$ . Окружности на кривых показывают те места, где оптические непрозрачности равны тепловым за счёт электрон-ионного рассеяния. Тепло переносится в основном фотонами при более низких и в основном электронами – при более высоких плотностях. Показаны также линии  $T = T_{\text{F}}$  и  $T = T_{\text{m}}$ .

Некоторые слои оболочки нейтронной звезды оказываются конвективными [367], и в них перенос тепла осуществляется в основном за счёт конвекции. Мы учитывали его в адиабатическом приближении [20]. Чтобы проверить влияние этого эффекта, вычисления проводились также с искусственно «выключенной» конвекцией. Результаты таких расчётов показаны тонкими сплошными линиями. Тонкие (без конвекции) и толстые (с конвекцией) сплошные линии сходятся по обе стороны от конвективной зоны, что говорит о том, что конвекция в оболочках нейтронных звёзд практически не влияет на их поверхностную температуру и остывание.

Штрихпунктир на рис. 6.1 показывает результаты расчётов с использованием теплопроводности в приближениях, применённых в статье [231] для переноса вдоль магнитного поля. Сплошные линии, в отличие от них, показывают результаты, полученные с учётом электрон-электронных столкновений, LFC в кулоновской жидкости (§ 3.2.2) и «вымораживания» процессов переброса в кулоновском кристалле (§ 3.2.3). Сплошные и штрихпунктирные линии почти совпадают, что подтверждает применимость приближений, сделанных в [231], для типичных нейтронных звёзд.

Если  $T_{\text{eff}} \lesssim 2 \times 10^5 \text{ К}$ , то электронная теплопроводность становится важна не только в вырожденном, но и в невырожденном веществе, как видно из положения окружностей на рис. 6.1. При этом весьма важным оказывается тепловое усреднение

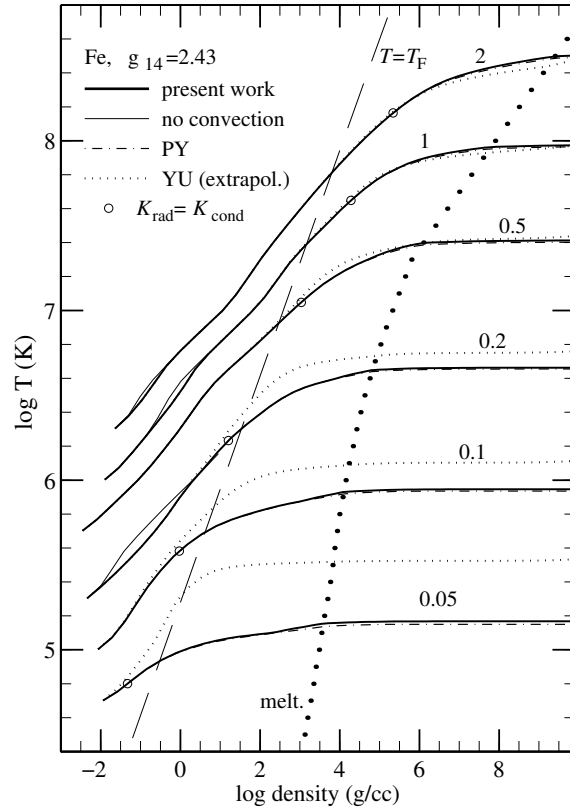


Рис. 6.1: Профили температуры в неаккрецированной оболочке нейтронной звезды в разных приближениях [215] (толстые и тонкие сплошные линии, штрихпунктир и точечный пунктир; см. текст). По оси абсцисс отложен десятичный логарифм плотности в  $\text{г см}^{-3}$ , по оси ординат – десятичный логарифм температуры в градусах Кельвина. У кривых указаны значения  $T_{\text{eff}}$  в мегакельвинах (МК). Окружностями помечены те точки, где оптические непрозрачности сравниваются с тепловыми электрон-ионными, и происходит соответствующее переключение режимов теплопереноса. Жирные кружки трассируют линию плавления плазмы, длинные штрихи – линию электронного вырождения, на которой  $T = T_F$ .

по формуле (§ 5.4.4). Точечный пунктир показывает результаты, полученные без такого усреднения путём экстраполяции теплопроводностей в невырожденную область, которая использовалась в некоторых предшествовавших работах. Видно, насколько велико отличие сплошных и точечных профилей в случаях, когда окружности лежат слева от длинных штрихов (т.е. точка поворота находится в невырожденной области).

## 6.2.2 Тепловая структура аккрецированной оболочки

### 6.2.2а Модели аккрецированной оболочки

В этом разделе нас будут интересовать нейтронные звёзды, аккреция на которые является слабой или завершилась, так что можно не учитывать вклад, который вносят в тепловой баланс ядерные реакции, сопровождающие превращения вещества при аккреции. Принимается модель теплоизолирующей оболочки, состоящей из concentрических слоёв, в каждом из которых имеется единственный тип атомных ядер, доминирующий при данной плотности и температуре.

Согласно основной использовавшейся модели, основанной на данных работы [348], слой водорода на поверхности простирается до плотности  $\rho = 10^7$  г см<sup>-3</sup>, где происходит его превращение в гелий посредством пикноядерных реакций, или до той плотности, где достигается температура  $T = 4 \times 10^7$  К, при которой происходит эффективное термоядерное горение. Слой гелия, лежащий под водородным слоем, имеет максимальную плотность  $10^9$  г см<sup>-3</sup> и максимальную температуру  $10^8$  К. Ниже лежащий слой углерода простирается либо до границы со слоем железа при  $\rho = 10^{10}$  г см<sup>-3</sup>, либо, в альтернативной модели, до границы ядерного перегорания углерода в кислород. При этом для границы между слоями углерода и кислорода рассматривались две модели: первоначально [215, 365] эта граница располагалась при  $\rho = 10^9$  г см<sup>-3</sup> согласно [368], а затем [366] она была сдвинута в соответствии с более новыми теоретическими результатами [369]. Во втором случае положение границы плавно зависит от температуры в соответствии с построенной в [366] аппроксимацией

$$T \approx \frac{5.2 \times 10^8 \text{ К}}{\{1 + [0.2 \ln(\rho_{\text{Pyc}}/\rho)]^{-0.7}\}^{0.07}} \quad (6.12)$$

при  $\rho < \rho_{\text{Pyc}}$ , где  $\rho_{\text{Pyc}}$  – плотность, при которой происходит эффективное пикноядерное горение углерода (в [366] её значение принималось равным  $\rho_{\text{Pyc}} = 5.5 \times 10^9$  г см<sup>-3</sup>).

Кроме того, рассматривалась модель, в которой граница между водородом и гелием располагается не при  $\rho = 10^7$  г см<sup>-3</sup>, согласно [348], а при значительно меньших плотностях, согласно [370, 371], а также модель, в которой на поверхности звезды находится не водород, а гелий, слой которого простирается до границы его пикно- или термоядерного перегорания в углерод.

Полная масса аккрецированной оболочки  $\Delta M$  от поверхности до слоя с плотностью  $\rho = 10^{10}$  г см<sup>-3</sup> для типичной нейтронной звезды составляет несколько единиц на  $10^{-7} M_{\odot}$ . Если масса аккрецировавшего вещества меньше, то аккрецировавшая

оболочка будет более тонкой и лёгкой. Такие модели также изучались в [215, 366]; они получили название моделей с частично аккрецированной оболочкой.

### 6.2.2b Результаты

Расчёты [215, 366] показали, что соотношение  $T_s - T_b$  почти не зависит от выбора конкретного варианта модели аккрецированной оболочки из перечисленных выше, а в основном регулируется единственным параметром – массой  $\Delta M$  слоя, состоящего из атомных ядер от водорода до кислорода. Попутно заметим, что величина  $\Delta M$  связана с колонковой плотностью аккрецировавшего вещества  $y$  соотношением  $y = 1,583 \times 10^{20} \Delta M / (M_\odot R_6^2)$  г см<sup>-3</sup> (напомним, что  $R_6 = R/10$  км). В статье [372] было также явно продемонстрировано, что результат не меняется при замене приближения Эддингтона (6.8) на точное внешнее граничное условие, соответствующее численному решению уравнения переноса в атмосфере.

Примеры профилей температуры в аккрецированной оболочке и их сравнение со случаем железной оболочки приведены на рис. 6.2, взятом из нашей работы [366]. В этой работе были рассмотрены более высокие, по сравнению с предыдущими [215, 365], величины тепловых потоков, а граница  $\rho_b$  была углублена до фазовой границы  $\rho_{\text{drip}}$  между внутренней и внешней корой. Профили температуры в железной оболочке показаны штрихпунктирными линиями, а при наличии оболочек из лёгких элементов – сплошными кривыми. Элементный состав аккрецировавшей оболочки указан на рисунке символами Н, He, С, О, Fe, разграниченными точечными линиями. Начало каждого профиля при малых  $\rho$  на рисунке отвечает точке поверхности, определённой согласно (6.8). Числа рядом с кривыми указывают значение  $\lg T_s$  (в градусах Кельвина), использованное при расчёте.

Главный эффект наличия оболочки из лёгких элементов состоит в существенном уменьшении температуры при заданных плотности и тепловом потоке и, соответственно, увеличении теплового потока и поверхностной температуры  $T_s$  при фиксированном значении  $T_b$ . Это объясняется более высокой электрон-ионной теплопроводностью для ионов с меньшим зарядом. Таким образом, присутствие поверхностных слоёв, состоящих из лёгких элементов, приводит к «просветлению» теплоизолирующей оболочки.

Врезка на рис. 6.2 показывает в увеличенном масштабе самые внутренние части профилей температуры в оболочке, соответствующих  $T_s = 10^{6,5}$  К. В случае аккрецированной оболочки профиль заметно приподнимается после пересечения границы



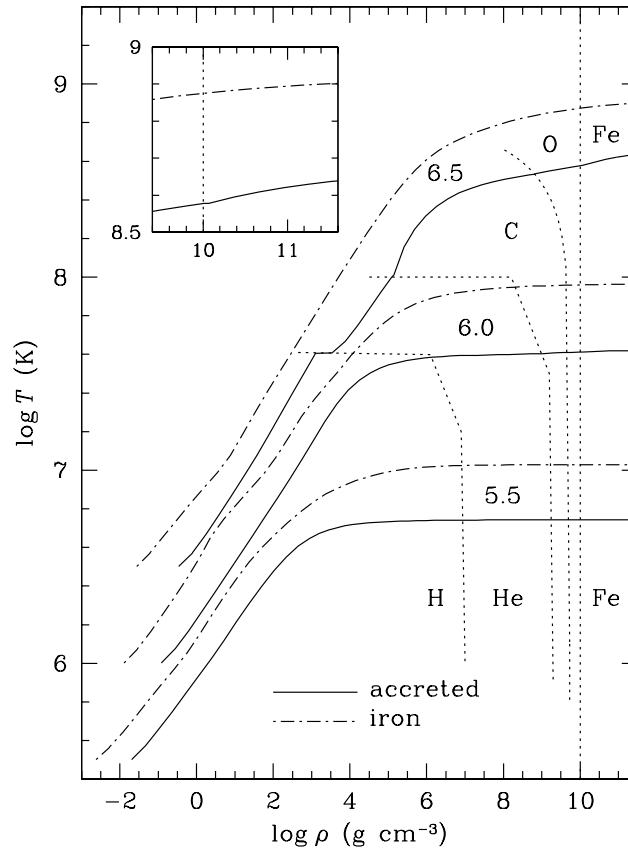


Рис. 6.2: Профили температуры в неаккрецированной (штрихпунктир) и полностью аккрецированной (сплошные кривые) оболочках канонической нейтронной звезды [366]. Точечные линии обозначают приблизительные положения границ между слоями аккрецированной оболочки. Врезка в увеличенном масштабе демонстрирует рост температуры в горячей внешней коре за границей слоя аккрецировавшего вещества.

O/Fe при  $\rho > 10^{10}$  г см<sup>-3</sup>, вследствие уменьшения теплопроводности  $\kappa_c$  из-за скачка  $Z$ . При более низких температурах это уменьшение  $\kappa_c$  играет меньшую роль, так как при  $T_s \lesssim 10^6$  К на границе O/Fe уже достигается изотермичность.

Рисунок 6.3 демонстрирует зависимость  $\lg(T_b/T_s)$  от  $\lg T_s$  для разной массы аккрецировавшего вещества. Видно, что даже при наличии сравнительно тонкой водородной или гелиевой оболочки массой  $\Delta M = 10^{-16} M$ , которая доходит только до плотности  $\rho \sim 10^3$  г см<sup>-3</sup>, соотношение  $T_s - T_b$  существенно меняется.

В статье [215] была построена приближённая формула для рассчитанных зависимостей  $T_s$  от  $T_b$ , которая была затем улучшена в статье [366] с учётом использования обновлённых теплопроводностей и включения в рассмотрение более высоких температур. Окончательные аппроксимационные выражения выглядят следующим образом.

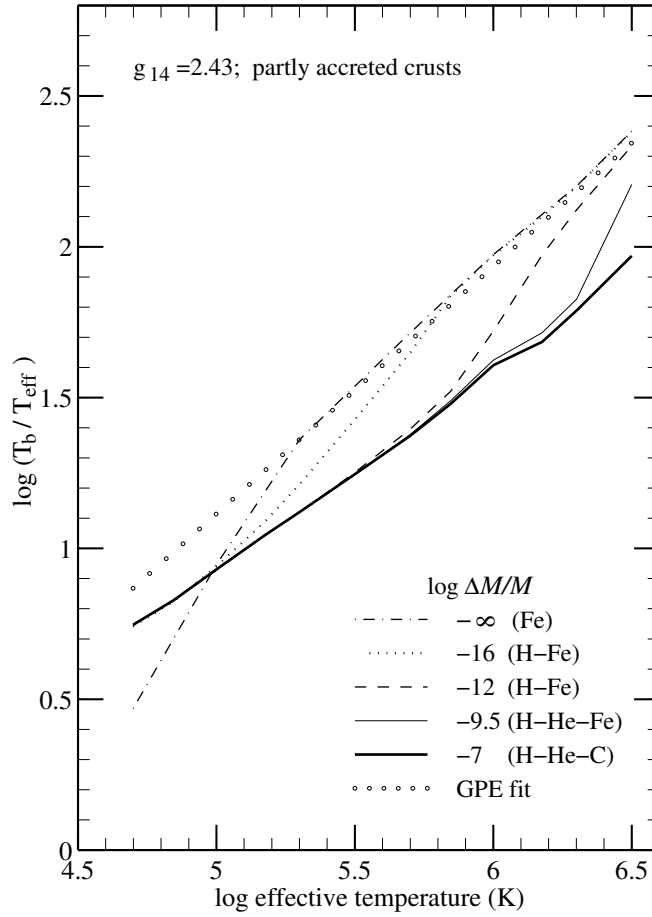


Рис. 6.3: Отношение значений температуры на внутренней и внешней границах теплоизолирующего слоя в зависимости от эффективной температуры поверхности для железной (штрихпунктир), аккрецированной (толстая сплошная линия) и частично аккрецированных оболочек (разные типы линий для разных значений массы аккрецированной части оболочки,  $\Delta M$ ) в десятичном логарифмическом масштабе [215]. Для сравнения жирными точками показана классическая степенная зависимость из статьи [360].

Обозначим  $T_{s6} = T_s/(10^6 \text{ K})$ ,  $T_{b9} = T_b/(10^9 \text{ K})$ ,  $T_{\text{non},6}$  – значение  $T_{s6}$  в отсутствие аккрецированного вещества, а  $T_{\text{full},6}$  – значение  $T_{s6}$  для полностью аккрецированной оболочки. Тогда

$$T_{\text{non},6}^4 = g_{14} [(7\zeta)^{2,25} + (0,33\zeta)^{1,25}], \quad \text{где } \zeta = T_{b9} - 10^{-3} g_{14}^{1/4} \sqrt{7T_{b9}}, \quad (6.13)$$

$g_{14} \equiv g/(10^{14} \text{ см/с}^2)$ , и

$$T_{\text{full},6}^4 = \frac{g_{14} (18,1 T_{b9})^{2,42} \{0,447 + 0,075 \lg T_b/[1 + (6,2 T_{b9})^4]\} + 3,2 T_{b9}^{1,67} T_{\text{non},6}^4}{1 + 3,2 T_{b9}^{1,67}}. \quad (6.14)$$

Для частично аккрецированных оболочек при  $\Delta M/M < 10^{-6}$  определим параметр  $\xi = -\lg(10^6 \Delta M/M)$ . Тогда [366]

$$T_s = [x^{-1} T_{\text{full},6}^4 + (1 - x^{-1}) T_{\text{non},6}^4]^{1/4}, \quad (6.15)$$

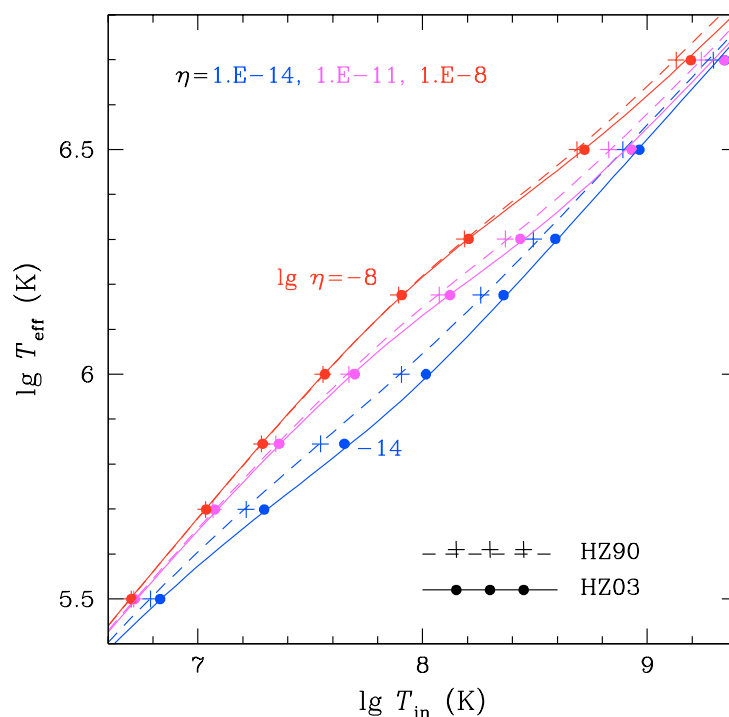


Рис. 6.4: Эффективная температура канонической нейтронной звезды как функция внутренней температуры для состава слоёв под аккрецированной оболочкой согласно моделям Хенселя и Ждуника [373] (пунктир и знаки +) и [374] (сплошные кривые и жирные точки).

где

$$x = [1 + 3,8 (0,1\xi)^9] [1 + 0,171 \xi^{7/2} T_{b9}]. \quad (6.16)$$

В статье [364] аналогичные расчёты тепловой структуры были проделаны для других, более реалистичных модельных составов вещества, лежащего под аккрецированной оболочкой – а именно, вместо  $^{56}\text{Fe}$  рассматривался состав, образующийся в результате пикноядерных реакций, происходящих при увеличении плотности, вызванном весом нового вещества, доставляемого на поверхность звезды в процессе аккреции. Квазиравновесный ядерный состав в зависимости от плотности, образующийся в этом случае в коре нейтронной звезды, был рассчитан в работах Хенселя и Ждуника [373, 374]. Отличие результатов последних двух работ состоит в том, что в первой из них в качестве исходного материала для пикноядерных реакций авторы брали  $^{56}\text{Fe}$ , а во второй они учли новые расчёты цепочек ядерных реакций при термоядерном горении аккрецированного вещества во время рентгеновских вспышек [375]. Эти расчёты показали, что при вспышках в коре могут образовываться элементы намного тяжелее железа, вплоть до теллура, с атомными массами  $A \gtrsim 100$ , с преобладанием  $^{106}\text{Pd}$ . Впоследствии, однако, обнаружилось, что при «сверхвспышках»

Таблица 6.1: Параметры аппроксимации (6.17).

Состав	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
по [373]	2.87	0.534	2.203	1.349	8.328	0.01609	0.1378
по [374]	2.67	0.560	2.596	1.136	9.838	0.00967	0.1590

может происходить дезынтеграция таких тяжёлых элементов обратно до элементов группы железа [376]. Поэтому нельзя сбрасывать со счетов ни одну из возможностей, и в статье [364] расчёты были проведены для состава коры согласно как результатам [373], так и результатам [374]. Внутренняя граница оболочки полагалась лежащей при плотности  $\rho_b = 10^{10}$  г см<sup>-3</sup>. В качестве аккрецировавшего вещества на поверхности брался <sup>4</sup>He. Полученные соотношения  $T_s - T_b$  представлены на рис. 6.4, где буквой  $\eta$  обозначен параметр  $\eta = g_{14}^2 \Delta M/M$ , связанный с давлением у основания аккрецированного слоя соотношением  $P_{\text{He,max}} = 1,193 \times 10^{34} \eta$  дин см<sup>-2</sup>. Символы на рисунке (прямые кресты в случае состава по [373] и жирные точки в случае [374]) показывают результаты численных расчётов, а сплошные кривые показывают аппроксимацию, в которой используется формула (6.15) с модифицированными приближёнными выражениями для  $T_{\text{full,6}}$ ,  $T_{\text{non,6}}$  и параметра  $x$ :

$$T_{\text{non,6}} = g_{14}^{1/4} a_1 T_{b9}^{a_2}, \quad T_{\text{full,6}} = 6.9 g_{14}^{1/4} C^{1/4} T_{b9}^{0.62}, \quad C = \frac{1 + a_3 T_{b9}^{a_4}}{1 + a_5 T_{b9}^{1.6}}, \quad (6.17a)$$

$$x = (1 + 120 T_{b9})^p, \quad p = a_6/\eta^{a_7}. \quad (6.17b)$$

Здесь  $a_1$ – $a_6$  – подгоночные параметры, которые приведены в Табл. 6.1

### 6.2.2с Влияние аккрецированной оболочки на остывание

На рис. 6.5 показаны кривые остывания нейтронной звезды с железной, частично и полностью аккрецированными оболочками, вычисленные в предположении, что аккреция завершилась в начальный период релаксации, не показанный на графике. Отношение  $\Delta M/M$  варьируется от 0 (звезда без аккреции) до  $\sim 10^{-7}$  (полностью аккрецированная оболочка; дальнейшее увеличение  $\Delta M$  не влияет на состав оболочек и остывание).

Изменение наклона кривых при  $t = 10^5$ – $10^6$  лет отражает изменение режима остывания. Вначале нейтронная звезда находится на нейтринной стадии остывания. Она остывает в основном благодаря нейтринному излучению; изменение температуры внутри звезды  $T_b$  определяется нейтринными потерями энергии и не зависит от

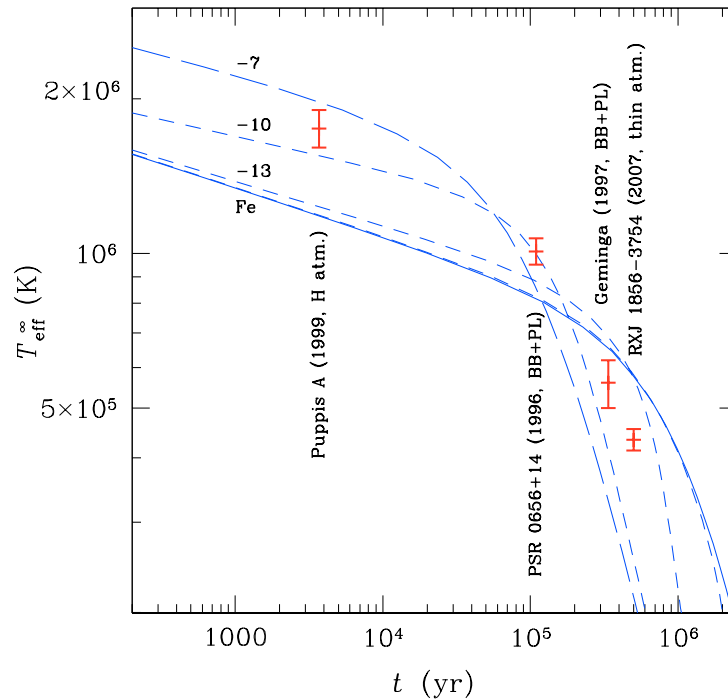


Рис. 6.5: Кривые стандартного остывания для нейтронной звезды с массой  $M = 1.3 M_{\odot}$  и радиусом  $R = 11,72$  км, обладающей железной теплоизолирующей оболочкой (сплошная кривая) или оболочками, содержащими различную массу  $\Delta M$  лёгких элементов (пунктир; цифры у кривых показывают значения  $\lg \Delta M/M$ ). Для сравнительного примера точками с вертикальными отрезками статистических ошибок показаны эффективные температуры нескольких нейтронных звёзд, оцененные по результатам наблюдений: Puppis A [377] (RX J0822–4300; показан результат, полученный авторами при использовании модели водородной атмосферы), PSR 0656+14 [378] (модель составного спектра из степенного и чернотельного излучения), Geminga [379] (PSR 0633+1348; модель составного степенного и чернотельного спектра), и RX J1856.4–3754 [380] (модель тонкой водородной атмосферы с магнитным полем).

теплоизолирующей оболочки. Излучение фотонов с поверхности определяется соотношением  $T_s - T_b$ . Так как аккрецированная оболочка более прозрачна для тепла, поверхностная температура нейтронной звезды с аккрецированной оболочкой существенно выше, чем с железной. Даже небольшое количество аккрецировавшего вещества,  $\Delta M/M \sim 10^{-13}$ , может существенно изменить кривую остывания. Чем холоднее звезда, тем меньше та минимальная доля аккрецировавшего вещества, которая способна существенно повлиять на кривую остывания. Поэтому эффект ещё более заметен для «ускоренного остывания», не показанного здесь для простоты (см. [215]).

Когда  $t \gtrsim 10^5 - 10^6$  лет, нейтринное излучение ослабевает, и звезда переходит на стадию фотонного остывания (см. § 1.5). Из-за той же большей прозрачности аккрецированной оболочки фотонное остывание ускоряется, поэтому на этой стадии

звезда с аккрецированной оболочкой становится холоднее, чем без неё. В качестве иллюстрации на рис. 6.5 приведены результаты некоторых работ, в которых авторы на основе наблюдений теплового излучения нейтронных звёзд оценивали значения их эффективных температур. Представленная на рисунке выборка наблюдений не претендует на репрезентативность, но наглядно показывает, что учёт возможного наличия аккрецированной оболочки может быть существенным при интерпретации наблюдений.

## 6.3 Некоторые приложения

### 6.3.1 Тепловая релаксация молодых нейтронных звёзд

Полученное в [215] соотношение  $T_s - T_b$  (§ 6.2), а также электронная теплопроводность, представленная § 3.2, были использованы в статье [37] для изучения тепловой эволюции нейтронных звёзд на стадии релаксации их внутренней коры. При этом использовалась компьютерная программа, описанная в § 6.1. Зависимость теплопроводности от плотности во внешней и внутренней коре, которая использовалась в расчётах, была показана выше на рис. 3.5.

Рассматривались нейтронные звёзды с умеренно жёстким уравнением состояния ядра, которое в [5] мы окрестили *PAPAL* по фамилиям авторов [381, 382]. Уравнение состояния *PAPAL* допускает наличие прямых урка-процессов в центральной части звезды, если её масса превышает  $1,44 M_\odot$ . В работе рассматривались звёзды как с докритической массой, остывание которых стандартное, так и с массой, превышающей критическую, которые остывают по ускоренному сценарию. Атомные ядра полагались приблизительно сферическими, то есть возможность наличия мантии между внутренней корой и ядром звезды не рассматривалась.

Для учёта нуклонной сверхтекучести брались две модели из литературы, представляющие крайние из реалистичных возможностей, рассмотренных в обзоре [15]. В расчёт были включены все значимые механизмы нейтринного излучения в ядре и внутренней коре согласно обзору [46].

Была проанализирована роль различных физических факторов, влияющих на остывание, – составляющих теплоёмкости, факторов, влияющих на теплопроводность, наличия нуклонной сверхтекучести и зависимости её критической температуры от плотности, разных механизмов нейтринного излучения – и чувствительность к ним кривых остывания. На рис. 6.6 для примера представлены некоторые

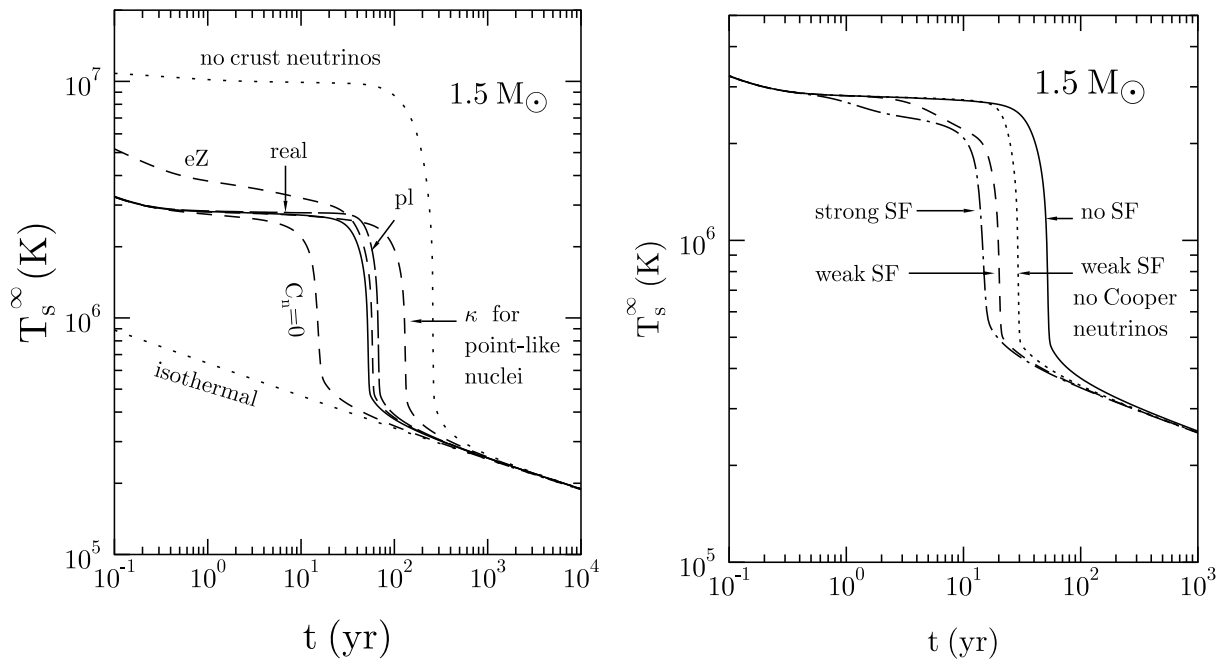


Рис. 6.6: Тепловая релаксация нейтронной звезды с массой  $1.5 M_{\odot}$  без учёта нуклонной сверхтекучести (*левый рисунок*) и с её учётом (*правый рисунок*) [37]. На *левом рисунке* показано сравнение кривой остывания, рассчитанной без учёта сверхтекучести, но с наилучшими значениями теплопроводности, теплоёмкости и нейтринных потерь энергии (сплошная кривая), с моделями, в которых не учитываются те или иные факторы: нейтринная светимость в коре звезды (верхний точечный пунктир); неизотермичность внутренней части коры при  $\rho > \rho_b$ ; теплоёмкость нейтронов в коре (нижняя штриховая линия); влияние конечных размеров ядер на теплопроводность во внутренней коре (правая штриховая линия); все механизмы нейтринного излучения, кроме одного – тормозного испускания нейтрино при рассеянии электронов на ядрах (штриховая кривая, помеченная «eZ») или распада плазмонов (штриховая кривая, помеченная «pl»). На *правом рисунке* показано сравнение той же кривой остывания (сплошная кривая) с расчётами в моделях «сильной» (штрихпунктир) и «слабой» (штриховая линия) сверхтекучести, а также по модели «слабой» сверхтекучести без учёта эффекта излучения нейтрино при куперовском спаривании нуклонов (точечный пунктир).

результаты расчётов кривых остывания для стадии тепловой релаксации внутренней коры нейтронной звёзды. В левом окне рисунка показаны кривые остывания нейтронной звезды с массой  $M = 1,5 M_{\odot}$  (для выбранного уравнения состояния эта масса соответствует сценарию ускоренного остывания) без учёта сверхтекучести. Сплошная кривая соответствует «наилучшей» (на момент проведения расчётов) модели, а остальные кривые демонстрируют результаты, получающиеся при тех или иных упрощающих предположениях, перечисленных в подписи к рисунку. Та же сплошная кривая для сравнения показана и в правом окне рисунка, где остальные кривые получены при учёте сверхтекучести, а их различие демонстрирует зависимость от выбора той или иной модели сверхтекучести.

Общий ход представленных зависимостей объясняется следующим образом. На начальном участке кривой остывания (порядка десяти лет жизни звезды) температура поверхности почти не меняется, так как поддерживается за счёт тепла, запасённого в коре при рождении звезды. За это время ядро успевает остыть до значительно более низкой температуры благодаря испусканию нейтрино. Последующий быстрый спад кривой соответствует выходу волны охлаждения из ядра на поверхность, время которого определяется теплоёмкостью и теплопроводностью внутренней коры. По окончании этого резкого спада достигается тепловое равновесие между корой и ядром, после чего они остывают как единое целое, а температура поверхности определяется соотношением  $T_s - T_b$  для внешней теплоизолирующей оболочки.

Найденное в работе характерное время тепловой релаксации внутренней коры составляет от  $\approx 3$ –6 лет до  $\approx 30$  лет в зависимости от модели нуклонной сверхтекучести (оно составляло бы  $\sim 50$  лет в отсутствие сверхтекучести). Полученные результаты качественно подтверждают выводы более ранней работы Латтимера и др. [383] и уточняют их количественно.

### 6.3.2 Мягкие рентгеновские транзиенты

В этом разделе мы кратко представим результаты двух работ, в которых описанные выше расчёты теплопроводностей и тепловой структуры оболочек применялись для интерпретации наблюдений тепловой светимости мягких рентгеновских транзиентов в спокойном состоянии.

#### 6.3.2a Ограничения сверху и снизу на светимость

В статье [364] рассчитывалась тепловая светимость аккрецирующих нейтронных звёзд в составе мягких рентгеновских транзиентов (SXT) в спокойном состоянии. Строение оболочки такой звезды предполагалось таким, как описано в конце § 6.2.2b; при этом соотношение  $T_s - T_b$  аппроксимируется формулой (6.17). В пределах разброса параметров современных теоретических моделей нейтронных звёзд были определены их наименьшие и наибольшие светимости в зависимости от среднего темпа аккреции и проведено сравнение с результатами наблюдений пяти таких транзиентов, два из которых – SAX J1808.4–3658 и Aql X-1 – показывают в спокойном состоянии, соответственно, наименьшую и наибольшую светимости в своём классе.

Светимость SXT в спокойном состоянии иногда значительно варьируется от одного наблюдения к другому. Не вполне ясно, связана ли эта изменчивость с тепловой



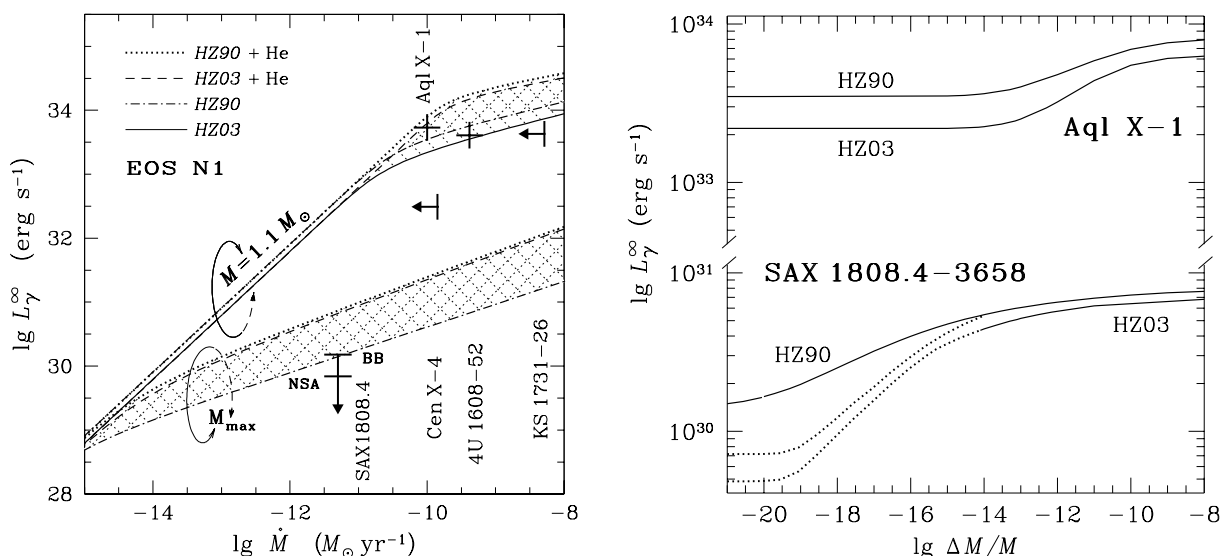


Рис. 6.7: Из работы [364]. *Левый рисунок*: Теоретические зависимости тепловой светимости нейтронной звезды в составе SXT в спокойном состоянии от среднего темпа аккреции в сравнении с опубликованными результатами наблюдений пяти SXT. Верхняя группа кривых получена для звезды небольшой массы ( $M = 1,1 M_\odot$ ) с сильной протонной сверхтекучестью в ядре, нижняя – для звезды максимальной массы, которая для выбранного на этом рисунке уравнения состояния составляла  $1,977 M_\odot$ . Четыре верхних кривых показывают результаты, полученные для двух моделей аккрецированной коры ([373] и [374]) с внешней гелиевой оболочкой и при её отсутствии; однократная штриховка показывает границы изменений светимости в зависимости от массы гелиевого слоя в модели [374], а перекрестная штриховка – в модели [373]. То же относится и к нижней группе кривых, в которой, однако, отсутствует сплошная кривая из-за трудностей моделирования внешних слоёв холодных оболочек, составленных из тяжёлых химических элементов, которые при этих условиях должны быть частично ионизованы. *Правый рисунок*: Теоретическая светимость нейтронных звёзд в SXT Aql X-1 и SAX J1808.4–3658 (как на левом рисунке) в зависимости от массы внешнего слоя гелия. Точечным пунктиром нанесены результаты, получающиеся при упрощённой (неточной) трактовке, предполагающей полную ионизацию внешней оболочки.

или с нетепловой компонентой спектра (см., напр., [62]). Кампана и Стелла [384] предположили, что тепловое излучение нейтронной звезды в составе SXT в спокойном состоянии постоянно, а изменчивость светимости связана с нетепловой компонентой спектра, которая формируется за пределами атмосферы нейтронной звезды. В работе [385] сообщалось о наблюдениях SAX J1808.4–3658, тепловая светимость которого оказалась необычно слабой ( $L_\gamma^\infty < 1,5 \times 10^{30}$  эрг  $\text{s}^{-1}$  на уровне значимости 90% при фитировании тепловой компоненты спектра чернотельным излучением, и ещё меньшее значение – при использовании модели водородной атмосферы<sup>1</sup>).

В работе [364] предполагалось, что нейтронная звезда нагревается за счёт глубо-

<sup>1</sup>Впоследствии этот результат был пересмотрен. В работе [386] при более высокой точности получено несколько менее жёсткое ограничение,  $L_\gamma^\infty < 6,2 \times 10^{30}$  эрг  $\text{s}^{-1}$ .

кого прогрева коры при аккреции (см. § 1.6.2b). Тепло, выделяющееся при вспышках в активные периоды, быстро излучается наружу, не успевая прогреть кору, и поэтому оно не должно влиять на светимость между вспышками. Характерное время релаксации нейтронной звезды в SXT обычно намного превышает характерные времена изменения темпов аккреции  $\dot{M}$ . Поэтому можно при изучении теплового состояния такой нейтронной звезды заменить меняющуюся скорость нагрева коры за счёт аккреции на среднюю по времени величину  $\dot{M} \equiv \langle \dot{M} \rangle$ . Интенсивность глубинного нагрева

$$L_{\text{dh}} = \frac{Q\dot{M}}{m_{\text{u}}} \approx 6.03 \times 10^{33} \left( \frac{\dot{M}}{10^{-10} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}} \right) \left( \frac{Q}{\text{МэВ}} \right) \text{ эрг с}^{-1}, \quad (6.18)$$

где  $Q$  – полное количество тепла, выделенного в расчёте на один нуклон ( $Q = 1,45$  МэВ и  $1,12$  МэВ для моделей [373] и [374], соответственно). Для моделирования теплового состояния нейтронной звезды решалось стационарное уравнение теплового баланса  $L_{\text{dh}}^{\infty}(\dot{M}) = L_{\nu}^{\infty} + L_{\gamma}^{\infty}$ , где  $L_{\nu}^{\infty}$  – нейтринная светимость звезды с точки зрения удалённого наблюдателя, а  $L_{\text{dh}}^{\infty}$  – полная мощность глубинного прогрева коры в той же системе отсчёта.  $L_{\nu}^{\infty}$  и  $L_{\gamma}^{\infty}$  получаются в результате решения уравнений теплового баланса (6.1) с использованием предположения об изотермичности внутренней области  $\rho > \rho_{\text{b}}$  (с учётом ОТО, см. § 1.5). С учётом последнего предположения  $L_{\nu}^{\infty}$  является функцией  $T_{\text{b}}$ , а  $L_{\gamma}^{\infty}$  определяется соотношением  $T_{\text{s}} - T_{\text{b}}$ .

В результате были получены *кривые нагревания* – зависимости поверхностной светимости  $L_{\gamma}^{\infty}$  от среднего темпа аккреции  $\dot{M}$ . Некоторые примеры таких кривых даны на рис. 6.7. Верхние кривые относятся к маломассивной звезде с таким же средним темпом аккреции, как у Aql X-1, а нижние – к массивной звезде с темпом аккреции, как у SAX J1808.4–3658. Рост  $L_{\gamma}^{\infty}$  насыщается с увеличением  $\Delta M$ , причём видно, что предел полностью аккрецированной оболочки достигается уже при  $\Delta M \ll 10^{-8} M_{\odot}$ .

На основе анализа этих и подобных им результатов моделирования и сравнения с имеющимися данными наблюдений в работе [364] сделан вывод о том, что светимости наиболее горячих и наиболее холодных SXT в спокойном состоянии лежат вблизи теоретических пределов, и поэтому в обозримой перспективе, при небольшом ужесточении наблюдательных оценок эти светимостей, они могут позволить производить селекцию совместимых с наблюдениями теоретических моделей уравнения состояния сверхплотной нуклонной материи, от выбора которых зависят кривые нагревания.

### 6.3.2b Кривые остывания выключившихся транзиентов

Среди SXT есть такие, которые обладают длительными периодами активности и периодами спокойного состояния. Роберт Ратледж с соавторами [63] заметили, что в течение длительной аккреции кора нейтронной звезды может нагреться до температуры, значительно превосходящей температуру ядра, поэтому кривая остывания, следующего за «выключением» транзиента – переходом его в спокойное состояние – зависит в основном от свойств коры. Таким образом, анализ кривой остывания позволяет, в принципе, определить характеристики вещества в коре. Один из известных на сегодня возможных объектов такого анализа – это SXT KS 1731–260, который в течение более 12 лет после его открытия находился в активной фазе, а в начале 2001 года выключился и начал остывать. Первый анализ кривой остывания был проделан ещё в статье [63]. Впоследствии появились новые данные наблюдений [387], в которых явно «прорисовалась» релаксация светимости к стационарному уровню. В статье [387] авторы грубо оценили время релаксации на основе аппроксимации наблюдаемых точек затухающей экспоненциальной зависимостью. В нашей работе [388] те же наблюдения анализировались на основе численного моделирования процессов нагрева и последующего охлаждения коры нейтронной звезды.

Был рассчитан ряд различных кривых остывания, соответствующих разным параметрам звезды и разным модельным представлениям о составе и микрофизике сверхплотного вещества во внутренней коре. Каждый расчёт начинался с модели нейтронной звезды с релаксировавшей (термодинамически стационарной) внутренней областью и некоторой начальной эффективной температурой поверхности  $T_{s0}^{\infty}$ . Затем включался нагрев коры, обусловленный постоянным темпом аккреции  $\dot{M}$  в течение 12,5 лет. За этот период успевает установиться новое стационарное состояние, при котором отсутствует термодинамическое равновесие между корой и ядром. За этот период в коре выделяется полная энергия  $E_{\text{tot}}$ . Затем нагрев выключается, и кора остывает, возвращаясь к состоянию равновесия с ядром. При этом небольшая доля полной выделившейся энергии диффундирует к поверхности и высвечивается её тепловым излучением, а остальная часть диффундирует в ядро. Температура ядра почти не меняется благодаря его высокой теплоёмкости и теплопроводности. В зависимости от модели, период релаксации занимает от года до столетия, после чего эффективная температура достигает своей исходной равновесной величины  $T_{s0}^{\infty}$ .

При моделировании глубокого прогрева коры использовались самые современные данные расчётов о положениях и мощности источников энергосвечения при таком

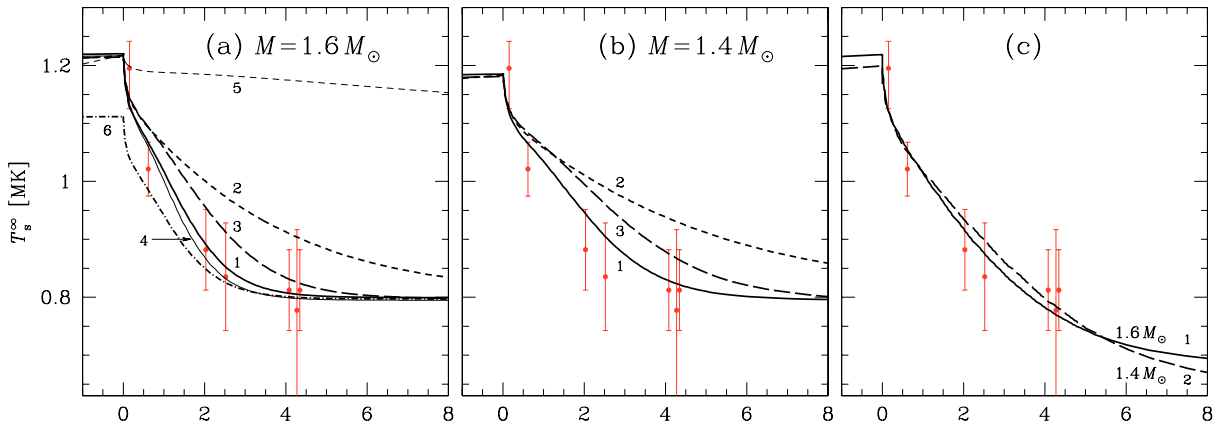


Рис. 6.8: Теоретические кривые остывания [388] для нейтронной звезды с массой (а)  $M = 1.6 M_{\odot}$  и (b)  $1.4 M_{\odot}$ ; на рисунке (с) нанесены кривые для обоих значений  $M$ . Разные кривые, помеченные номерами, соответствуют разным теоретическим моделям ядерного состава и микроскопической структуры коры и нейтронной сверхтекучести в ней. Эти обозначения суммированы в табл. 6.2. По оси абсцисс отложен десятичный логарифм времени в днях с момента выключения аккреции. Точки с отрезками погрешностей показывают результаты наблюдений [387].

прогреве [389]. С целью исследования чувствительности моделирования к модельно-зависимым физическим характеристикам коры в расчётах использовались две модели вещества коры – модель ядерной материи в основном состоянии [75] и модель аккрецировавшей коры [373]. Вторая из них, согласно которой вещество состоит из более лёгких ядер с меньшими зарядовыми числами, получена на той же основе, что и принятая модель глубокого прогрева, и в этом смысле серия расчётов с её использованием является самосогласованной.

Электронная теплопроводность рассчитывалась, исходя из формул, представленных в главе 3. Нейтронные сверхтекучесть и теплоёмкость учитывались согласно обзору [15]. Представительная выборка моделей нейтронной сверхтекучести была взята из обзора [390]. Для ядра звезды использовалось современное уравнение состояния нуклонной материи [391] в параметризации [392], а именно – уравнение состояния APR I из [393]. Для него  $M_{\max} = 1.923 M_{\odot}$ , а ускоренное остывание становится возможным при  $M > 1.828 M_{\odot}$ . В работе рассматривались, главным образом, модели нейтронных звёзд с массами  $M = 1.6$  и  $1.4 M_{\odot}$ .

Был рассчитан ряд кривых остывания исследуемого транзиента и проведено их сравнение с результатами наблюдений [387], как показано на рис. 6.8. Разные кривые соответствуют различным массам звезды, разным темпам аккреции (соответственно, разным значениям полной выделившейся в коре за 12,5 лет энергии  $E_{\text{tot}}$  и эффективной температуры в момент начала остывания  $T_{s0}^{\infty}$ ) и микрофизике коры.

Таблица 6.2: Характеристики моделей для кривых остывания на рис. 6.8. В третьей колонке «А» означает модель аккрецированной коры [373], а «GS» – ядерный состав вещества в основном состоянии.

кривая №	$T_{s0}^{\infty}$ МК	состав коры	теплопроводность в коре	критическая температура сверхтекучести в коре	$E_{\text{tot}}$ $10^{44}$ эрг
1a	0,8	A	нормальная	умеренная	2,6
2a	0,8	GS	нормальная	нет сверхтекучести	1,9
3a	0,8	GS	нормальная	умеренная	1,8
4a	0,8	A	нормальная	высокая	2,6
5a	0,8	A	низкая	умеренная	0,6
6a	0,8	A	нормальная	умеренная	1,9
1b	0,8	A	нормальная	умеренная	2,3
2b	0,8	GS	нормальная	нет сверхтекучести	1,7
3b	0,8	GS	нормальная	умеренная	1,5
1c	0,67	GS	нормальная	нет сверхтекучести	2,4
2c	0,63	GS	нормальная	нет сверхтекучести	2,4

Расшифровка номеров кривых дана в табл. 6.2. В 4-й колонке «нормальная» теплопроводность означает, что при расчёте использовалась модель внутренней коры как кулоновского кристалла, а «низкая» (показанная на единственном примере кривой № 5) относится к модели аморфной коры с большим количеством неоднородностей, развивавшейся Питером Джонсом [394, 395]. Из-за отсутствия дальнего порядка в такой коре теплопроводность сравнительно мала, и это затягивает время остывания.

На рис. 6.8 видно, что модель низкой теплопроводности не согласуется с наблюдениями, что служит аргументом против модели Джонса. Также плохо согласуются с наблюдениями модели без сверхтекучести нейтронов в коре, что служит аргументом в поддержку современных теоретических моделей [390], предсказывающих нуклонную сверхтекучесть.

На рис. 6.8a и 6.8b равновесная температура  $T_{s0}^{\infty}$  выбрана соответствующей последним по времени наблюдениям, тогда как на рис. 6.8c она ниже. Видно, что кривые на рис. 6.8c также удовлетворительно согласуются с наблюдениями в пределах неточности последних, на основании чего в [388] была выдвинута гипотеза о том, что к настоящему времени тепловая релаксация коры может быть ещё не завершена.

Таким образом, кривая остывания рассмотренного транзиента может быть объяснена на основе современных теоретических представлений о структуре нейтронной звезды и её микрофизике. Более того, сравнение модельных кривых с наблюдениями позволяет отвергнуть некоторые гипотезы, сузив класс допустимых моделей. В частности, большое содержание примесей во внутренней коре или её аморфная структура приводят к такому понижению теплопроводности, которое не согласуется с имеющимися данными наблюдений.

## 6.4 Тепловая структура и остывание нейтронных звёзд с сильным магнитным полем

Тензор теплопроводности в оболочках нейтронной звезды в произвольном магнитном поле, представленный в § 5.4, применялся для изучения тепловой структуры и остывания изолированных нейтронных звёзд с сильными магнитными полями в работах [227, 361, 366, 396] и других. В данном параграфе будут сжато описаны их основные результаты.

В качестве основной модели магнитного поля в оболочке мы рассматриваем релятивистский магнитный диполь. Выражение для дипольного магнитного поля сферической звезды с учётом эффектов ОТО было выведено В. Л. Гинзбургом и Л. М. Озерным [362]; в векторной форме они записываются в виде [397]

$$\mathbf{B} = B_p [(1 + f/2)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})\mathbf{n} - (f/2)\mathbf{m}], \quad (6.19)$$

где  $B_p$  – магнитная индукция на полюсе,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности,  $\mathbf{m}$  – единичный вектор вдоль магнитной оси, а фактор  $f$  является функцией параметра компактности и выражается формулой

$$f(x_g) = -\frac{(1 - x_g) \ln(1 - x_g) + x_g - 0.5x_g^2}{[\ln(1 - x_g) + x_g + 0.5x_g^2] \sqrt{1 - x_g}} \quad (6.20)$$

$(f(x_g) \xrightarrow{x_g \rightarrow 0} 1)$ .

Рассматривались также альтернативные модели магнитного поля – радиальное и мелкомасштабное. Радиальное поле, использовавшееся при моделировании остывания нейтронных звёзд в ранней работе [398], является нефизическим и бралось только для сравнения наших результатов с предшествующими. Мелкомасштабное, по сравнению с размером звезды, поле может возникнуть в результате турбулентно-

сти прото-нейтронной звезды и остаться замороженным в кору при её затвердевании (напр., [399]).

В § 6.4.1 внимание будет сосредоточено на нейтронных звёздах с железными оболочками, а совместное влияние магнитного поля и аккрецированной оболочки будет изучаться в § 6.4.2.

### 6.4.1 Железные оболочки

В § 6.4.1b мы рассмотрим тепловую структуру остывающей нейтронной звезды с магнитным полем, а в § 6.4.1c – кривые остывания.

#### 6.4.1a Использованные приближения

В качестве уравнения состояния в ядре звезды используется уравнение состояния PARAL (см. § 6.3.1). Во внутренней коре используется модель основного состояния ядерной материи [75], а свойства атомных ядер описываются по модели SCM (§ 3.2.2b). Для внешней оболочки в области её полной ионизации используется уравнение состояния, описанное в § 5.1. В самых внешних слоях, где ионизация частичная, используется уравнение состояния железа в сильном магнитном поле, рассчитанное в приближении Томаса–Ферми и затабулированное в работе [400]. Для определения давления в точках  $(\rho, T, B)$ , не совпадающих с табличными, применяется интерполяция и экстраполяция табличных данных, как описано в [215, 396].

Тензор электронной теплопроводности рассчитывается в соответствии с § 5.4.

Оптические непрозрачности рассчитываются в предположении о полной ионизации, так как табличные данные или аналитические формулы для непрозрачностей частично ионизованного железа в сильном магнитном поле в литературе отсутствуют. В отсутствие магнитного поля, когда непрозрачности железа известны, явными расчётами было проверено [396], что замена точных непрозрачностей на непрозрачности, рассчитанные в модели полностью ионизованной плазмы, не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на соотношение  $T_s - T_b$ . В этом приближении непрозрачности вычисляются согласно формуле Росселанда на основе сечений рассеяния (4.182), (4.183) и свободно-свободного поглощения (4.184).

Рассмотрим сначала случай, когда магнитное поле отсутствует. В этом случае вклад в непрозрачность за счёт томсоновского рассеяния даёт формула

$$\kappa_T = \frac{n_e \sigma_T}{\rho} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{n_e}{\rho}. \quad (6.21)$$

Отношение росселандовой непрозрачности за счёт свободно-свободного поглощения к томсоновской непрозрачности выражается формулой

$$\frac{\varkappa_{\text{ff}}}{\varkappa_{\text{T}}} = \frac{Z\alpha_{\text{f}}}{3c_7} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{T_{\text{r}}}{T}\right)^{7/2} x_{\text{r}}^3 \approx \frac{2 \times 10^4}{c_7} \frac{Z^2}{A} \frac{\rho}{T_6^{7/2}}, \quad (6.22)$$

в которой плотность  $\rho$  предполагается выраженной в  $\text{г см}^{-3}$ ,

$$c_7 = \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{\xi^7 e^{-\xi}}{(1 - e^{-\xi})^3 \Lambda_{\text{ff}}(T, \xi)} d\xi, \quad (6.23)$$

$\Lambda_{\text{ff}} = (\pi/\sqrt{3}) \bar{g}_{\text{ff}}$  – кулоновский логарифм, а  $\bar{g}_{\text{ff}}$  – усреднённый фактор Гаунта. В борновском приближении для  $\Lambda_{\text{ff}}$  справедлива формула (4.191). В этом случае  $c_7 = 316.824$ . Вне борновского приближения можно воспользоваться аккуратной аппроксимацией Хаммера [310], упомянутой в § 4.4.4а. Она справедлива в области  $10^{-4} \leq u \leq 10^{1.5}$  и  $10^{-3} \leq T_{\text{Ry}} < 10^3$ , где

$$T_{\text{Ry}} \equiv \frac{2\hbar^2}{m_e Z^2 e^4} k_{\text{B}} T = \frac{T_6}{0.15789 Z^2}, \quad u \equiv \frac{\hbar\omega}{k_{\text{B}} T}. \quad (6.24)$$

Так как  $e^{u/2} K_0(u/2) \approx \sqrt{\pi/u}$  при  $u \rightarrow \infty$ , то разумное приближение для  $\bar{g}_{\text{ff}}$  можно получить, продолжив аппроксимационную функцию Хаммера за границу  $u = 10^{1.5}$  по степенному закону  $\bar{g}_{\text{ff}} \propto u^{-1/2}$ . Тогда можно взять интеграл (6.23) численно. Результат можно аппроксимировать (с погрешностью  $< 0,6\%$ ) формулой [396]

$$c_7 = \frac{108,8 + 77,6 T_{\text{Ry}}^{0,834}}{1 + 0,502 T_{\text{Ry}}^{0,355} + 0,245 T_{\text{Ry}}^{0,834}}. \quad (6.25)$$

Численное усреднение по Росселанду суммы непрозрачностей за счёт свободно-свободных переходов и рассеяния при  $B = 0$  даёт результат, который с погрешностью в пределах 1% можно аппроксимировать выражением [396]

$$\varkappa_{\text{r}} = (\varkappa_{\text{ff}} + \varkappa_{\text{T}}) A(f, T), \quad (6.26)$$

где

$$f \equiv \frac{\varkappa_{\text{ff}}}{\varkappa_{\text{ff}} + \varkappa_{\text{T}}}, \quad A(f, T) = 1 + \frac{1,097 + 0,777 T_{\text{Ry}}}{1 + 0,536 T_{\text{Ry}}} f^{0,617} (1 - f)^{0,77}. \quad (6.27)$$

Перейдём теперь к случаю наличия сильного магнитного поля. Расчёт росселандовых непрозрачностей в борновском приближении для этого случая был впервые



Таблица 6.3: Коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$  и  $c_n$  в формуле (6.30).

$n$	1	2	3	4	5	6
$a_n$	0,0949	0,1619	0,2587	0,3418	0,4760	0,2533
$b_n$	0,0610	0,1400	0,1941	0,0415	0,3115	0,1547
$c_n$	0,090	0,0993	0,0533	2,15	0,2377	0,231

выполнен Силантьевым и Яковлевым [401], а аналитическая аппроксимация получена нами в [396]:

$$\frac{\varkappa_r(\rho, T, 0)}{\varkappa_{r\parallel}(\rho, T, B)} = 1 + \frac{A_1 \zeta_e + (A_2 \zeta_e)^2}{1 + A_3 \zeta_e^2} \zeta_e^2, \quad (6.28)$$

$$\frac{\varkappa_r(\rho, T, 0)}{\varkappa_{r\perp}(\rho, T, B)} = \frac{1 + (A_4 \zeta_e)^{3,5} + (A_5 \zeta_e)^4}{1 + A_6 \zeta_e^2}, \quad (6.29)$$

$$A_n = a_n - b_n f^{c_n}, \quad (6.30)$$

где параметр  $\zeta_e$  определён в (4.2), параметр  $f$  – в (6.27), а коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$  и  $c_n$  приведены в Табл. 6.3. Погрешность формул (6.30) составляет  $\lesssim 10\%$ .

Набор формул (6.21)–(6.30) даёт приближение для интегральной фотонной непрозрачности за счёт рассеяния и поглощения в полностью ионизованной плазме с неборновской поправкой при наличии магнитного поля.

Нерешённым остаётся вопрос о том, каковы должны быть непрозрачности при высокой плотности, когда электронная плазменная температура (2.15) сравнима с термодинамической температурой  $T$  или больше неё. В этом случае частоты  $\omega$ , дающие вклад в росселандово среднее для непрозрачности, оказываются ниже  $\omega_{pe}$ . В отсутствие магнитного поля электромагнитное излучение затухает на таких частотах, и они должны быть исключены из интегрирования. При наличии магнитного поля ситуация намного сложнее: условия распространения каждой из двух мод зависят от соотношений между  $\omega$ ,  $\omega_{pe}$ ,  $\omega_c$  и  $\omega_{ci}$ , а также от направления распространения по отношению к магнитным силовым линиям [212]. Мы рассматриваем две крайних модели: в одной эффекты, связанные с указанным затуханием, игнорируются, а в другой все частоты  $\omega < \omega_{pe}$  исключаются из процедуры взятия росселандова среднего. Эти два крайних случая дают практически совпадающие результаты для соотношения  $T_s - T_b$  при сравнительно слабом магнитном поле, потому что в этом случае  $T_{pe}$  достигает  $T$  при большой оптической толще, уже за точкой поворота, когда основную роль играет не  $\varkappa_r$ , а  $\varkappa_c$ . Однако чем сильнее магнитное поле, тем заметнее отличие результатов для этих двух крайних моделей.

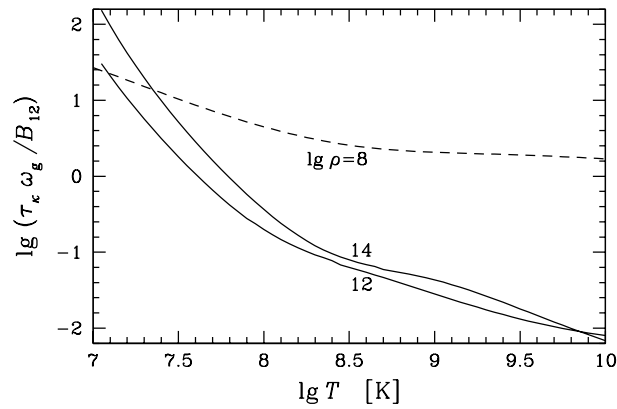


Рис. 6.9: Параметр замагниченности вблизи внешней и внутренней границ внутренней коры (сплошные кривые) и во внешней оболочке (пунктир). Числа у кривых указывают  $\lg \rho$  (в  $\text{г см}^{-3}$ ).

Численные результаты для средней росселандовой непрозрачности в модели с обрезаем спектра на  $\omega_{pe}$  могут быть воспроизведены также с помощью формул данного раздела, если окончательное выражение для  $\varkappa_{\tau}$  домножить на приближённый поправочный множитель  $\exp\{0,005[\ln(1 + 1,5\hbar\omega_{pe}/k_B T)]^6\}$ , предложенный в [366].

#### 6.4.1b Тепловая структура магнитной оболочки

Тепловая структура рассчитывалась при разных углах наклона магнитных силовых линий к нормали к поверхности,  $\Theta_B$ , от  $0$  до  $90^\circ$ , эффективных температурах  $T_s$  от  $2 \times 10^5$  К до  $10^7$  К и значениях магнитной индукции  $B$  от  $0$  до  $10^{16}$  Гс. Внутренняя граница теплоизолирующей оболочки полагалась при  $\rho_b = 4 \times 10^{11}$   $\text{г см}^{-3}$ . За этой границей анизотропия температуры и теплопроводности не учитывались. Это можно делать, потому что параметр замагниченности  $\tau_{\kappa}\omega_g$  мал во внутренней коре при обычных для нейтронных звёзд величинах  $B$  и  $T_b$ , что проиллюстрировано на рис. 6.9.

На рис. 6.10 показаны некоторые примеры рассчитанных профилей  $T(\rho)$  для «канонической» нейтронной звезды ( $M = 1,4M_{\odot}$ ,  $R = 10$  км,  $g = 2,43 \times 10^{14}$   $\text{см с}^{-2}$  и  $r_g/R = 0,413$ ). Начало каждой кривой слева лежит в точке  $\rho_s, T_s$ , а конец справа – в точке  $\rho_b$ . Поведение профилей качественно согласуется с аналитическими приближениями, полученными в [227]. В частности, подтверждается приблизительно линейная зависимость  $\rho_s \propto B$ , а также смещение «точки поворота» к более высоким значениям плотности при увеличении  $B$ . Плотность  $\rho_B$ , отмеченная на рисунке, определена формулой (5.17). Она отделяет режимы сильно и слабо квантующего поля. Мы видим,

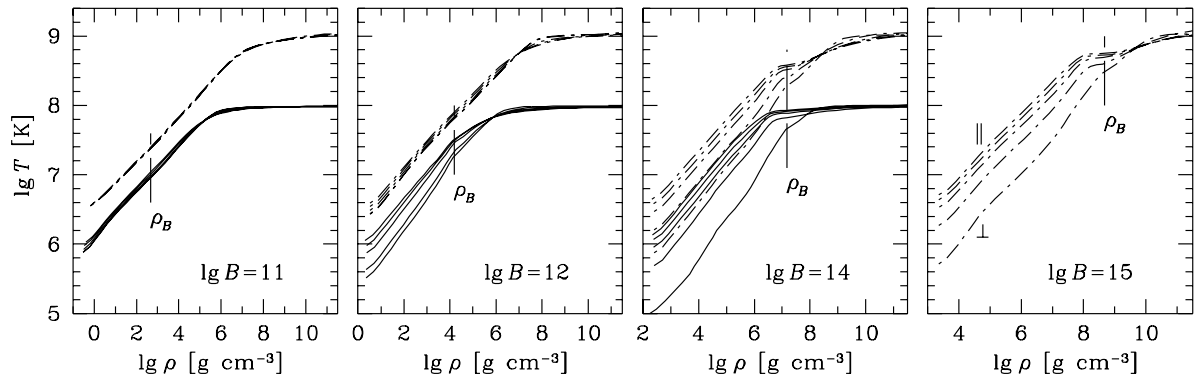


Рис. 6.10: Профили температуры в железной оболочке нейтронной звезды с  $M = 1,4 M_{\odot}$  и  $R = 10$  км при значениях магнитной индукции (слева направо)  $B = 10^{11}$ ,  $10^{12}$ ,  $10^{14}$  и  $10^{15}$  Г. Температура на внутренней границе фиксирована при  $T_b = 10^8$  К (сплошные кривые) или  $10^9$  К (штрихпунктир). Линии каждого пучка кривых соответствуют  $\cos \Theta_B = 1$  (наивысшая температура  $T_s$  на левом краю кривой), 0,7, 0,4, 0,1 и 0 (наинизшее значение  $T_s$ ).

в частности, что в противоположность предположению, использованному в [358], в большинстве случаев рост  $T$  с увеличением плотности продолжается и при  $\rho > \rho_B$ .

Чем выше  $T_s$ , тем шире тот интервал плотностей, в котором  $\kappa_{\parallel}$  и  $\kappa_{\perp}$  близки по порядку величины. Этим объясняется то, что зависимость положения профилей температуры от угла  $\Theta_B$  и от магнитной индукции  $B$  становится менее ярко выраженной при увеличении  $T_b$ , демонстрируя сходимость к немагнитному профилю.

В результате были определены зависимости  $T_s - T_b$  для разных значений  $B$  и  $\Theta_B$  и проанализировано их поведение в зависимости от физических параметров задачи, а также построены приближённые выражения для этих зависимостей. Некоторые примеры показаны на рис. 6.11. Видно, что сильное магнитное поле, нормальное к поверхности, увеличивает тепловую фотонную светимость. Отметим, что классическое (неквантуемое) магнитное поле не меняет  $\kappa_{\parallel}$ , поэтому такое усиление светимости – исключительно результат квантования Ландау. Соответственно,  $T_s$  растёт с ростом  $B$ . Напротив, поле, тангенциальное к поверхности, сильно уменьшает  $T_s$ , поскольку уменьшается полная эффективная теплопроводность (6.4), которая в этом случае равна  $\kappa_{\perp}$ . Для сравнения на рисунке показаны также некоторые результаты расчётов соотношения  $T_s - T_b$ , выполненных другими авторами [402, 403], которые качественно согласуются с нашими результатами, но количественно от них отличаются. Причина количественных отличий кроется в том, что мы использовали более точные приближения при моделировании (детальное обсуждение дано в статье [396]).

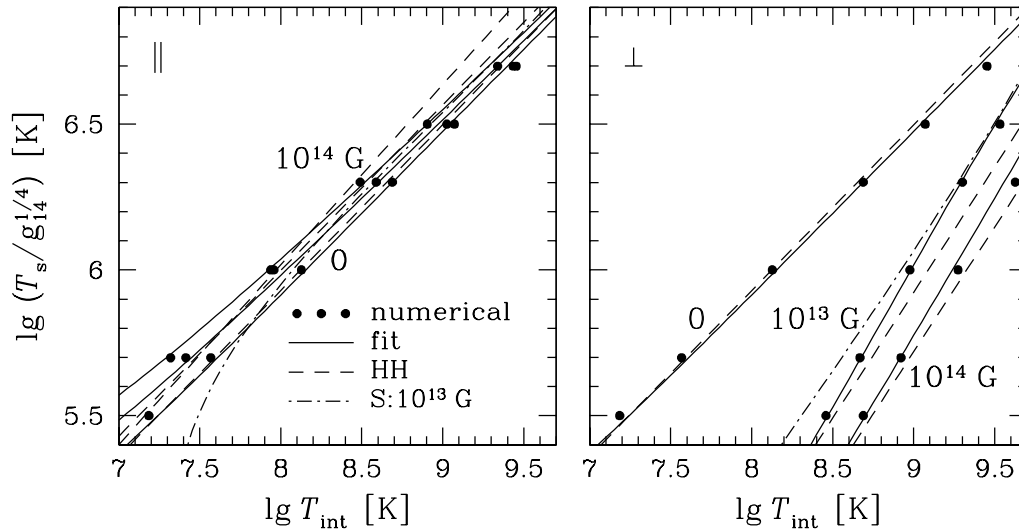


Рис. 6.11: Соотношение  $T_s - T_b$  для значений магнитной индукции  $B = 0, 10^{13}$  и  $10^{14}$  Гс при  $\Theta_B = 0$  (левый рисунок) и  $90^\circ$  (правый рисунок) [396]. Результаты численных расчётов (жирные точки) сравниваются с аналитическими аппроксимациями (сплошные линии). Также для сравнения показаны результаты работ, в которых были использованы более грубые модели теплопроводностей и уравнения состояния: штрихпунктир показывает результат из [402] для  $B = 10^{13}$  Гс, а штриховые линии – результаты работы [403].

#### 6.4.1с Влияние сильного магнитного поля на остывание

Рассмотрим модели нейтронных звёзд с двумя массами,  $M = 1,3$  и  $1,5 M_\odot$ . Для уравнения состояния RAPPAL звезда с массой  $1,3 M_\odot$  имеет радиус  $R = 11,86$  км и центральную плотность  $\rho_c = 1,070 \times 10^{15}$  г см $^{-3}$ , которая меньше, чем плотность, при которой могут действовать прямые урка-процессы. Такая звезда является примером стандартного остывания с участием модифицированных урка-процессов. Для  $M = 1,5 M_\odot$  имеем  $R = 11,38$  км, а плотность в центре звезды превосходит порог открывания прямых урка-процессов, поэтому такая звезда остывает ускоренным образом.

Были рассчитаны кривые остывания нейтронных звёзд с замагниченными оболочками при наличии или отсутствии нуклонной сверхтекучести с целью изучения комбинированного влияния магнитного поля и сверхтекучести на остывание. Некоторые из рассчитанных кривых остывания показаны на рис. 6.12 в левом окне. На рисунке отмечены значения  $B$ , соответствующие каждой кривой. Сплошные кривые соответствуют стандартному, а пунктирные – ускоренному остыванию. «Ступенька» при  $t \lesssim 10^2$  лет соответствует тепловой релаксации коры, обсуждавшейся в § 6.3.1. Для каждого из типов остывания для сравнения показана кривая, соответствующая

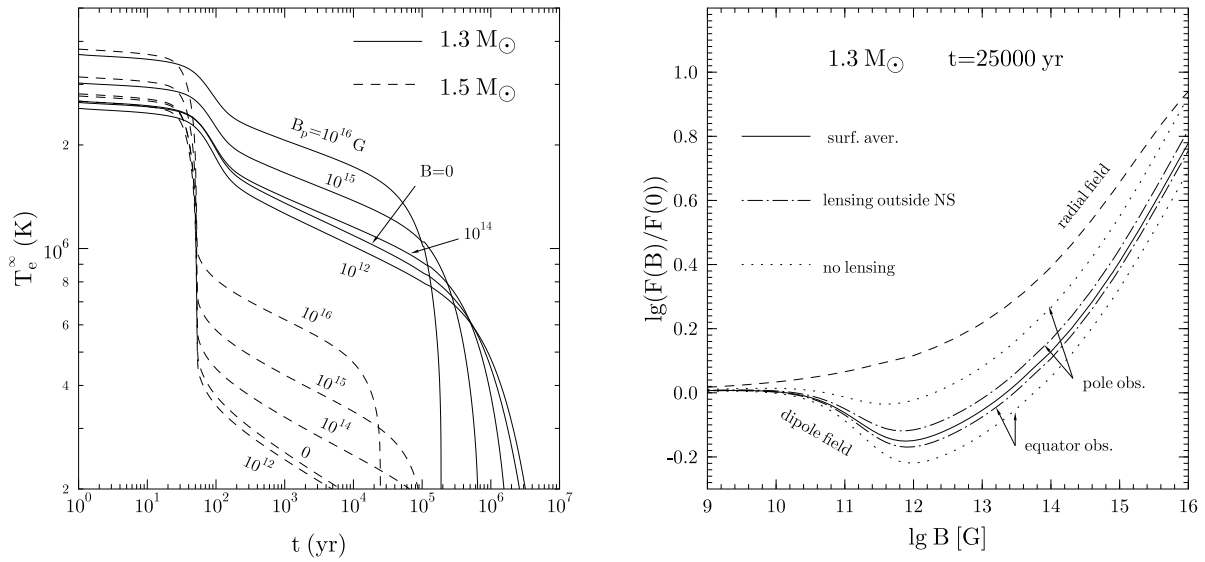


Рис. 6.12: *Левый рисунок*: Кривые остывания нейтронных звёзд с массами  $1,3 M_{\odot}$  (сплошные кривые) и  $1,5 M_{\odot}$  (пунктирные линии) без сверхтекучести с дипольным магнитным полем разной силы. *Правый рисунок*: Влияние сильных магнитных полей на поток  $F(B)$  звезды с массой  $1,3 M_{\odot}$  и возрастом  $t = 25000$  лет. Сплошная линия соответствует потоку, усреднённому по всей поверхности звезды, отнесённому к потоку в отсутствие магнитного поля; штрихпунктир – потокам, наблюдаемым в направлении на полюс или экватор (верхние и нижние кривые, соответственно); точечный пунктир – аналогичным потокам, но вычисленным без учёта отклонения света гравитационным полем; штриховая линия соответствует модели радиального поля.

$B = 0$ . Магнитное поле обычной напряжённости ( $B \lesssim 10^{13}$  Гс, а для стандартного сценария остывания – и  $B \lesssim 10^{14}$  Гс) лишь незначительно влияет на кривые остывания, что находится в качественном согласии с предсказаниями [404, 405]. Слабое влияние магнитного поля на остывание нейтронной звезды со стандартным дипольным магнитным полем объясняется взаимной компенсацией двух эффектов: уменьшения светимости в экваториальной области, где градиент температуры в оболочке направлен поперёк поля, которое в этом случае препятствует теплопереносу, и увеличения светимости в области магнитных полюсов, где происходит усиление продольной теплопроводности квантующим магнитным полем. При этом с увеличением  $B$  сначала преобладает первый (классический) эффект, за счёт которого происходит уменьшение общей светимости звезды, а затем, при  $B \gtrsim 10^{13} - 10^{14}$  Гс, за счёт увеличения  $\rho_B$  роль квантования Ландау становится всё существеннее, что приводит к интегральному «просветлению» теплоизолирующей оболочки.

На правом рис. 6.12 представлены отношения локальной и интегральной фотонных светимостей нейтронной звезды, имеющей возраст 25 тыс. лет и остывающей стандартным образом, к значениям, которые имели бы эти светимости в отсутствие

магнитного поля. Эти отношения представлены как функции магнитной индукции  $B$  в логарифмическом масштабе. Нижняя штрихпунктирная кривая описывает отношение магнитной и немагнитной светимостей на магнитном экваторе, верхняя – на полюсе, а сплошная кривая – отношение интегральных светимостей для дипольного магнитного поля, при этом числа на горизонтальной оси соответствуют магнитной индукции на полюсе. Точечный пунктир показывает, как выглядели бы штрихпунктирные кривые в отсутствие искривления световых лучей в гравитационном поле звезды. Разность значений на верхней кривой и соответствующих значений на нижней даёт ограничение сверху на амплитуду пульсаций потока, которые могли бы наблюдаться при вращении звезды с магнитным полем. При учёте гравитационного искривления лучей (штрихпунктирные кривые) эта амплитуда оказывается весьма невелика, не больше нескольких процентов.

Для сравнения штриховой линией показано то же отношение для модели радиального магнитного поля, постоянного по величине, которая использовалась в некоторых ранних работах [398]. В отличие от этой упрощённой модели, модель дипольного поля предсказывает немонотонную зависимость тепловой фотонной светимости (и, соответственно, поведения кривых остывания) от  $B$ .

Модель магнитного диполя является идеализацией, которую можно рассматривать как крайний случай реалистичного магнитного поля, наиболее медленно меняющегося вдоль поверхности звезды. В статье [406] был рассмотрен противоположный предельный случай – поле, меняющееся на масштабах, малых по сравнению с размером звезды. В этом случае на любом участке поверхности, большем, чем характерный масштаб изменения поля, эффективная теплопроводность вместо (6.4) будет равна среднему значению этого выражения по углам,  $\frac{1}{3}\kappa_{\parallel} + \frac{2}{3}\kappa_{\perp}$ . Основным результатом рассмотрения такой модели состоит в том, что интегральная светимость и тепловая эволюция звезды в этом случае не сильно отличаются от случая дипольного поля. Гораздо существеннее может быть влияние аккрецированных оболочек, к более подробному рассмотрению которых мы сейчас перейдём.

### 6.4.2 Аккрецированные оболочки

Примеры рассчитанных профилей температуры в аккрецированных оболочках нейтронных звёзд с сильными магнитными полями показаны на рис. 6.13 сплошными кривыми, а для сравнения штрихпунктирной линией нанесены профили в случае железной оболочки; при этом сравнивать надо со средней из сплошных кривых, со-

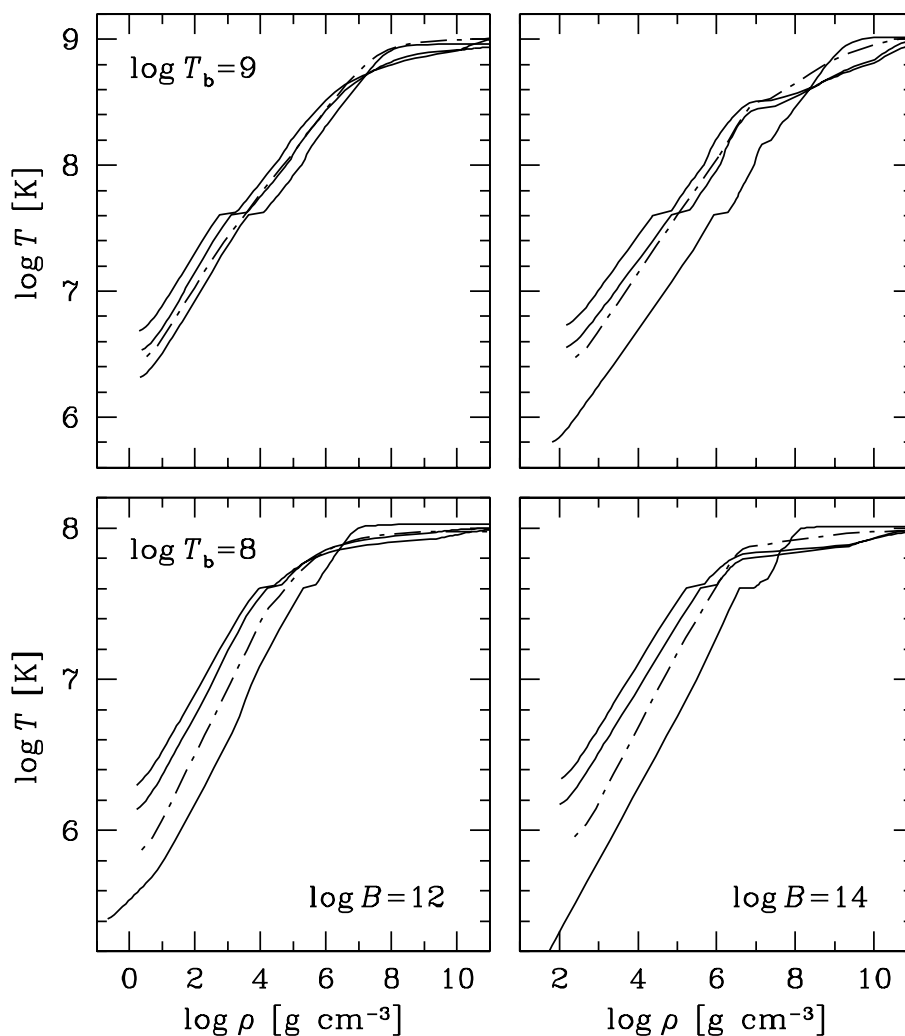


Рис. 6.13: Профили температуры в полностью аккрецированных оболочках нейтронных звёзд со значениями внутренней температуры  $T_b = 10^9$  К (два верхних рисунка) и  $10^8$  К (два нижних рисунка) и магнитной индукцией  $B = 10^{12}$  Гс (два левых рисунка) и  $10^{14}$  Гс (два правых рисунка) [366]. Разные сплошные кривые соответствуют разному наклону магнитных силовых линий к нормали:  $\Theta_B = 90^\circ$  (кривая, идущая ниже других при малых  $\rho$ ),  $84^\circ$  (средняя кривая при малых  $\rho$ ) и  $0^\circ$  (кривая, идущая выше других при малых  $\rho$ ). Штрихпунктир соответствует неаккрецированной оболочке и  $\Theta_B = 84^\circ$ .

ответствующей тому же наклону поля к поверхности ( $6^\circ$ ). Как и без магнитного поля, наличие аккрецированной оболочки приводит к увеличению эффективной температуры при фиксированном значении  $T_b$ . «Полочка» на сплошных кривых соответствует интерфейсу между водородным и гелиевым слоем, на котором плотность терпит разрыв. Наиболее заметные из остальных особенностей связаны с достижением значений плотности, кратных  $\rho_B$ , при которых начинают последовательно заполняться возбуждённые уровни Ландау.

Получившиеся в результате таких расчётов соотношения  $T_s - T_b$  представлены на рис. 6.14 для двух значений  $\Theta_B - 0^\circ$  ( $\parallel$ ) и  $0^\circ$  ( $\perp$ ) – и трёх значений магнитной индукции –  $10^{11}$ ,  $10^{13}$  и  $10^{15}$  Гс. Разные символы (треугольники, точки, квадраты) и разные типы кривых на каждом рисунке соответствуют разному количеству аккрецировавшего вещества; при этом символы показывают численные результаты, а кривые – аналитическую аппроксимацию по формуле (6.15), в которой в качестве  $T_{\text{full},6}$  и  $T_{\text{non},6}$  используются следующие функции температуры у основания теплоизолирующей оболочки  $T_b$ , магнитной индукции  $B$  и угла  $\Theta_B$  между направлением магнитных силовых линий и нормалью к поверхности:

$$\begin{pmatrix} T_{\text{non},6}(B) \\ T_{\text{full},6}(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{\text{non},6}(0) \\ T_{\text{full},6}(0) \end{pmatrix} (\mathcal{X}_{\parallel}^{\alpha} \cos^2 \Theta_B + \mathcal{X}_{\perp}^{\alpha} \sin^2 \Theta_B)^{1/\alpha}, \quad (6.31a)$$

$$\alpha = \begin{cases} 4 + \sqrt{\mathcal{X}_{\perp}/\mathcal{X}_{\parallel}} & \text{для } T_{\text{non},6}, \\ (2 + \mathcal{X}_{\perp}/\mathcal{X}_{\parallel})^2 & \text{для } T_{\text{full},6} \end{cases}, \quad (6.31b)$$

$$\mathcal{X}_{\parallel} = \frac{1 + \frac{a_1 + a_2 T_{b9}^{a_3}}{T_{b9}^2 + a_4 T_{b9}^{a_5}} \frac{B_{12}^{a_6}}{(1 + a_7 B_{12}/T_{b9}^{a_8})^{a_9}}}{1 + \frac{1}{3,7 + (a_{10} + a_{11} B_{12}^{-3/2}) T_{b9}^2}}, \quad (6.31c)$$

$$\mathcal{X}_{\perp} = \frac{[1 + b_1 B_{12}/(1 + b_2 T_{b9}^{b_7})]^{1/2}}{[1 + b_3 B_{12}/(1 + b_4 T_{b9}^{b_8})]^{\beta}}, \quad \beta = (1 + b_5 T_{b9}^{b_6})^{-1}, \quad (6.31d)$$

где  $T_{\text{non},6}(0)$  и  $T_{\text{full},6}(0)$  – значения  $T_{\text{non},6}$  и  $T_{\text{full},6}$  в отсутствие магнитного поля, которые определяются по формулам (6.13) и (6.14), а  $a_i$  и  $b_i$  – параметры, которые приведены в Табл. 6.4.

На рис. 6.15 показана фотонная светимость в системе отсчёта удалённого наблюдателя как функция магнитной индукции  $B$  для двух значений  $T_b$  ( $3 \times 10^7$  и  $3 \times 10^8$  К) и четырёх значений  $\Delta M$ . Зависимость  $L_{\gamma}$  от  $B$  немонотонна. При  $T_b = 3 \times 10^8$  К и не очень сильном поле доминирует эффект экваториального снижения температуры,



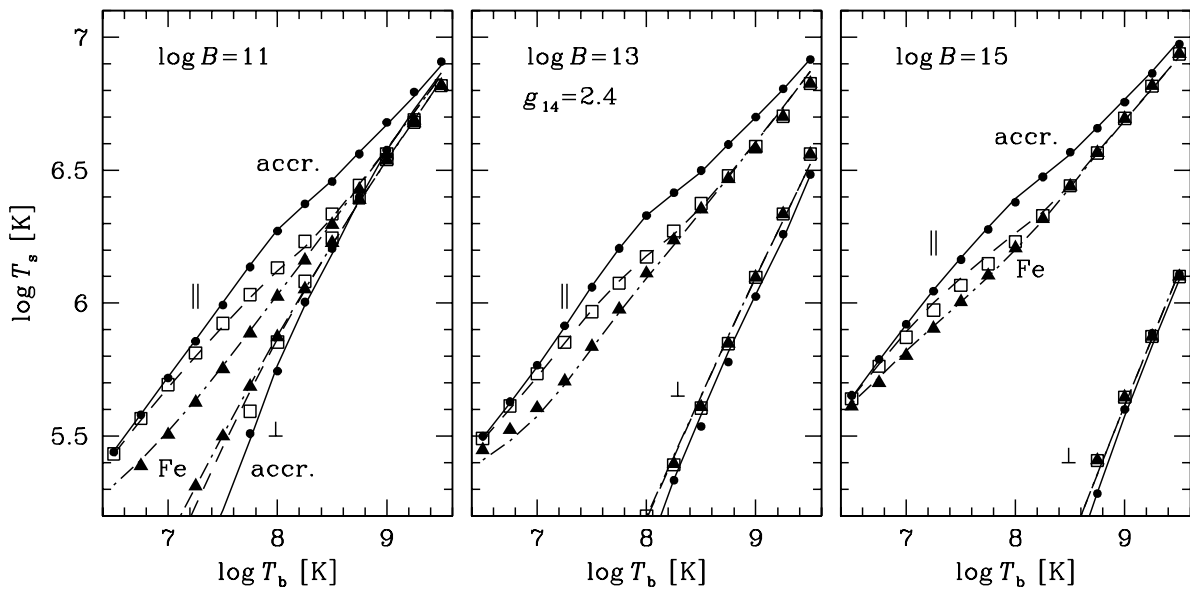


Рис. 6.14: Соотношения  $T_s - T_b$  для канонической нейтронной звезды с полностью аккрецированной оболочкой (сплошные кривые), железной оболочкой с  $\Delta M/M = 10^{-12}$  (штрихпунктир) и частично аккрецированной оболочкой (пунктир) при трёх различных значениях  $B$ : на левом рисунке  $10^{11}$  Гс, на среднем  $10^{13}$ , на правом  $10^{15}$  Гс [366]. На каждом рисунке нижняя из двух кривых одного типа соответствует  $\Theta_B = 90^\circ$  ( $\perp$ ), а верхняя  $\Theta_B = 0^\circ$  ( $\parallel$ ).

и светимость с ростом поля становится ниже, чем при  $B = 0$ . Для более сильного поля  $B$  начинает доминировать просветление полярных шапок, и светимость увеличивается (ср. правое окно на рис. 6.12). При  $T_b = 3 \times 10^7$  К (то есть для довольно холодной нейтронной звезды) влияние поля  $B \lesssim 10^{13}$  Гс довольно слабое, но зато увеличение  $L_\gamma$  в более сильном поле становится сильнее. Эти эффекты связаны с более заметным влиянием квантования Ландау и большей ролью фотонных непрозрачностей в более холодной плазме (более подробное обсуждение см. в [366]). Представленные зависимости достаточно сложны, так как на них влияют многие факторы – фотонные непрозрачности, продольные и поперечные теплопроводности, положение поверхности  $\rho_s$ , – каждый из которых зависит от  $B$ .

Сверхсильное поле  $B \gtrsim 10^{14}$  Гс, в отличие от более слабого, приводит к значительному увеличению фотонной светимости. Однако при этом уменьшается эффект от дополнительного просветления оболочки при наличии проаккрецировавшей материи (причина этого обсуждена в [366] и коренится в том, что при более высокой температуре на полюсе становится шире та приэкваториальная полоса, в которой дипольное поле уменьшает локальный поток). Таким образом, два эффекта, усиливающих тепловую фотонную светимость звезды, – наличие сверхсильного магнитного поля и

Таблица 6.4: Параметры аналитической аппроксимации (6.31)

оболочка $n$	железная ( <b>non</b> )		аккрецированная ( <b>full</b> )	
	$a_n$	$b_n$	$a_n$	$b_n$
1	$1,76 \times 10^{-4}$	159	$4,50 \times 10^{-3}$	172
2	0,038	270	0,055	155
3	1,5	172	2,0	383
4	0,0132	110	0,0595	94
5	0,620	0,363	0,328	0,383
6	0,318	0,181	0,237	0,367
7	$2,3 \times 10^{-9}$	0,50	$6,8 \times 10^{-7}$	2,28
8	3	0,619	2	1,690
9	0,160	...	0,113	...
10	21	...	163	...
11	$4,7 \times 10^5$	...	$3,4 \times 10^5$	...

аккрецировавшей оболочки – не мультипликативны.

В качестве примера приложения полученных результатов рассмотрим сравнение теоретических предсказаний остывания нейтронных звёзд без магнитного поля и со сверхсильным полем, с железной и аккрецированной оболочками с данными наблюдений. На рис. 6.16 представлены теоретические кривые остывания нейтронных звёзд с массой  $1,3 M_{\odot}$  при разных модельных предположениях, перечисленных в подписи к рисунку, и для сравнения показаны эффективные температуры и возраста для двух источников из статьи [377]. С учётом величины показанных на рисунке вероятных погрешностей на основании такого сравнения пока нельзя сделать однозначный вывод в пользу наличия или отсутствия аккрецированной оболочки и сверхсильного магнитного поля. Несмотря на это, из рисунка видно, что не все кривые согласуются с данными в пределах погрешностей, причём лучше согласуются те из них, которые основаны на более развитых моделях. В перспективе, при наличии большего количества наблюдательных данных с возможно меньшими погрешностями, такое сравнение потенциально способно дать информацию о характеристиках нейтронных звёзд и позволить произвести выбрать среди моделей нуклонной сверхтекучести ту, которая наилучшим образом согласуется с наблюдениями.

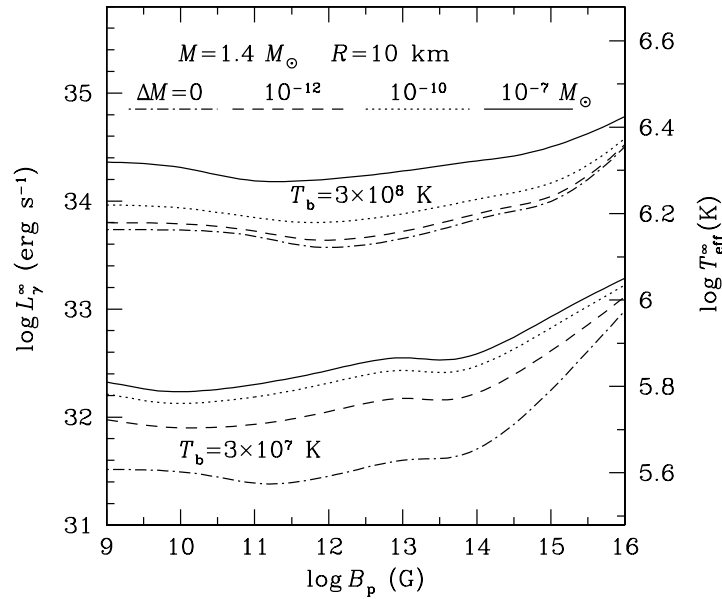


Рис. 6.15: Поверхностная фотонная светимость (в системе удалённого наблюдателя; левая вертикальная ось) и соответствующая ей эффективная температура (правая вертикальная ось) для канонической нейтронной звезды с дипольным магнитным полем для двух значений  $T_b$  и четырёх моделей оболочки: аккрецированная масса  $\Delta M = 0, 10^{-12} M_\odot, 10^{-10} M_\odot,$  и  $10^{-7} M_\odot$  – как функция магнитной индукции на магнитном полюсе (по осям нанесены значения десятичных логарифмов) [366].

## 6.5 Тепловой баланс магнитаров

Известные сегодня магнитары, согласно наблюдательным оценкам, имеют светимости и эффективные температуры, значительно превосходящие светимости и температуры обычных изолированных нейтронных звёзд. Согласно широко распространённой гипотезе (напр., [55, 412, 413]), эти высокие светимости и температуры могут быть результатом выделения энергии внутри нейтронной звезды в результате распада сверхсильного магнитного поля, которым она обладает. Эта гипотеза не является единственной – выдвигались и альтернативные предположения (напр., [69] и ссылки там). В данном параграфе мы кратко опишем применение описанных в § 6.1 компьютерных программ для расчёта остывания и тепловой структуры к исследованию вопроса о том, насколько гипотеза о поддержании светимости магнитара распадом его магнитного поля совместима с наблюдаемыми величинами возрастов и светимостей магнитаров и с теоретическими расчётами остывания нейтронных звёзд.

При моделировании в качестве основной модели уравнения состояния мы используем, как и в § 6.3.2b, одну из версий современного детального уравнения состояния вещества сверхъядерной плотности [391] в параметризации [392], а именно – уравне-

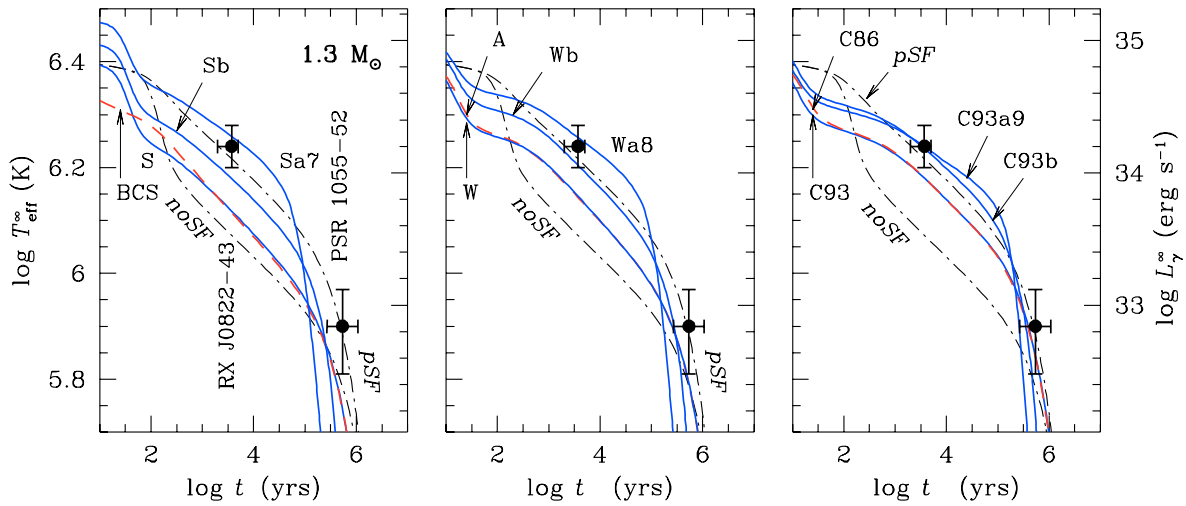


Рис. 6.16: Эволюция эффективной температуры (левая ось ординат) или фотонной светимости (правая ось ординат) нейтронной звезды с массой  $1,3 M_{\odot}$  с точки зрения удалённого наблюдателя при разных модельных предположениях [366]. Для сравнения показаны наблюдательные данные для RX J0822–43 и PSR B1055–52 согласно [377]. Штрихпунктир – звезда без магнитного поля, без аккрецированной оболочки и без сверхтекучести (*noSF*) или только с сильной протонной сверхтекучестью в ядре (*pSF*). Кривые, помеченные как BCS, A, W, S, C86 и C93 построены с использованием разных моделей нейтронной сверхтекучести в коре. Кривая BCS – базовая для сравнения, она построена при предположении о синглетном спаривании нейтронов без учёта эффектов поляризации среды, которые должны уменьшать силу куперовского спаривания, а остальные кривые основаны на моделях, которые в разных приближениях учитывают такие эффекты: C86 – [407], C93 – [408], A – [409], W – [410], S – [411]. Строчная буква “b” (Sb, Wb, C93b) означает наличие сверхсильного дипольного поля с  $B_p = 10^{15}$  Гс. Строчная буква “a” означает наличие аккрецированного слоя, а следующая за ней цифра указывает массу этого слоя: Sa7 –  $\Delta M/M = 10^{-7}$ , Wa8 –  $\Delta M/M = 10^{-8}$ , C93a9 –  $\Delta M/M = 10^{-9}$ .

ние состояния APR III из [393]. За основу рассмотрения берутся две модели звезды – с массами  $M = 1,4 M_{\odot}$  и  $1,9 M_{\odot}$ . При выбранном уравнении состояния первая из них, представляющая пример стандартного остывания, имеет радиус  $R = 12,27$  км и плотность в центре  $\rho_c = 9,280 \times 10^{14}$  г см $^{-3}$ , а вторая, представляющая пример ускоренного остывания, –  $R = 10,95$  км и  $\rho_c = 2,050 \times 10^{15}$  г см $^{-3}$ .

Для изучения поставленной проблемы в расчётах тепловой структуры и эволюции нейтронной звезды необходимо учесть, помимо нейтринных стоков энергии, наличие внутренних источников тепла, которые могут располагаться не только в ядре звезды, но и в её коре. Как указывалось в § 6.1, это ощутимо усложняет расчёты. Кроме того, из-за более высокой температуры оболочек нейтринные потери оказываются важны не только в ядре и внутренней коре, но и во внешней коре звезды. Так, на рис. 6.17 показаны профили температуры во внешней оболочке при различных величинах магнитного поля ( $B = 10^{12}$  Гс, как для обычной нейтронной звезды,

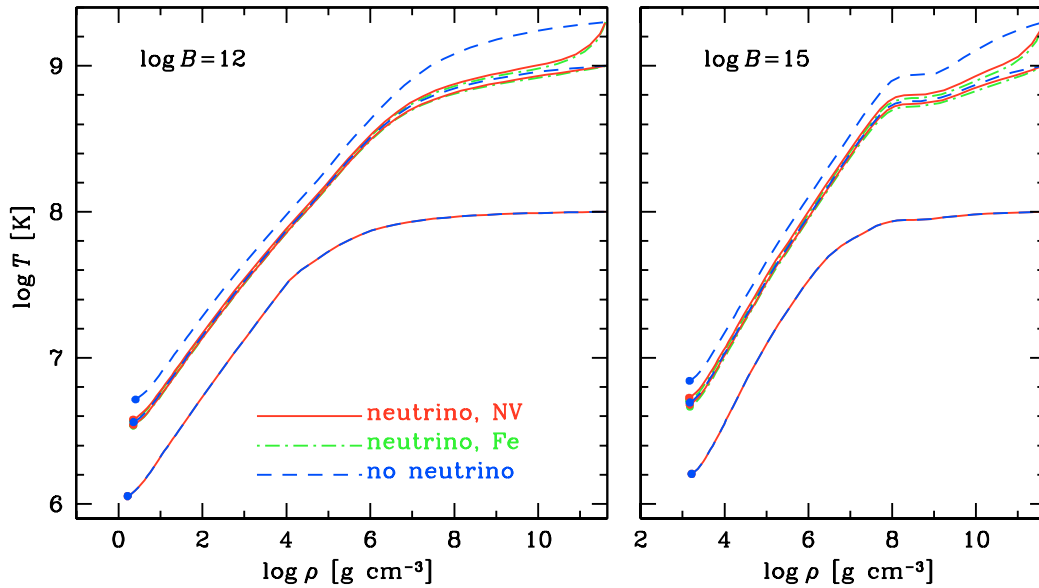


Рис. 6.17: Профили температуры во внешней коре нейтронной звезды при  $\Theta_B = 0$  и  $B = 10^{12}$  Гс (левый рисунок) или  $B = 10^{15}$  Гс (правый рисунок) [361]. Сплошные кривые (NV) – состав коры соответствует модели Нежеля–Вотрена [75] с учётом нейтринных потерь, штрихпунктир – оболочка из  $^{56}\text{Fe}$  с учётом нейтринных потерь, штриховые линии – состав [75] без учёта нейтринных потерь энергии. Для каждой группы кривых температура фиксирована при плотности  $\rho_b = \rho_{\text{drip}}$ :  $T_b = 10^8$  К,  $10^9$  К и  $2 \times 10^9$  К. Жирные точки слева соответствуют положению радиативной поверхности (6.7).

и сверхсильное поле  $B = 10^{15}$  Гс) и различных температурах на внутренней границе оболочки ( $T_b = 10^8$  К, что соответствует  $T_s \approx 10^6$  К, как для обычной нейтронной звезды, и более высокие значения –  $T_b = 10^9$  и  $2 \times 10^9$  К, что соответствует  $T_s \approx 3\text{--}6 \times 10^6$  К, как для магнитара) с учётом и без учёта нейтринного излучения. Изгиб сплошных и штрихпунктирных профилей вблизи внутренней границы происходит как раз из-за этих потерь. Для более горячих звёзд они приводят к высвечиванию почти всей добавочной энергии при большой плотности, так что поведения профиля температуры при меньших  $\rho$  уже мало зависит от дальнейшего увеличения  $T_b$ .

Из рис. 6.17 видно, что замена одной модели состава неаккрецированной оболочки на другую практически не влияет на её теплоизолирующие свойства. Кроме показанных на рисунке моделей железной оболочки и равновесного состава по Нежелю–Вотрену [75], в [56] нами проверялись и другие модели состава неаккрецированной коры, предложенные в более новых статьях [183, 414]. Кроме того, в [361] мы проверили, что замена протяжённой атмосферы на конденсированную поверхность согласно [241, 255] также практически не оказывает влияния на соотношение  $T_s - T_b$ .

В то же время из рис. 6.17 видно также, что пренебрежение нейтринными поте-

рями во внешней коре приводит к значительной ошибке в определении соотношения  $T_s - T_b$ . Более того, при решении уравнений теплового баланса во внутренней области  $\rho > \rho_b$  следует модифицировать граничное условие с учётом того, что  $T_s$  уже не соотносится с  $F_r$  на внутренней границе по закону Стефана–Больцмана, как было в случае постоянства теплового потока во внешней коре. Рисунок 6.18 это наглядно демонстрирует. На нём показаны соотношения  $T_s - T_b$  (сплошные кривые и штрихпунктир; левая ось ординат) и соотношение между  $T_b$  и полным потоком через внутреннюю границу теплоизолирующей оболочки  $L_{r,b}$  (штриховой и точечный пунктир; правая ось ординат) для двух величин магнитного поля – сильного ( $B = 10^{12}$  Гс) и сверхсильного ( $B = 10^{15}$  Гс). При этом точечные и штриховые линии получены без учёта нейтринного излучения из теплоизолирующей оболочки, а сплошные и штрихпунктирные – с его учётом. Кроме того, сплошные и штриховые линии получены для  $\rho_b = 10^{10}$  г см<sup>-3</sup>, а точечные и штрихпунктирные – для  $\rho_b = 4 \times 10^{11}$  г см<sup>-3</sup>. Видно, во-первых, что при учёте нейтринного излучения  $T_s$  не может неограниченно повышаться с увеличением  $T_b$ : при  $T_b \gtrsim 10^{8,5} - 10^9$  К наступает насыщение. Во-вторых, уровень этого насыщения зависит от выбора  $\rho_b$ . В третьих, при наступлении насыщения  $T_s$  исчезает прямая пропорциональность между  $T_s^4$  и  $L_{r,b}$ : поток на внутренней границе теплоизолирующей оболочки уже нельзя определять на основе поверхностной светимости.

В [415] и [56] проводилось феноменологическое моделирование излучения магнитаров в попытке определить, насколько и при каких условиях гипотеза о питании их наблюдаемой высокой светимости внутренними источниками, в частности – выделением энергии в недрах звезды при распаде магнитного поля, совместимо с энергетическим балансом звезды, в частности – с полной энергией, которую можно в этом поле запастись. При расчётах на разной глубине в выбранных слоях, ограниченных некоторыми значениями плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2 > \rho_1$ , в звезде располагались источники тепла, и затем решались уравнения теплового баланса.

На рис. 6.19 показаны представительные примеры рассчитанных профилей температуры при наличии сверхсильного магнитного поля, наклонённого под разными углами к поверхности, без источников тепла и с источниками, расположенными вблизи дна внешней коры. Здесь дополнительно проверялось, насколько допустимо располагать границу не на  $\rho_b = \rho_{\text{drip}}$ , а при меньшей плотности  $\rho_b = 10^{10}$  г см<sup>-3</sup>, не учитывая наличие сильного магнитного поля при  $\rho > \rho_b$ . Для этого рассчитывались профили температуры и потока в модели, в которой искусственно полагалось  $B = 0$  при  $\rho > \rho_b$ , и результаты сравнивались с моделью, в которой такого выключения по-

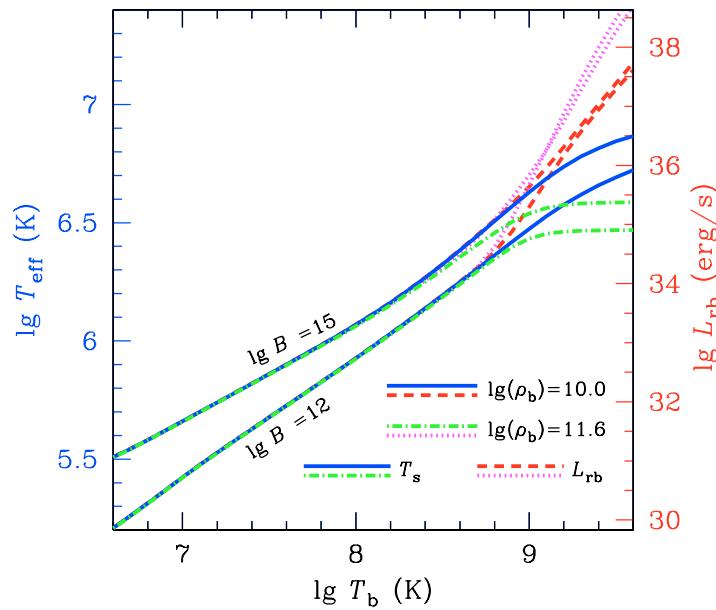


Рис. 6.18: Эффективная температура  $T_{\text{eff}}$  (левая ось ординат, сплошные и штрихпунктирные кривые) и полный поток тепла  $L_{\text{rb}}$  через внутреннюю границу железной теплоизолирующей оболочки (правая ось ординат, точечный и штриховый пунктир) для нейтронной звезды с массой  $1,4 M_{\odot}$ , с уравнением состояния в ядре APR III, для  $\rho_b = 10^{10} \text{ г см}^{-3}$  (сплошные и штриховые кривые) и  $\rho_b = 4 \times 10^{11} \text{ г см}^{-3}$  (штрихпунктир и точечный пунктир), для  $B = 10^{12} \text{ Гс}$  (нижняя кривая в каждой паре) и  $10^{15} \text{ Гс}$  (верхние кривые).

ля не производилось. Слева внизу в увеличенном масштабе показано, как ведут себя профили температуры, а справа внизу – профили потока, вблизи дна внешней коры, где расположился источник. Видно, что заметное отличие тех профилей, которые соответствуют «выключению» магнитного поля при  $\rho > \rho_b = 10^{10} \text{ г см}^{-3}$ , от точных профилей, нивелируется с уменьшением  $\rho$  при распространении тепла к внешней границе, поэтому для расчётов энергетического баланса вполне допустимо располагать границу при  $\rho_b = 10^{10} \text{ г см}^{-3}$ . Видно также, что «включение» нагревания приподнимает эти профили, приводя к большей светимости. При этом, однако, большая часть выделенной в слое энергии стекает не наружу, а внутрь, поэтому такой нагрев является довольно неэффективным. При помещении источников на большую глубину, чем на рис. 6.19, эта эффективность быстро спадает.

При моделировании временной эволюции предполагалось, что в начальный момент мощность источника максимальна, а затем она уменьшается по экспоненциальному закону с характерным временем, которое выбиралось  $\sim 10^4 - 10^5$  лет. При меньшем значении времени затухания оно вступало бы в противоречие с наблюдательными оценками возрастов известных кандидатов в магнитары, а при большем

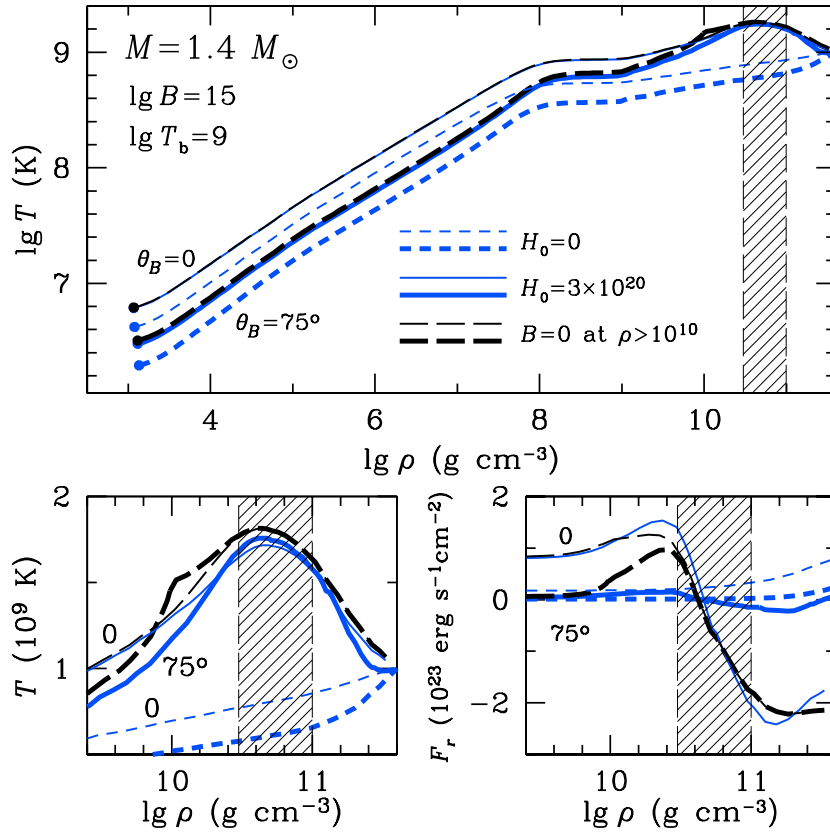


Рис. 6.19: Зависимость температуры  $T(\rho)$  и радиального потока тепла  $F_r(\rho)$  от плотности на отдельных участках внешней коры нейтронной звезды с массой  $1,4 M_\odot$  (железная оболочка,  $\rho_b = 4 \times 10^{11} \text{ г см}^{-3}$ ,  $T_b = 10^9 \text{ К}$ ) с локально-квазигомогенным магнитным полем  $B = 10^{15} \text{ Гс}$ , направленным под одним из двух углов  $\Theta_B$  к нормали,  $\Theta_B = 0$  (тонкие линии) или  $\Theta_B = 75^\circ$  (толстые линии). Положение слоя, в котором происходит нагрев, показано штриховкой; интенсивность нагрева равна  $H_0 = 3 \times 10^{20} \text{ эрг см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Сплошные кривые – полная (наиболее аккуратная) модель, длинные штрихи – пренебрежение влиянием магнитного поля при  $\rho > 10^{10} \text{ г см}^{-3}$ ; короткие штрихи – нет источников тепла,  $H_0 = 0$ . *Верхний рисунок*: полные профили температуры при  $\rho \leq \rho_b$ , начинающиеся слева от радиативной границы, положение которой отмечено жирной точкой для каждого профиля. *Нижний рисунок*:  $T(\rho)$  в единицах  $10^9 \text{ К}$  (слева) и  $F_r(\rho)$  в единицах  $10^{23} \text{ эрг см}^{-2} \text{ с}^{-1}$  (справа) вблизи источников нагрева.



значении полная растроченная энергия за время жизни энергия не могла бы быть обеспечена имеющимся магнитным полем.

В наших первых работах [415] по моделированию теплового баланса магнитаров был сделан вывод о том, что даже при оптимальных условиях трудно достичь наблюдаемой светимости, оставаясь в рамках энергетического баланса, обеспечиваемого магнитным полем разумной величины ( $B \lesssim 10^{15} - 10^{16}$  Гс внутри звезды). В статье [56] этот вывод был пересмотрен. В этой последней работе сделано два изменения по сравнению с предыдущими. Во-первых, с учётом новых наблюдательных данных и на основе более тщательного анализа предыдущих была немного смещена вниз та область «наблюдаемых» эффективных температур магнитаров, которую должны воспроизводить теоретические кривые. Во-вторых, на основе результатов работы [361] было полностью учтено влияние сверхсильного магнитного поля на теплоперенос и нейтринное излучение в оболочке, а также рассмотрена возможность наличия аккрецированной оболочки.

Некоторые результирующие зависимости светимостей от времени в качестве характерного примера представлены в правом окне на рис. 6.20 в сравнении с той областью возрастов и светимостей магнитаров, на которую указывают наблюдения (заштрихованная область и точки с отрезками погрешностей на правом рисунке 6.20). В левом окне этого же рисунка показаны соответствующие профили температуры в коре нейтронной звезды тысячелетнего возраста с магнитным полем  $B_p = 5 \times 10^{14}$  Гс при двух разных начальных интенсивностях нагрева  $H_0$  (толстые кривые –  $H_0 = 3 \times 10^{20}$  эрг см<sup>-3</sup> с<sup>-1</sup>, тонкие –  $H_0 = 3 \times 10^{19}$  эрг см<sup>-3</sup> с<sup>-1</sup>) и трёх модельных положениях источника нагрева – это области I, II, и III, показанные штриховкой на левом рисунке, которым соответствуют кривые разного типа согласно спецификации на рисунке. Типы кривых остывания в правом окне и профилей в левом окне рисунка соответствуют друг другу. Видно, что теперь, с учётом просветления оболочки сверхсильным полем, на которое мы обращали внимание в предыдущем параграфе, объяснение наблюдаемых светимостей на основе гипотезы о внутренних источниках нагрева стало возможным.

## 6.6 Резюме

В данной главе мы рассмотрели тепловую структуру нейтронных звёзд с теплоизолирующими оболочками разного состава и разной толщины, без магнитного поля и при наличии сильного или сверхсильного дипольного и недипольного магнитного

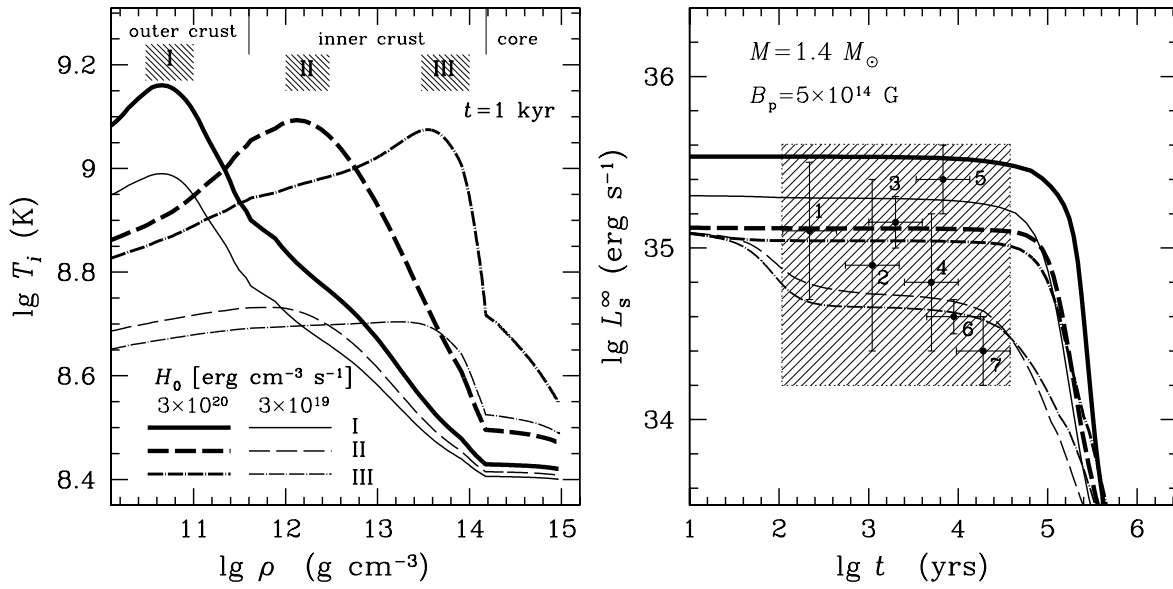


Рис. 6.20: *Левый рисунок*: зависимость температуры в коре нейтронной звезды с возрастом  $10^3$  лет при трёх разных положениях (I, II и III) источников внутреннего нагрева (показаны штриховкой) при двух уровнях интенсивности этих источников, соответствующих начальной плотности мощности  $H_0 = 3 \times 10^{19}$   $\text{эрг см}^{-3} \text{с}^{-1}$  и  $3 \times 10^{20}$   $\text{эрг см}^{-3} \text{с}^{-1}$ , для железной оболочки и дипольного магнитного поля, величина которого на полюсе равна  $B_p = 5 \times 10^{14}$  Гс. Под верхней осью отмечены границы внешней коры, внутренней коры и ядра. *Правый рисунок*: кривые остывания при учёте внутреннего подогрева в сравнении с областью возрастов и светимостей магнитаров, на которую указывают наблюдения (заштрихованная область; точки соответствуют объектам: 1 – SGR 1806–20, 2 – SGR 1900+14, 3 – 1E 1841–045, 4 – SGR 0526–66, 5 – CXOU J010043.1–721134, 6 – 1RXS J170849.0–400910, 7 – 1E 2259+586).

поля, с учётом нейтринного излучения, существенного в горячих оболочках, и возможным наличием внутренних источников нагрева. Получены соотношения между эффективной температурой поверхности (локальной  $T_s$  и интегральной  $T_{\text{eff}}$ ), температурой на внутренней границе теплоизолирующей оболочки и потоком тепла через эту оболочку, необходимые для моделирования тепловой эволюции нейтронных звёзд разных типов. Для ряда общеупотребительных ситуаций полученные численные зависимости аппроксимированы аналитическими формулами.

Найденные закономерности тепловой структуры и соотношения между эффективной и внутренней температурами оболочки использованы для моделирования остывающих нейтронных звёзд разных типов – звёзд с разными моделями внутреннего состава, уравнения состояния и сверхтекучести во внутренней коре и ядре, транзиентно аккрецирующих нейтронных звёзд и нейтронных звёзд с сильными и сверхсильными магнитными полями. В ряде случаев проведено сравнение с наблюдениями и на этой основе сделаны оценки применимости рассмотренных моделей.

## Глава 7

# Атмосферы нейтронных звёзд с СИЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Эта глава посвящена, главным образом, вычислению рентгеновских спектральных непрозрачностей нейтронных звёзд с сильными магнитными полями, причём основное внимание в ней уделено водородным атмосферам. Как обсуждалось в § 4.5, при наличии сильного магнитного поля только для водорода пока удалось полностью решить задачу о микроскопической структуре атома и вероятностях излучательных переходов. Квантовомеханические характеристики атома водорода, движущегося в сильном магнитном поле, рассчитанные в главе 4, были применены в главе 5 для расчёта уравнения состояния водородной плазмы. В настоящей главе данное уравнение состояния будет использовано совместно с сечениями поглощения, вычисленными в § 4.4, для расчёта спектральных непрозрачностей водородной плазмы при физических условиях, характерных для замагниченных атмосфер нейтронных звёзд. В конце главы более кратко будет описано применение рассчитанных непрозрачностей для моделирования спектров атмосфер нейтронных звёзд.

Атмосферы нейтронных звёзд с сильными магнитными полями моделировались во многих работах: это, например, уже упоминавшиеся статьи [313–317], а также предшествовавшие им работы [306, 416, 417] и другие. Во всех перечисленных статьях использовалась модель полностью ионизованной атмосферы. Имеется также небольшое число работ, посвящённых моделям частично ионизованных атмосфер нейтронных звёзд с сильными магнитными полями [418, 419], но в них эффекты движения атомов либо не учитываются вовсе, либо учитываются весьма приближённо – на основе теории возмущений [270], которая применима только при малых значениях поперечного обобщённого импульса  $K_{\perp} \ll K_{\text{cr}}$  и совсем не описывает де-

центрированные состояния. Такая трактовка может быть оправдана для тяжёлых атомов в сравнительно холодных атмосферах, но неприменима к лёгким атомам, для которых при  $T \sim 10^6$  К и  $B \gtrsim 10^{12}$  Гс изменение энергии за счёт теплового движения в магнитном поле нельзя считать малым по сравнению с энергией связи в состоянии покоя. Кроме того, даже в полностью ионизованных атмосферах эффекты совместного движения электронов и ядер оказываются важны при вычислении сечений поглощения, как мы видели в § 4.4.4.

В § 7.1, носящем характер введения, представлены некоторые известные (за исключением оригинальных формул (7.7)–(7.9)) сведения и формулы, используемые в дальнейшем. В § 7.2 рассмотрены коэффициенты поглощения и излучения за счёт квантовых переходов между ионными уровнями Ландау в полностью ионизованной плазме с учётом возможных отклонений от ЛТР в сверхсильном магнитном поле и оценена величина возможного влияния этих отклонений на излучательную способность. В § 7.3 изучены непрозрачности частично ионизованной водородной атмосферы в сильном магнитном поле с учётом связанно-связанных и связанно-свободных радиативных переходов. В § 7.4 кратко рассмотрена излучательная способность конденсированной поверхности нейтронной звезды с сильным магнитным полем. В § 7.5 кратко описаны примеры применения полученных результатов – уравнения состояния и радиативных непрозрачностей водородной плазмы в сильном магнитном поле – к построению моделей атмосфер и интерпретации наблюдаемого спектра излучения нейтронных звёзд с сильными магнитными полями.

## 7.1 Поляризационные моды и непрозрачности: основные соотношения

Распространение электромагнитных волн в замагниченной плазме исследовалось во многих статьях и монографиях, наиболее полной из которых является книга В. Л. Гинзбурга [212]. При энергиях фотона  $\hbar\omega$ , намного превосходящих  $\hbar\omega_{pe}$  (2.15), волны распространяются в форме двух поляризационных мод – *необыкновенной* (далее обозначаемой индексом  $j = 1$ ) и *обыкновенной* ( $j = 2$ ). Они имеют разные векторы поляризации  $\mathbf{e}^j$  и разные коэффициенты поглощения и рассеяния, зависящие от угла  $\theta_B$  между направлением распространения волны  $\mathbf{n}$  и вектором  $\mathbf{B}$ , и взаимодействуют одна с другой через рассеяние. Векторы  $\mathbf{e}^j$  для полностью ионизованной плазмы были получены В. Д. Шафрановым [420]. И. Вентура [305] провёл физический ана-

лиз поляризационных мод применительно к нейтронным звёздам. Ю. Н. Гнедин и Г. Г. Павлов [421] сформулировали проблему переноса излучения в терминах этих мод. Они ввели вещественные параметры  $q$  и  $p$ , которые полностью определяют поляризационные свойства нормальных волн и определяются при помощи равенства

$$q + ip = \frac{\varepsilon'_{yy} - \varepsilon'_{xx} \cos^2 \theta_B + \varepsilon'_{xz} \sin 2\theta_B - \varepsilon'_{zz} \sin^2 \theta_B}{2i(\varepsilon'_{xy} \cos \theta_B + \varepsilon'_{yz} \sin \theta_B)}, \quad (7.1)$$

где  $\varepsilon'_{ij}$  – компоненты комплексного тензора диэлектрической проницаемости [212]:  $\varepsilon' = \varepsilon + 4\pi i\sigma/\omega$ . Здесь  $\sigma$  – тензор электропроводности (§ 5.4), и ось  $z$  предполагается направленной вдоль  $\mathbf{B}$ . Параметр  $q$  определяет эллиптичность нормальных волн, а параметр  $p$  связан с поглощением. В наиболее часто встречающейся ситуации выполняются соотношения

$$|q| \gg |p|, \quad q(\omega, \theta_B) \approx \tilde{q}(\omega) \frac{\sin^2 \theta_B}{2 \cos \theta_B}. \quad (7.2)$$

Они могут нарушаться в узких интервалах частот вблизи резонансов (например, вблизи электронного и протонного циклотронных резонансов).

Вклад ионов плазмы в выражения для  $e^j$ , неявно учитывавшийся в [420], был явно выписан в [317].

В определённых областях плотностей  $\rho$  и частот  $\omega$  в сильном магнитном поле свойства нормальных волн драматически меняются из-за поляризации вакуума, обусловленной виртуальными электрон-позитронными парами. Развёрнутая библиография по исследованиям этого эффекта приведена в детальном обзоре Х. Шуберта [422]. Подробное исследование влияния поляризации вакуума на электромагнитное излучение представлено в обзоре Г. Г. Павлова и Ю. Н. Гнедина [423]. Диэлектрический тензор вакуума был получен в явном виде в [424] при  $b \ll 1$ , выражен через специальные функции в [425] для предельных случаев  $b \ll 1$  и  $b \gg 1$ , а также рассчитан численно при различных  $b$  в статье [426]. Здесь и далее  $b$  – магнитная индукция в релятивистских единицах (4.1). В статье [427] выписаны удобные выражения для векторов поляризации нормальных мод, учитывающие вклад электронов, ионов и поляризации вакуума.

Если поляризация вакуума слаба, то её можно линейно складывать с поляризацией плазмы. Тогда комплексный тензор диэлектрической проницаемости можно представить в виде

$$\varepsilon' = \mathbf{I} + 4\pi\chi + 4\pi\chi^{\text{vac}}, \quad (7.3)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $\chi = \chi^H + i\chi^A$  – комплексный тензор поляризуемости плазмы,  $\chi^H$  – его эрмитова составляющая,  $\chi^A$  – его антиэрмитова составляющая, а  $\chi^{\text{vac}}$  – тензор поляризуемости вакуума.

В декартовой системе координат с осью  $z$ , направленной вдоль  $\mathbf{B}$ , тензор диэлектрической проницаемости плазмы, диэлектрическую вакуумную поправку и обратную магнитную восприимчивость вакуума можно записать, соответственно, в виде

$$\varepsilon' = \mathbf{I} + 4\pi\chi = \begin{bmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

$$4\pi\chi^{\text{vac}} = \text{diag}(\hat{a}, \hat{a}, \hat{a} + \hat{q}), \quad (7.5)$$

$$\mu^{-1} = \mathbf{I} + \text{diag}(\hat{a}, \hat{a}, \hat{a} + \hat{m}). \quad (7.6)$$

Здесь  $\hat{a}$ ,  $\hat{q}$  и  $\hat{m}$  – поляризационные коэффициенты вакуума, обращающиеся в нуль при  $B = 0$ . Величины  $\varepsilon$ ,  $\eta$  и  $g$  для полностью ионизованной идеальной плазмы хорошо известны (напр., [212]; см. также формулу (4.230)), а для коэффициентов  $\hat{a}$ ,  $\hat{q}$  и  $\hat{m}$  в статье [428] нами найдены простые выражения в элементарных функциях, воспроизводящие численные и аналитические результаты предыдущих авторов [424–427]:

$$\hat{a} \approx -\frac{2\alpha_f}{9\pi} \ln \left( 1 + \frac{b^2}{5} \frac{1 + 0,25487 b^{3/4}}{1 + 0,75 b^{5/4}} \right), \quad (7.7)$$

$$\hat{q} \approx \frac{7\alpha_f}{45\pi} b^2 \frac{1 + 1,2b}{1 + 1,33b + 0,56b^2}, \quad (7.8)$$

$$m \approx -\frac{\alpha_f}{3\pi} \frac{b^2}{3,75 + 2,7b^{5/4} + b^2}. \quad (7.9)$$

Формулы (7.7)–(7.9) точно воспроизводят предел слабого поля  $b \ll 1$  [424] и ведущие члены разложения при  $b \gg 1$  (формулы (2.15)–(2.17) статьи [427]); в последнем случае формулы (7.7) и (7.8) правильно воспроизводят также и следующий за ведущим член разложения. Максимальная погрешность равна 1,1% при  $b = 0,07$  для (7.7), 2,3% при  $b = 0,4$  для (7.8) и 4,2% при  $b = 0,3$  для (7.9).

При заданной частоте фотона  $\omega$  вклад в непрозрачности за счёт поглощения  $\varkappa_j^a(\theta_B)$  каждой моды  $j$  и рассеяния  $\varkappa_{j,j'}^s(\theta_B)$  из моды  $j$  в моду  $j'$  можно представить

в виде (напр., [306]; ср. (5.41))

$$\varkappa_j^a(\theta_B) = m_H^{-1} \sum_{\alpha=-1}^1 |e_{j,\alpha}(\theta_B)|^2 \sigma_\alpha^a, \quad (7.10)$$

$$\varkappa_{jj'}^s(\theta_B) = \frac{3}{4} \sum_{\alpha=-1}^1 |e_{j,\alpha}(\theta_B)|^2 \frac{\sigma_\alpha^s}{m_H} \int_0^\pi |e_{j',\alpha}(\theta'_B)|^2 \sin \theta'_B d\theta'_B, \quad (7.11)$$

где  $\alpha = 0, \pm 1$ ,  $e_{j,0} = e_{j,z}$  и  $e_{j,\pm 1} = (e_{j,x} \pm ie_{j,y})/\sqrt{2}$  – циклические компоненты  $e^j$ , а (4.39), а частота  $\omega$  предполагается фиксированной. Удобство такого представления состоит в том, что сечения  $\sigma_\alpha$  не зависят от  $\theta_B$ .

Полная непрозрачность по отношению к рассеянию волны  $j$  равна  $\varkappa_j^s = \varkappa_{j1}^s + \varkappa_{j2}^s$ , а непрозрачность за счёт полной экстинкции  $\varkappa_j = \varkappa_j^a + \varkappa_j^s$ .

В *диффузионном приближении* (точность которого для магнитных атмосфер нейтронных звёзд изучалась, напр., в [417]), эффективная непрозрачность равна

$$\varkappa_j^{\text{eff}} = (\cos^2 \vartheta / \varkappa_j^\parallel + \sin^2 \vartheta / \varkappa_j^\perp)^{-1}, \quad (7.12)$$

где  $\vartheta$  – угол между  $\mathbf{B}$  и градиентом интенсивности,

$$\frac{1}{\varkappa_j^\parallel} = \frac{3}{4} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta_B}{\varkappa_j(\theta_B)} \sin \theta_B d\theta_B, \quad \frac{1}{\varkappa_j^\perp} = \frac{3}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta_B}{\varkappa_j(\theta_B)} d\theta_B. \quad (7.13)$$

Эффективная непрозрачность для неполяризованного излучения равна

$$\varkappa^{\text{eff}} = \frac{2}{(\varkappa_1^{\text{eff}})^{-1} + (\varkappa_2^{\text{eff}})^{-1}}. \quad (7.14)$$

## 7.2 Непрозрачности полностью ионизованной атмосферы

### 7.2.1 Спектральные непрозрачности с учётом протонного циклотронного и вакуумного резонансов

Для полностью ионизованных атмосфер наши непрозрачности не сильно отличаются от непрозрачностей, рассчитанных и использованных в предыдущих работах (напр., [313, 416]) при  $\omega > \omega_{ci}$ . Однако благодаря правильному описанию свободно-свободных переходов (§ 4.4.4) наблюдаются значительные отличия при  $\omega < \omega_{ci}$ . На рис. 7.1 представлены спектральные непрозрачности для двух мод поляризации,  $j = 1$  (сплошные кривые) и  $j = 2$  (штриховые кривые) для излучения, распространяющегося под

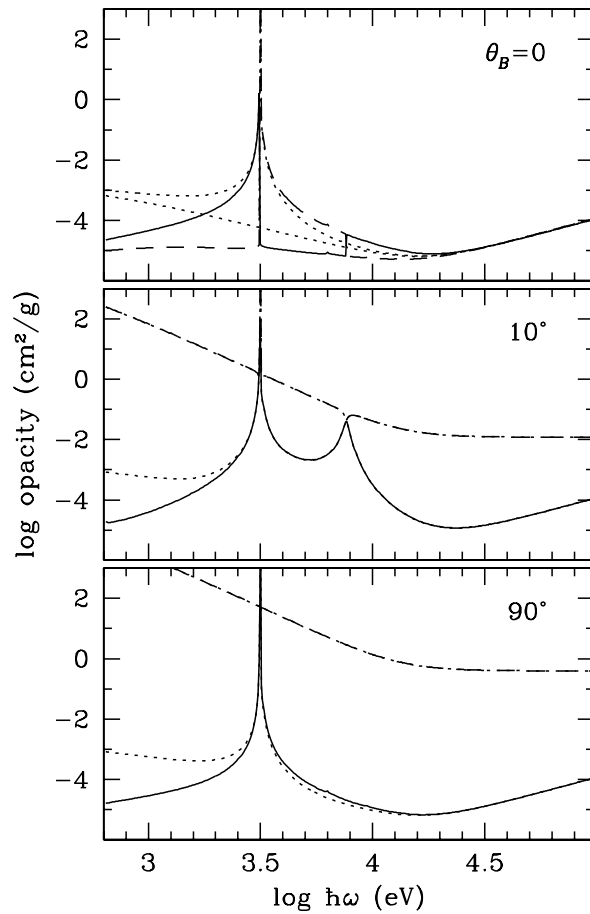


Рис. 7.1: Спектральные непрозрачности для двух поляризационных мод (штриховые и сплошные линии) в полностью ионизованной водородной плазме при  $\rho = 500 \text{ г см}^{-3}$ ,  $T = 5 \times 10^6 \text{ К}$  и  $B = 5 \times 10^{14} \text{ Гс}$ , для углов  $\theta_B$  между волновым вектором и направлением магнитного поля, равных нулю (верхний рисунок),  $10^\circ$  (средний рисунок) и  $90^\circ$  (нижний рисунок) [274]. Точечным пунктиром нанесены непрозрачности, рассчитанные согласно предыдущим работам, использовавшим рецепт (4.193).

тремя разными углами  $\theta_B$  относительно магнитных силовых линий. Параметры атмосферы для этого рисунка выбраны примерно такими, какими они ожидаются в фотосферах магнитаров:  $\rho = 500 \text{ г см}^{-3}$ ,  $T = 5 \times 10^6 \text{ К}$  и  $B = 5 \times 10^{14} \text{ Гс}$ . При этих условиях весьма заметен протонный циклотронный резонанс при  $\hbar\omega = 3,15 \text{ кэВ}$  (при фиксированной плотности<sup>1</sup>). При малых углах  $\theta_B$  непрозрачности нормальных мод пересекаются при  $\omega \approx \omega_{ci}$ , как хорошо известно (напр., [416]). Другое пересечение,

<sup>1</sup>Условие, что плотность фиксирована, здесь существенно. Из-за перекрещивания поляризационных мод в точке вакуумного резонанса, который, в отличие от циклотронного, зависит от плотности, протонный циклотронный резонанс становится слабым в выходящем спектре после интегрирования по всем оптическим глубинам – см. [427].



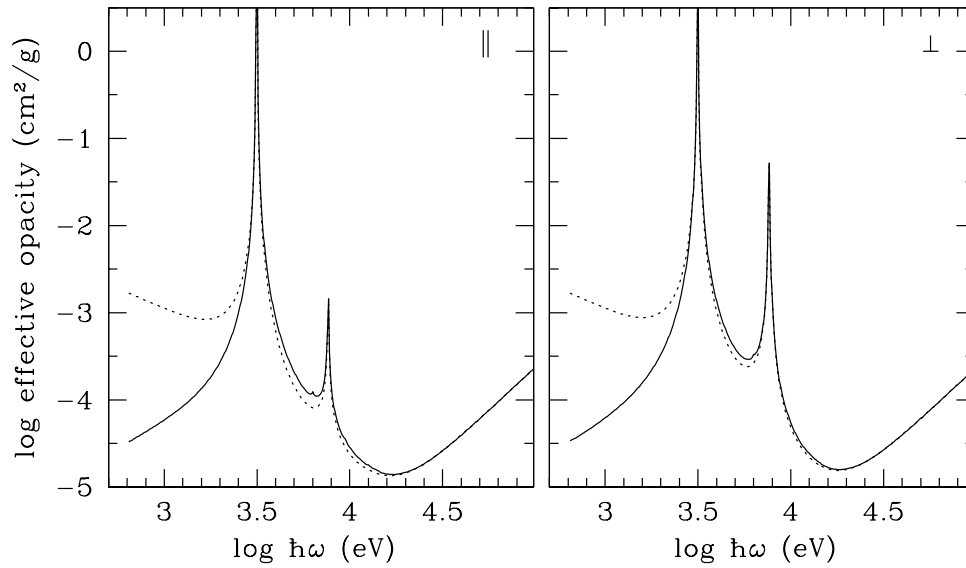


Рис. 7.2: Эффективные непрозрачности для диффузии неполяризованного излучения параллельно (левый рисунок) и перпендикулярно (правый рисунок) магнитному полю при тех же физических условиях, что и на рис. 7.1: новые (сплошные кривые) и «традиционные» (точечный пунктир) результаты [274].

происходящее для условий на рисунке при  $\hbar\omega \approx 7,6$  кэВ, происходит из-за вакуумного резонанса (напр., [416, 423, 427–430]). Вблизи точек пересечения при некоторых углах  $\theta_B$  две волны могут вырождаться («коллапсировать») [429].

Точечные кривые на рис. 7.1 получены при использовании формулы (4.193). Видно, что такое вычисление, являвшееся прежде традиционным, сильно переоценивает  $\kappa_1$  при больших  $\theta_B$ , и переоценивает как  $\kappa_1$ , так и  $\kappa_2$  при  $\theta_B = 0$ , если энергия фотона  $\hbar\omega$  достаточно мала.

На рис. 7.2 показаны эффективные непрозрачности  $\kappa^{\text{eff}}$  (7.14) для распространения неполяризованного излучения параллельно (||) и перпендикулярно (⊥) к магнитным силовым линиям, при тех же параметрах плазмы, что и на рис. 7.1. Пик при  $\lg \hbar\omega/\text{эВ} = 3,5$  вызван протонным циклотронным резонансом, а при  $\lg \hbar\omega/\text{эВ} = 3,9$  – вакуумным резонансом. Едва заметный промежуточный заусенец при  $\lg \hbar\omega/\text{эВ} = 3,8$  – это квантовый резонанс кулоновского логарифма на частоте  $2\omega_{ci}$  (ср. рис. 4.17).

Мы видим, что улучшение трактовки свободно-свободного поглощения, обсуждавшееся в § 4.4.4с, существенно для эффективных непрозрачностей, показанных на рис. 7.2, при  $\omega < \omega_{ci}$ . При  $\omega \lesssim 0,3\omega_{ci}$  отличие более чем десятикратное. Оно может оказать заметное влияние и на интегральные по спектру росселандовы непрозрачности [274].

## 7.2.2 Коэффициенты поглощения и излучения вне рамок ЛТР

### 7.2.2а Соотношение между коэффициентами поглощения и излучения

Для каждой поляризационной составляющей электромагнитного излучения в полностью ионизованной сильно замагниченной плазме коэффициент поглощения можно представить в виде

$$\rho\chi(\omega) = \sum_{N,N'} \rho\chi_{NN'}(\omega), \quad (7.15)$$

$$\rho\chi_{NN'}(\omega) = n_N \int \mathcal{F}_N(v_z) \sigma_{NN'}(v_z, \omega) dv_z - n_{N'} \int \mathcal{F}_{N'}(v'_z) \sigma_{NN'}(v_z, \omega) dv'_z, \quad (7.16)$$

где  $\mathcal{F}_N(v_z)$  – распределение продольных скоростей  $v_z$  ионов, находящихся на  $N$ -м уровне Ландау, а  $\sigma_{NN'}(v_z, \omega)$  – их парциальное сечение свободно-свободного поглощения, при котором ион переходит на уровень Ландау  $N'^2$ . Второе слагаемое в (7.16) представляет вынужденное излучение, рассматриваемое как отрицательное поглощение. Скорость в конечном состоянии  $v'_z$  связана с  $v_z$  законом сохранения энергии  $m_{\text{ион}}v_z^2/2 + E_{N,\perp} + \hbar\omega = m_{\text{ион}}v_z'^2/2 + E_{N',\perp}$ , а интегрирование производится по тем значениям  $v_z$ , для которых этот закон может быть удовлетворён. В случае, когда  $\mathcal{F}_N(v_z)$  представляет собой распределение Максвелла (4.110), в котором  $T$  не зависит от  $N$ , (7.16) можно переписать как

$$\rho\chi_{NN'}(\omega) = n_N \sigma_{NN'}(\omega) \left[ 1 - \frac{n_{N'}}{n_N} e^{(N'-N)\zeta_i - u} \right], \quad (7.17)$$

где  $u \equiv \hbar\omega/T$  и

$$\sigma_{NN'}(\omega) = \int \mathcal{F}_N(v_z) \sigma_{NN'}(v_z, \omega) dv_z. \quad (7.18)$$

В ситуации ЛТР формулы (7.15)–(7.17) дают соотношение

$$\rho\chi^{\text{LTE}}(\omega) = n_{\text{ион}} \sigma(\omega) (1 - e^{-u}), \quad (7.19)$$

в котором  $n_{\text{ион}} \equiv \sum_N n_N$ ,  $u \equiv \hbar\omega/T$  а  $\sigma(\omega)$  представляет среднее сечение поглощения фотонов в расчёте на один протон:

$$\sigma(\omega) = \sum_N f_N^p \sum_{N'} \sigma_{NN'}(\omega). \quad (7.20)$$

---

<sup>2</sup>По существу,  $\sigma_{NN'}$  – это сечение, определяемое формулой (5.49), с тем лишь отличием, что в (5.49) предполагалось  $v_z = 0$ . В целях упрощения обозначений мы здесь опускаем индексы « $\alpha$ » и «ff».

Мощность спонтанного излучения в единичном объёме в интервале частот  $d\omega$  и направлений  $d\mathbf{n}$  равна  $j_\omega d\omega d\mathbf{n}$ , где  $j_\omega$  – коэффициент излучения (или испускания). Некоторые авторы (напр., [329]) называют его излучательной способностью, тогда как другие (напр., [328]) используют термин «излучательная способность» (*emissivity*) для мощности излучения в расчёте на единицу массы вещества. Коэффициент  $j_\omega$  можно вывести из второго соотношения Эйнштейна (5.38) и представить в виде

$$j_\omega = \sum_{N'N} j_{\omega, N'N}, \quad (7.21)$$

$$j_{\omega, N'N} = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} n_{N'} \int \mathcal{F}_{N'}(v'_z) \sigma_{NN'}(v_z, \omega) dv'_z. \quad (7.22)$$

В случае распределения Максвелла–Больцмана для  $v_z$  и  $v'_z$ , используя (7.17), получим

$$j_{\omega, N'N} = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} n_{N'} \sigma_{NN'}(\omega) e^{(N'-N)\zeta_i - u}. \quad (7.23)$$

Заметим, что процессы поглощения в полностью ионизованной плазме являются процессами второго порядка. Несмотря на то, что вероятности циклотронных переходов с излучением можно вычислить в рамках первого порядка теории возмущений, эта теория не подходит для определения зависимостей сечений поглощения и непрозрачностей от частоты. Причины этого, а также условия, при которых процессы первого порядка всё же могут быть важны, обсуждались в статье Догерти и Вентуры [304]. Действительно, вследствие кинематических ограничений (сохранения энергии и импульса) процессы первого порядка возможны только на единственной частоте для каждого данного угла  $\theta_B$ . Таким образом, для определения спектральной зависимости требуется учесть уширение, вызванное конечностью времени жизни протона на возбуждённом уровне. В макроскопически однородной плазме это время жизни ограничено только двумя типами процессов – спонтанным излучением и взаимодействием с другими частицами. Именно испущенный фотон в первом случае и другая частица во втором доставляют энергию и импульс, необходимые для восстановления кинематического баланса. Иными словами, квантовое описание формы линии поглощения соответствует двухвершинным диаграммам Фейнмана. При этом вторая вершина может соответствовать либо испусканию фотона, либо кулоновскому взаимодействию с посторонней заряженной частицей. Первый случай – это рассеяние, а второй – свободно-свободное поглощение.

При ЛТР соотношения (7.15), (7.21) и (7.23) сводятся к закону Кирхгофа (для

каждой поляризационной моды)

$$j_{\omega}^{\text{LTE}} = \rho \varkappa^{\text{LTE}}(\omega) B_{\omega}(T)/2, \quad (7.24)$$

где  $B_{\omega}(T)$  – планковская интенсивность излучения (5.58). Согласно (7.23), отношение коэффициента излучения к значению, которое он имел бы в условиях ЛТР, равно

$$\frac{j_{\omega}}{j_{\omega}^{\text{LTE}}} = \sum_{N'N} \frac{\rho \varkappa_{NN'}(\omega)}{\rho \varkappa^{\text{LTE}}(\omega)} (e^u - 1) \left[ \frac{n_N}{n_{N'}} e^{(N-N')\zeta_i+u} - 1 \right]^{-1}. \quad (7.25)$$

Это отношение тоже часто называют излучательной способностью. Во избежание неоднозначностей будем называть его *относительной излучательной способностью*.

### 7.2.2b Протонная циклотронная линия

На основе формул (7.20) и (5.49) в статье [239] были вычислены спектральные коэффициенты непрозрачности и излучательная способность полностью ионизованной водородной плазмы в сильном магнитном поле в окрестности протонного циклотронного резонанса. При этом для факторов заселённости протонных уровней Ландау  $n_N$  и  $f_N^p$  использовалось решение, рассчитанное в § 5.2, а для сечений  $\sigma_{NN'}(\omega)$  – формулы, представленные в § 4.4.4.

Рисунок 7.3 демонстрирует непрозрачности  $\varkappa(\omega)$  (верхние окна) и относительные излучательные способности  $j_{\omega}/j_{\omega}^{\text{LTE}}$  (нижние окна) как функции энергии фотона для поляризации  $\alpha = +1$ , для двух значений  $\rho$  и двух значений  $B$ . При  $\omega \ll \omega_{\text{ci}}$  главный вклад в поглощение и испускание фотонов дают свободно-свободные переходы, в которых  $N$  не меняется ( $N = N'$ ). При этом  $j_{\omega} \approx j_{\omega}^{\text{LTE}}$ . При бóльших частотах  $\omega$  переходы  $N \rightarrow N' \neq N$  дают более заметный вклад в поглощение. В отсутствие ЛТР их вклад приводит к уменьшению относительной излучательной способности ( $j_{\omega} < j_{\omega}^{\text{LTE}}$ ).

Кулоновские логарифмы для процессов поглощения фотонов с переходами  $N \rightarrow N'$  сильно возрастают при  $\omega \approx (N' - N)\omega_{\text{ci}}$ . На этих частотах вклад таких процессов увеличивается, что приводит к появлению пиков (квазирезонансов) в сечении поглощения (ср. § 4.4.4с, рис. 4.17). Однако при значениях  $\rho$ ,  $T$  и  $B$ , представленных на рис. 7.3, пики кулоновских логарифмов  $\Lambda_{0,N;0,N'}^{\text{ff},+1}$  ( $N' > N$ ) не настолько велики, чтобы превалировать над  $\Lambda_{0,N;0,N}^{\text{ff},+1}$ . Поэтому процессы свободно-свободного поглощения и излучения с  $N' = N$  дают основной вклад даже при  $\omega \approx (N' - N)\omega_{\text{ci}}$ . Соответственно, квазирезонансы не очень заметны. Они практически неразличимы в логарифмическом масштабе в верхних окнах на рис. 7.3, но соответствующие им периодические

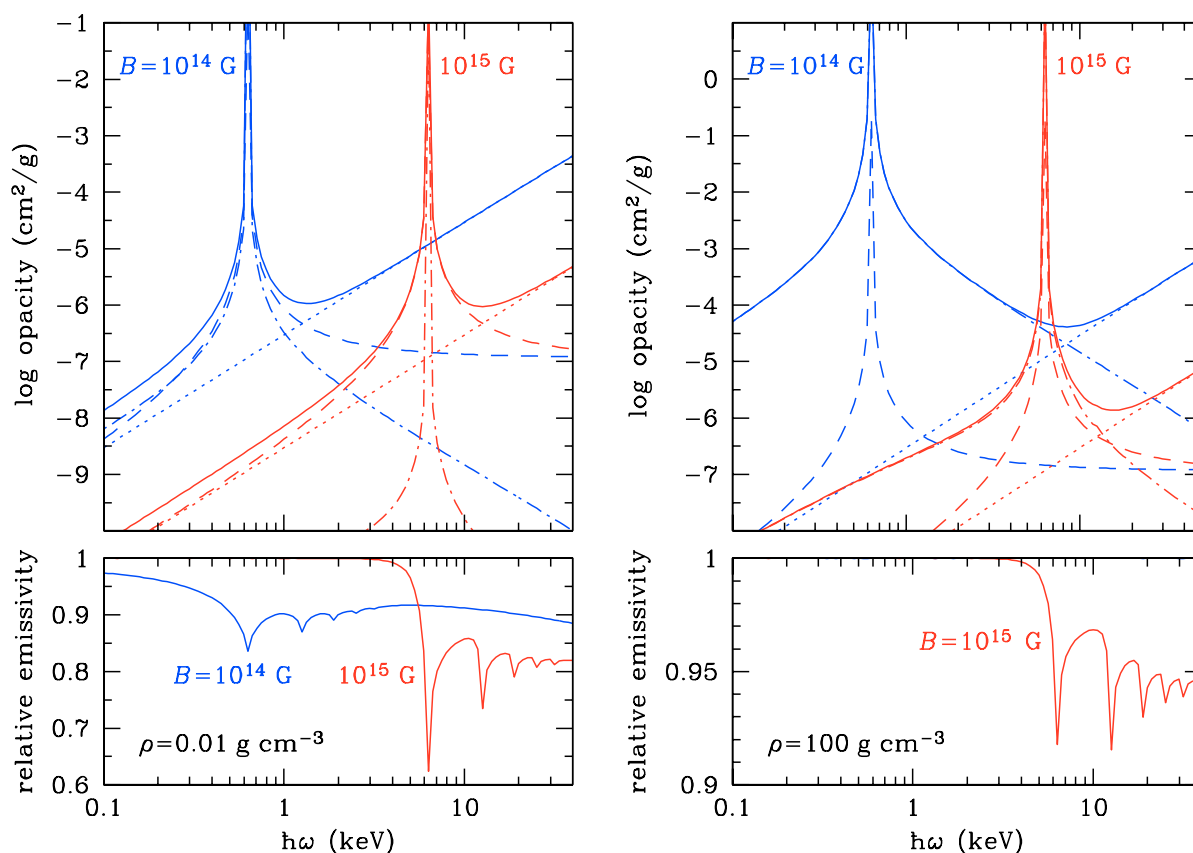


Рис. 7.3: *Левый верхний рисунок:* Составляющие непрозрачности для поляризации  $\alpha = +1$  в зависимости от энергии фотона для  $\rho = 0,01 \text{ г см}^{-3}$ ,  $T = 10^7 \text{ К}$  и  $B = 10^{14}$  и  $10^{15} \text{ Гс}$  (как помечено у кривых). Штриховые линии показывают вклад рассеяния на ионах, точечный пунктир – рассеяния на электронах, штрихпунктир – свободно-свободного поглощения, сплошные кривые – полную сумму всех составляющих. *Левый нижний рисунок:* относительная излучательная способность (7.25) для тех же параметров плазмы. *Правые верхний и нижний рисунки:* то же, что на левых рисунках, но при плотности  $\rho = 100 \text{ г см}^{-3}$ . В этом случае относительная излучательная способность при более слабом поле ( $B = 10^{14} \text{ Гс}$ ) равна единице, так как для этого частного случая имеется ЛТР [239].

уменьшения излучательной способности вблизи целых кратных  $\omega_{ci}$  чётко прослеживаются на нижних рисунках.

## 7.3 Непрозрачности частично ионизованной водородной атмосферы

### 7.3.1 Связанно-связанные переходы

#### 7.3.1a Коэффициент поглощения

Коэффициент поглощения фотонов с поляризацией  $\alpha$  и волновым вектором  $\mathbf{q}$  атомом водорода в магнитном поле в дипольном приближении при ЛТР получается усреднением выражения (4.165) по всем значениям обобщённого импульса атома в исходном состоянии и домножением на фактор, учитывающий вынужденное излучение:

$$\rho \chi_{s'\nu';s\nu}^{\alpha}(\omega) = \frac{2\pi^2 e^2}{m_e c} (1 - e^{-u}) \int d^3K n_{\kappa} f_{\kappa';\kappa}^{\alpha} \phi_{\kappa\kappa'}(\omega - \omega_{\kappa'\kappa}), \quad (7.26)$$

где  $u = \hbar\omega/(k_B T)$ ,  $n_{\kappa} = N_{s\nu}(K_{\perp})$  – число атомов в исходном состоянии  $|\kappa\rangle = |s, \nu, \mathbf{K}\rangle$  в единичном объёме фазового пространства, а в конечном состоянии  $|\kappa'\rangle$ , в силу закона сохранения импульса,  $\mathbf{K}' = \mathbf{K} + \hbar\mathbf{q}$ . Здесь и далее в нумерации связанных состояний мы для краткости записи опускаем номер электронного уровня Ландау ( $n$ ), который для таких состояний в сильном магнитном поле всегда равен нулю.

Так как энергия атома стремится к конечному пределу при  $K_{\perp} \rightarrow \infty$  (см. § 4.2.3), то подстановка больцмановского распределения  $n_{\kappa} \propto \exp[-E_{s\nu}(K_{\perp})/(k_B T)]$  в интеграл (7.26) привела бы к расходимости последнего. На самом деле этот интеграл становится конечным при учёте эффектов неидеальности. Мы учитываем эти эффекты в рамках формализма вероятностей заполнения состояний аналогично § 5.3.1. Однако при этом необходимо использовать не термодинамические вероятности заполнения  $w_{s\nu}(K_{\perp})$ , определяющие вероятность наличия связанного состояния, а оптические  $\tilde{w}_{s\nu}(K_{\perp})$ , определяющие вероятность того, что данное связанное состояние не слишком сильно возмущено влиянием плазменных микрополей, как подробно обсуждалось в § 2.4.1 (см. также § 5.3.4b). По аналогии со случаем отсутствия магнитного поля, подробно разобранным Хаммером и Михаласом [147], мы принимаем

$$\tilde{w}_{s\nu}(K_{\perp}) = \exp \left\{ -\frac{4\pi}{3} (4l_{\kappa})^3 n_{\text{ion}} \right\} \quad (7.27)$$

С учётом вероятностей заполнения, распределение атомов в начальном состоянии по обобщённым импульсам равно

$$\mathcal{F}_{s\nu}(\mathbf{K}) \equiv \frac{n_{s\nu}(K_{\perp})}{n_{s\nu}} = \mathcal{F}_{\parallel}(K_z) \mathcal{F}_{\perp}(K_{\perp}), \quad (7.28)$$

где  $n_{s\nu}$  без аргумента  $K_{\perp}$  – это объёмная концентрация всех атомов, имеющих дискретные квантовые числа  $s$  и  $\nu$ , ведённая в (5.68) и вычисленная в § 5.3.4,  $\mathcal{F}_{\parallel}(K_z) = m_{\text{H}}^{-1} \mathcal{F}_{m_{\text{H}}, T}(v_z)$  – максвелловское распределение по продольным импульсам, в соответствии с (4.110),  $v_z = K_z/m_{\text{H}}$  – скорость атома вдоль магнитного поля, а

$$\mathcal{F}_{\perp}(K_{\perp}) = \frac{\tilde{w}_{s\nu}(K_{\perp}) \exp[-E_{s\nu}(K_{\perp})/(k_{\text{B}}T)]}{2\pi \int_0^{\infty} K_{\perp}'' \tilde{w}_{s\nu}(K_{\perp}'') \exp[-E_{s\nu}(K_{\perp}'')/(k_{\text{B}}T)] dK_{\perp}''} \quad (7.29)$$

представляет собой распределение атомов, дающих вклад в формирование связанно-связанных непрозрачностей, по поперечным обобщённым импульсам.

В формирование спектральных линий вносят вклад только те переходы, при которых атом в конечном возбуждённом состоянии может оставаться связанным и оптически идентифицируемым, то есть не слишком возмущённым взаимодействиями. В противном случае такой переход даст вклад в квазиконтинуум, образованный хаотически возмущёнными атомными состояниями ниже уровня истинного квантовомеханического континуума. Поэтому в (7.26) надо домножить  $n_{\kappa}$  на поправочный множитель  $\tilde{w}_{\kappa'}/\tilde{w}_{\kappa}$ , равный вероятности того, что атом, являющийся оптически идентифицируемым в начальном состоянии, останется таким и в конечном состоянии. Такая процедура давно используется при вычислении непрозрачностей в обычных немагнитных звёздных атмосферах (напр., [154]). Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \rho \chi_{s'\nu'; s\nu}^{\alpha}(\omega) &= \frac{\pi e^2}{m_e c} \frac{1 - e^{-u}}{\int_0^{\infty} K_{\perp}'' \tilde{w}_{s'\nu'}(K_{\perp}'') \exp[-E_{s\nu}(K_{\perp}'')/(k_{\text{B}}T)] dK_{\perp}''} \times \\ &\times n_{s\nu} \int d^2 K_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dK_z \mathcal{F}_{\parallel}(K_z) \tilde{w}_{s\nu}(K_{\perp}) \exp[-E_{s\nu}(K_{\perp})/(k_{\text{B}}T)] \times \\ &\times f_{s'\nu'; s\nu}^{\alpha}(K_{\perp}) \phi_{s'\nu'; s\nu}(K_{\perp}; \omega - \Delta E_{s'\nu'; s\nu}(K_{\perp})/\hbar + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{s'\nu'}(\mathbf{K})), \end{aligned} \quad (7.30)$$

где  $\Delta E_{s'\nu'; s\nu}(K_{\perp}) \equiv E_{s'\nu'}(K_{\perp}) - E_{s\nu}(K_{\perp})$ , а

$$\mathbf{v}_{s'\nu'}(\mathbf{K}) = \nabla_{\mathbf{K}} E_{s'\nu'}(\mathbf{K}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{s'\nu'}^{\perp}(\mathbf{K}_{\perp}) \\ v_z \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

– скорость атома, поперечная составляющая которой  $\mathbf{v}^{\perp}$  сонаправлена  $\mathbf{K}_{\perp}$ . В (7.30) использовано приближённое равенство  $E_{s'\nu'}(\mathbf{K}') \approx E_{s'\nu'}(\mathbf{K}) + \hbar \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{s'\nu'}(\mathbf{K})$ .

### 7.3.1b Магнитное уширение

Как мы видели в § 4.2.3, расстояние между уровнями энергии атома  $\Delta E_{s'\nu'; s\nu}(K_{\perp})$  зависит от  $K_{\perp}$ . При значениях  $B$  и  $T$ , характерных для атмосфер нейтронных звёзд,

ширина теплового распределения атомов по  $K_{\perp}$  сравнима с  $K_{\text{cr}}$ . Как следствие, характерные индивидуальные *вариации* энергий переходов  $\Delta E_{s'\nu';s\nu}(K_{\perp})$  при тепловом движении атомов сравнимы с энергиями переходов покоящегося атома  $\Delta E_{s'\nu';s\nu}(0)$ . При усреднении по термодинамическому ансамблю атомов эти вариации приводят к *магнитному уширению* спектральных линий. Необходимо подчеркнуть, что магнитное уширение обусловлено исключительно связью внутренней квантовомеханической структуры атома с движением его центра масс, и этим оно принципиально отличается от доплеровского уширения, обусловленного сдвигом  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_{s'\nu'}(\mathbf{K})$  в аргументе спектрального профиля линии  $\phi_{s'\nu';s\nu}$  в уравнении (7.30).

В той области частот, в которой магнитное уширение важнее других видов уширения спектральной линии (столкновительного и доплеровского), можно под интегралом в (7.30) заменить  $\phi_{s'\nu';s\nu}$  на  $\delta(\omega - \Delta E_{s'\nu';s\nu}(K_{\perp}))/\hbar$ . Тогда формула (7.30) сводится к

$$\varkappa_{s'\nu';s\nu}^{\alpha}(\omega) = \varkappa_{s'\nu';s\nu}^{\alpha,i}(\omega), \quad (7.32)$$

где индекс  $i$  нумерует корни  $K_{\omega}^{(i)}$  уравнения

$$\Delta E_{s'\nu';s\nu}(K_{\omega}) = \hbar\omega, \quad (7.33)$$

и

$$\rho \varkappa_{s'\nu';s\nu}^{\alpha,i}(\omega) = \frac{2\pi^2 e^2}{m_e c} \frac{(1 - e^{-u}) K_{\omega}^{(i)} \tilde{w}_{s\nu}(K_{\omega}^{(i)}) \exp[-E_{s\nu}(K_{\perp})/(k_B T)]}{\int_0^{\infty} K_{\perp}'' \tilde{w}_{s\nu}(K_{\perp}'') \exp[-E_{s\nu}(K_{\perp}'')/(k_B T)] dK_{\perp}''} \left| \frac{dK_{\omega}^{(i)}}{d\omega} \right| f_{s'\nu';s\nu}(K_{\omega}^{(i)}) \quad (7.34)$$

Заметим, что производную в правой части можно выразить через поперечные скорости атома в начальном и конечном состояниях:  $|dK_{\omega}^{(i)}/d\omega| = \hbar/|v_{s'\nu'}^{\perp}(K_{\omega}^{(i)}) - v_{s\nu}^{\perp}(K_{\omega}^{(i)})|$ .

Из рисунков 4.1 и 4.2 легко видеть, что число корней уравнения (7.33) различно для различных пар уровней  $(s'\nu';s\nu)$  и для разных интервалов  $\omega$ . Например, для переходов с основного уровня  $(s = \nu = 0)$  на водородоподобный уровень с  $s' = 0$  и  $\nu' \geq 1$  резонансная частота монотонно убывает от максимума до нуля с увеличением  $K_{\perp}$ . Это значит, что уравнение (7.33) не имеет решений при  $\omega > \omega_0 = \Delta E_{s'\nu';s\nu}(0)/\hbar$  и имеет единственное решение при  $\omega \leq \omega_0$ . Если рассмотреть переходы между тесно связанными уровнями  $(s' > s)$ , то для них резонансная частота сначала убывает до некоторого минимального положительного значения  $\omega_{\text{cr}}$  при  $K_{\perp} \approx K_{\text{cr}}$ , а затем возрастает, стремясь к конечному пределу, равному  $\omega_{\infty} = \omega_{\text{ci}}(s' - s)$ . Пусть  $\omega_{\infty} < \omega_0$  (это неравенство может нарушаться только в сверхсильных полях). В этом случае уравнение (7.33) не имеет корней при  $\omega < \omega_{\text{cr}}$  и при  $\omega > \omega_0$ , имеет два корня при  $\omega_{\text{cr}} < \omega < \omega_{\infty}$  и один корень при  $\omega_{\infty} < \omega \leq \omega_0$ , а также в особой точке  $\omega = \omega_{\text{cr}}$ .



### 7.3.1с Другие виды уширения

Если учесть одно только магнитное уширение, то спектральные профили будут иметь абсолютно резкие края при  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega_\infty$  и  $\omega_{\text{cr}}$ . Больше того,  $v_{s'\nu'}^\perp(K_\perp) \rightarrow v_{s\nu}^\perp(K_\perp)$  при  $K_\perp \rightarrow K_{\text{cr}}$  и при  $K_\perp \rightarrow \infty$ , что означает расходимость в формуле (7.34). Следовательно, чтобы описать спектральный коэффициент поглощения вблизи частот  $\omega_0$ ,  $\omega_\infty$  и  $\omega_{\text{cr}}$ , надо учесть другие типы уширения спектральных линий, помимо магнитного.

**1. Доплеровское уширение.** Доплеровское уширение в сильном магнитном поле зависит от угла  $\theta_B$  между волновым вектором и направлением магнитных силовых линий [270]: соответствующая ширина равна

$$\Gamma_D = \left( \Gamma_D^\parallel \cos^2 \theta_B + \Gamma_D^\perp \sin^2 \theta_B \right)^{1/2}, \quad (7.35)$$

где  $\Gamma_D^\parallel = (\Delta E/\hbar)\sqrt{2k_B T/m_H c^2}$  имеет ту же величину, что и в отсутствие магнитного поля, а  $\Gamma_D^\perp$  обычно существенно меньше:  $\Gamma_D^\perp = \omega_0 \sqrt{2k_B T/m_{\text{eff}} c^2}$  в окрестности  $\omega_0$ .

**2. Столкновительное уширение.** Столкновительное уширение спектральных линий в сильно ионизованной плазме традиционно делится на квазистатическое – за счёт микрополей, медленно меняющихся по сравнению с атомными масштабами времён, – и ударное – за счёт взаимодействия малой длительности [431]. Первое обычно связано с микрополями, порождаемыми массивными ионами, а второе – со взаимодействием между атомом и быстро движущимся электроном. Для описания этих двух типов уширений используются разные приближения.

Анализ [278] показал, что при параметрах, реалистичных для атмосфер нейтронных звёзд, ударное уширение доминирует как над квазистатическим, так и над доплеровским. Ударному уширению соответствует лоренцевский профиль

$$\phi_{\kappa\kappa'}(\delta\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_{\kappa\kappa'}}{(\delta\omega)^2 + \Gamma_{\kappa\kappa'}^2/4} \quad (7.36)$$

С учётом магнитного и ударного уширения непрозрачность запишется в виде свёртки

$$\varkappa_{s'\nu';s\nu}^\alpha(\omega) = \int d\omega' \sum_i \phi_{s'\nu';s\nu}(K_\omega^{(i)}; \omega - \omega') \varkappa_{s'\nu';s\nu}^{\alpha,i}(\omega'), \quad (7.37)$$

где интегрирование производится по тем значениям  $\omega$ , для которых существует решение уравнения (7.33).

Столкновительная ударная ширина оценивается согласно [431]:

$$\Gamma_{\kappa\kappa'} = 2n_e \langle \sigma_{\text{coll}} \rangle, \quad (7.38)$$

где  $\sigma_{\text{coll}}$  – эффективное сечение, которое в изотропном случае (без магнитного поля) оценивается как  $\sigma_{\text{coll}} \approx \pi r_W^2$ , а  $r_W$  – радиус Вайскопфа, равный такому значению прицельного параметра электрона, сталкивающегося с атомом, при котором

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\omega(t) dt = 1. \quad (7.39)$$

Здесь  $t$  – время, а  $\delta\omega(t) = (\delta E_{\kappa'} - \delta E_{\kappa})/\hbar$  – мгновенный сдвиг резонансной частоты за счёт взаимодействия электрона с атомом. В сильном магнитном поле отличия от изотропного случая состоят в том, что свободный электрон движется вдоль  $\mathbf{B}$ , а сдвиг частоты  $\delta\omega(t)$  зависит от азимутального угла  $\varphi$ , определяющего точку пересечения прямолинейной траектории электрона с плоскостью  $(xy)$ . Эта зависимость возникает из-за того, что движущийся атом деформирован в направлении относительного ведущего центра  $\mathbf{r}_c$ . Поэтому эффективное сечение определяется интегралом  $\sigma_{\text{coll}} = \int_0^{2\pi} r_W^2(\varphi) d\varphi$ .

Оценка сдвигов энергий  $\delta E_{\kappa}$  вследствие линейного и квадратичного эффектов Штарка в возмущающем электрическом поле пролетающего электрона, выполненная в [278], приводит к следующему приближённому результату:

$$\sigma_{\text{coll}} \approx \sigma_{\text{coll}}^{(1)} + \sigma_{\text{coll}}^{(2)}, \quad (7.40a)$$

$$\sigma_{\text{coll}}^{(1)} = 2\pi \left( \frac{e^2}{\hbar v} \right)^2 |\bar{x}_{\kappa'} - \bar{x}_{\kappa}|^2, \quad (7.40b)$$

$$\sigma_{\text{coll}}^{(2)} = \pi \left( \frac{e^2}{\hbar v} \right)^{2/3} |r_{\kappa'}^3 - r_{\kappa}^3|^{2/3}, \quad (7.40c)$$

где  $\sigma_{\text{coll}}^{(1)}$  и  $\sigma_{\text{coll}}^{(2)}$  – оценки сечений при учёте только линейного или только квадратичного эффекта Штарка, соответственно,  $\bar{x}_{\kappa} = \langle \kappa | x_{ep} | \kappa \rangle$  – средняя величина децентрирования атома, то есть средняя разность  $x$ -координат связанных электрона и протона при условии, что ось  $y$  направлена вдоль  $\mathbf{K}_{\perp}$ , а  $r_{\kappa}$  – эффективный радиус атома по отношению к квадратичному эффекту Штарка, определяемый формулой

$$r_{\kappa} \equiv r_{s\nu}(K_{\perp}) = a_B \left[ \frac{3\pi}{8} \sum_{\kappa'' \neq \kappa} \left( \frac{\text{Ry}}{\hbar\omega_{\kappa''\kappa}} \right)^2 \left( f_{\kappa''\kappa}^{+1} + f_{\kappa''\kappa}^{-1} + \frac{2}{3} f_{\kappa''\kappa}^0 \right) \right]^{1/3}. \quad (7.41)$$

Величины  $\bar{x}_{\kappa}$ , пропорциональные среднему дипольному моменту движущегося атома, вычислены в § 4.2.4, а силы осцилляторов  $f_{\kappa''\kappa}^{\alpha} \equiv f_{s\nu'';s\nu}^{\alpha}(K_{\perp})$  – в § 4.4.2.

Подстановка (7.40) в (7.38) даёт

$$\Gamma_{\kappa\kappa'} \approx 4\pi n_e \left( \frac{e^2}{\hbar} \right)^2 |\bar{x}_{\kappa'} - \bar{x}_{\kappa}|^2 \langle v^{-1} \rangle + 2\pi n_e \left( \frac{e^2}{\hbar} \right)^{2/3} |r_{\kappa'}^3 - r_{\kappa}^3|^{2/3} \langle v^{1/3} \rangle. \quad (7.42)$$

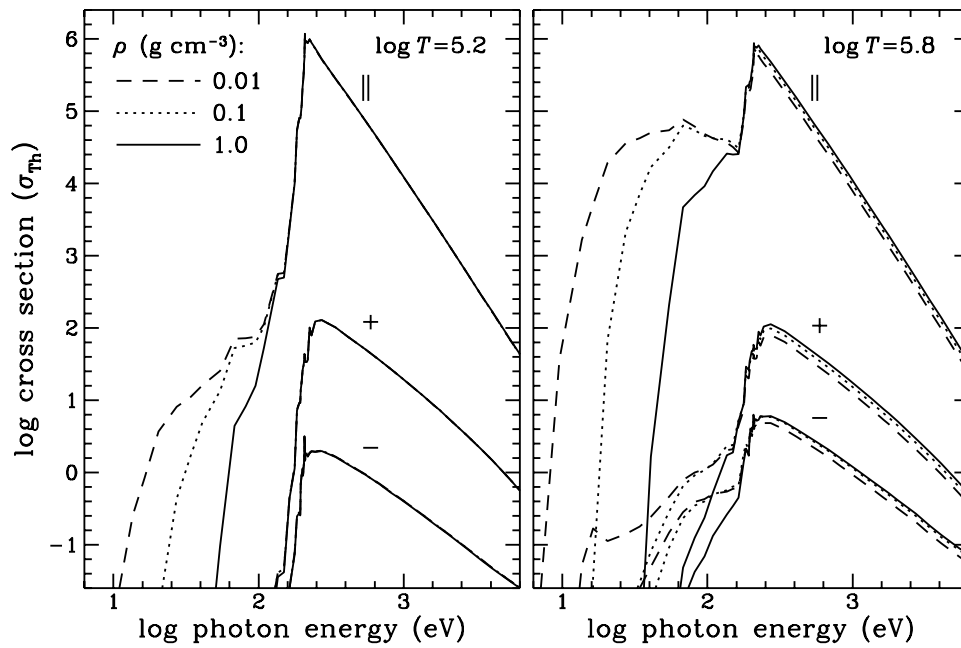


Рис. 7.4: Средние сечения фотоионизации атома водорода в основном состоянии для трёх базовых поляризаций при  $B = 2,35 \times 10^{12}$  Гс для трёх значений  $\rho$  и двух значений  $T$  [278].

Поскольку мы имеем дело с одномерным движением электрона, соударяющегося с атомом, то усреднение  $v^{-1}$  по Максвеллу в первом слагаемом (7.42) приводит к интегралу, логарифмически расходящемуся в нуле. Эта расходимость, сходная с логарифмическими расходимостями кулоновских логарифмов, обсуждавшимися в § 4.3, проистекает от нарушения при малых скоростях условия применимости ударного приближения [431]  $\delta\omega \ll v/r_{\perp}$ , где  $r_{\perp}$  – характерный прицельный параметр. Из условия, чтобы для существенной части спектрального профиля  $\phi(\Delta\omega)$  ударное приближение было применимо, можно вывести условие обрезания интеграла на малых  $v$  [278]:

$$v_{\min} \sim (e^2/\hbar) n_e^{1/3} |\bar{x}_{\kappa'} - \bar{x}_{\kappa}|. \quad (7.43)$$

В результате в формулу (7.42) мы подставляем

$$\langle v^{-1} \rangle = \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} E_1 \left( \frac{m_e v_{\min}^2}{2k_B T} \right), \quad \langle v^{1/3} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2k_B T}{m_e} \right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \quad (7.44)$$

где  $E_1(x)$  – интегральная экспонента, а  $\Gamma(x)$  – гамма-функция ( $\Gamma(\frac{2}{3}) \approx 1,35$ ).

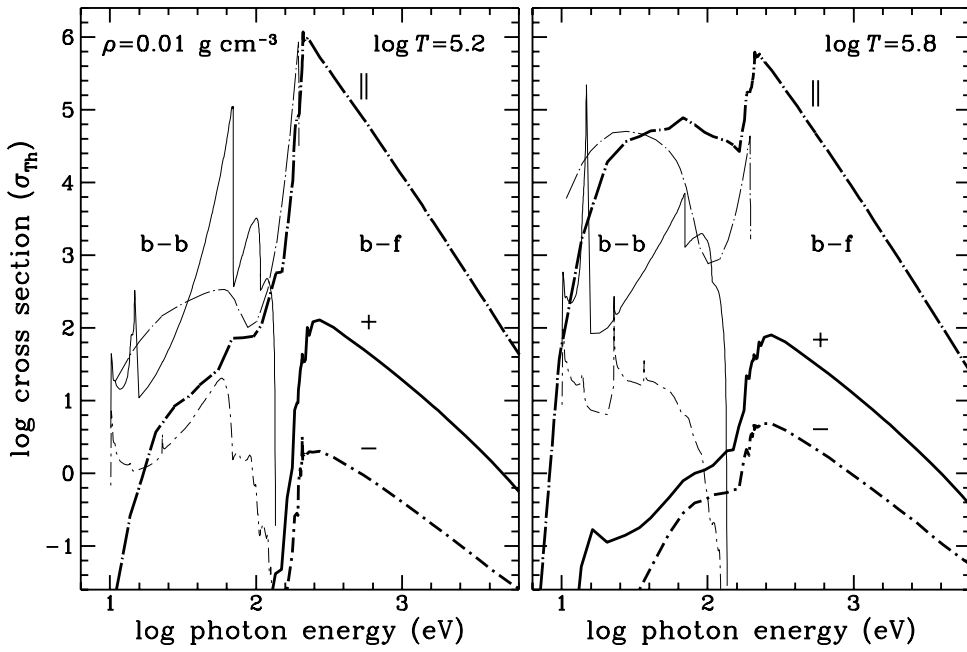


Рис. 7.5: Средние сечения фотоионизации (жирные кривые) и связанно-связанных переходов (тонкие кривые) атома водорода в основном состоянии для трёх базовых поляризаций при  $B = 2,35 \times 10^{12}$  Гс и  $\rho = 0,01 \text{ г см}^{-3}$  для двух значений  $\lg T$ , указанных на рисунке.

### 7.3.2 Фотоионизация

Для вычисления коэффициентов поглощения, обусловленных связанно-свободными переходами, используется усреднение сечения (4.173) по всем значениям обобщённого импульса атома в исходном состоянии, аналогично только что рассмотренному случаю (7.26). Соответствующий коэффициент поглощения равен  $\rho \chi_{\alpha}^{\text{bf}}(\omega) = n_{\text{H}} \sigma_{\alpha}^{\text{bf}}(\omega)$ , где  $\sigma_{\alpha}^{\text{bf}}(\omega) = \sum_{s\nu} (n_{s\nu}/n_{\text{H}}) \sigma_{s\nu}^{\text{bf},\alpha}(\omega)$  – сумма парциальных сечений фотоионизации, усреднённых по всем значениям обобщённого импульса:

$$\sigma_{s\nu}^{\text{bf},\alpha}(\omega) = \int \mathcal{F}_{s\nu}(\mathbf{K}) \sigma_{s\nu}^{\text{bf},\alpha}(K_{\perp}, \omega) d\mathbf{K}. \quad (7.45)$$

Здесь  $\sigma_{s\nu}^{\text{bf},\alpha}(K_{\perp}, \omega)$  – парциальное сечение для атома с определённым значением  $K_{\perp}$ , вычисленное в § 4.4.3, а  $\mathcal{F}_{s\nu}(\mathbf{K})$  – плотность распределения по импульсам (7.29). Под интегралом мы опустили доплеровскую поправку, так как для связанно-свободных переходов она не играет роли, будучи малой по сравнению с характерным масштабом частот, на котором изменяется среднее сечение фотоионизации (7.45).

Так как парциальные пороговые энергии фотоионизации уменьшаются с ростом  $K_{\perp}$ , то порог усреднённого сечения испытывает магнитное уширение и становится размазанным по частотам, меньшим пороговой частоты покоящегося атома. При-

меры приведены на рис. 7.4. На этом рисунке видна также зависимость среднего сечения от плотности. Низкоэнергетические крылья сечений обязаны своим существованием сильно деформированным атомам за счёт теплового движения. В частности, при низкой плотности на правом рисунке сечение даже повторно возрастает при уменьшении энергии  $\hbar\omega < 100$  эВ, что обусловлено большим статистическим весом децентрированных состояний, пороги сечений фотоионизации которых приходятся на эти энергии. Левые крылья кривых быстро сужаются с увеличением плотности, потому что деформированные (и особенно децентрированные) атомы легко разрушаются в результате взаимодействий с соседними частицами плазмы. Небольшое увеличение правого крыла сечения с ростом плотности, заметное в правом окне рисунка (т.е. при более высокой температуре), связано с тем, что относительная доля центрированных атомов, дающих основной вклад в эту часть сечения, возрастает по мере того, как с ростом плотности разрушаются децентрированные атомы.

Небольшие довольно острые пики, заметные на левых склонах кривых, – это резонансы, возникающие на частотах, соответствующих переходам на метастабильные уровни, обсуждавшиеся в § 4.4.3.

На рис. 7.5 сечения фотоионизации (толстые кривые) показаны совместно с сечениями связанно-связанных переходов (тонкие кривые). Для правой и левой круговых поляризаций связанно-связанные и связанно свободные переходы доминируют на разных спектральных интервалах: при более низких энергиях поглощение фотонов децентрированными атомами оказывается намного слабее, чем поглощения за счёт переходов между связанными состояниями. Для продольной поляризации аналогичное соотношение имеет место при  $\lg T = 5,2$ , но не при  $\lg T = 5,8$ . В последнем случае фотоионизация преобладает при всех энергиях, за исключением лишь очень низких ( $\hbar\omega \lesssim 40$  эВ).

Пик сечения фотоионизации при  $\hbar\omega \approx 15$  эВ для  $\alpha = +1$  в правом окне на рис. 7.5 и ещё более ярко выраженные пики для связанно-связанных переходов при той же частоте и поляризации возникают вблизи протонной циклотронной частоты  $\omega_{ci}$ , к которой сходятся частоты дипольно-разрешённых переходов сильно децентрированных атомов.

На рис. 7.6 показаны сечения фотоионизации при разных  $T$  и  $B$ . С увеличением  $T$  низкоэнергетическая составляющая значительно возрастает, а высокоэнергетические составляющие  $\sigma_{\parallel}$  и  $\sigma_{+}$  слегка уменьшаются, потому что растёт заселённость децентрированных состояний. При сравнительно низких температурах высокоэнер-

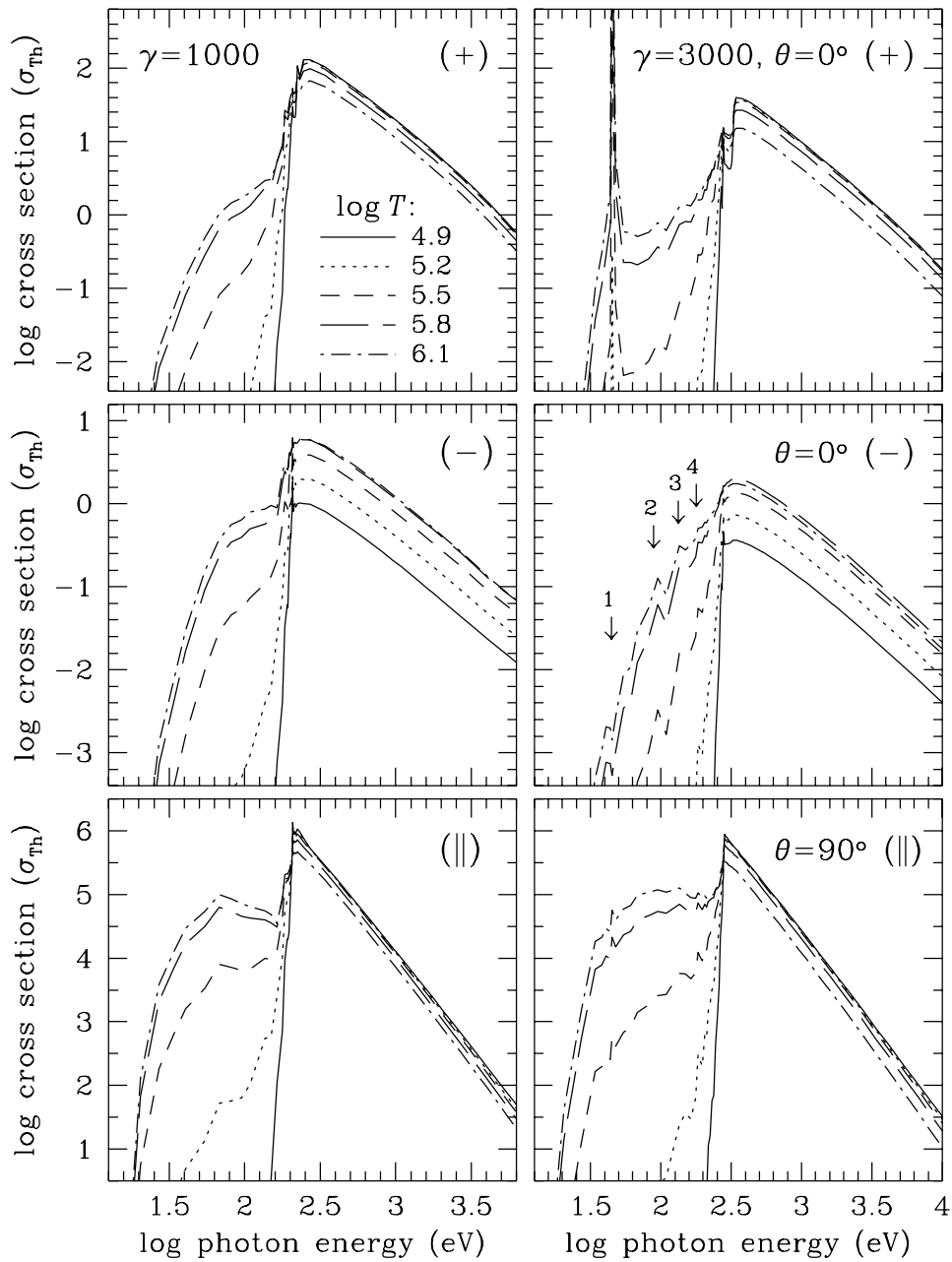


Рис. 7.6: Средние сечения фотоионизации атома водорода в основном состоянии для трёх базовых поляризаций ((верхние рисунки -  $\alpha = +1$ , средние -  $\alpha = -1$ , нижние -  $\alpha = 0$  при  $B = 2,35 \times 10^{12}$  Гс (левые рисунки) и  $7 \times 10^{12}$  Гс (правые рисунки) для  $\rho = 0,1$  г см $^{-3}$  и пяти значений  $\lg T$ , указанных на верхнем левом рисунке.

гетическая составляющая  $\sigma_-$  линейно растёт с ростом  $T$  по закону

$$\sigma_- \approx \frac{\hbar\omega_{\text{ср}} k_B T}{2\Delta E_{000,010}^2} \sigma_+, \quad (7.46)$$

в соответствии с теорией возмущений [270] ( $\Delta E_{000,010}$  – энергия основного связанно-связанного перехода для правой круговой поляризации; так, при  $\Delta E_{000,010} = 70$  эВ  $\gamma = 1000$ ). При более высоких значениях  $T$  рост  $\sigma_-$  замедляется вследствие уменьшения доли центрированных атомов и непертурбативных эффектов.

Обсуждавшийся выше циклотронный резонанс для  $\sigma_+$  усиливается с увеличением  $V$ . Вследствие сходства энергетических спектров для разных  $s$ -многообразий (см. рис. 4.1), отдельные резонансы Фано, хотя и сглаживаются при тепловом усреднении, всё же собираются в регулярно расположенные пики. Такие пики, соответствующие протонным циклотронным гармоникам, помечены стрелками для  $\sigma_-$  при  $\gamma = 3000$  на рис. 7.6. При высокой плотности эти пики дополнительно расплываются из-за взаимодействий с окружающими частицами.

### 7.3.2а Квазиконтинуум

При рассмотрении связанно-связанных переходов в § 7.3.1 мы исключали при помощи «оптических» вероятностей заполнения  $\tilde{w}$  те конечные состояния атомов, которые сильно возмущены микрополями. Ансамбль таких состояний образует квазиконтинуум. В отсутствие магнитного поля формирование и свойства квазиконтинуума обсуждались, например, в статьях [154, 347, 432]. Ниже порога ионизации  $\omega_{\text{th}}$  вклад в поглощение дают «связанно-квазисвязанные» переходы, сечение поглощения для которых равно

$$\sigma_{\alpha}^{\text{bf}}(\omega < \omega_{\text{th}}) = \frac{2\pi e^2}{m_e c} \frac{\tilde{w}_i - \tilde{w}_f}{\tilde{w}_i} f_{if,\alpha} \frac{d\nu_f}{d\omega}, \quad (7.47)$$

где  $\tilde{w}_i$  и  $\tilde{w}_f$  – оптические вероятности заполнения для начального и конечного состояний, соответственно,  $f_{if,\alpha}$  – соответствующая сила осциллятора, а  $d\nu_f$  – число конечных состояний, приходящихся на интервал круговых частот  $d\omega$ . По аналогии со случаем отсутствия магнитного поля [154], мы интерполируем  $\tilde{w}_f$  как функцию частоты и полагаем  $\tilde{w}_f = \tilde{w}_i$  в том случае, когда  $\omega$  меньше, чем наименьшая допустимая частота перехода. Известно, что  $\sigma_{\alpha}^{\text{bf}}(\omega < \omega_{\text{th}})$  является гладким продолжением  $\sigma_{\alpha}^{\text{bf}}(\omega > \omega_{\text{th}})$  [287, 432]. Используя это обстоятельство, можно написать

$$\sigma_{\alpha}^{\text{bf}}(K_{\perp}, \omega < \omega_{\text{th}}) = \left(1 - \frac{\tilde{w}_f(K_{\perp}, \omega)}{\tilde{w}_i(K_{\perp})}\right) \sigma_{\alpha}^{\text{bf,extr}}(K_{\perp}, \omega), \quad (7.48)$$

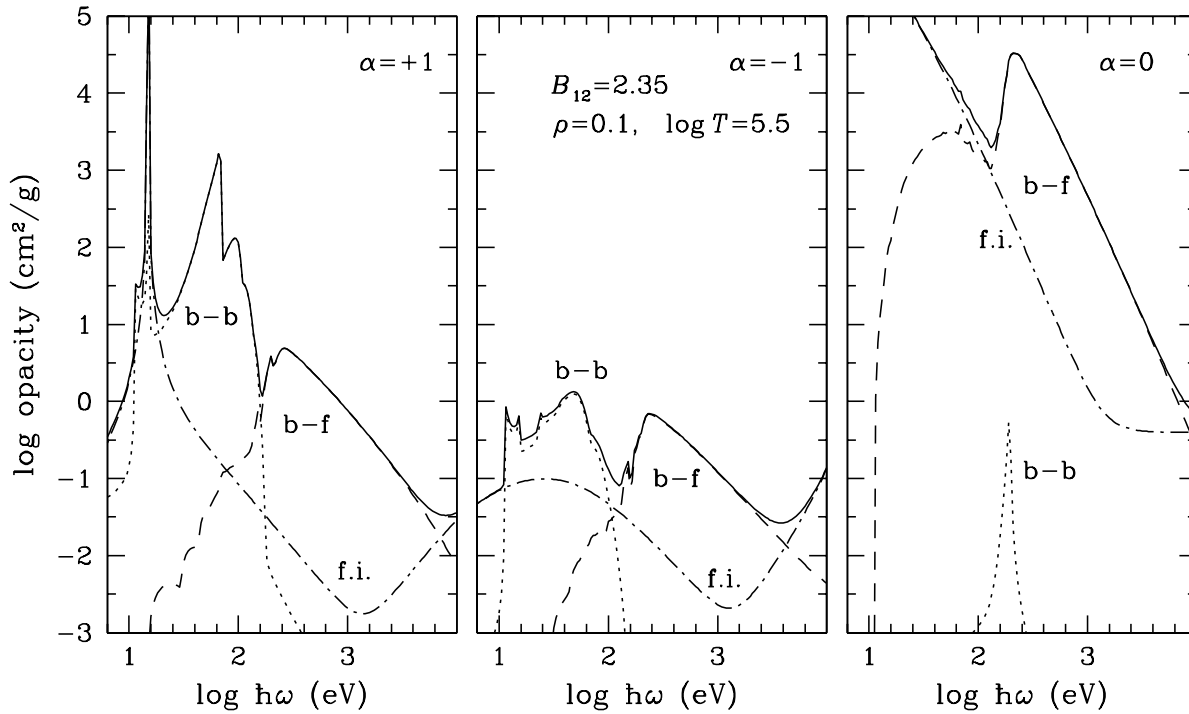


Рис. 7.7: Спектральные непрозрачности для трёх базовых поляризаций при физических условиях, характерных для атмосферы нейтронной звезды:  $\rho = 0,1 \text{ г см}^{-3}$ ,  $T = 10^{5,5} \text{ К}$  и  $B = 2,35 \times 10^{12} \text{ Гс}$  [274]. Штрихпунктир – непрозрачности ионизованной составляющей; точечный пунктир – непрозрачности за счёт связанно-связанных переходов; штриховые кривые – вклад фотоионизации; сплошные кривые – суммарные непрозрачности.

где  $\sigma_{\alpha}^{\text{bf,extr}}(K_{\perp}, \omega)$  – экстраполяция  $\sigma_{\alpha}^{\text{bf}}(K_{\perp}, \omega)$  по степенному закону при  $\omega < \omega_{\text{th}}$ .

В отличие от случая  $B = 0$ , в нашем случае  $f_{if,\alpha}$  и  $\tilde{w}_f$  зависят от поляризации излучения. В частности, для поглощения фотонов атомом в основном состоянии  $f_{if,\pm 1}$  отличны от нуля только для чётных верхних (конечных) состояний, а  $f_{if,0} \neq 0$  только для нечётных состояний. При вычислении  $\tilde{w}_f$  в формуле (7.48) мы для каждой заданной поляризации учитываем только те состояния, которые для неё дают вклад в поглощение.

### 7.3.3 Суммарные непрозрачности для трёх основных поляризаций

Как мы видели в § 5.3.4, количество нейтральных атомов водорода может быть значительным при  $T \lesssim 10^6$ . Вклад в непрозрачности дают как переходы между квантовыми состояниями свободных ионов и электронов, так и поглощение атомами. В качестве примера на рис. 7.7 показаны спектральные непрозрачности  $\kappa_{\alpha}$  для трёх



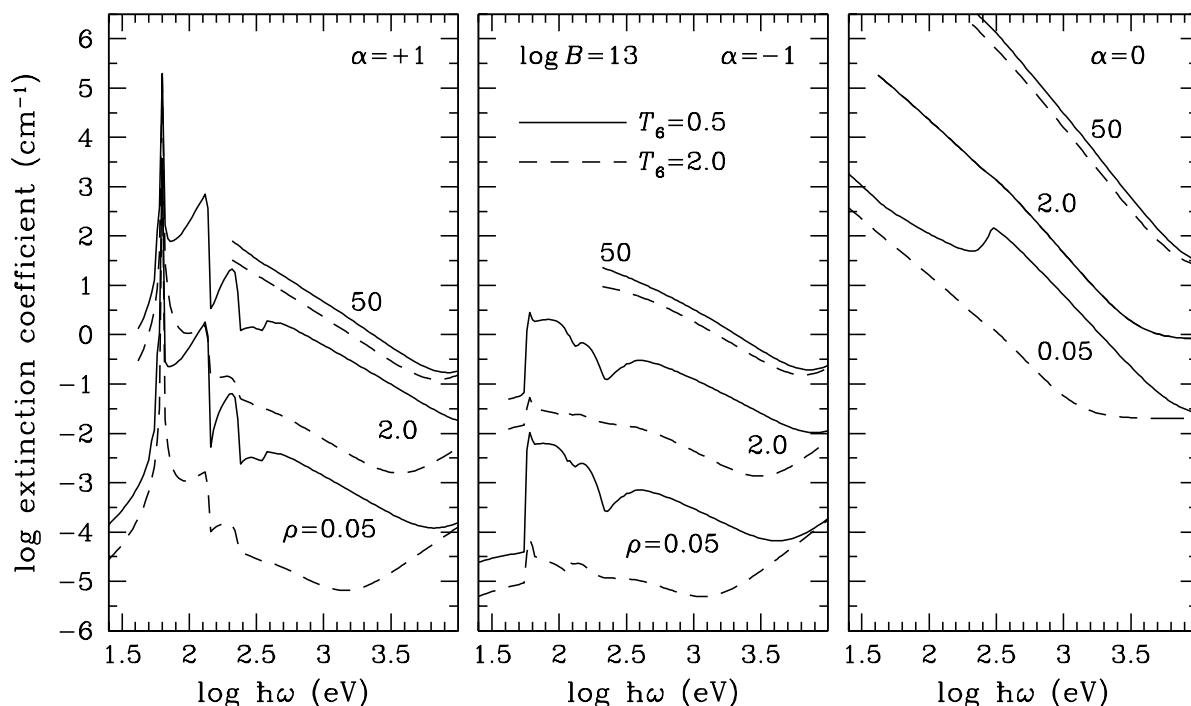


Рис. 7.8: Спектральные коэффициенты экстинкции для трёх базовых поляризаций при  $T = 5 \times 10^5$  К (сплошные кривые) и  $2 \times 10^6$  К (пунктир),  $\rho = 0,05$  г см $^{-3}$ , 2 г см $^{-3}$  и 50 г см $^{-3}$ , и  $B = 10^{13}$  Гс.

базовых поляризаций излучения  $\alpha = 0, \pm 1$ , при  $\rho = 0.1$  г см $^{-3}$ ,  $T = 10^{5.5}$  К и  $B = 2.35 \times 10^{12}$  Гс. В этом случае 12% протонов связаны с электронами в основном состоянии атома водорода. Вклад ионизованной составляющей плазмы в эти базовые непрозрачности представлен штрихпунктирными кривыми, в то время как точечные и штриховые линии представляют вклад связанно-связанных и связанно-свободных переходов, соответственно. Суммарные непрозрачности нанесены сплошными линиями. Из рисунка видно, что вклад связанно-свободных переходов при выбранных параметрах плазмы является существенным для любой поляризации, а связанно-связанные переходы важны для круговой поляризации  $\alpha = \pm 1$ , но несущественны для продольной поляризации  $\alpha = 0$ . Это обусловлено тем, что дипольные правила отбора запрещают радиативные переходы между разными тесно связанными состояниями с поглощением фотона, поляризованного вдоль  $\mathbf{B}$ . При этом переходы на нечётные водородоподобные уровни ( $\nu = 1, 3, \dots$ ) остаются разрешёнными, но соответствующие вероятности заполнения малы, так что эти верхние уровни влиты в квазиконтинуум. Пик поглощения при  $\lg \hbar\omega/\text{эВ} \approx 1,84$  в левом окне соответствует переходу из основного состояния в состояние с  $s = 1$  для центрированных атомов.

Без учёта теплового движения атомов вместо широкого пика наблюдалась бы узкая спектральная линия. Горб при  $\hbar\omega \approx 100$  эВ для  $\alpha = +1$  обусловлен переходом на второй возбуждённый уровень ( $s = 2$ ), которым для неподвижных атомов можно было бы пренебречь. В среднем окне ( $\alpha = -1$ ) при пренебрежении движением вообще не было бы вклада связанно-связанного поглощения. Но тепловое движение атомов поперёк магнитного поля кардинальным образом изменяет спектр, так что появляется существенное поглощение фотонов с  $\alpha = -1$  атомами. Магнитное уширение, обсуждавшееся в § 7.3.1b, сглаживает пороги фотоионизации при  $\hbar\omega \gtrsim 100$  эВ и раздвигает диапазон частот для связанно-связанного поглощения вниз до  $\sim 10$  эВ для любой поляризации. Пики вблизи этой нижней границы  $\omega$  объясняются зависимостью энергий переходов  $\Delta E$  от  $K_{\perp}$  и соответствуют частотам  $\omega_{\infty}$  и  $\omega_{cr}$  (§ 7.3.1b). А именно, пик вблизи  $\omega \approx \omega_{ci}$  ( $\lg \hbar\omega/\text{эВ} \approx 1,17$ ) возникает из-за того, что переходы между децентрированными квантовыми состояниями, квантовые номера  $s$  которых различаются на единицу, сгущаются при больших  $K_{\perp}$  вблизи энергии  $\Delta E \approx \hbar\omega_{ci}$ . Другой пик при частоте, немного меньшей  $\omega_{ci}$ , соответствует области антипересечения уровней, в которой  $\Delta E$  достигает минимума  $\hbar\omega_{cr}$ . Эти резонансы уширены ударным столкновительным механизмом (§ 7.3.1c).

На рис. 7.8 представлены полные коэффициенты экстинкции  $\rho\chi_{\alpha}$  для разных  $\rho$  и  $T$  при  $B = 10^{13}$  Гс. Кривые оборваны слева при  $\omega = \omega_{pe}$ . При  $\rho = 50$  г см $^{-3}$  это гладкие функции  $\omega$ , что отражает тот факт, что практически все возбуждённые состояния атомов образуют квазиконтинуум при данных значениях  $\rho$  и  $B$ . При  $\rho \leq 2$  г см $^{-3}$ , однако, на кривых ясно видны особенности, обусловленные связанно-связанными и связанно-свободными переходами.

На рис. 7.9 представлены аналогичные коэффициенты экстинкции  $\rho\chi_{\alpha}$  для других значений  $\rho$  и  $T$  при более сильном магнитном поле, чем на предыдущем рисунке. Значения плотности, для которых представлены кривые, соответствуют внешним слоям (в которых оптическая толщина порядка единицы для обыкновенной моды) и внутренним слоям (оптическая толщина порядка единицы для необыкновенной моды) атмосферы при указанных значениях  $B$ . Во внутренних слоях кривые гладкие, потому что плазма в них ионизована давлением, тогда как во внешних слоях ясно видны особенности, связанные с атомными переходами.

При поле  $B = 10^{13,5}$  Гс, соответствующем верхним окнам на рис. 7.9, видна широкая линия поглощения для  $\alpha = \pm 1$ , возникающая благодаря переходам  $s = 0 \rightarrow 1$  при  $\hbar\omega \lesssim 0,3$  кэВ. Для  $\alpha = +1$  эта особенность примыкает к протонной циклотронной линии слева и к континууму за счёт фотоионизации справа от неё. Это довольно

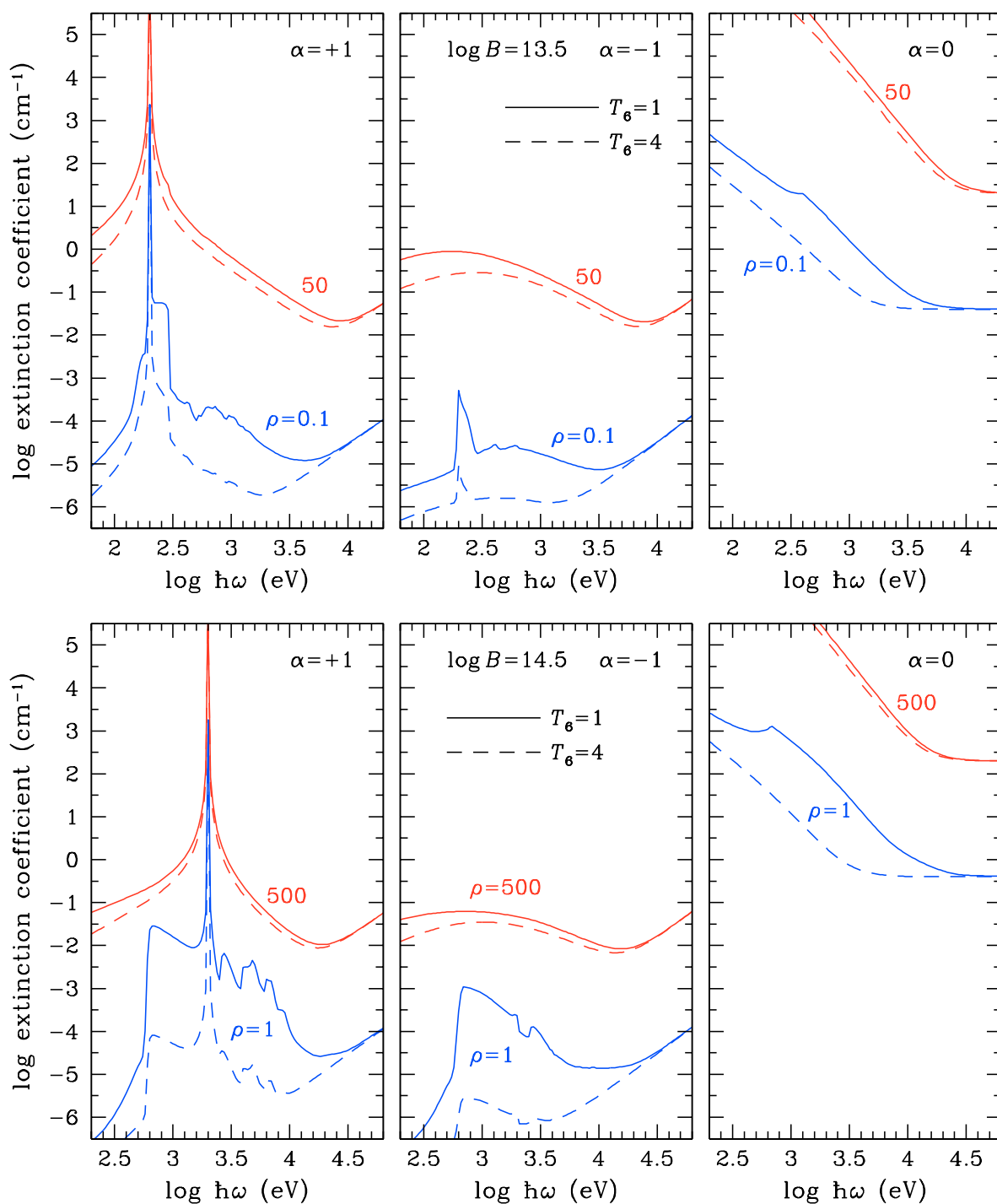


Рис. 7.9: Спектральные коэффициенты экстинкции для трёх базовых поляризаций при  $T = 10^6$  К (сплошные кривые) и  $4 \times 10^6$  К (пунктир),  $\rho = 0,05$  г см<sup>-3</sup>, 2 г см<sup>-3</sup> и 50 г см<sup>-3</sup>;  $B = 10^{13,5}$  Гс (верхние рисунки) и  $B = 10^{14,5}$  Гс (нижние рисунки).

специфический случай, так как при данной напряжённости поля протонная циклотронная энергия  $\hbar\omega_{ci}$  достаточно близка к порогу ионизации, а предельная энергия для связанно-связанных переходов попадает в промежуток между этими энергиями (см. рис. 5.4). Как граница фотоионизации, так и линия поглощения подвержены существенному магнитному уширению и поэтому практически сливаются. При более низкой температуре (сплошные кривые) коэффициент непрерывного поглощения имеет регулярно расположенные горбики, связанные с открытием новых каналов ионизации с более высокими значениями  $s$  при более высоких энергиях, а также с автоионизационными резонансами вблизи соответствующих парциальных порогов ионизации. В правом окне ( $\alpha = 0$ , вектор поляризации параллелен  $\mathbf{B}$ ) можно отметить только фотоионизационный скачок при сравнительно низких значениях  $\rho$  и  $T$  (нижняя сплошная кривая).

При более сильном поле ( $B = 10^{14,5}$  Гс, нижние окна) все переходы, при которых меняется  $s$ , принадлежат континууму (см. рис. 5.4) и образуют последовательность резонансов на кривой фотоионизации при энергиях выше  $\hbar\omega_{ci}$ . Резонансы особенно заметны при  $\alpha = +1$  и низких  $\rho$  и  $T$  (нижняя сплошная кривая на левом рисунке). Вблизи дна фотосферы ( $\rho = 500$  г см $^{-3}$ ) связанные состояния разрушены давлением и не дают вклада в непрозрачности.

### 7.3.4 Тензор диэлектрической восприимчивости и векторы поляризации

#### 7.3.4a Диэлектрическая восприимчивость частично ионизованной плазмы

Непрозрачности для трёх базисных поляризаций излучения (§ 7.3.3) непосредственно определяют антиэрмитову часть  $\chi^A$  тензора диэлектрической восприимчивости плазмы (§ 7.1):

$$\chi_{\alpha}^A(\omega) = \frac{c}{4\pi\omega} \rho \kappa_{\alpha}(\omega). \quad (7.49)$$

А раз известна антиэрмитова часть  $\chi^A$ , то эрмитову составляющую  $\chi^H$  можно вычислить на основе соотношения Крамерса–Кронига (напр., [72], § 123) или эквивалентного ему соотношения [433]

$$\chi_{\alpha}^H(\omega) = \frac{1}{\pi\omega} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' \chi_{\alpha}^A(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (7.50)$$

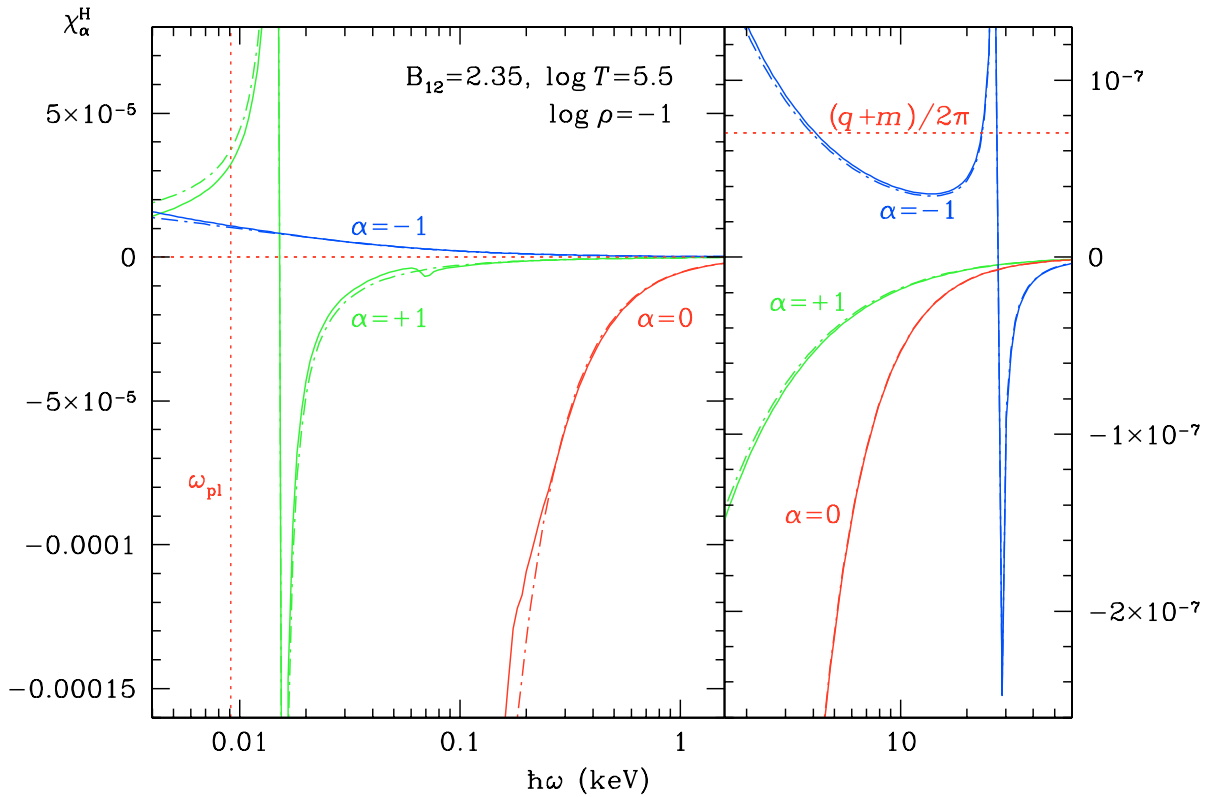


Рис. 7.10: Компоненты тензора диэлектрической восприимчивости  $\chi_{\alpha}^{\text{H}}$  ( $\alpha = \pm 1, 0$ ) частично ионизованной (сплошные кривые) и полностью ионизованной (штрихпунктир) плазмы при  $B = 2,35 \times 10^{12}$  G,  $\rho = 0,1$  г см $^{-3}$ ,  $T = 3,16 \times 10^5$  K [428]. В правой части рисунка увеличен вертикальный масштаб. Вертикальная точечная линия соответствует  $\omega_{\text{pe}}$ , горизонтальная —  $(\hat{q} + \hat{m})/(2\pi)$ , где  $\hat{q}$  и  $\hat{m}$  — поляризационные коэффициенты вакуума, введённые на с. 340.

где  $\mathcal{P}\int$  обозначает главное значение несобственного интеграла. В свою очередь, формулу (7.50) можно привести к виду, более удобному для расчётов [428]:

$$\chi_{\alpha}^{\text{H}}(\omega) = \frac{c\rho}{4\pi^2\omega} \left\{ \int_0^{\omega} [\kappa_{\alpha}(\omega + \omega') - \kappa_{\alpha}(\omega - \omega')] \frac{d\omega'}{\omega'} + \int_{2\omega}^{\infty} \frac{\kappa_{\alpha}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' - \int_0^{\infty} \frac{\kappa_{-\alpha}(\omega')}{\omega' + \omega} d\omega' \right\}. \quad (7.51)$$

Булик и Павлов [433] использовали соотношение (7.50) совместно с нашими результатами для сечений фотопоглощения атомами водорода в сильном магнитном поле [272] и теорией возмущений [270] для вычисления тензора диэлектрической восприимчивости газа из нейтральных атомов водорода. В нашей работе [428] на основе соотношения (7.51) и результатов, представленных в § 7.3.3, был вычислен тензор диэлектрической восприимчивости частично ионизованной водородной плазмы в атмосферах нейтронных звёзд с сильным магнитным полем и рассчитаны векторы поляризации  $\mathbf{e}^j$  в зависимости от частоты  $\omega$ , температуры  $T$ , плотности  $\rho$  и магнитной

индукции  $B$ .

На рис. 7.10 показаны все три составляющие тензора диэлектрической восприимчивости  $\chi_{\alpha}^{\text{H}}$  как функции частоты, рассчитанные на основе соотношения (7.51) в модели полностью ионизованной плазмы (штрихпунктир) и с учётом истинной степени частичной ионизации (сплошные кривые) при  $B = 2,35 \times 10^{12}$  Г,  $\rho = 0,1$  г см $^{-3}$  и  $T = 3,16 \times 10^5$  К. Для этого набора параметров плазмы, при котором доля нейтральных атомов составляет 12%, поправки к коэффициентам  $\chi_{\alpha}^{\text{H}}$ , вносимые частичной ионизацией, невелики. Сильные резонансы наблюдаются только при  $\hbar\omega_{\text{ci}} = 0,0148$  кэВ и  $\hbar\omega_c = 27,21$  кэВ. Как показано в [428], малость поправок на неполную ионизацию связана с гладкостью коэффициентов поглощения, обусловленной магнитным уширением. В [428] также проанализировано сравнение кривых на рис. 7.10 с результатами элементарной теории [212].

На рис. 7.11 представлен случай более сильного магнитного поля  $B = 3 \times 10^{13}$  Гс и более высокой плотности  $\rho = 1$  г см $^{-3}$  при той же температуре  $T = 3,16 \times 10^5$  К. В этом случае доля нейтральных атомов составляет 89%. В верхнем окне рисунка показаны коэффициенты поглощения  $\mu_{\alpha} \equiv \rho\kappa_{\alpha}$ , а в среднем и нижнем – соответствующие им коэффициенты диэлектрической восприимчивости  $\chi_{\alpha}^{\text{H}}$ . В этом случае, вдобавок к протонному циклотронному резонансу при  $\hbar\omega = 0,19$  кэВ, коэффициенты поглощения при учёте неполной ионизации проявляют достаточно яркие особенности, обусловленные радиативными переходами из дискретных состояний атомов. Самые заметные из них – это поглощение за счёт переходов в дискретном спектре при  $\hbar\omega \approx 0,2-0,3$  кэВ для  $\mu_{+1}$  и фотоионизационный скачок (отчасти размытый магнитным уширением) при  $\hbar\omega = 0,408$  кэВ для  $\mu_0$ . Эти особенности чётко отражаются в поведении  $\chi_{+1}^{\text{H}}$  и  $\chi_0^{\text{H}}$ . Таким образом, увеличение обилия нейтральных атомов с ростом  $B$  сопровождается усилением их влияния на диэлектрическую восприимчивость.

Аналогичная тенденция наблюдается и при понижении температуры  $T$ . Например, если в предыдущем примере ( $B = 2,35 \times 10^{12}$  Г,  $\rho = 0,1$  г см $^{-3}$ ) мы уменьшим температуру до  $T = 1,58 \times 10^5$  К, то мы будем иметь 94,1% атомов Н в основном состоянии, 1,3% атомов в возбуждённых состояниях и 1,1% молекул Н $_2$ . При более высокой плотности  $\rho = 1$  г см $^{-3}$  и тех же  $B$  и  $T$  доля атомов достигает 96,9%, и в этом случае приблизительно воспроизводятся результаты Булика и Павлова [433], рассмотревших диэлектрическую восприимчивость газа из атомов Н именно при таких значениях  $\rho$ ,  $T$  и  $B$ .

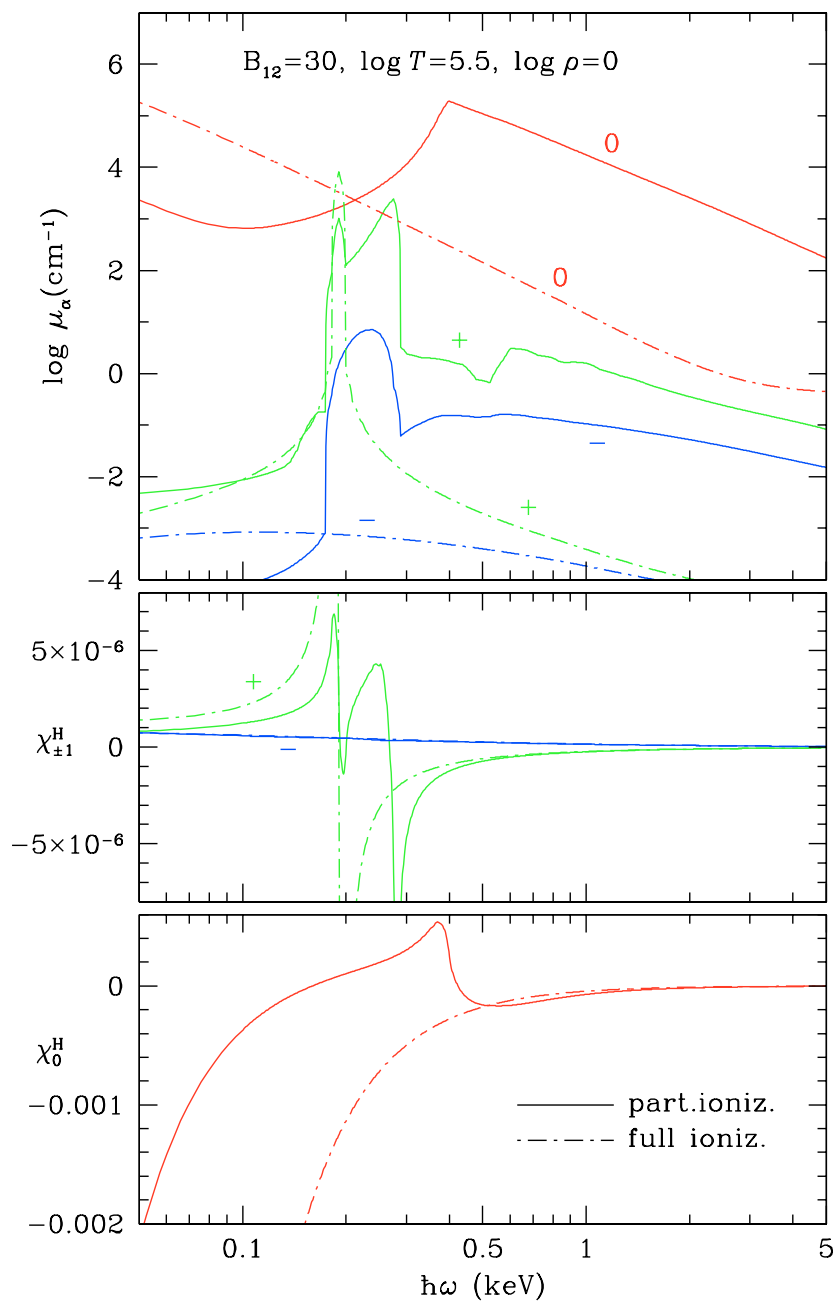


Рис. 7.11: Коэффициенты поглощения (верхний рисунок; линии, помеченные значками +, - и 0, соответствуют индексам поляризации излучения  $\alpha = +1, -1$  и 0) и коэффициенты диэлектрической восприимчивости  $\chi_{\pm 1}^H$  (средний рисунок) и  $\chi_0^H$  (нижний рисунок) в моделях частично ионизованной (сплошные кривые) и полностью ионизованной (штрихпунктир) плазмы при  $B = 3 \times 10^{13}$  G,  $\rho = 1 \text{ г см}^{-3}$  и  $T = 3,16 \times 10^5$  K.

### 7.3.4b Поляризация нормальных волн

В декартовой системе координат  $(xyz)$  с осью  $z$ , направленной вдоль волнового вектора фотона, и с плоскостью  $x-z$ , выбранной так, что в ней лежит вектор  $\mathbf{B}$ , векторы поляризации нормальных мод  $\mathbf{e}^j$  можно представить в виде [427]

$$\mathbf{e}^j = \begin{pmatrix} e_x^j \\ e_y^j \\ e_z^j \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + K_j^2 + K_{z,j}^2}} \begin{pmatrix} iK_j \\ 1 \\ iK_{z,j} \end{pmatrix}, \quad (7.52)$$

где параметры  $K_j$  и  $K_{z,j}$  выражаются через компоненты диэлектрического и магнитного тензоров как

$$K_j = \beta \left\{ 1 + (-1)^j \left[ 1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{\hat{m}}{1 + \hat{a}} \frac{\sin^2 \theta_B}{\beta^2} \right]^{1/2} \right\}, \quad (7.53)$$

$$K_{z,j} = -\frac{(\varepsilon' - \eta')K_j \cos \theta_B + g}{\varepsilon' \sin^2 \theta_B + \eta' \cos^2 \theta_B} \sin \theta_B, \quad (7.54)$$

и

$$\beta = \frac{\eta' - \varepsilon' + g^2/\varepsilon' + \eta' \hat{m}/(1 + \hat{a})}{2g} \frac{\varepsilon' \sin^2 \theta_B}{\eta' \cos \theta_B}, \quad (7.55)$$

$\varepsilon' = \varepsilon + \hat{a}$ ,  $\eta' = \eta + \hat{a} + \hat{q}$ . В обычной ситуации, когда поляризуемости плазмы и вакуума малы ( $|\chi_\alpha^H| \ll (4\pi)^{-1}$  and  $|\hat{a}|, \hat{q}, |\hat{m}| \ll 1$ ), параметр  $\beta$  выражается приближённым равенством

$$\beta \approx \frac{2\chi_0^H - \chi_{+1}^H - \chi_{-1}^H + (\hat{q} + \hat{m})/(2\pi)}{2(\chi_{+1}^H - \chi_{-1}^H)} \frac{\sin^2 \theta_B}{\cos \theta_B}. \quad (7.56)$$

В случае, представленном на рис. 7.10, векторы поляризации для необыкновенной волны  $\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^X$  и для обыкновенной волны  $\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}^O$  оказываются практически одинаковыми в моделях полностью и частично ионизованной плазмы. На них проявляются вакуумные резонансы при энергии  $\hbar\omega \sim 10$  кэВ, при которой  $\chi_{-1}^H$  пересекает линию  $(\hat{q} + \hat{m})/2\pi$  (эта комбинация входит в (7.56); в этом случае  $|\chi_0^H|, |\chi_{+1}^H| \ll |\chi_{-1}^H|$ ) и электронный циклотронный резонанс при  $\hbar\omega \approx 27$  кэВ. В пренебрежении эффектами движения атомного центра масс наблюдались бы дополнительные резонансы вблизи  $\hbar\omega = 0,07$  и  $0,2$  кэВ, соответствующие связанно-связанным переходам для  $\alpha = +1$  и  $\alpha = 0$ , но эффекты движения размывают их (см. подробности в [428]).

Для параметров плазмы, выбранных на рис. 7.11, степень ионизации сравнительно низкая ( $1 - f_H = 0,11$ ). На рис. 7.12 показаны квадраты модулей двух компонент векторов поляризации,  $e_0^j$  и  $e_{+1}^j$  (квадрат модуля третьей компоненты определяется равенством  $|e_{-1}|^2 = 1 - |e_{+1}|^2 - |e_0|^2$ ) для двух углов  $\theta_B = 60^\circ$  и  $\theta_B = 10^\circ$ . Как и



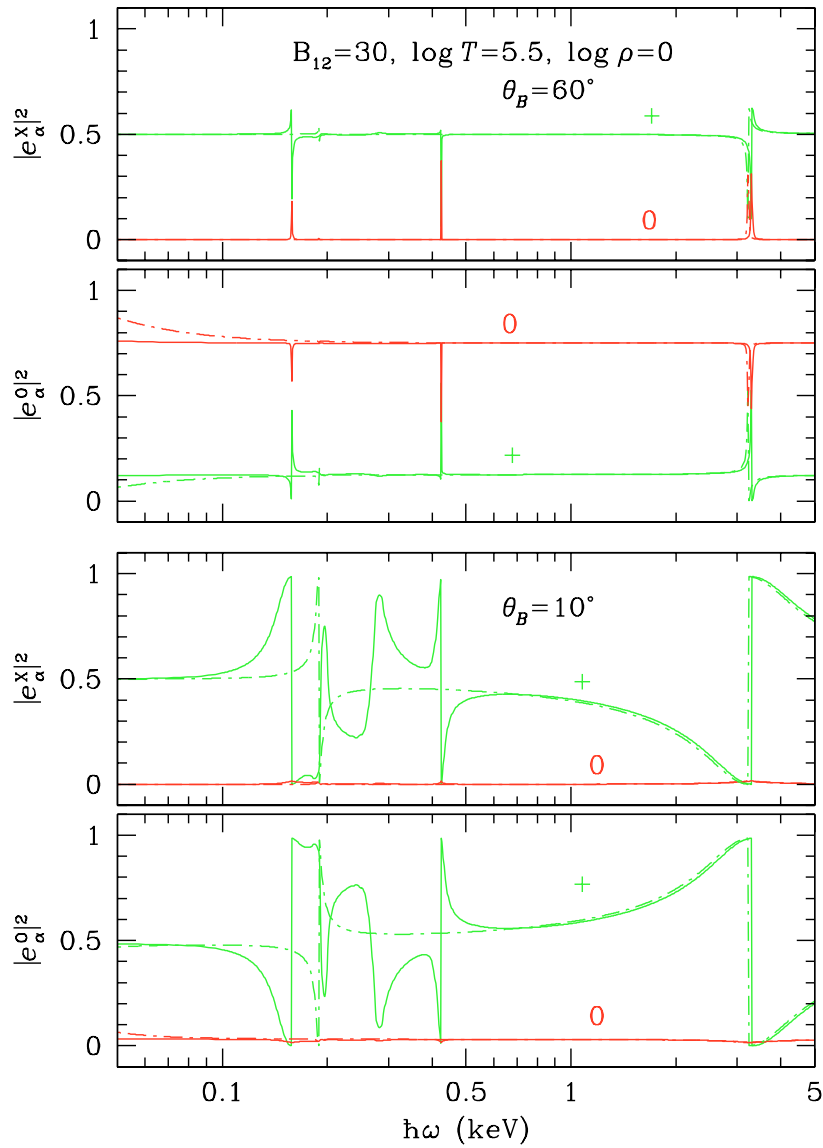


Рис. 7.12: Квадраты модулей циклических компонент  $e_{\alpha}^j$  векторов поляризации  $e^X = e^1$  и  $e^O = e^2$  для нормальных волн, распространяющихся под углами относительно направления магнитных силовых линий  $\theta_B = 60^\circ$  (два верхних рисунка) и  $10^\circ$  (два нижних рисунка) в водородной плазме при  $B = 3 \times 10^{13}$  Гс,  $T = 3,16 \times 10^5$  К,  $\rho = 1$  г см $^{-3}$ [428]. Сплошные кривые – частично ионизованная плазма; штрихпунктир – модель, предполагающая полную ионизацию.

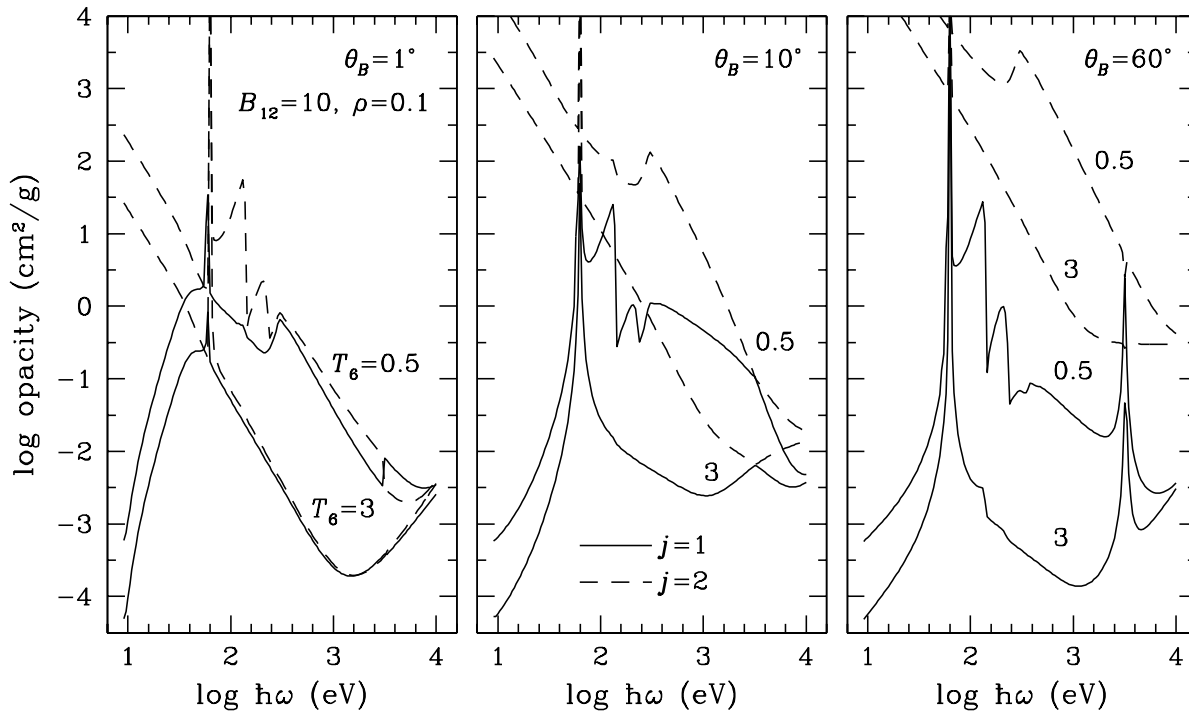


Рис. 7.13: Спектральные непрозрачности для необыкновенной ( $j = 1$ , сплошные кривые) и обыкновенной ( $j = 2$ , пунктир) волн при  $T = 5 \times 10^5$  К (верхние кривые) и  $3 \times 10^6$  К (нижние кривые в каждой паре) для  $\rho = 0,1$  г см $^{-3}$ ,  $B = 10^{13}$  Гс и  $\theta_B = 1^\circ, 10^\circ$  и  $60^\circ$  [274].

раньше, штрихпунктирные и сплошные кривые соответствуют моделям полностью и частично ионизованной плазмы. При  $\theta_B = 60^\circ$  наблюдаются два резких резонанса для модели частичной ионизации при  $\hbar\omega = 0,158$  и  $0,425$  кэВ, связанные с обращением в нуль коэффициента  $\chi_0^H(\omega)$  (ср. нижнее окно на рис. 7.11), которые отсутствуют в модели полной ионизации. Особенность при энергии 3,3 кэВ – это вакуумный резонанс. При меньшем значении угла  $\theta_B$  (два нижних окна на рис. 7.12) эти резонансы становятся шире, и вдобавок появляются другие особенности, обусловленные поведением  $\chi_{+1}^H$  (ср. среднее окно на рис. 7.11). Для полностью ионизованной плазмы дополнительная особенность – это просто протонный циклотронный резонанс, но для частично ионизованной плазмы поведение векторов поляризации сложнее, так как на него влияют атомные резонансы.

### 7.3.5 Суммарные непрозрачности

Линейная комбинация непрозрачностей для трёх основных поляризаций, рассмотренных в § 7.3.3, с весами, пропорциональными квадратам модулей векторов поляризации, рассмотренных в § 7.3.4, согласно (7.10), дают непрозрачности для двух

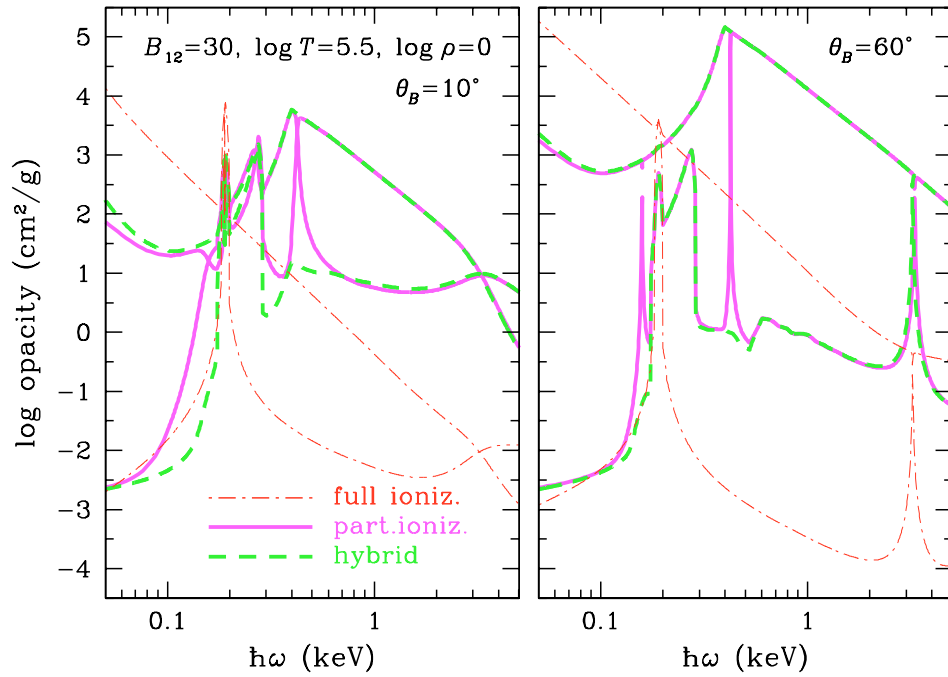


Рис. 7.14: Спектральные непрозрачности для двух нормальных мод  $\kappa_j$  при тех же параметрах плазмы, что и на рис. 7.12, для двух углов  $\theta_B = 10^\circ$  (левый рисунок) и  $\theta_B = 60^\circ$  (правый рисунок) [428]. Сплошные кривые – самосогласованный расчёт для частично ионизованной водородной плазмы; штриховые кривые (во многих местах совпадающие со сплошными) – «гибридная» трактовка (модель, использующая непрозрачности для трёх базисных поляризацій, учитывающие частичную ионизацию, и векторы поляризации нормальных мод  $e^j$  для модели полностью ионизованной плазмы); тонкий штрихпунктир – модель полностью ионизованной плазмы. Нижняя кривая каждого типа относится к необыкновенной, а верхняя – к обыкновенной волне.

нормальных мод электромагнитного излучения.

Для примера на рис. 7.13 показаны непрозрачности для нормальных мод при  $\rho = 0,1 \text{ г см}^{-3}$  и  $B = 10^{13} \text{ Гс}$  для трёх значений  $\theta_B$  и двух значений  $T$ . При более низкой температуре  $T = 5 \times 10^5 \text{ К}$  особенности, возникающие из-за связанно-связанных и связанно-свободных переходов, отчётливо видны при любом  $\theta_B$ .

На рис. 7.14 представлены непрозрачности для двух значений  $\theta_B$  и двух значений  $T$  при большей напряжённости магнитного поля  $B = 3 \times 10^{13} \text{ Гс}$ . Если в примере на рис. 7.13 непрозрачности практически не зависели от учёта влияния частичной ионизации на векторы поляризации, то в данном случае такой учёт оказывается существенным. Сплошными кривыми нанесены непрозрачности, получающиеся при использовании квадратов модулей векторов поляризации, вычисленных в § 7.3.4 (см. рис. 7.12), и базисных непрозрачностей  $\kappa_\alpha(\omega)$ , рассмотренных в § 7.3.3. Для сравнения штрихпунктиром нанесены непрозрачности, рассчитанные в модели полностью

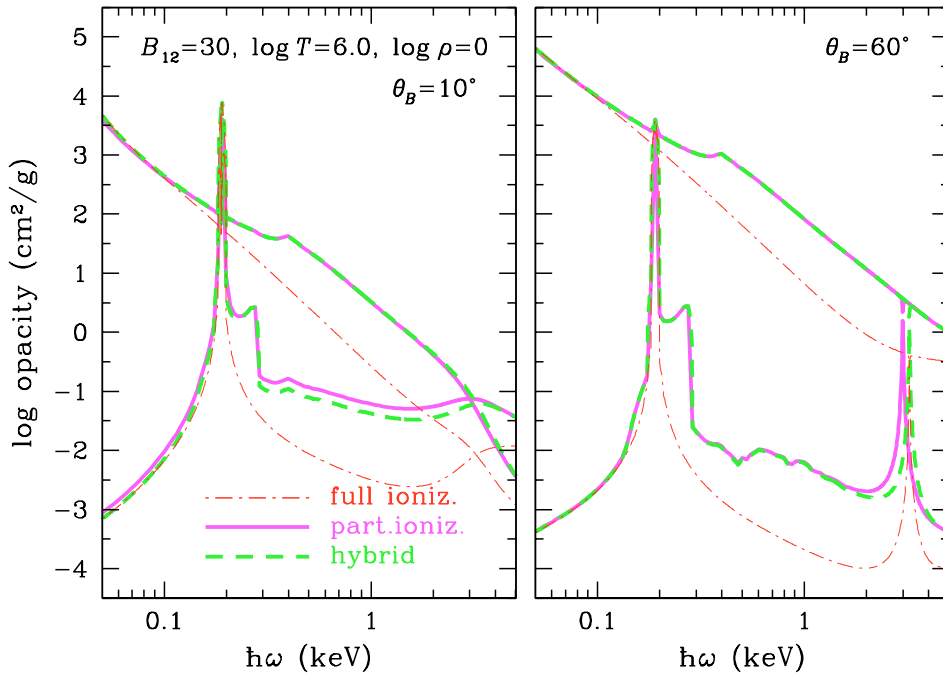


Рис. 7.15: То же, что и на рис. 7.14 но при более высокой температуре,  $T = 10^6$  К [428].

ионизованной плазмы. Штриховые линии соответствуют «гибридной модели», в которой базисные непрозрачности вычисляются с учётом частичной ионизации, а в качестве векторов поляризации нормальных волн берутся выражения для полностью ионизованной плазмы. Последний подход даёт более реалистичные непрозрачности, чем приближение полной ионизации, но, тем не менее, при большой доле нейтральных атомов, как на рис. 7.14, наблюдаются заметные отличия от точных результатов, показанных сплошными кривыми. В частности, при гибридном подходе исчезает особенность вблизи  $\hbar\omega = 0,5$  кэВ на рис. 7.14.

С увеличением температуры при постоянном магнитном поле степень ионизации плазмы возрастает, и различия между самосогласованной и гибридной моделями исчезают. На рис. 7.15 показан случай, когда температура  $T = 10^6$  К более высока, чем на рис. 7.14, а остальные параметры те же. При таких условиях доля нейтральных атомов составляет всего 1,4%. Наличие атомов всё ещё весьма существенно для непрозрачностей (ср. сплошные и штрихпунктирные кривые), но разница между гибридной и самосогласованной моделями невелика (ср. сплошные и штриховые кривые).

## 7.4 Излучение конденсированной поверхности

В данном параграфе мы отойдём от рассмотрения протяжённых атмосфер и рассмотрим альтернативу, обсуждавшуюся в § 5.3.5, – конденсированную поверхность, которая, согласно современным теоретическим моделям, может образовываться в сильном магнитном поле нейтронной звезды. В этом случае тепловое излучение может выходить непосредственно с металлической поверхности, не преобразовываясь в газообразной атмосфере, и спектр тогда будет отражать излучательные свойства такой поверхности. Они-то и будут рассмотрены в настоящем параграфе.

Ранее формирование теплового излучения на конденсированной поверхности нейтронной звезды с сильным магнитным полем и её отражательные свойства рассматривались в работах [434–436] и [345]. В статье [437] мы провели более подробное рассмотрение этих свойств. Были рассчитаны спектральные и поляризационные свойства излучения, формирующегося на поверхности, и осуществлена более аккуратная трактовка эффектов диссипации волны, проходящей в вещество. В работах [345, 434–436] ионы в металле предполагались жёстко закреплёнными в пространстве; в статье [437] мы рассмотрели не только такую модель, но также и противоположный предельный случай – модель свободных ионов. Аналогичная трактовка, приведшая к сходным с нашими результатам, была проведена в независимой<sup>3</sup> работе [438].

### 7.4.1 Диэлектрический тензор конденсированной фазы

В качестве первого приближения для описания отражательных свойств металлической поверхности примем модель свободного электронного газа (напр., [439]). При этом комплексный диэлектрический тензор плазмы имеет вид (7.4) (ср. [212]), где

$$\epsilon \pm g \approx 1 - \frac{v_e}{(1 \pm u_e^{1/2})(1 \mp u_i^{1/2}) + i\gamma_{ei}^\perp}, \quad \eta \approx 1 - \frac{v_e}{1 + i\gamma_{ei}^\parallel}, \quad (7.57)$$

$u_e$ ,  $u_i$  и  $v_e$  – безразмерные величины, определённые равенствами

$$u_e = (\omega_c/\omega)^2, \quad u_i = (\omega_{ci}/\omega)^2, \quad v_e = (\omega_{pe}/\omega)^2, \quad (7.58)$$

а  $\gamma_{ei}^\perp = \nu_{ei}^\perp/\omega$  и  $\gamma_{ei}^\parallel = \nu_{ei}^\parallel/\omega$  – безразмерные факторы затухания, определяемые эффективными частотами столкновений  $\nu_{ei}^\perp$  и  $\nu_{ei}^\parallel$ . Для оценки последних используются, соответственно,  $\tau_\perp^{-1}$  и  $\tau_\parallel^{-1}$  из § 5.4.3с. Пример зависимостей частот затухания, выраженных в единицах энергии, от магнитного поля представлен на рис. 7.16. Из рисунка

<sup>3</sup>Наша статья [437] была подана в печать и опубликована в виде препринта на полтора месяца раньше, но вышла из печати позже, чем статья [438].

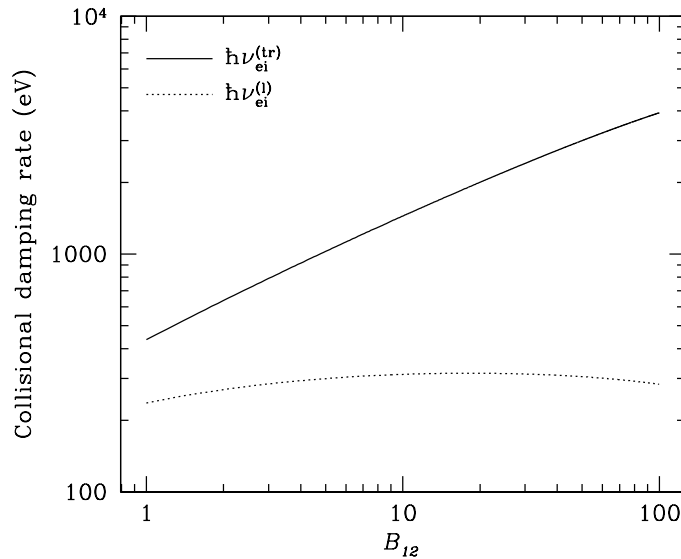


Рис. 7.16: Энергетические эквиваленты эффективных частот затухания  $\hbar\nu_{ei}^\perp$  (сплошная кривая) и  $\hbar\nu_{ei}^\parallel$  (точки) на конденсированной железной поверхности при  $T = 10^6$  К в зависимости от магнитной индукции [437].

видно, что эти частоты сравнимы с характерными частотами тепловых фотонов, исходящих с поверхности нейтронной звезды, или превосходят их, поэтому затуханием, вообще говоря, нельзя пренебрегать.

Выражения (7.57) подразумевают, что на электроны и ионы воздействует кулоновский потенциал их парного взаимодействия, внешнее магнитное поле и периодическая сила со стороны проходящей электромагнитной волны. В действительности при высоких плотностях учёт только этих взаимодействий может быть недостаточен. В частности, ионы могут быть сильно коррелированы между собой, если параметр кулоновской связи  $\Gamma$  велик. Можно предположить, что в конденсированной фазе движение ионов практически заморожено из-за этих корреляций. Но такое приближение, неявно применявшееся в [345], тоже неточно. Известно, например, что оптические моды кристаллической решётки при  $B = 0$  описываются формулами вида (7.57) с дополнительным членом в знаменателе, определяющим связь между ионами [440]. Характерная частота ионных осцилляций – дебаевская частота акустических фононов – в кулоновском кристалле равна  $\omega_D \approx 0,4\omega_{pi}$  [122], где  $\omega_{pi}$  – ионная плазменная частота (2.26). Используя оценку плотности поверхности (5.82), получаем  $\omega_D/\omega_{ci} \approx 6,31A^{1/2}Z^{-0,3}B_{12}^{-0,4}$ . Отсюда видно, что характерные частоты ионных колебаний в кулоновской решётке и в магнитном поле могут быть сравнимы по величине, а это говорит о том, что магнитные силы, действующие на ионы, при усло-

виях, существующих на конденсированной поверхности нейтронной звезды, могут быть сравнимы с кулоновскими силами. Точная трактовка диэлектрического тензора кулоновского кристалла, которая учитывала бы все действующие в нём взаимодействия, в настоящее время недоступна, поэтому в качестве первых приближений в [437] рассматривались два предельных случая: модель свободных ионов, в которой диэлектрический тензор описывается выражениями (7.57), и модель жёстко фиксированных ионов, соответствующая приближению  $m_{\text{ion}} \rightarrow \infty$  в этих выражениях.

## 7.4.2 Закон Кирхгофа для поляризованного излучения

Рассмотрим термодинамическое равновесие тела при температуре  $T$  с чернотельным излучением, интенсивность которого описывается функцией Планка  $B_\nu(T)$ . Пусть луч в этой полости падает на элемент поверхности  $dA$  рассматриваемого тела. Электрическое поле неполяризованного падающего луча можно записать в терминах двух независимых поляризационных состояний:  $\mathbf{E}_i^{(1)} = \mathcal{A} \mathbf{e}_i^{(1)}$  и  $\mathbf{E}_i^{(2)} = \mathcal{A} \mathbf{e}_i^{(2)}$ , где  $\mathcal{A} = \sqrt{B_\nu/2}$ , а  $\mathbf{e}_1^{(i)}$  и  $\mathbf{e}_2^{(i)}$  – векторы поляризации. В общем случае луч частично отражается, и при этом каждая поляризационная составляющая падающего луча порождает отражённое поле:

$$\mathbf{E}_r^{(1)} = \mathcal{A} (r_{11} \mathbf{e}_r^{(1)} + r_{12} \mathbf{e}_r^{(2)}), \quad \mathbf{E}_r^{(2)} = \mathcal{A} (r_{21} \mathbf{e}_r^{(1)} + r_{22} \mathbf{e}_r^{(2)}), \quad (7.59)$$

где  $\mathbf{E}_r^{(1)}$  и  $\mathbf{E}_r^{(2)}$  – составляющие отражённого электрического поля, порождённые падающими полями  $\mathbf{E}_i^{(1)}$  и  $\mathbf{E}_i^{(2)}$ , соответственно, а  $r_{ij}$  – скалярные числовые коэффициенты. Таким образом, интенсивность излучения отражённого поля с поляризациями  $\mathbf{e}_r^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_r^{(2)}$  равна

$$I_{\nu 1}^{(r)} = \frac{1}{2} (|r_{11}|^2 + |r_{21}|^2) B_\nu \equiv \frac{1}{2} R_1 B_\nu, \quad (7.60a)$$

$$I_{\nu 2}^{(r)} = \frac{1}{2} (|r_{12}|^2 + |r_{22}|^2) B_\nu \equiv \frac{1}{2} R_2 B_\nu. \quad (7.60b)$$

Энергия падающей волны в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$  за время  $dt$  равна  $B_\nu dA d\Omega^{(i)} d\nu dt$ , где  $d\Omega^{(i)}$  – элемент телесного угла вокруг направления падающего луча. Аналогично, энергия, содержащаяся в отражённой волне (для каждой поляризации) равна  $\frac{1}{2} R_{1,2} B_\nu dA d\Omega^{(r)} d\nu dt$ , причём  $d\Omega^{(r)} = d\Omega^{(i)}$ . Чтобы излучение в полости оставалось всегда неполяризованным и чернотельным, тело должно излучать в направлении отражённой волны электромагнитные волны с интенсивностью

$$I_{\nu 1}^{(e)} = \frac{1}{2} B_\nu - I_{\nu 1}^{(r)} = \frac{1}{2} (1 - R_1) B_\nu, \quad (7.61a)$$

$$I_{\nu 2}^{(e)} = \frac{1}{2} B_\nu - I_{\nu 2}^{(r)} = \frac{1}{2} (1 - R_2) B_\nu \quad (7.61b)$$

для поляризаций  $e_r^{(1)}$  и  $e_r^{(2)}$ , соответственно. Так как  $I_{\nu 1}^{(e)}$  и  $I_{\nu 2}^{(e)}$  определяются свойствами самого тела, эти соотношения должны сохраняться и вне условий полного термодинамического равновесия. Итак, тело с температурой  $T$  излучает с интенсивностью

$$I_{\nu}^{(e)} = (1 - R)B_{\nu}(T) \equiv JB_{\nu}(T) \quad (7.62)$$

где  $R \equiv \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$  – коэффициент отражения, а  $J = 1 - R$  – безразмерная излучательная способность. Степень линейной поляризации равна

$$P \equiv \frac{I_{\nu 1}^{(e)} - I_{\nu 2}^{(e)}}{I_{\nu 1}^{(e)} + I_{\nu 2}^{(e)}} = \frac{1}{2} \frac{R_2 - R_1}{1 - R}. \quad (7.63)$$

В общем случае  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R$  являются функциями температуры и химического состава поверхности, частоты и угла излучения, и магнитного поля.

### 7.4.3 Излучательная способность конденсированной поверхности

Вычисление коэффициентов  $r_{ij}$ , входящих в формулы (7.60) и определяющих коэффициенты отражения для каждой поляризации, основано на сшивании граничных условий для электрических и магнитных полей электромагнитных волн с внутренней и наружной стороны поверхности. Соответствующие формулы довольно громоздки и мы их не станем воспроизводить (читатель может обратиться за подробностями к статье [437]), а перейдём к результатам: перечислим характерные особенности излучения конденсированной поверхности и проиллюстрируем их на нескольких примерах.

На рисунках 7.17 и 7.18 представлены примеры зависимости безразмерной излучательной способности  $J = 1 - R$  от энергии испускаемого фотона  $E = \hbar\omega$  для случая, когда магнитное поле перпендикулярно поверхности. Этот случай является наиболее простым вследствие симметрии задачи. Зависимость коэффициентов  $J$  и  $R$  от температуры является слабой (посредством факторов затухания); в примерах, представленных на рисунках, выбрано значение  $T = 10^6$  К. Во всех случаях излучательная способность меньше единицы, особенно при низких энергиях, и стремится к единице при  $E \gg E_{pe}$ . На кривых наблюдаются особенности – понижения  $J$  вблизи определённых энергий. При  $B = 10^{12}$  и  $10^{13}$  Гс имеются особенности, ассоциированные с ионной циклотронной энергией  $E_{Bi}$  и электронной плазменной энергией  $E_{pe}$ ; при  $B = 10^{14}$  Гс вторая из них не видна на рисунке, так как находится при бо-



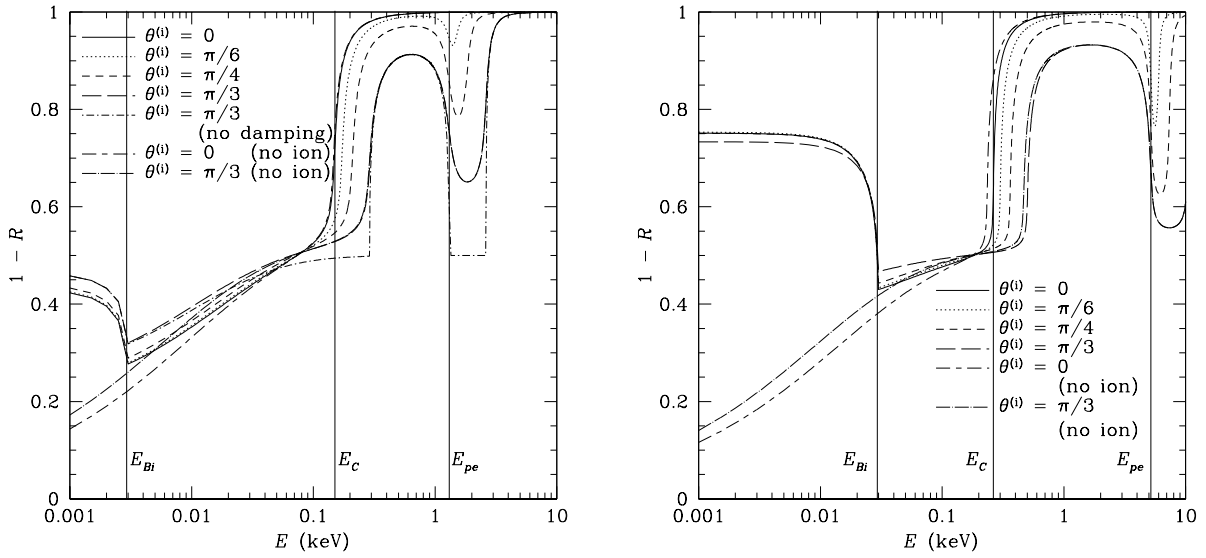


Рис. 7.17: Безразмерная излучательная способность  $J = 1 - R$  как функция энергии фотона  $E$  (кэВ) для конденсированной железной поверхности при  $B = 10^{12}$  Гс (левый рисунок) и  $B = 10^{13}$  Гс (правый рисунок). Поле  $\mathbf{B}$  перпендикулярно к поверхности. Разные кривые соответствуют разным углам  $\theta^{(i)}$  между направлением падающего луча и нормалью к поверхности. Тонкая штрихпунктирная кривая на левом рисунке, помеченная словами «no damping», показывает результат, получающийся при пренебрежении факторами затухания в формулах (7.57) для компонент диэлектрического тензора. Тонкие кривые, помеченные словами «no ion», показывают результат для модели неподвижных ионов. Вертикальные линии обозначают положение ионной циклотронной энергии ( $E_{Bi} = \hbar\omega_{ci}$ ), электронной плазменной энергии ( $E_{pe} = \hbar\omega_{pe} = k_B T_{pe}$ ) и гибридной энергии  $E_C$  (7.64).

лее высокой энергии. Кроме того, имеется депрессия коэффициента  $J$  между  $E_{Bi}$  и гибридной энергией

$$E_C \approx E_{Bi} + E_{pe}^2/E_{Be}. \quad (7.64)$$

Отмеченные спектральные особенности наиболее легко объяснить на примере нормального падения  $\theta^{(i)} = 0$  для случая, когда поле перпендикулярно поверхности. При этом коэффициент отражения записывается в аналитической форме:

$$R = \frac{1}{2} \left| \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{n_2 - 1}{n_2 + 1} \right|^2, \quad (7.65)$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – показатели преломления для двух мод электромагнитного излучения в конденсированной среде, равные  $n_1^2 = \epsilon + g$  и  $n_2^2 = \epsilon - g$ . Рассмотрим  $E \approx E_{Bi}$ , так что  $v_e \gg 1$  и  $u_e \gg 1$ . В этом случае

$$n_{1,2}^2 \approx 1 \mp \frac{v_e(1 \mp u_i^{1/2})}{u_e^{1/2}(1 \mp u_i^{1/2})^2 + (\gamma_{ei}^{(tr)})^2} + i \frac{v_e \gamma_{ei}^{(tr)}}{u_e(1 \mp u_i^{1/2})^2 + (\gamma_{ei}^{(tr)})^2}. \quad (7.66)$$

Для качественного понимания природы особенностей можно пренебречь мнимыми

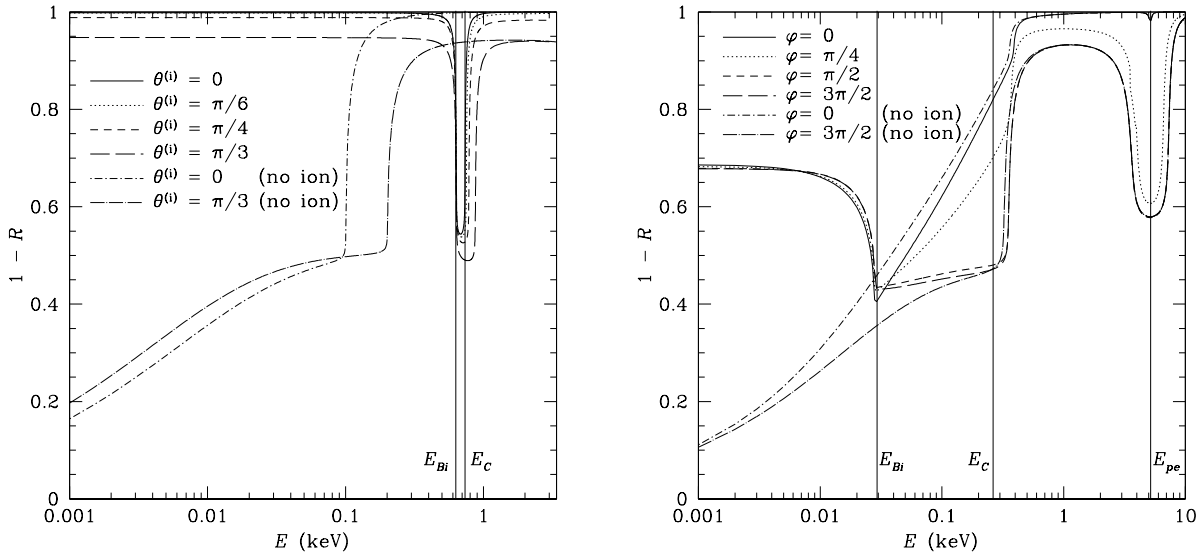


Рис. 7.18: Безразмерная излучательная способность  $J = 1 - R$  как функция энергии фотона  $E$  (кэВ) для конденсированной поверхности. *Левый рисунок*: водородная поверхность при поле  $B = 10^{14}$  Гс, перпендикулярном к поверхности, для разных углов падения (значения  $\theta^{(i)}$  указаны в спецификации) в моделях свободных и фиксированных (кривые с пометкой «по ион») ионов. *Правый рисунок*: железная поверхность при поле  $B = 10^{14}$  Гс, направленном под углом  $45^\circ$  к поверхности, при угле падения  $45^\circ$  для разных азимутальных углов  $\varphi$  между плоскостью падения и плоскостью, в которой лежат нормаль к поверхности и вектор магнитного поля. Вертикальные линии обозначают положение ионной циклотронной энергии ( $E_{Bi} = \hbar\omega_{ci}$ ), электронной плазменной энергии ( $E_{pe} = \hbar\omega_{pe} = k_B T_{pe}$ ) и гибридной энергии  $E_C$  (7.64).

частями  $n_{1,2}^2$ , так как  $v_e/u_e \ll 1$  [437]. Тогда формула (7.66) приобретает вид

$$n_{1,2}^2 \approx 1 \mp \frac{v_e}{u_e^{1/2}(1 \mp u_i^{1/2})} \quad (7.67)$$

Для  $E < E_{Bi}$  ( $u_i > 1$ ) как  $n_1$ , так и  $n_2$  вещественны и не равны единице, в результате чего имеем  $J < 1$ . Для  $E > E_{Bi}$ , коэффициент  $n_1$  – мнимый до тех пор, пока не начинает выполняться неравенство  $(v_e/u_e^{1/2})(1 - u_i^{1/2})^{-1} < 1$ , то есть при  $E < E_C$ . Таким образом, при  $E_{Bi} < E < E_C$  волна с индексом 1 не распространяется в среде, что приводит к глубокому понижению  $J$  ( $J \rightarrow \frac{1}{2}$ , когда энергия приближается к  $E_C$ ).

Подобным же образом можно понять природу особенности при  $E_{pe}$ , которая возникает при  $\theta^{(i)} \neq 0$ . Для энергий вблизи  $E_{pe}$ ,  $u_e \gg 1$ ,  $u_i \ll 1$ , и мы имеем  $\epsilon \approx 1 + v_e/u_e$  и  $g \approx -v_e/u_e^{1/2}$ . Пренебрегая в выражениях для показателей преломления слагаемыми порядка  $v_e/u_e$  и выше, можно получить [437]

$$n_1^2 \approx 1 + \frac{v_e}{(1 - v_e)} \sin^2 \theta^{(i)}, \quad n_2^2 \approx 1 \quad (7.68)$$

При  $E > E_{pe}$  как  $n_1$ , так и  $n_2$  вещественны, а при  $E < E_{pe}$  имеем  $n_1^2 < 0$ . Коэффициент

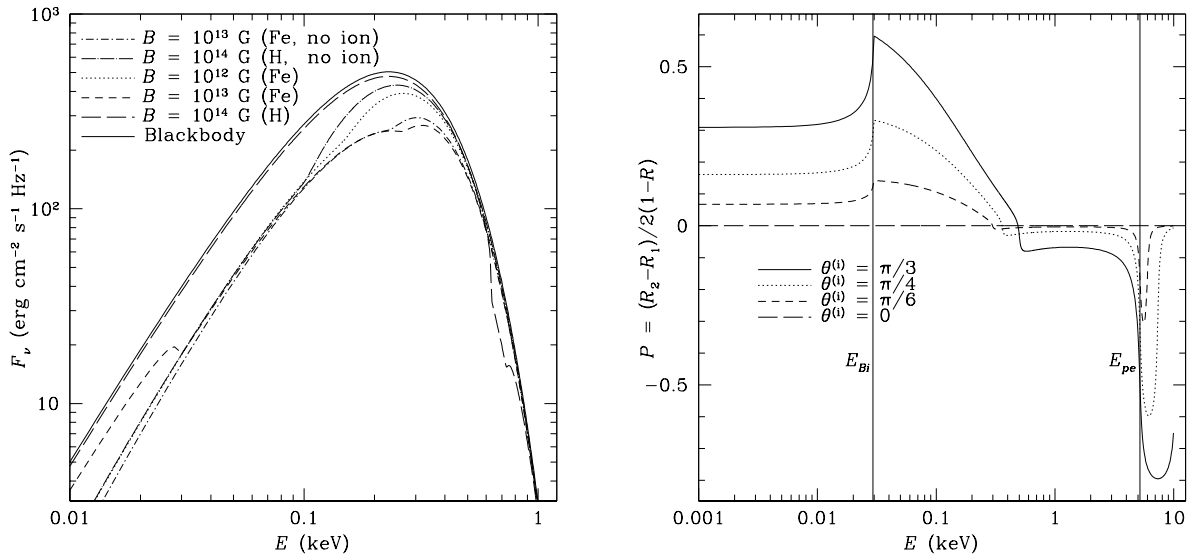


Рис. 7.19: *Левый рисунок*: спектральный поток как функция энергии фотона  $E$  для случаев конденсированной железной ( $B = 10^{12}$  Гс и  $10^{13}$  Гс) и водородной ( $B = 10^{14}$  Гс) поверхности при температуре  $T = 10^6$  К. Тонкие кривые («no ion») получены в модели жёстко закреплённых, а более толстые – в модели свободных ионов. Сплошная кривая изображает планковский спектр для сравнения. Для всех изображённых на рисунке случаев магнитное поле предполагается направленным перпендикулярно поверхности. *Правый рисунок*: степень линейной поляризации  $P$  [(7.63)] в зависимости от энергии фотона  $E$  для конденсированной железной поверхности с магнитным полем  $B = 10^{13}$  Гс, перпендикулярным поверхности. Разные кривые соответствуют разным углам  $\theta^{(i)}$  между падающим лучом и нормалью к поверхности. Положительные значения  $P$  соответствуют поляризации в плоскости падения, а отрицательные – в перпендикулярной плоскости.

отражения больше не выражается простой аналитической формулой (7.65), но его качественное поведение такое же: при одной моде с мнимым  $n$  и другой с  $n \approx 1$  излучательная способность  $J$  достигает локального минимума ( $\approx \frac{1}{2}$ , если пренебречь столкновительным затуханием; см. рис. 7.17).

#### 7.4.4 Спектр и поляризация излучения

В левом окне рисунка 7.19 представлен спектральный поток с конденсированной поверхности нейтронной звезды,  $F_\nu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta^{(i)} \cos \theta^{(i)} \sin \theta^{(i)} J(\theta^{(i)}, \varphi) B_\nu(T)$ , как функция энергии фотона для разных случаев, рассмотренных на рис. 7.17 и 7.18. Для железной поверхности излучение подавлено примерно в два раза при  $E_{Bi} \lesssim E \lesssim E_c$  по сравнению с планковским излучением при той же температуре. Для водорода при более сильном магнитном поле,  $B = 10^{14}$  Гс, спектр близок к чернотельному при всех энергиях, кроме энергий около  $E_{Bi}$ , где имеется широкая особенность.

Излучение конденсированной поверхности в магнитном поле поляризовано. Для

примера в правом окне рисунка 7.19 показана степень линейной поляризации  $P$  для железной поверхности при  $D = 10^{13}$  Гс. Степень поляризации  $P$  возрастает с увеличением угла падения и имеет особенности при  $E_{Vi}$  и  $E_{pe}$ . При  $E < E_C$  вектор поляризации лежит в плоскости падения. При  $E > E_C$  знак  $P$  меняется, и излучение становится поляризованным преимущественно перпендикулярно плоскости падения.

На основе рассмотрения этого и подобных ему примеров в [437] сделан вывод о том, что поляризационные свойства конденсированной поверхности качественно отличаются от поляризационных свойств протяжённой атмосферы, изучавшихся в [397] и [430].

## 7.5 Некоторые приложения

В данном параграфе, не претендующем на полноту, представлены два примера использования непрозрачностей частично ионизованной водородной плазмы в сильном магнитном поле, вычислению которых была посвящена основная часть настоящей главы.

### 7.5.1 Тонкая атмосфера изолированной нейтронной звезды

Нейтронная звезда RX J1856.4–3754, открытая в 1996 году в рентгеновских лучах благодаря наблюдениям орбитальной обсерватории *ROSAT* [441], а год спустя – и в оптических лучах благодаря наблюдениям орбитального телескопа имени Хаббла [442], является одной из ярчайших изолированных нейтронных звёзд с тепловым спектром излучения. На её изучение были направлены значительные усилия и наблюдательные ресурсы, благодаря чему в настоящее время она является нейтронной звездой с наиболее точно измеренным спектром. Однако долгое время не удавалось построить теоретическую модель, которая удовлетворительно описала бы результаты этих измерений одновременно в рентгеновском и оптическом диапазонах электромагнитного спектра.

В работе [380] для теоретического описания спектра излучения RX J1856.4–3754 были совместно использованы модели спектров излучения частично ионизованных водородных атмосфер и конденсированных поверхностей нейтронных звёзд с сильными магнитными полями, представленные выше. Одно из главных затруднений, препятствовавших успешной интерпретации спектра RX J1856.4–3754 в ранних работах, состояло в том, что в рамках единой модели не удавалось воспроизвести на-

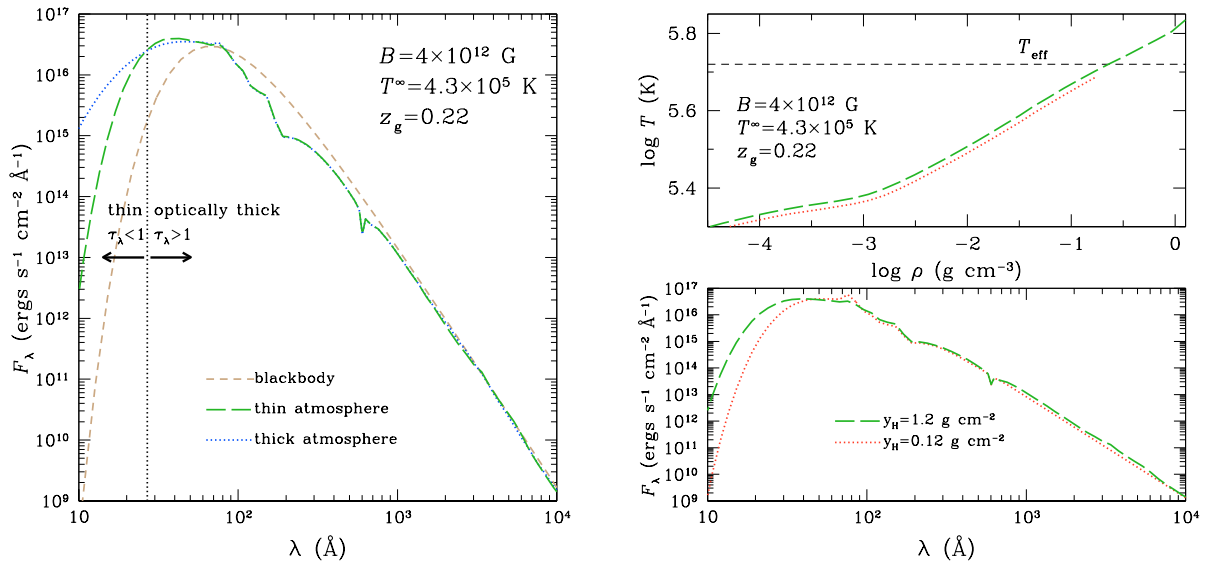


Рис. 7.20: Результаты моделирования атмосфер с  $B = 4 \times 10^{12} \text{ G}$ ,  $T_{\text{eff}}^\infty = 4,3 \times 10^5 \text{ K}$  и  $z_g = 0,22$  [380]. *Левый рисунок*: Точечный пунктир – модель «толстой» (полубесконечной) водородной атмосферы; длинные штрихи – модель «тонкой» водородной атмосферы с колонковой плотностью  $y_H = 1,2 \text{ г см}^{-2}$  над конденсированной поверхностью; короткие штрихи – чернотельный спектр. Вертикальная линия разделяет области частот, для которых атмосфера является оптически тонкой (оптическая толщина  $\tau_\lambda < 1$ ) и оптически толстой ( $\tau_\lambda > 1$ ). Для сравнения штриховой линией показан чернотельный спектр для той же температуры. *Правые рисунки*: профили температуры (вверху) и спектры (внизу) для водородных атмосфер с колонковыми плотностями  $y_H = 1,2 \text{ г см}^{-2}$  (штриховой пунктир) и  $y_H = 0,12 \text{ г см}^{-2}$  (точечный пунктир).

блюдаемые спектральные потоки во всех спектральных диапазонах от рентгеновского до оптического. Похожая проблема встречалась и при интерпретации спектров некоторых других нейтронных звёзд. Обычно она решалась путём привлечения модели распределения температуры, сильно неоднородного по поверхности звезды. Однако в случае RX J1856.4–3754 такая модель предполагала бы неправдоподобно малое значение угла между осью вращения звезды и лучом зрения, учитывая наблюдаемую малость пульсаций излучения ( $\sim 1\%$ ) данного объекта. В статье [380] вместо этого предполагается наличие конденсированной поверхности, над которой лежит атмосфера ограниченной массы. Подобное предположение ранее уже использовалось при интерпретации спектра другого похожего объекта – нейтронной звезды RX J0720.4–3125 – в работе [443], в которой, однако, была применена модель атмосферы без магнитного поля.

Примеры результатов моделирования спектров, приведённые на рис. 7.20, демонстрируют, как конечная толщина атмосферы приводит к более крутому убыванию спектра в коротковолновой области, по сравнению с моделью полубесконечной ат-

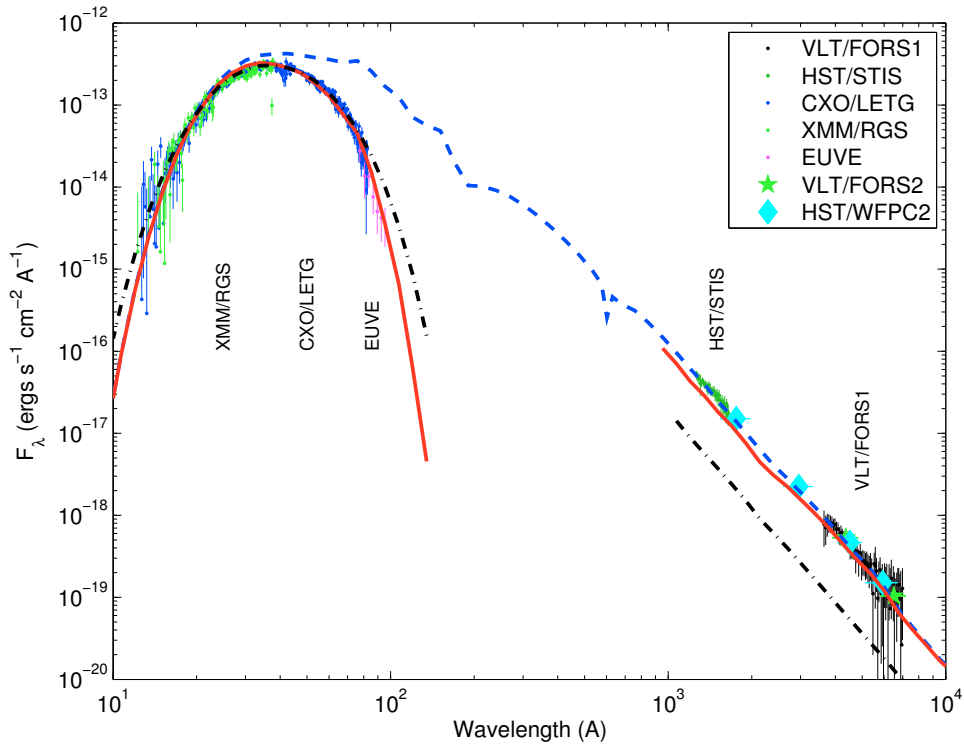


Рис. 7.21: Наблюдаемый спектр нейтронной звезды RX J1856.4–3754 от оптического до рентгеновского диапазонов: сравнение наблюдений с теоретической моделью [380]. Точки показывают наблюдательные данные, взятые из различных открытых источников. Отрезки погрешностей соответствуют доверительному уровню  $1\sigma$ . Сплошная линия – модельный спектр с учётом гравитационного красного смещения и межзвёздного поглощения; штриховая кривая – без учёта межзвёздного поглощения. Параметры показанной модели –  $B = 4 \times 10^{12}$  Гс,  $y_H = 1,2$  г см $^{-2}$ ,  $T_{\text{eff}}^\infty = 4,3 \times 10^5$  К,  $R_\infty = 17$  км,  $z_g = 0,22$ . Для сравнения штрихпунктир показывает чернотельный спектр, наилучшим образом описывающий рентгеновские данные (при  $R_\infty = 5$  км и  $T_{\text{eff}}^\infty = 7,36 \times 10^5$  К).

мосферы. Это свойство позволило согласовать модельный спектр с наблюдаемым за счёт введения единственного добавочного параметра модели – колонковой плотности атмосферы над конденсированной поверхностью,  $y_H$ . При значениях  $y_H \gtrsim 1$  г см $^{-2}$ , обеспечивающих удовлетворительное согласие между данными наблюдений и моделью, основной поток излучения содержится в том диапазоне спектра, для которого атмосфера является оптически толстой (см. рис. 7.20). Тепловая структура такой атмосферы практически такая же, как для полубесконечной атмосферы, за исключением узкой области, непосредственно прилегающей к конденсированной поверхности, где играют роль граничные условия на поверхности, определяемые излучательной и отражательной способностями, описанными в § 7.4.3. Зависимость тепловой структуры от  $y_H$  становится заметной при дальнейшем уменьшении  $y_H$ , как демонстрирует

точечная кривая в правом верхнем окне на рис. 7.20.

В статье [380] все доступные (на 2006 год) данные фото- и спектрометрических наблюдений источника RX J1856.4–3754 были интерпретированы в рамках модели тонкой водородной атмосферы над конденсированной железной поверхностью. Моделирование и спектральное фитирование наблюдательных данных проводились для заданного расстояния до объекта (140 пс) и заданных наборов значений  $y_{\text{H}}$  и  $B$  (с шагом  $\sim 30\%$ ), а величины  $T_{\text{eff}}^{\infty}$ ,  $R_{\infty}$ ,  $z_g$  и колонковая концентрация межзвёздного водорода на луче зрения  $N_{\text{H}}$  свободно варьировались. Наилучшие результаты фитирования достигаются при  $y_{\text{H}} = 1,2 \text{ г см}^{-2}$ ,  $T_{\text{eff}}^{\infty} = (4,34_{-0,05}^{+0,03}) \times 10^5 \text{ К}$ ,  $R_{\infty} = 17,2_{-0,1}^{+0,6} \text{ км}$ , и либо при  $B = 3 \times 10^{12} \text{ Гс}$ ,  $z_g = 0,27 \pm 0,02$ ,  $N_{\text{H}} = (1,18 \pm 0,02) \times 10^{20} \text{ см}^{-2}$ , либо при  $B = 4 \times 10^{12} \text{ Гс}$ ,  $z_g = 0,22 \pm 0,02$ ,  $N_{\text{H}} = (1,30 \pm 0,02) \times 10^{20} \text{ см}^{-2}$ . Формальная статистическая погрешность параметров составляет несколько процентов, но, поскольку расстояние до объекта известно с большей погрешностью,  $\sim 30\%$ , полную погрешность оценок  $R_{\infty}$ ,  $z_g$  и  $(T_{\text{eff}}^{\infty})^4$  следует принимать также не менее  $30\%$ . На рис. 7.21 представлено сравнение данных с модельным спектром, отвечающим одному из наиболее удовлетворительных наборов значений параметров.

В заключение данного раздела заметим, что в нашей работе [444], помимо моделей толстых и тонких водородных атмосфер с сильным магнитным полем, представлена также модель слоистой замагниченной атмосферы (“sandwich atmosphere”), состоящей из слоя частично ионизованного водорода и лежащей под ним прослойки гелия на конденсированной железной поверхности, и сделан вывод о том, что модели слоистых атмосфер могут быть полезны для интерпретации тепловых спектров некоторых нейтронных звёзд, обладающих двумя или тремя широкими линиями поглощения (такие линии были обнаружены в последние годы – см., напр., статью [43] и ссылки в ней).

## 7.5.2 База данных для моделирования частично ионизованных атмосфер с сильными магнитными полями

Разработанные в настоящей работе методы расчёта термодинамических функций и спектральных непрозрачностей атмосфер нейтронных звёзд с сильными магнитными полями были применены в статье [445] для создания общедоступной базы модельных спектров нейтронных звёзд с водородными атмосферами при  $B = 10^{12} - 2 \times 10^{13} \text{ Гс}$  и  $\lg T_{\text{eff}} = 5,5 - 6,8$ .

Было создано два комплекта таблиц. Первый комплект содержит спектральные

потоки, рассчитанные для атмосфер с двумя значениями гравитационного ускорения на поверхности:  $g = 2,4 \times 10^{14} \text{ см с}^{-2}$  (например, для канонической нейтронной звезды с  $M = 1,4 M_{\odot}$ ,  $R = 10 \text{ км}$ ) и  $g = 1,6 \times 10^{14} \text{ см с}^{-2}$  (например, для модели нейтронной звезды той же массы, отвечающей более жёсткому, то есть более реалистичному, уравнению состояния –  $M = 1,4 M_{\odot}$ ,  $R = 12 \text{ км}$ ), в предположении, что магнитное поле постоянно по величине и ортогонально к поверхности звезды, и эффективная температура также постоянна. Такие модели могут использоваться, например, при расчёте спектра излучения горячего пятна вокруг магнитного полюса. Второй комплект таблиц рассчитан при  $g = 1,6 \times 10^{14} \text{ см с}^{-2}$  для разных значений угла наклона поля к поверхности и связанных с ним значений эффективной температуры, соответствующих дипольному распределению для звезды с  $M = 1,4 M_{\odot}$  и  $R = 12 \text{ км}$ . Значения эффективной температуры соответствуют локальной эффективной поверхностной температуре  $T_s$ , рассчитанной согласно методам, описанным в предыдущей главе, в предположении, что температура  $T_b$  постоянна вдоль границы внутренней и внешней коры.

Рассчитанные комплекты таблиц, снабжённые компьютерной программой для интерполяции по ним, включены в базу данных для моделирования рентгеновских спектров XSPEC под именем NSMAX<sup>4</sup>.

## 7.6 Резюме

В данной главе изучены спектральные непрозрачности в водородных атмосферах нейтронных звёзд с сильными магнитными полями с учётом эффектов частичной ионизации и их использование при моделировании спектра излучения, выходящего с поверхности нейтронной звезды. Рассмотрены также эффекты, связанные с возможными отклонениями распределения ионов по уровням Ландау от ЛТР и образованием конденсированной поверхности или наличием тонкой атмосферы. Приведён пример использования полученных результатов для моделирования спектров нейтронных звёзд и интерпретации наблюдений. Описана созданная на основе проведённых исследований общедоступная база модельных спектров для моделирования водородных атмосфер нейтронных звёзд с сильными магнитными полями.

---

<sup>4</sup><http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/xanadu/xspec/models/nsmax.html>



# Заключение

В данной работе осуществлён комплексный подход к исследованию термодинамических и кинетических свойств вещества в оболочках нейтронных звёзд: исследованы (1) термодинамические функции полностью и частично ионизованной плазмы при условиях, характерных для оболочек нейтронных звёзд, без магнитного поля и с сильным магнитным полем, (2) коэффициенты электронного переноса тепла и заряда в полностью ионизованной плазме в оболочках нейтронных звёзд без магнитного поля и с сильным магнитным полем, (3) спектральные и поляризационные характеристики полностью и частично ионизованной водородной плазмы в атмосферах нейтронных звёзд с сильным магнитным полем. В диссертации также впервые вне рамок теории возмущений рассчитаны квантовомеханические характеристики атома водорода, движущегося в сильном магнитном поле и при этом взаимодействующего с электромагнитным излучением.

## Основные результаты работы

Более подробно, основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Рассчитаны тензоры электронной теплопроводности, проводимости, и термоэлектрический тензор в кулоновской жидкости и кулоновском кристалле в квантующем магнитном поле. Построено аналитическое описание этих тензоров в произвольном магнитном поле при сильной вырожденности электронов. Создан общедоступный комплекс компьютерных программ для расчёта этих тензоров при произвольной вырожденности электронов.
2. Развито аналитическое описание уравнения состояния неидеальной электронной плазмы в произвольном (в том числе квантующем) магнитном поле. Раз-

работан общедоступный комплекс компьютерных программ для вычисления термодинамических функций такой плазмы.

3. Исследованы квантовомеханические свойства атома водорода в сильном магнитном поле, характерном для нейтронных звёзд ( $B \sim 10^{12} - 10^{15}$  Гс) с учётом возможного движения центра масс (что эквивалентно рассмотрению атома в скрещенных полях – сильном магнитном и произвольном электрическом). Рассчитаны и изучены следующие характеристики:

- энергии связи и характерные особенности волновых функций связанных состояний;
- силы осцилляторов для излучательных;
- поведение этих характеристик при изменении магнитного поля или обобщённого импульса центра масс при движении поперёк поля; особенности, связанные с антипересечениями уровней энергии;
- волновые функции непрерывного спектра атома (в том числе движущегося) в сильном магнитном поле и их характерные особенности; метастабильные состояния и их автоионизация;
- сечения фотоионизации и их характерные особенности, связанные, в том числе, с автоионизацией, с антипересечениями уровней при движении атома в магнитном поле, с эффектами недипольности.

Построены аналитические выражения для астрофизических приложений, в широком диапазоне параметров плазмы аппроксимирующие поведение основных квантовомеханических характеристик атома в зависимости от магнитной индукции и/или обобщённого импульса атома. Показано, что учёт эффектов движения в сильном магнитном поле радикально меняет общий спектр поглощения по сравнению с тем случаем, когда рассматривается только покоящийся атом.

4. Построена модель свободной энергии частично ионизованной водородной плазмы в сильном магнитном поле. В широком диапазоне плотностей при температурах  $T \sim 10^5 - 10^7$  К, типичных для внешних оболочек нейтронных звёзд, выполнены расчёты и созданы общедоступные комплекты таблиц термодинамических функций, ионных населённостей и росселандовых непрозрачностей, используемые при моделировании водородных атмосфер нейтронных звёзд.
5. Найдены явные аналитические выражения для коэффициентов упругости жидкокристаллической мантии нейтронной звезды.

6. Построены аналитические формулы для двух широко используемых унифицированных (то есть построенных на основе единой модели для любых плотностей) уравнений состояния внутренней коры и ядра нейтронной звезды.
7. Исследованы квантовые переходы в непрерывном спектре плазмы, помещённой в квантующее магнитное поле:
  - вычислены спектральные коэффициенты поглощения электромагнитных волн при переходах в непрерывном спектре квантовомеханических состояний электрон-протонной плазмы с учётом магнитного квантования движения как электронов, так и протонов;
  - вычислены скорости столкновительных и излучательных переходов между уровнями Ландау в электрон-ионной плазме, условия существования локального термодинамического равновесия (ЛТР) в такой плазме, а также её спектральные непрозрачности и излучательная способность вне рамок ЛТР.

Найдены приближённые аналитические выражения для расчёта указанных спектральных коэффициентов поглощения и скоростей переходов.

8. Осуществлён расчёт тензора поляризуемости частично ионизированной водородной плазмы в сильном магнитном поле и векторов поляризации нормальных электромагнитных волн в такой плазме.
9. Исследована тепловая структура нейтронных звёзд с магнитными полями от нулевого до сверхсильного. Изучен эффект «просветления» теплоизолирующей оболочки нейтронной звезды при наличии аккрецированного слоя или сверхсильного магнитного поля. Предсказаны следствия этих эффектов для тепловой эволюции обычных нейтронных звёзд и магнитаров.
10. Исследованы и рассчитаны спектральные коэффициенты непрозрачности для частично ионизированных водородных атмосфер нейтронных звёзд с сильными магнитными полями. Произведено моделирование таких атмосфер. Создана общедоступная база моделей спектров излучения водородных атмосфер нейтронных звёзд с сильными магнитными полями. На примерах сравнения модельных спектров с результатами наблюдений показана перспективность использования разработанных моделей при интерпретации теплового излучения нейтронных звёзд.

Астрофизическое сообщество широко использует результаты, методы и программы, описанные в диссертации, чему способствует открытость и доступность полученных результатов и созданного в ходе работы программного обеспечения.

## Заключительный вывод

В работе проведено детальное и комплексное теоретическое рассмотрение важнейших термодинамических и кинетических свойств вещества в оболочках нейтронных звёзд с учётом влияния сильных, в том числе квантующих, магнитных полей, и созданы комплексы компьютерных программ и таблиц для моделирования механической и тепловой структуры нейтронных звёзд и спектров их теплового излучения, что является вкладом в развитие важного направления исследований, находящегося на стыке астрофизики и физики плазмы, – исследования вещества в экстремальных условиях, обусловленных уникальными свойствами нейтронных звёзд: их сильной гравитацией, высокой плотностью и сильными магнитными полями.

## Благодарности

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую признательность всем соавторам использованных в диссертации работ за плодотворное сотрудничество. Особенно ценный вклад в работу дали совместные исследования и обсуждения разнообразных проблем физики нейтронных звёзд с ведущими сотрудниками сектора теоретической астрофизики ФТИ им. А.Ф. Иоффе, в котором выполнена эта работа, – Дмитрием Георгиевичем Яковлевым, Юрием Анатольевичем Шибановым, Александром Давидовичем Каминкером, с сотрудниками того же сектора Д. А. Байко, М. Е. Гусаковым, К. П. Левенфиш, В. А. Урпиным, А. И. Чугуновым, П. С. Штерниным, а также с зарубежными коллегами, из которых следует особо отметить Г. Г. Павлова (ранее работавшего в ФТИ им. А.Ф. Иоффе, а с 1992 года – в Пенсильванском государственном университете США), Жиля Шабрие (G. Chabrier, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Франция), Дуна Лая (Dong Lai, Cornell, США), Криса Петика (C. J. Pethick, Институт им. Нильса Бора, Копенгаген, Дания), Павла Хенселя (P. Haensel, Астрономический центр им. Н. Коперника, Варшава, Польша) и Иосифа Вентуру (Ιωσήφ Βεντούρα, Университет Крита).

Немалую помощь работе оказал Российский фонд фундаментальных исследований финансовой поддержкой коллективных инициативных проектов по исследованиям нейтронных звёзд (гранты 93-02-02916, 96-02-16870, 99-02-18099, 00-07-90183, 02-02-17668, 05-02-17065 и 08-02-00837) и проектов международного сотрудничества (гранты 96-02-00177-ННИО и 05-02-22003-НЦНИ), в рамках которых выполнена значительная часть представленных в диссертации исследований, а также поддержкой

участия автора в международных конференциях по этой тематике (гранты 97-02-27687, 98-02-27374, 99-02-27074, 06-02-26501 и 07-02-08165).

Автор благодарен всем сотрудникам сектора теоретической астрофизики за многочисленные полезные обсуждения, а также за доброжелательность и содействие в разнообразных вопросах, связанных с работой. В частности, невозможно переоценить помощь и советы А. М. Красильщикова, касавшиеся проблем, связанных с вычислительной техникой, а также организационных вопросов. Нельзя не отметить и большую организационную поддержку со стороны В. М. Бессоловой.

Автор благодарен администрации ФТИ им. А.Ф. Иоффе, и особенно руководству Отделения физики плазмы, атомной физики и астрофизики в лице Михаила Петровича Петрова и Андрея Данииловича Лебедева, за организационное содействие и создание отличных условий для научной деятельности.

Особо хочется поблагодарить академика Дмитрия Александровича Варшаловича, возглавляющего сектор теоретической астрофизики, за созданные и поддерживаемые им в этом секторе оптимальные условия для плодотворной научной работы и за его постоянную поддержку и внимание.

Автор глубоко признателен своим близким, морально стимулировавшим работу над диссертацией: дочери Екатерине, маме Надежде Дмитриевне Потехиной и жене Ирине Анатольевне Самаре (Григорьевой), безграничная забота, понимание и терпение которой сделали возможным написание этой работы.



# Литература

- [1] Tsuruta S., Cameron A.G.W. “Cooling and detectability of neutron stars,” *Canadian J. Phys.* **44**, 1863–1894 (1966).
- [2] Шапиро С., Тьюколски С. *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды* – В 2-х ч. Пер. с англ. под ред. Я. А. Смородинского. – М.: Мир, 1985.
- [3] Baade W., Zwicky F., “Supernovae and cosmic rays,” *Phys. Rev.*, **45**, 138 (1934).
- [4] Rosenfeld L., “Discussion of the report of D. Pines,” in *Astrophysics & Gravitation*, Proc. 16th Solvay Conf. on Physics (Brussels: Universite de Bruxelles), 174 (1974).
- [5] Haensel P., Potekhin A. Y., Yakovlev D. G. *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*. – New York: Springer, 2007. – 619 p. – ISBN: 978-0-387-33543-8
- [6] Hewish A., Bell S.J., Pilkington J.D.H., Scott P.F., Collins R.A., “Observation of a rapidly rotating radio source,” *Nature*, **217**, 709–713 (1968).
- [7] Hewish A., “Pulsars and high density physics,” *Rev. Mod. Phys.*, **47**, 567–572 (1975).
- [8] Gold T., “Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources,” *Nature*, **218**, 731–732 (1968).
- [9] Shklovsky I.S., “On the nature of the source of X-ray emission of Sco XR-1,” *Astrophys. J.*, **148**, L1–L4 (1967).
- [10] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. *Гравитация*. – В 3-х ч. Пер. с англ. под ред. В. Б. Брагинского и И. Д. Новикова – М.: Мир, 1977.
- [11] Tolman R.C. “Static solutions of Einstein’s field equations for spheres of fluid,” *Phys. Rev.*, **55**, 364–373 (1939).
- [12] Oppenheimer J.R., Volkoff G.M., “On massive neutron cores,” *Phys. Rev.*, **55**, 374–381 (1939).
- [13] Hessels J.W.T., Ransom S.M., Stairs I.H., Freire P.C.C., Kaspi V.M., Camilo, F., “A radio pulsar spinning at 716 Hz,” *Science* **311**, 1901–1904 (2006).

- [14] Ландау Л.Д., «Об источниках звёздной энергии» // *Докл. АН СССР*, **17**, 301–302 (1937); Landau L.D., “Origin of stellar energy,” *Nature*, **141**, 333–334 (1938).
- [15] Яковлев Д.Г., Левенфиш К.П., Шибанов Ю.А., «Остывание нейтронных звезд и сверхтекучесть в их ядрах» // *Успехи физ. наук*, **169**, 826–868 (1999).
- [16] Chugunov A.I., Haensel P., “Thermal conductivity of ions in a neutron star envelope,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **381**, 1143–1153 (2007).
- [17] Aguilera D.N., Cirigliano V., Pons J.A., Reddy S., Sharma R., “Superfluid heat conduction and the cooling of magnetized neutron stars,” *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 091101 [4 pages] (2009).
- [18] Pethick C.J., Potekhin A.Y., “Liquid crystals in the mantles of neutron stars,” *Phys. Lett. B*, **427**, 7–12 (1998).
- [19] Gusakov M. E., Yakovlev D. G., Haensel P., Gnedin O. Y., “Direct Urca process in a neutron star mantle,” *Astron. Astrophys.*, **421**, 1143–1148 (2004).
- [20] Шварцшильд М., *Строение и эволюция звезд*. – Пер. с англ. под ред. А. Г. Масевич. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 424 с.
- [21] Manchester R.N., Hobbs G.B., Teoh A., Hobbs M., “The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue,” *Astron. J.* **129**, 1993–2006 [<http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat/>] (2005).
- [22] Mereghetti S., “The strongest cosmic magnets: soft gamma-ray repeaters and anomalous X-ray pulsars,” *Astron. Astrophys. Rev.* **15**, 225–287 (2008).
- [23] Kaspi V.M., Gavriil F.P., “(Anomalous) X-ray Pulsars,” *Nucl. Phys. B – Proceedings Suppl.*, **132**, 456–465 (2004).
- [24] Dall’Osso S., Shore S.N., Stella L., “Early evolution of a newly born magnetars with a strong toroidal field,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **398**, 1869–1885 (2009).
- [25] Bocquet M., Bonazzola S.,ourgoulhon E., Novak J., “Rotating neutron star models with a magnetic field,” *Astron. Astrophys.*, **301**, 757–775 (1995).
- [26] Chandrasekhar S., Fermi E., “Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field,” *Astrophys. J.*, **118**, 116–141 (1953).
- [27] Lai D., Shapiro E.E., “Cold equation of state in a strong magnetic field – Effects of inverse beta-decay,” *Astrophys. J.*, **383**, 745–751 (1991).
- [28] Гинзбург В.Л. «Магнитные поля коллапсирующих масс и природа сверхзвёзд» // *Докл. АН СССР* **156**, 43–46 (1964).



- [29] Reisenegger A., “Origin and evolution of neutron star magnetic fields,” in Proceedings of the *International Workshop on Strong Magnetic Fields and Neutron Stars*, edited by H.J. Mosquera Cuesta, H. Pérez Rojas, & C.A. Zen Vasconcellos (La Habana, Cuba: ICIMAF, 2003), 33–49.
- [30] Bisnovaty-Kogan G.S., “New form of dynamo equation for convective regions of rotating stars,” *Astrophys. Space Sci.*, **189**, 147–149 (1992).
- [31] Duncan R.C., Thompson C., “Formation of very strongly magnetized neutron stars: Implications for gamma-ray bursts,” *Astrophys. J.*, **392**, L9–L13 (1992).
- [32] Thompson C., Duncan R.C., “Neutron star dynamos and the origins of pulsar magnetism,” *Astrophys. J.*, **408**, 194–217 (1993).
- [33] Baym G., Pethick C., Pines D., “Electrical conductivity in neutron star matter,” *Nature*, **224**, 674–675 (1969).
- [34] Cumming A., Arras P., Zweibel E.G., “Magnetic field evolution in neutron star crusts due to the Hall effect and Ohmic decay,” *Astrophys. J.*, **609**, 999–1017 (2004).
- [35] Гинзбург В.Л., Киржниц Д.А., «О сверхпроводимости нейтронных звёзд» // *ЖЭТФ*, **47**, 2006–2007 (1964).
- [36] Имшенник В.С., Надёжин Д.К. // В сб.: *Вспышки на звёздах (сверхновые рентгеновские источники, Солнце.* / Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. Т. **21** (Под ред. Р. А. Сюняева). – М.: ВИНТИ, 1982. – с. 63
- [37] Gnedin O.Y., Yakovlev D.G., Potekhin A.Y., “Thermal relaxation in young neutron stars,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **324**, 725–736 (2001).
- [38] Strohmayer T.E., Bildsten L., “New views of thermonuclear bursts,” in *Compact Stellar X-Ray Sources*, Cambridge Astrophysics Series, № 39, edited by W.H.G. Lewin & M. van der Klis (Cambridge: Cambridge University Press, 2006), 113–156.
- [39] Blaes O., Blandford R., Goldreich P., Madau, P., “Neutron starquake models for gamma-ray bursts,” *Astrophys. J.*, **343**, 839–848 (1989).
- [40] Franco L.M., Bennett L., Epstein R.I., “Quaking neutron stars,” *Astrophys. J.*, **543**, 987–994 (2004).
- [41] Yakovlev D.G., Pethick C.J., “Neutron star cooling,” *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **42**, 169–210 (2004).
- [42] Zavlin V.E., “Theory of radiative transfer in neutron star atmospheres and its applications,” in *Neutron Stars and Pulsars*, (Proceedings of the 363. WE-Heraeus

Seminar), edited by W. Becker (New York: Springer, 2009), 181–211

- [43] Haberl F., “The magnificent seven: magnetic fields and surface temperature distributions,” *Astrophys. Space Sci.*, **308**, 181–190 (2007).
- [44] Kaspi V., “Soft Gamma Repeaters and Anomalous X-ray Pulsars: Together forever,” in *Young Neutron Stars and Their Environments* edited by F. Camilo, B. M. Gaensler (San Francisco: Astron. Soc. Pacific, 2004), 231–238.
- [45] Фортгов В.Е. «Мощные ударные волны и экстремальные состояния вещества» // *Успехи физ. наук*, **177**, 347–368 (2007).
- [46] Yakovlev D.G., Kaminker A.D., Gnedin O.Y., Haensel P., “Neutrino emission from neutron stars,” *Phys. Rep.*, **354**, 1–155 (2001).
- [47] Haensel P., Zdunik J.L., “Non-equilibrium processes in the crust of an accreting neutron star,” *Astron. Astrophys.*, **227**, 431–436 (1990).
- [48] Haensel P., Zdunik J.L., “Models of crustal heating in accreting neutron stars,” *Astron. Astrophys.*, **480**, 459–464 (2008).
- [49] Tsuruta S., “Thermal properties and detectability of neutron stars – I. Cooling and heating of neutron stars,” *Phys. Rep.*, **56**, 237–277 (1979).
- [50] Urpin V., Konenkov D., “Joule heating in high magnetic field pulsars,” *Astron. Astrophys.*, **483**, 223–230 (2008).
- [51] Pons J.A., Miralles J.A., Geppert U., 2008, “Magneto-thermal evolution of neutron stars,” *Astron. Astrophys.*, **496**, 207–216 (2009).
- [52] Lyutikov M., 2007, “Dissipation of magnetic fields in neutron star crusts due to development of a tearing mode,” препринт (arXiv:0705.3186)
- [53] Reisenegger A., “Deviations from chemical equilibrium due to spin-down as an internal heat source in neutron stars,” *Astrophys. J.*, **442**, 749–757 (1995).
- [54] Reisenegger A., Jofré P., Fernández R., Kantor E., “Rotochemical heating of neutron stars: rigorous formalism with electrostatic potential perturbations,” *Astrophys. J.*, **653**, 568–572 (2006).
- [55] Thompson C., “Astrophysics of the soft gamma repeaters and the anomalous X-ray pulsars,” in *The Neutron Star – Black Hole Connection*, edited by C. Kouveliotou, J. Ventura, & E. Van den Heuvel, NATO Science Ser. C, vol. 567 (Dordrecht: Kluwer, 2001), 369–391.
- [56] Kaminker A.D., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G., Chabrier G., “Heating and cooling

- of magnetars with accreted envelopes,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **395**, 2257–2267 (2009).
- [57] Hansen C.J., Van Horn H.M., “Steady-state nuclear fusion in accreting neutron-star envelopes,” *Astrophys. J.*, **195**, 735–741 (1975).
- [58] Woosley S.E., Taam R.E., “Gamma-ray bursts from thermonuclear explosions on neutron stars,” *Nature*, **263**, 101–103 (1976).
- [59] Shaposhnikov N., Titarchuk L., “On the nature of the flux variability during an expansion stage of a type I X-ray burst: Constraints on neutron star parameters for 4U 1820–30,” *Astrophys. J.*, **606**, L57–L60 (2004).
- [60] Brown E.F., Bildsten L., Rutledge R.E., “Crustal heating and quiescent emission from transiently accreting neutron stars,” *Astrophys. J.*, **504**, L95–L98 (1998).
- [61] Rutledge R.E., Bildsten L., Brown E.F., Pavlov G.G., Zavlin V.E., “Quiescent thermal emission from the neutron star in Aquila X-1,” *Astrophys. J.*, **559**, 1054–1059 (2001).
- [62] Rutledge R.E., Bildsten L., Brown, E.F., Pavlov G.G., Zavlin V.E. “Variable thermal emission from Aquila X-1 in quiescence,” *Astrophys. J.*, **577**, 346–358 (2002).
- [63] Rutledge R.E., Bildsten L., Brown E.F., Pavlov G.G., Zavlin V.E., Ushomirsky G., “Crustal emission and the quiescent spectrum of the neutron star in KS 1731–260,” *Astrophys. J.*, **580**, 413–422 (2002).
- [64] Brown E.F., Cumming A., “Mapping crustal heating with the cooling lightcurves of quasi-persistent transients,” *Astrophys. J.*, **698**, 1020–1032 (2009).
- [65] Манчестер Р., Тейлор Дж. *Пульсары*. – Пер. с англ. под ред. А. Д. Кузьмина. – М.: Мир, 1980. – 292 с.
- [66] Goldreich P., Julian W.H., “Pulsar electrodynamics,” *Astrophys. J.*, **157**, 869–880 (1969).
- [67] Zavlin V.E., “Studying millisecond pulsars in X-rays,” *Astrophys. Space Sci.*, **308**, 297–307 (2007).
- [68] Zavlin V.E., Pavlov G.G., Sanwal D., Manchester R.N., Trümper J., Halpern J., Becker W., “X-radiation from the millisecond pulsar J0437–4715,” *Astrophys. J.*, **569**, 894–902 (2002).
- [69] Ertan Ü., Alpar M.A., Erkut M.H., Ekşi K.Y., Çalışkan Ş., “Anomalous X-ray pulsars: persistent states with fallback disks,” *Astrophys. Space Sci.*, **308**, 73–77 (2007).
- [70] van Leeuwen H.-J., “Problèmes de la theorie électronique du magnétisme,” *J. de*

*Physique et le Radium*, Ser. VI, **2**, 361–377 (1921).

- [71] Harris G.M., Roberts J.E., Trulio J.G., “Equilibrium properties of a partially ionized plasma,” *Phys. Rev.*, **119**, 1832–1841 (1960).
- [72] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Статистическая физика. Часть 1* («Теоретическая физика», том V). – Изд. 3-е, доп. – М.: Наука, 1976. – 584 с.
- [73] Jancovici B., “On the relativistic degenerate electron gas,” *Nuovo Cimento* **25**, 428–455 (1962).
- [74] Douchin F., Haensel P., “Inner edge of neutron-star crust with SLy effective nucleon-nucleon interactions,” *Phys. Lett. B*, **485**, 107–114 (2000); “A unified equation of state of dense matter and neutron star structure,” *Astron. Astrophys.*, **380**, 151–167 (2001).
- [75] Negele J.W., Vautherin D., “Neutron star matter at subnuclear densities,” *Nucl. Phys.*, **A 207**, 298–320 (1973).
- [76] Надёжин Д.К., «Таблицы к уравнению состояния электронно-позитронного газа» // *Научные информации Астрон. Совета СССР*, **33**, 117–142 (1974).
- [77] Timmes F.X., Arnett D., *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **125**, 277–294 (1999).
- [78] Timmes F.X., Swesty F.D., *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **126**, 501–516 (2000).
- [79] Frenkel J., “Anwendung der Pauli-Fermischen Elektronengasttheorie auf das Problem der Kohäsionskräfte,” *Z. f. Physik* **50**, 234–248 (1928).
- [80] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (University of Chicago Press, Chicago, 1939; Dover, New York, 1957), Chap. X.
- [81] Eggleton P.P., Faulkner J., & Flannery B.P., “An approximate equation of state for stellar material,” *Astron. Astrophys.*, **23**, 325–330 (1973).
- [82] Бисноватый-Коган Г.С. *Физические вопросы теории звёздной эволюции*. – М.: Наука, 1989. – 487 с.
- [83] Blinnikov S.I., Dunina-Barkovskaya N.V., Nadyozhin D.K., *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **106** 171–203 (1996); erratum: *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **118**, 603 (1998).
- [84] Chabrier G., Potekhin A.Y., 1998, “Equation of state of fully ionized electron-ion plasmas,” *Phys. Rev. E*, **58**, 4941–4949 (2009).
- [85] Potekhin A.Y., Chabrier G., “Thermodynamic functions of fully ionized electron-ion plasmas: analytic approximations for astrophysical applications,” *Contrib. Plasma*

- Phys.*, submitted (2009).
- [86] Жирифалько Л. *Статистическая физика твёрдого тела*. – Пер. с англ. под ред. В. З. Кресина и Б. М. Струнина. – М.: Мир, 1975. – 382 с.
- [87] Antia H.M., “Rational function approximations for Fermi-Dirac integrals,” *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **84**, 101–108 (1993).
- [88] Abe R., “Giant cluster expansion theory and its application to high-temperature plasma,” *Progr. Theor. Phys.* **22**, 213–226 (1959).
- [89] Cohen E.G.D., Murphy T.J., “New results in the theory of the classical electron gas,” *Phys. Fluids* **12**, 1403–1411 (1969).
- [90] Baus M., Hansen J.P., “Statistical mechanics of simple Coulomb systems,” *Phys. Rep.*, **59**, 1–94 (1980).
- [91] Caillol J.M., *J. Chem. Phys.* **111**, 6538 (1999).
- [92] DeWitt H., Slattery W., “Screening enhancement of thermonuclear reactions in high density stars,” *Contrib. Plasma Phys.* **39**, 97–100 (1999).
- [93] DeWitt H., Slattery W., “Validity of the linear mixing rule for strongly coupled ionic fluids,” *Contrib. Plasma Phys.* **43**, 279–281 (2003).
- [94] Potekhin A.Y., Chabrier G., Chugunov A.I., DeWitt H.E., Rogers F.J., “Addendum to ‘Equation of state of classical Coulomb plasma mixtures’,” *Phys. Rev. E*, **80**, 047401 [4 pages] (2009).
- [95] Potekhin A.Y., Chabrier G., “Equation of state of fully ionized electron-ion plasma. II. Extension to high densities,” *Phys. Rev. E*, **62**, 8554–8563 (2000).
- [96] Potekhin A.Y., Chabrier G., Rogers F.J., “Equation of state of classical Coulomb plasma mixtures,” *Phys. Rev. E*, **79**, 016411 [6 pages] (2009).
- [97] Wigner E.P., “On the quantum correction for thermodynamic equilibrium,” *Phys. Rev.*, **40**, 749–759 (1932).
- [98] Hansen J.P., “Statistical mechanics of dense ionized matter. I. Equilibrium properties of the classical one-component plasma,” *Phys. Rev. A*, **8**, 3096–3109 (1973).
- [99] Hansen J.P., Vieillefosse P., “Quantum corrections in dense ionized matter,” *Phys. Lett. A*, **53**, 187–188 (1975).
- [100] Киттель Ч. *Квантовая теория твердых тел*. – Пер. с англ. А. А. Гусева. – М.: Наука, 1967. – 492 с.

- [101] Baiko D.A., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G., “Thermodynamic functions of harmonic Coulomb crystals,” *Phys. Rev. E*, **64**, 057402 [4 pages] (2001).
- [102] Байко Д.А. *Кинетические явления в остывающих нейтронных звездах*. – Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. – Санкт-Петербург: ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН, 2000. – 135 с.
- [103] Pollock L.E., Hansen J.P., “Statistical mechanics of dense ionized matter. II. Equilibrium properties and melting transition of the crystallized one-component plasma,” *Phys. Rev. A*, **8**, 3110–3122 (1973).
- [104] Carr W.J., Jr., Coldwell-Horsfall R.A., Fein A.E., “Anharmonic contribution to the energy of a dilute electron gas – Interpolation for the correlation energy,” *Phys. Rev.*, **124**, 747–752 (1961).
- [105] Albers R.C., Gubernatis J.E., “Low-order anharmonic contributions to the internal energy of the one-component plasma,” *Phys. Rev. B*, **33**, 5180–5185 (1986); erratum: *Phys. Rev. B*, **42**, 11373 (1990).
- [106] Nagara H., Nagata Y., Nakamura T., “Melting of the Wigner crystal at finite temperature,” *Phys. Rev. A*, **36**, 1859–1873 (1987).
- [107] Dubin D.H.E., “First-order anharmonic correction to the free energy of a Coulomb crystal in periodic boundary conditions,” *Phys. Rev. A*, **42**, 4972–4982 (1990).
- [108] Farouki R.T., Hamaguchi S., “Thermal energy of the crystalline one-component plasma from dynamical simulations,” *Phys. Rev. E*, **47**, 4330–4336 (1993).
- [109] Iyetomi H., Ogata S., Ichimaru S., “Quantum Monte Carlo simulation study of free energies and melting transitions in Coulomb solids,” *Phys. Rev. B*, **47**, 11703–11711 (1993).
- [110] Jones M.D., Ceperley D.M., “Crystallization of the one-component plasma at finite temperature,” *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 4572–4575 (1996).
- [111] Chabrier G., Douchin F., Potekhin A.Y., “Dense astrophysical plasmas,” *J. Phys.: Condens. Matter* **14**, 9133–9139 (2002).
- [112] Киттель Ч. *Введение в физику твердого тела*. – Пер. с англ. под ред. А. А. Гусева. – М.: Наука, 1978. – 792 с.
- [113] Давыдов А.С. *Теория твердого тела*. – М.: Наука, 1976. – 640 с.
- [114] Baiko D.A., Kaminker A.D., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G., “Ion structure factors and electron transport in dense Coulomb plasmas,” *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 5556–5559

- (1998).
- [115] Baiko D.A., Yakovlev D.G., DeWitt H.E., Slattery W.L., “Coulomb crystals in the harmonic lattice approximation,” *Phys. Rev. E*, **61**, 1912–1919 (2000).
  - [116] Raikh M.E., Yakovlev D.G., “Thermal and electrical conductivities of crystals in neutron stars and degenerate dwarfs,” *Astrophys. Space Sci.*, **87**, 193–203 (1982).
  - [117] Kaminker A.D., Pethick C.J., Potekhin A.Y., Thorsson V., Yakovlev D.G., “Neutrino-pair bremsstrahlung by electrons in neutron star crusts,” *Astron. Astrophys.*, **343**, 1009–1024 (1999).
  - [118] Flowers E., Itoh N., “Transport properties of dense matter,” *Astrophys. J.*, **206**, 218–242 (1976).
  - [119] Van Horn H.M., “Crystallization of a classical one-component Coulomb plasma,” *Phys. Lett. A*, **28**, 706–707 (1969).
  - [120] Mochkovich R., Hansen J.P., “Fluid-solid coexistence curve of dense Coulombic matter,” *Phys. Lett. A*, **73**, 35–38 (1979).
  - [121] Ceperley D.M., Alder B.J., “Ground state of the electron gas by a stochastic method,” *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 566–569 (1980).
  - [122] Chabrier G., “Quantum effects in dense Coulombic matter – Application to the cooling of white dwarfs,” *Astrophys. J.*, **414**, 695–700 (1993).
  - [123] Yakovlev D.G., Shalybkov D.A., “Degenerate cores of white dwarfs and envelopes of neutron stars: thermodynamics and plasma screening in thermonuclear reactions,” *Sov. Sci. Rev., Ser. E: Astrophys. Space Phys.* **7**, 311–386 (1989).
  - [124] Galam S., Hansen J.P., “Statistical mechanics of dense ionized matter. VI. Electron screening corrections to the thermodynamic properties of the one-component plasma,” *Phys. Rev. A*, **14**, 816–832 (1976).
  - [125] Chabrier G., Ashcroft N.W., “Linear mixing rule in screened binary ionic mixtures,” *Phys. Rev. A*, **42**, 2284–2291 (1990).
  - [126] Chabrier G., “An equation of state for fully ionized hydrogen,” *J. Phys. (Paris)* **51**, 1607–1632 (1990).
  - [127] Ichimaru S., Iyetomi H., Tanaka S., “Statistical physics of dense plasmas: thermodynamics, transport coefficients and dynamic correlations,” *Phys. Rep.*, **149**, 91–205 (1987).
  - [128] Salpeter E.E., “Energy and pressure of a zero-temperature plasma,” *Astrophys. J.*,

**134**, 669–682 (1961).

- [129] Hamaguchi S., Farouki R.T., Dubin D.H.E., “Triple point of Yukawa systems,” *Phys. Rev. E*, **56**, 4671–4682 (1997).
- [130] Militzer B., Graham R.L., “Simulations of dense atomic hydrogen in the Wigner crystal phase,” *J. Phys. Chem. Sol.* **67**, 2136–2143 (2006).
- [131] Baiko D.A., “Effect of the electron gas polarizability on the specific heat of phonons in Coulomb crystals,” *Phys. Rev. E*, **66**, 056405 [10 pages] (2002).
- [132] Vieillefosse P., Hansen J.P., “Statistical mechanisms of dense ionized matter. V. Hydrodynamic limit and transport coefficients of the classical one-component plasma,” *Phys. Rev. A*, **12**, 1106–1116 (1975).
- [133] Hansen B.M.S., “The astrophysics of cool white dwarfs,” *Phys. Rep.*, **399**, 1–70 (2004).
- [134] Tanaka S., Mitake S., Ichimaru S., “Parameterized equation of state for electron liquids in the Singwi-Tosi-Land-Sjölander approximation,” *Phys. Rev. A*, **32**, 1896–1899 (1985).
- [135] Singwi W.L., Tosi M.P., Land R.H., Sjölander A., “Electron correlations at metallic densities,” *Phys. Rev.*, **176**, 589–599 (1968).
- [136] Stolzmann W., Blöcker T., “Thermodynamic properties of stellar matter. I. Equation of state for stellar interiors,” *Astron. Astrophys.*, **314**, 1024–1040 (1996); “Thermodynamical properties of stellar matter. II. Internal energy, temperature and density exponents, and specific heats for stellar interiors,” *Astron. Astrophys.*, **361**, 1152–1168 (2000).
- [137] Hansen J.P., Torrie G.M., Vieillefosse P., “Statistical mechanics of dense ionized matter. VII. Equation of state and phase separation of ionic mixtures in a uniform background,” *Phys. Rev. A*, **16**, 2153–2168 (1977).
- [138] Rosenfeld Y., “Comment on ‘Equation of state and phase diagrams for dense multi-ionic mixture plasmas’,” *Phys. Rev. E*, **52**, 3292 (1995); “Equation of state and correlation functions of strongly coupled plasma mixtures: Density functional theory and analytic models,” *Phys. Rev. E*, **54**, 2827–2838 (1996).
- [139] DeWitt H., Slattery W., Chabrier G., “Numerical simulation of strongly coupled binary ionic plasmas,” *Physica B* **228**, 21–26 (1996).
- [140] Надёжин Д.К., Юдин А.В., «Влияние кулоновского взаимодействия на урав-



- нение состояния в условиях ядерного статистического равновесия» // *Письма в Астрон. журн.*, **31**, 299–308 (2005).
- [141] Däppen W., “The equation of state for stellar envelopes: Comparison of theoretical results,” *Rev. Mex. Astron. Astrofis.* **23**, 141–149 (1992).
- [142] Rogers F.J., “Ionization equilibrium and equation of state in strongly coupled plasmas,” *Phys. Plasm.*, **7**, 51–58 (2000).
- [143] Rogers F.J., Swenson F.J., Iglesias C.A., “OPAL equation-of-state tables for astrophysical applications,” *Astrophys. J.*, **456**, 902–908 (1996).
- [144] Iglesias C.A., Rogers F.J., “Updated OPAL opacities,” *Astrophys. J.*, **464**, 943–953 (1996).
- [145] Fermi E., “Über die Wahrscheinlichkeit der Quantenzustände,” *Z. f. Physik*, **26**, 54–56 (1924).
- [146] Potekhin A.Y., “Ionization equilibrium of hot hydrogen plasma,” *Phys. Plasmas* **3**, 4156–4165 (1996).
- [147] Hummer D.G., Mihalas D., “The equation of state for stellar envelopes. I. An occupation probability formalism for the truncation of internal partition functions,” *Astrophys. J.*, **331**, 794–814 (1988).
- [148] Inglis D.R., Teller E., “Ionic depression of series limits in one-electron spectra,” *Astrophys. J.*, **90**, 439–448 (1939).
- [149] Holtsmark J., “Über die Verbreiterung von Spektrallinien,” *Ann. Phys. (Leipzig)* **58**, 577–630 (1919).
- [150] Mayer H., “Methods of Opacity Calculations,” Los Alamos Scientific Laboratory Report №LA-647 (1947).
- [151] Potekhin A.Y., Gilles D., Chabrier G., “Electric microfield distributions in electron-ion plasmas,” *Phys. Rev. E*, **65**, 036412 [12 pages] (2002).
- [152] Ecker G., Kröll W., “Lowering of the ionization energy for a plasma in thermodynamic equilibrium,” *Phys. Fluids*, **6**, 62–69 (1963).
- [153] Rogers F.J., “Occupation numbers for reacting plasmas – The role of the Planck-Larkin partition function,” *Astrophys. J.*, **310**, 723–728 (1986).
- [154] Stehlé C., Jacquemot S., “Line shapes in hydrogen opacities,” *Astron. Astrophys.*, **271**, 348–359 (1993).

- [155] Potekhin A.Y., Chabrier G., Shibano Yu.A., “Partially ionized hydrogen plasma in strong magnetic fields,” *Phys. Rev. E*, **60**, 2193–2208 (1999); erratum: *Phys. Rev. E*, **63**, 019901 (2000).
- [156] Saumon D., Chabrier G., “Fluid hydrogen at high density – Pressure dissociation,” *Phys. Rev. A*, **44**, 5122–5141 (1991); “Fluid hydrogen at high density – Pressure ionization,” *Phys. Rev. A*, **46**, 2084–2100 (1992).
- [157] Saumon D., Chabrier G., Van Horn H.M., “An equation of state for low-mass stars and giant planets,” *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **99**, 713–741 (1995).
- [158] Chabrier G., Saumon D., Winisdoerffer C., “Hydrogen and helium at high density and astrophysical implications,” *Astrophys. Space Sci.*, **307**, 263–267 (2007).
- [159] Carnahan N.F., Starling K.E., “Equation of state for nonattracting rigid spheres,” *J. Chem. Phys.* **51**, 635–636 (1969).
- [160] Bezukrovniy V., Filinov V.S., Kremp D., Bonitz M., Schlanges M., Kraeft W.D., Levashov P.R., Fortov V.E., “Monte Carlo results for the hydrogen Hugoniot,” *Phys. Rev. E*, **70**, 057401 [4 pages] (2004).
- [161] Massacrier G., “Self-consistent schemes for the calculation of ionic structures and populations in dense plasmas,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, **51**, 221–228 (1994).
- [162] Potekhin A.Y., Massacrier G., Chabrier G., “Equation of state for partially ionized carbon at high temperatures,” *Phys. Rev. E*, **72**, 046402 [8 pages] (2005).
- [163] Pain J.-C., Blenski T., “Self-consistent approach for the thermodynamics of ions in dense plasmas in the superconfiguration approximation,” *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, **81**, 355–369 (2003).
- [164] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика (нерелятивистская теория)* («Теоретическая физика», том III). – Издание 6-е, исправленное. – М.: Физматлит, 2004. – 800 с.
- [165] Eissner W., Nussbaumer H., “A programme for calculating atomic structures,” *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **2**, 1028–1043 (1969).
- [166] Perrot F., Dharma-wardana C., “Exchange and correlation potentials for electron-ion systems at finite temperatures,” *Phys. Rev. A*, **30**, 2619–2626 (1984).
- [167] Fontaine G., Graboske H.C., Jr., Van Horn H.M., “Equation of state for stellar partial ionization zones,” *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **35**, 293–358 (1977).

- [168] Zdunik J.L., Bejger M., Haensel P., “Deformation and crustal rigidity of rotating neutron stars,” *Astron. Astrophys.*, **491**, 489–498 (2008).
- [169] Samuelsson L., Andersson N., “Neutron star asteroseismology. Axial crust oscillations in the Cowling approximation,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **374**, 256–268 (2007).
- [170] Carter B., Quintana H., “Foundations of general relativistic high-pressure elasticity theory,” *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **331**, 57–83 (1972).
- [171] Karlovini M., Samuelsson L., “Elastic stars in general relativity: I. Foundations and equilibrium models,” *Class. Quantum Grav.*, **20**, 3613–3648 (2003); *Corrigendum: Class. Quantum Grav.*, **22**, 771 (2005).
- [172] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория упругости* («Теоретическая физика», том VII). – Изд. 3-е, доп. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
- [173] Ogata S., Ichimaru S., “First-principles calculations of shear moduli for Monte Carlo-simulated Coulomb solids,” *Phys. Rev. A*, **42**, 4867–4870 (1990).
- [174] Fuchs K., “Quantum-mechanical calculation of the elastic constants of monovalent metals,” *Proc. Roy. Soc. London A* **153**, 622–639 (1936).
- [175] de Gennes P.G., Prost J., *The Physics of Liquid Crystals*, 2nd ed. (Oxford: Clarendon Press, 1993).
- [176] Pethick C.J., Ravenhall D.G., “Matter at large neutron excess and the physics of neutron-star crusts,” *Annu. Rev. Nucl. Sci.*, **45**, 429–484 (1995).
- [177] Ravenhall D.G., Pethick C.J., Wilson J.R., “Structure of matter below nuclear saturation density,” *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 2066–2069 (1983).
- [178] Pandharipande V.R., Ravenhall D.G., “Hot nuclear matter,” in *Nuclear Matter and Heavy Ion Collisions*, NATO ASI Series **B205**, edited by M. Soyeur, H. Flocard, B. Tamain, & M. Porneuf, (Dordrecht: Reidel, 1989), 103–132.
- [179] Swesty F.D., 1996, “Thermodynamically consistent interpolation for equation of state tables,” *J. Comp. Physics* **127**, 118–127.
- [180] Nozawa T., Stergioulas N., Gourgoulhon E., Eriguchi Y., “Construction of highly accurate models of rotating neutron stars – comparison of three different numerical schemes,” *A&AS*, **132**, 431–454 (1998).
- [181] Gourgoulhon E., Grandclément P., Taniguchi K., Marck J.-A., Bonazzola S., “Quasiequilibrium sequences of synchronized and irrotational binary neutron stars

- in general relativity: Method and tests,” *Phys. Rev. D*, **63**, 064029 [27 pages] (2001).
- [182] Haensel P., Potekhin A.Y., “Analytical representations of unified equations of state of neutron-star matter,” *Astron. Astrophys.*, **428**, 191–197 (2004).
- [183] Haensel P., Pichon B., “Experimental nuclear masses and the ground state of cold dense matter,” *Astron. Astrophys.*, **283**, 313–318 (1994).
- [184] Baym G., Pethick C., Sutherland P., “The ground state of matter at high densities: Equation of state and stellar models,” *Astrophys. J.*, **170**, 299–317 (1971).
- [185] Marshak R.E., “The radiative and conductive opacities under white dwarf conditions,” *Ann. New York Acad. Sci.*, **41**, 49–65 (1941).
- [186] Mestel L., “On the thermal conductivities of dense stars,” *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **46**, 331–362 (1950).
- [187] Lee T.D., “Hydrogen content and energy-productive mechanism of white dwarfs,” *Astrophys. J.*, **111**, 625–640 (1950).
- [188] Cohen R.S., Spitzer L., Jr., Routly P.McR., “The electrical conductivity of an ionized gas,” *Phys. Rev.*, **80**, 230–238 (1950).
- [189] Spitzer L., Jr., Härm R., “Transport Phenomena in a Completely Ionized Gas,” *Phys. Rev.*, **89**, 977–981 (1953).
- [190] Брагинский С.И., «Явления переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме» // *Журн. эксперим. теор. физ.*, **33**, 459–472 (1957).
- [191] Имшенник В.С., «О теплопроводности плазмы» // *Астрон. журн.*, **38**, 652–655 (1961).
- [192] Спитцер Л. *Физика полностью ионизованного газа*. – Пер. с англ. под ред. М. Л. Левина. – М.: Мир, 1965.
- [193] Займан Дж. *Электроны и фононы. Теория явлений переноса в твердых телах*. – Пер. с англ. под ред. Б. Л. Бонч-Бруевича. – М.: ИЛ, 1962. – 488 с.
- [194] Hubbard W.B., “Studies in stellar evolution. V. Transport coefficients of degenerate stellar matter,” *Astrophys. J.*, **146**, 858–870 (1966).
- [195] Lampe M., “Transport coefficients of degenerate plasma,” *Phys. Rev.*, **170**, 306–319 (1968).
- [196] Lampe M., “Transport theory of a partially degenerate plasma,” *Phys. Rev.*, **174**, 276–280 (1968).

- [197] Hubbard W., Lampe M., “Thermal conduction by electrons in stellar matter,” *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **18**, 297–346 (1969).
- [198] Canuto V., 1970, “Electrical conductivity and conductive opacity of a relativistic electron gas,” *Astrophys. J.*, **159**, 641–652.
- [199] Solinger A.B., “Electron thermal conductivity owing to collisions between degenerate electrons,” *Astrophys. J.*, **161**, 553–559 (1970).
- [200] Kovetz A., Shaviv G., 1973, “The electrical and thermal conductivities of stellar degenerate matter,” *Astron. Astrophys.*, **28**, 315–318.
- [201] Ewart G.M., Guyer R.A., Greenstein G., 1975, “Electrical conductivity and magnetic field decay in neutron stars,” *Astrophys. J.*, **202**, 238–247.
- [202] Яковлев Д.Г., Урпин В.А. «О теплопроводности и проводимости в нейтронных звездах и белых карликах» // *Астрон. журн.*, **57**, 526–536 (1980).
- [203] Урпин В.А., Яковлев Д.Г. «Теплопроводность, обусловленная межэлектронными столкновениями в вырожденном релятивистском электронном газе» // *Астрон. журн.*, **57**, 213–215 (1980).
- [204] Урпин В.А., Яковлев Д.Г. «Термогальваномагнитные явления в белых карликах и нейтронных звездах» // *Астрон. журн.*, **57**, 738–748 (1980).
- [205] Яковлев Д.Г. *Явления переноса тепла и заряда в нейтронных звездах и белых карликах*. – Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. – Санкт-Петербург: ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, 1980. – 157 с.
- [206] Itoh N., Mitake S., Iyetomi H., Ichimaru S., “Electrical and thermal conductivities of dense matter in the liquid metal phase. I – High-temperature results,” *Astrophys. J.*, **273**, 774–782 (1983).
- [207] Nandkumar R., Pethick C.J., “Transport coefficients of dense matter in the liquid metal regime,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **209**, 511–524 (1984).
- [208] Boerker D.B., Rogers F.J., DeWitt H.E., “Electron collision frequency in plasmas,” *Phys. Rev. A*, **25**, 1623–1631 (1982).
- [209] Яковлев Д.Г. «Теплопроводность и проводимость вырожденного электронного газа при рассеянии электронов на тяжелых ионах в жидкой или газообразной фазах» // *Астрон. журн.*, **64**, 661–664 (1987).
- [210] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Физическая кинетика* («Теоретическая физика», том X). – М.: Наука, 1979. – 528 с.

- [211] Hirschfelder J.O., Curtiss C.F., Bird R.B., *Molecular Theory of Gases and Liquids* (New York: Wiley, 1954).
- [212] Гинзбург В.Л. *Распространение электромагнитных волн в плазме*. – 2-е изд., переработанное. – М: Наука, 1967. – 683 с.
- [213] Бисноватый-Коган Г.С., Романова М.М., «Нейтронная диффузия и теплоперенос в оболочках нейтронных звёзд» // *Журн. экперим. теор. физ.*, **83**, 449–459 (1982).
- [214] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., *Квантовая электродинамика* – 2-е изд., перераб. – М.: Физматгиз, 1959. – 656 с.
- [215] Potekhin A.Y., Chabrier G., Yakovlev D.G., “Internal temperatures and cooling of neutron stars with accreted envelopes,” *Astron. Astrophys.*, **323**, 415–428 (1997).
- [216] Williams R.H., DeWitt H.E., 1969, “Quantum-mechanical plasma transport theory,” *Phys. Fluids*, **12**, 2326–2342.
- [217] Itoh N., Uchida S., Sakamoto Yu, Kohyama Y., Nozawa S., “The second born corrections to the electrical and thermal conductivities of dense matter in the liquid metal phase,” *Astrophys. J.*, **677**, 495–502 (2008).
- [218] Schmidt P., Zwicknagel G., Reinhardt P.G., Toepffer C., “Longitudinal and transversal collective modes in strongly correlated plasmas,” *Phys. Rev. E*, **56**, 7310–7313 (1997).
- [219] Edwards S.F., “The electronic structure of liquid metals,” *Proc. Roy. Soc. London A*, **267**, 518–540 (1962).
- [220] Oyamatsu K., “Nuclear shapes in the inner crust of a neutron star,” *Nucl. Phys.*, **A 561**, 431–452 (1993).
- [221] Doggett J.A., Spencer L.V., “Elastic scattering of electrons and positrons by point nuclei,” *Phys. Rev.*, **103**, 1597–1601 (1956).
- [222] Itoh N., Hayashi H., Kohyama Y., “Electrical and thermal conductivities of dense matter in the crystalline lattice phase. III. Inclusion of lower densities,” *Astrophys. J.*, **418**, 405–413 (1993).
- [223] Байко Д.А., Яковлев Д.Г. «Теплопроводности и проводимости кулоновских кристаллов в нейтронных звездах и белых карликах» // *Письма в Астрон. журн.*, **21**, 784–792 (1995).
- [224] Potekhin A.Y., Baiko D.A., Haensel P., Yakovlev D.G., 1999, “Transport properties

- of degenerate electrons in neutron star envelopes and white dwarf cores,” *Astron. Astrophys.*, **346**, 345–353.
- [225] Абрамовиц М., Стиган И.А. (ред.). *Справочник по специальным функциям*. – М.: Наука, 1979. – 832 стр.
- [226] Potekhin A.Y., 1999, “Electron conduction in magnetized neutron star envelopes,” *Astron. Astrophys.*, **351**, 787–797.
- [227] Ventura J., Potekhin A.Y., 2001, “Neutron star envelopes and thermal radiation from the magnetic surface,” in *The Neutron Star – Black Hole Connection*, NATO Science Ser. C, vol. 567, edited by Kouveliotou C., van den Heuvel E.P.J., Ventura J., (Kluwer, Dordrecht), 393–414.
- [228] Shternin P.S., Yakovlev D.G., “Electron thermal conductivity owing to collisions between degenerate electrons,” *Phys. Rev. D*, **74**, 043004 [8 pages] (2006).
- [229] Barriga-Carrasco M.D., Potekhin A.Y., “Proton stopping in plasmas considering  $e^- - e^-$  collisions,” *Laser and Particle Beams*, **24**, 553–558 (2006).
- [230] Cassisi S., Potekhin A.Y., Pietrinferni A., Catelan M., Salaris M., “Updated electron-conduction opacities: the impact on low-mass stellar models,” *Astrophys. J.*, **661**, 1094–1104 (2007).
- [231] Potekhin A.Y., Yakovlev D.G., “Electron conduction along quantizing magnetic fields in neutron star crusts. II. Practical formulae,” *Astron. Astrophys.*, **314**, 341–352; erratum: 1997, *Astron. Astrophys.*, **327**, 442 (1996).
- [232] Young D.A., Corey E.M., DeWitt H.E., “Analytic fit to the one-component-plasma structure factor,” *Phys. Rev. A*, **44**, 6508–6512 (1991).
- [233] Itoh N., Kohyama Y., “Electrical and thermal conductivities of dense matter in the crystalline lattice phase. II – Impurity scattering,” *Astrophys. J.*, **404**, 268–270 (1993); erratum: *Astrophys. J.*, **420**, 943 (1994).
- [234] Horowitz C.J., Caballero O.L., Berry D.K., “Thermal conductivity and phase separation of the crust of accreting neutron stars,” *Phys. Rev. E*, **79**, 026103 [8 pages] (2009).
- [235] Соколов А.А., Тернов И.М. *Релятивистский электрон*. – М.: Наука, 1974. – 392 с.
- [236] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля* («Теоретическая физика», том II). – изд. 7-е, испр. – М.: Наука, 1988. – 534 с.

- [237] Schwinger J., *Particles, Sources, and Fields* (Redwood City: Addison-Wesley, 1988).
- [238] Каминкер А.Д., Яковлев Д.Г. «К описанию релятивистского электрона в квантующем магнитном поле. Поперечные кинетические коэффициенты электронного газа» // *Теор. Матем. Физ.* **49**, № 2, 248–260 (1981).
- [239] Potekhin A.Y., Lai D., “Statistical equilibrium and ion cyclotron absorption/emission in strongly magnetized plasmas,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **376**, 793–808 (2007).
- [240] Ruder H., Wunner G., Herold H., Geyer F., *Atoms in Strong Magnetic Fields: Quantum Mechanical Treatment and Applications in Astrophysics and Quantum Chaos*. – Berlin: Springer, 1994. – 309 pages.
- [241] Lai D., “Matter in strong magnetic fields,” *Rev. Mod. Phys.* **73**, 629–661 (2001).
- [242] Canuto V., Ventura J., “Quantizing Magnetic Fields in Astrophysics,” *Fundam. Cosm. Phys.* **2**, 203–353 (1977).
- [243] Rösner W., Wunner G., Herold H., Ruder H., “Hydrogen atoms in arbitrary magnetic fields. I. Energy levels and wave functions,” *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **17**, 29–52 (1984).
- [244] Simola J., Virtamo J., “Energy levels of hydrogen atoms in a strong magnetic field,” *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **11**, 3309–3322 (1978).
- [245] Forster H., Strupat W., Rösner W., Wunner G., Ruder H., Herold H., “Hydrogen atoms in arbitrary magnetic fields. II. Bound-bound transitions,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **17**, 1301–1319 (1984).
- [246] Lindgren K.A.U., Virtamo J.T., “Relativistic hydrogen atom in a strong magnetic field,” *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **12**, 3465–3472 (1979).
- [247] Chen Z., Goldman S.P., “Relativistic and nonrelativistic finite-basis-set calculations of low-lying levels of hydrogenic atoms in intense magnetic fields,” *Phys. Rev. A*, **45**, 1722–1731 (1992).
- [248] Kravchenko Yu.P., Liberman M.A., Johansson B. “Exact solution for a hydrogen atom in a magnetic field of arbitrary strength,” *Phys. Rev. A*, **54**, 287–305 (1996).
- [249] Ivanov M.V., Schmelcher P., “Ground states of the atoms H, He, . . . , Ne and their singly positive ions in strong magnetic fields: The high field regime,” *Phys. Rev. A*, **61**, 022505 [13 pages] (2000).
- [250] Miller M.C., Neuhauser D., “Atoms in very strong magnetic fields,” *Mon. Not. R.*



- Astron. Soc.*, **253**, 107–122 (1991).
- [251] Ivanov M.V., Schmelcher P., “The boron atom and boron positive ion in strong magnetic fields,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **34**, 2031–2044 (2001).
- [252] Mori, K., Hailey, C., “Atomic calculation for the atmospheres of strongly magnetized neutron stars,” *Astrophys. J.*, **564**, 914–929 (2002).
- [253] Detmer T., Schmelcher P., Cederbaum L.S., “Hydrogen molecule in a magnetic field: The lowest states of the  $\Pi$  manifold and the global ground state of the parallel configuration,” *Phys. Rev. A*, **57**, 1767–1777 (1998).
- [254] Ruderman M.A., “Matter in superstrong magnetic fields: the surface of a neutron star,” *Phys. Rev. Lett.*, **27**, 1306–1308 (1971).
- [255] Medin Z., Lai D., “Density-functional-theory calculations of matter in strong magnetic fields: II. Infinite chains and condensed matter,” *Phys. Rev. A*, **74**, 062508 [20 pages] (2007).
- [256] Wunner G., Ruder H., Herold H., “Energy levels and oscillator strengths for the two-body problem in magnetic fields,” *Astrophys. J.*, **247**, 374–381 (1981).
- [257] Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. «К теории экситона Мотта в сильном магнитном поле» // *Журн. эксперим. теор. физ.*, **53**, 717–722 (1967).
- [258] Herold H., Ruder H., Wunner G., “The two-body problem in the presence of a homogeneous magnetic field,” *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **14**, 751–764 (1981).
- [259] Johnson B.R., Hirschfelder J.O., Yang K.H., “Interaction of atoms, molecules and ions with constant electric and magnetic fields,” *Rev. Mod. Phys.* **55**, 109–153 (1983).
- [260] Johnson M.H., Lippmann B.A., “Motion in a constant magnetic field,” *Phys. Rev.*, **76**, 828–832 (1949).
- [261] Буркова Л.А., Дзялошинский И.Е., Друкарёв С.Ф., Монозон Б.С. «Водородоподобная система в скрещенных электрическом и магнитном полях» // *Журн. эксперим. теор. физ.*, **71**, 526–530 (1976).
- [262] Ипатов И.П., Маслов А.Ю., Субашиев А.В. «Об изменении энергетического спектра экситона при его движении поперёк магнитного поля» // *Журн. эксперим. теор. физ.*, **87**, 1804–1808 (1984).
- [263] Baye D., Clerbaux N., Vincke M., “Delocalized states of atomic hydrogen in crossed electric and magnetic fields,” *Phys. Lett. A*, **166**, 135–139 (1992).
- [264] Dzyaloshinskii I.E., “Effects of the finite proton mass in a hydrogen atom in crossed

- magnetic and electric fields: a state with a giant electric dipole moment,” *Phys. Lett. A*, **165**, 69–71 (1992).
- [265] Schmelcher P., “Delocalization of excitons in a magnetic field,” *Phys. Rev. B*, **48**, 14642–14645 (1993).
- [266] Vincke M., Le Dourneuf M., Baye D., “Hydrogen atom in crossed electric and magnetic fields: transition from weak to strong electron-proton decentring,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **25**, 2787–2807 (1992).
- [267] Bezchastnov V.G., Pavlov G.G., Ventura J., “Discrete eigenstates of the  $\text{He}^+$  ion moving in a strong magnetic field,” *Phys. Rev. A*, **58**, 180–185 (1998).
- [268] Pavlov G.G., Bezchastnov V.G., “Once-ionized helium in superstrong magnetic fields,” *Astrophys. J.*, **635**, L61–L64 (2005).
- [269] Vincke M., Baye D., “Centre-of-mass effects on the hydrogen atom in a magnetic field,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **21**, 2407–2424 (1988).
- [270] Pavlov G.G., Mészáros P., “Finite-velocity effects on atoms in strong magnetic fields and implications for neutron star atmospheres,” *Astrophys. J.*, **416**, 752–761 (1993).
- [271] Potekhin A.Y., “Structure and radiative transitions of the hydrogen atom moving in a strong magnetic field,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **27**, 1073–1090 (1994).
- [272] Potekhin A.Y., Pavlov G.G., “Photoionization of the hydrogen atom in strong magnetic fields,” *Astrophys. J.*, **407**, 330–341 (1993).
- [273] Bezchastnov V.G., Potekhin A.Y., “Transitions between shifted Landau states and photoionization of the hydrogen atom moving in a strong magnetic field,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **27**, 3349–3361 (1994).
- [274] Potekhin A.Y., Chabrier G., “Equation of state and opacities for hydrogen atmospheres of neutron stars with strong magnetic fields,” *Astrophys. J.*, **585**, 955–974 (2003).
- [275] Hasegawa H., Howard R.E., “Optical absorption spectrum of hydrogenic atoms in a strong magnetic field,” *J. Phys. Chem. Sol.*, **21**, 179–198 (1961).
- [276] Парлетт Б. *Симметричная проблема собственных значений. Численные методы*. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 384 с.
- [277] Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей Том 1. Основные положения и общие методы*. – Пер. с англ. под ред. В.П. Шидловского. – М.: Мир, 1991. – 504 с.

- [278] Potekhin A.Y., Pavlov G.G., “Photoionization of hydrogen in atmospheres of magnetic neutron stars,” *Astrophys. J.*, **483**, 414–425 (1997).
- [279] Potekhin A.Y., Chabrier G., “Equation of state and opacities for hydrogen atmospheres of magnetars,” *Astrophys. J.*, **600**, 317–323 (2004).
- [280] Potekhin A.Y., “Hydrogen atom moving across a strong magnetic field: analytical approximations,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **31**, 49–63 (1998).
- [281] Ho W.C.G., Lai D., Potekhin A.Y., Chabrier G., “Atmospheres and spectra of strongly magnetized neutron stars. III. Partially ionized hydrogen models,” *Astrophys. J.*, **599**, 1293–1301 (2003).
- [282] Potekhin A.Y., Turbiner A.V., “Hydrogen atom in a magnetic field: the quadrupole moment,” *Phys. Rev. A*, **63**, 065402 [4 pages] (2001).
- [283] Турбинер А.В. // *Ядерная физика*, **46**, 204 (1987).
- [284] Гнедин Ю.Н., Павлов Г.Г., Цыган А.И. // *Журн. эксперим. теор. физ.*, **66**, 421 (1974)
- [285] Pavlov G.G., Potekhin A.Yu., “Photoionization of the hydrogen atom in a strong magnetic field,” *Astron. Astrophys. Transactions*, **4**, 261–267 (1994).
- [286] Wigner E.P., Eisenbud L., “Higher angular momenta and long range interaction in resonance reactions,” *Phys. Rev.*, **72**, 29–41 (1947).
- [287] Seaton M.J., “Quantum defect theory,” *Rep. Prog. Phys.* **46**, 167–257 (1983).
- [288] Wunner G., Herold H., Ruder H., “Radiative and thermal widths of Landau-excited hydrogen atoms in very strong magnetic fields,” *J. Phys. B: At. Mol. Phys.*, **16**, 2937–2943 (1983).
- [289] Friedrich H. *Theoretical Atomic Physics*. – Berlin: Springer, 1991. – 329 pages.
- [290] Friedrich H., Chu M., *Phys. Rev. A*, **28**, 1423 (1983).
- [291] Potekhin A.Y., Pavlov G.G., Ventura J., “Ionization of the hydrogen atom in strong magnetic fields. Beyond the adiabatic approximation,” *Astron. Astrophys.*, **317**, 618–629 (1997).
- [292] Ventura J., “Collision frequency and Coulomb scattering in an intense magnetic field,” *Phys. Rev. A*, **8**, 3021–3031 (1973).
- [293] Павлов Г.Г., Яковлев Д.Г. «Кулоновское замедление быстрых протонов в сильном магнитном поле» // *Журн. эксперим. теор. физ.*, **70**, 753–767 (1976).

- [294] Langer S.H., “Collisional excitation of electron Landau levels in strong magnetic fields,” *Phys. Rev. D*, , 23, 328–346 (1981); erratum: *Phys. Rev. D*, **25**, 1157 (1982).
- [295] Storey M.C., Melrose D.B., “Collisions in strong magnetic fields,” *Aust. J. Phys.*, 40, 89–107 (1987).
- [296] Potekhin A.Y., “Electron conduction along quantizing magnetic fields in neutron star crusts. I. Theory,” *Astron. Astrophys.*, **306**, 999–1010 (1996); erratum: *ibid.*, **327**, 441 (1997).
- [297] Павлов Г.Г., Панов А.Н. «Поглощение и испускание фотона при кулоновских столкновениях в магнитном поле» // *Журн. экперим. теор. физ.*, **71**, 572–584 (1976).
- [298] Miller G.S., Salpeter E.E., Wasserman I., 1987, “Deceleration of infalling plasma in the atmospheres of accreting neutron stars. I. Isothermal atmospheres,” *ApJ*, 314, 215–233 (1987).
- [299] Armstrong B.M., Nicholls R.W. *Emission, Absorption and Transfer of Radiation in Heated Atmospheres*, Ser. *Monographs in natural philosophy* – Oxford: Pergamon, 1972. – 296 pages.
- [300] Kopidakis N., Ventura J., Herold H., “Atomic ionization in magnetic neutron star atmospheres: transverse motion effects,” *Astron. Astrophys.*, **308**, 747–762 (1996).
- [301] Schmitt W., Herold H., Ruder H., Wunner G., “The photoionisation of the hydrogen atom in strong magnetic fields,” *Astron. Astrophys.*, **94**, 194–198 (1981).
- [302] Wunner G., Ruder H., Herold H., Schmitt W., “Cross sections for photo-ionisation and photo-recombination of hydrogenic atoms in strong magnetic fields,” *Astron. Astrophys.*, **117**, 156–163 (1983).
- [303] Pavlov G.G., Potekhin A.Y., “Bound-bound transitions in strongly magnetized hydrogen plasma,” *Astrophys. J.*, **450**, 883–895 (1995).
- [304] Daugherty J.K., Ventura J., “Absorption of radiation by electrons in intense magnetic fields,” *Phys. Rev. D*, **18**, 1053–1067 (1978).
- [305] Ventura J., “Scattering of light in a strongly magnetized plasma,” *Phys. Rev. D*, , 1684–1695 (1979).
- [306] Kaminker A.D., Pavlov G.G., Shibano Yu.A., “Radiation from a strongly-magnetized plasma: The case of predominant scattering,” *Astrophys. Space Sci.*, **86**, 249–297 (1982).

- [307] Mészáros P. *High-Energy Radiation from Magnetized Neutron Stars*. – Chicago: University of Chicago Press, 1992.
- [308] Соболев В.В. *Курс теоретической астрофизики*. – М.: Наука, 1975. – 504 стр.
- [309] Бете Х., Солпитер Э. *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*. – Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1960. – 566 стр.
- [310] Hummer D.G., “A fast and accurate method for evaluating the nonrelativistic free-free Gaunt factor for hydrogenic ions,” *Astrophys. J.*, **327**, 477–484 (1988).
- [311] Karzas W.J., Latter R., “Electron radiative transitions in a Coulomb field,” *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **6**, 167–212 (1961).
- [312] Nagel W. 1980, “Cyclotron line formation in the accretion column of an X-ray pulsar,” *Astrophys. J.*, **236**, 904–910 (1980).
- [313] Pavlov G.G., Shibano Yu.A., Zavlin V.E., Meyer R.D., “Neutron Star Atmospheres,” in *The Lives of the Neutron Stars*, NATO ASI Series C vol. 450, edited by M.A. Alpar, Ü. Kiziloğlu, & J. van Paradijs (Dordrecht: Kluwer, 1995), 71–90.
- [314] Zane S., Turolla R., Treves A., “Magnetized atmospheres around neutron stars accreting at low rates,” *Astrophys. J.*, **537**, 387–395 (2000).
- [315] Zane S., Turolla R., Stella L., Treves A., “Proton cyclotron features in thermal spectra of ultramagnetized neutron stars,” *Astrophys. J.*, **560**, 384–389 (2001).
- [316] Özel, F., “Surface emission properties of strongly magnetic neutron stars,” *Astrophys. J.*, **563**, 276–288 (2001).
- [317] Ho W.C.G., Lai D., “Atmospheres and spectra of strongly magnetized neutron stars,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **327**, 1081–1096 (2001).
- [318] Medin Z., Lai D., Potekhin A.Y., “Radiative transitions of the helium atom in highly magnetized neutron star atmospheres,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **383**, 161–172 (2008).
- [319] Broderick A., Prakash M., Lattimer J.M., “The equation of state of neutron star matter in strong magnetic fields,” *Astrophys. J.*, **537**, 351–367 (2000).
- [320] Suh I.-S., Mathews G.J., “Cold ideal equation of state for strongly magnetized neutron star matter: Effects on muon production and pion condensation,” *Astrophys. J.*, **546**, 1126–1136 (2001).
- [321] *Физические величины: Справочник* / А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М.

Братковский и др.; Под ред. И.С. Григорьева и Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

- [322] Danz R.W., Glasser M.L., “Exchange energy of an electron gas in a magnetic field,” *Phys. Rev. B*, **4**, 94–99 (1971).
- [323] Fushiki I., Gudmundsson E.H., Pethick C.J., “Surface structure of neutron stars with high magnetic fields,” *Astrophys. J.*, **342**, 958–975 (1989).
- [324] Alastuey A., Jancovici B., “Magnetic properties of a nearly classical one-component plasma in three and two dimensions. II. Strong field,” *Physica A* **102**, 327–343 (1980).
- [325] Cornu F., “Quantum plasmas with or without a uniform magnetic field. I – III,” *Phys. Rev. E*, **58**, 5268–5346 (1998).
- [326] Steinberg M., Ortner J., Ebeling W., “Equation of state of a strongly magnetized hydrogen plasma,” *Phys. Rev. A*, **58**, 3806–3816 (1998).
- [327] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния* («Теоретическая физика», том IX). – М.: Наука, 1978. – 448 с.
- [328] Rybicki G.B., Lightman A.P., *Radiative Processes in Astrophysics*. – New York: Wiley, 1979.
- [329] Железняков В.В., *Излучение в астрофизической плазме*. – М.: Янус-К, 1997. – 528 с.
- [330] Daugherty J.K., Ventura J., “Cyclotron lines in the Her X-1 spectrum: Structure and higher harmonics,” *Astron. Astrophys.*, **61**, 723–727 (1977).
- [331] Melrose D.B., Zheleznyakov V.V., “Quantum theory of cyclotron emission and the X-ray line in Her X-1,” *Astron. Astrophys.*, **95**, 86–93 (1981).
- [332] Pavlov G. G., Bezchastnov V. G., Mészáros P., Alexander S. G., “Radiative widths and splitting of cyclotron lines in superstrong magnetic fields,” *ApJ*, **380**, 541–549 (1991).
- [333] Baring M.G., Gonthier P.L., Harding A.K., “Spin-dependent cyclotron decay rates in strong magnetic fields,” *Astrophys. J.*, **630**, 430–440 (2005).
- [334] Ventura J., Nagel W., Mészáros P., “Possible vacuum signature in the spectra of X-ray pulsars,” *Astrophys. J.*, **233**, L125–L128 (1979).
- [335] Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G. *Processus d’interaction entre photons et atomes*. – Paris: InterEditions / Editions du CNRS, 1988. – 628 pages.

- [336] Джексон Дж. *Классическая электродинамика*. – Пер. с англ. под ред. Э. Л. Бурштейна. – М.: Мир, 1965. – 702 стр.
- [337] Nagel W., Ventura J., *Astron. Astrophys.*, **118**, 66–74 (1983).
- [338] Lai D., Salpeter E.E., “Hydrogen molecules in a superstrong magnetic field: Excitation levels,” *Phys. Rev. A*, **53**, 152–167 (1996).
- [339] Lai D., Salpeter E.E., “Hydrogen phases on the surface of a strongly magnetized neutron star,” *Astrophys. J.*, **491**, 270–285 (1997).
- [340] Херсонский В.К. «Ионизационное равновесие атомарного водорода в сильном магнитном поле» // *Астрон. журн.*, **64**, 433–436 (1987).
- [341] Wigner E., Huntington H.B., “Possibility of a metallic modification of hydrogen,” *J. Chem. Phys.* **3**, 764–770 (1935).
- [342] Landau L.D., Zeldovitch Ya.B., *Acta Physicochim. (URSS)* **18**, 194 (1943).
- [343] Норман Г.Э., Старостин А.Г. // *Теплофиз. выс. темп.*, **6**, 410 (1968); **8**, 413 (1970).
- [344] Ebeling W., Richert W., “Plasma phase transition in hydrogen,” *Phys. Lett. A*, **108**, 80–82 (1985).
- [345] Turolla R., Zane S., Drake J.J., Bare quark stars or naked neutron stars? The case of RX J1856.5–3754,” *Astrophys. J.*, **603**, 265–282 (2004).
- [346] Miralles J.A., Urpin V., van Riper K., “Convection in the surface layers of neutron stars,” *Astrophys. J.*, **480**, 358–363 (1997).
- [347] Seaton M.J., Yan Y., Mihalas D., Pradhan A.K., “Opacities for stellar envelopes,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **266**, 805–828 (1994).
- [348] Эргма Э.В. «Термоядерные процессы в аккрецирующих белых карликах (новые, симбиотические звёзды и сверхновые I типа)» // Итоги науки и техники. Сер. «Астрономия». – Т. 31. – М.: ВИНТИ, 1986. – с. 228–267.
- [349] Yakovlev D.G., Kaminker A.D., “Neutron star crusts with magnetic fields,” in *The Equation of State in Astrophysics*, edited by G. Chabrier & E. Schatzman (Cambridge: Cambridge University Press, 1994), 214–238.
- [350] Yakovlev D.G., Preprint № 678, Ioffe Phys.-Tech. Inst. – Leningrad, 1980.
- [351] Yakovlev D.G., “Transport properties of the degenerate electron gas of neutron stars along the quantizing magnetic field,” *Astrophys. Space Sci.*, **98**, 37–59 (1984).

- [352] Hernquist L., “Relativistic electron transport in a quantizing magnetic field,” *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **56**, 325–367 (1984).
- [353] Van Riper K., “Magnetic neutron star atmospheres,” *Astrophys. J.*, **329**, 339–375 (1988).
- [354] Schaaf M., “Longitudinal and transverse heat conduction in quantizing magnetic fields of neutron stars,” *Astron. Astrophys.*, **205**, 335–346 (1988).
- [355] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. («Теоретическая физика», том VIII). – М.: Наука, 1982. – 624 с.
- [356] Stygar W.A., Gerdin G.A., Fehl D.L., “Analytic electrical-conductivity tensor of a nondegenerate Lorentz plasma,” *Phys. Rev. E*, **66**, 046417 [15 pages] (2002).
- [357] Bennadji K., Gombert M.-M., Bendib A., “Local-field-correction effects on the electron response functions and on the electrical conductivity in a hydrogen plasma,” *Phys. Rev. E*, **79**, 016408 [8 pages] (2009).
- [358] Heyl J., Hernquist, L., Almost analytic models of ultramagnetized neutron star envelopes, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **300**, 599–615 (1998).
- [359] Thorne K.S., 1977, “The relativistic equations of stellar structure and evolution,” *Astrophys. J.*, **212**, 825–831.
- [360] Gudmundsson E.H., Pethick C.J., Epstein R.I., “Structure of neutron star envelopes,” *Astrophys. J.*, **272**, 286–300 (1983).
- [361] Potekhin A.Y., Chabrier G., Yakovlev D.G., “Heat blanketing envelopes and thermal radiation of strongly magnetized neutron stars,” *Astrophys. Space Sci.*, **308**, 353–361 (2007); arXiv:astro-ph/0611014v3
- [362] Гинзбург В.Л., Озерной Л.М. «О гравитационном коллапсе массивной звезды» // *Журн. эксперим. теор. физ.*, **47**, 1030–1040 (1964).
- [363] Гнедин О.Ю., Яковлев Д.Г. «Остывание нейтронных звёзд и подавление прямого урка-процесса нуклонной сверхтекучестью» // *Письма в Астрон. журн.*, **19**, 280–287 (1993).
- [364] Yakovlev D.G., Levenfish K.P., Potekhin A.Y., Gnedin O.Y., Chabrier G., “Thermal states of coldest and hottest neutron stars in soft X-ray transients,” *Astron. Astrophys.*, **417**, 169–179 (2004).
- [365] Chabrier G., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G., “Cooling neutron stars with accreted envelopes,” *Astrophys. J.*, **477**, L99–L102 (1997).



- [366] Potekhin A.Y., Yakovlev D.G., Chabrier G., Gnedin O.Y., “Thermal structure and cooling of superfluid neutron stars with accreted magnetized envelopes,” *Astrophys. J.*, **594**, 404–418 (2003).
- [367] Zavlin V.E., Pavlov G.G., Shibano Yu.A., Rogers F.J., Iglesias C.A. “X-ray spectra from convective photospheres of neutron stars,” in *Proceedings of the Int. Conf. on X-ray Astronomy and Astrophysics “Röntgenstrahlung from the Universe,”* MPE Report 263 edited by H.U. Zimmermann, J.E. Trümper, H. Yorke (Garching: MPE, 1996), 209–210.
- [368] Blaes O.M., Blandford R.D., Madau P., Yan L., “On the evolution of slowly accreting neutron stars,” *Astrophys. J.*, **399**, 634–645 (1992).
- [369] Sahrling, M., Chabrier, G., “The effect of electron gas polarization on thermonuclear reaction rates in dense stars,” *Astrophys. J.*, **493**, 879–883 (1998).
- [370] Iben I., “Post main sequence evolution of single stars,” *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **12**, 215–256 (1974).
- [371] Kippenhahn R., Weigert A., *Stellar Structure and Evolution*. – Bthlin: Springer, 1990.
- [372] Shibano Yu.A., Potekhin A.Y., Yakovlev D.G., Zavlin V.E. “Evolution of thermal structure and radiation spectrum of cooling neutron stars”, in: *The Many Faces of Neutron Stars*, edited by M.A. Alpar, R. Buccheri, J. van Paradijs (Dordrecht: Kluwer, 1998), 553–559.
- [373] Haensel P., Zdunik J.L., “Equation of state and structure of an accreting neutron star,” *Astron. Astrophys.*, **229**, 117–122 (1990).
- [374] Haensel P., Zdunik J.L., “Nuclear composition and heating in accreting neutron-star crusts,” *Astron. Astrophys.*, **404**, L33–L36 (2003).
- [375] Schatz H., Aprahamian A., Barnard V., Bildsten L., Cumming A., Quellet M., Rauscher T., Thielemann F.-K., Wiescher M., “End point of the rp process on accreting neutron stars,” *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3471–3474 (2001).
- [376] Schatz H., Bildsten L., Cumming A., 2003, “Photodisintegration-triggered nuclear energy release in superbursts,” *Astrophys. J.*, **583**, L87–L90.
- [377] Zavlin V.E., Trümper J., Pavlov G.G., “X-Ray emission from the radio-quiet neutron star in Puppis A,” *Astrophys. J.*, **525**, 959–967 (1999).
- [378] Possenti A., Mereghetti S., Colpi M., “The pulsed soft X-ray emission from PSR

- 0656+14," *Astron. Astrophys.*, **313**, 565–570 (1996).
- [379] Halpern J.P., Wang F.Y.-H., "A Broadband X-Ray Study of the Geminga Pulsar," *Astrophys. J.*, **477**, 905–915 (1997).
- [380] Ho W.C.G., Kaplan D.L., Chang P., van Adelsberg M., Potekhin A.Y., "Magnetic hydrogen atmosphere models and the neutron star RX J1856.5–3754," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **375**, 821–830 (2007).
- [381] Page D., Applegate J.H., "The cooling of neutron stars by the direct URCA process," *Astrophys. J.*, **394**, L17–L21 (1992).
- [382] Prakash M., Ainsworth T.L., Lattimer J.M., "Equation of state and the maximum mass of neutron stars," *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 2518–2521 (1988).
- [383] Lattimer J.M., Van Riper K.A., Prakash M., Prakash M., 1994, "Rapid cooling and the structure of neutron stars," *Astrophys. J.*, **425**, 802–813.
- [384] Campana, S., & Stella, L., "The evolution of the high energy tail in the quiescent spectrum of the soft X-ray transient Aql X-1," *Astrophys. J.*, **597**, 474–478 (2003).
- [385] Campana S., Stella L., Gastaldello F., Mereghetti S., Colpi M., Israel G.L., Burderi L., Di Salvo T., Robba R.N., "An XMM-Newton study of the 401 Hz accreting pulsar SAX J1808.4–3658 in quiescence," *Astrophys. J.*, **575**, L15–L18 (2002).
- [386] Heinke C.O., Jonker P.G., Wijnands R., Deloye C.J., Taam R.E., "Further constraints on thermal quiescent X-ray emission from SAX J1808.4–3658," *Astrophys. J.*, **691**, 1035–1041 (2009).
- [387] Cackett E.M., Wijnands R., Linares M., Miller J.M., Homan J., Lewin W.H.G., "Cooling of the quasi-persistent neutron star X-ray transients KS 1731-260 and MXB 1659-29," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **372**, 479–488 (2006).
- [388] Shternin P.S., Yakovlev D.G., Haensel P., Potekhin A.Y., "Neutron star cooling after deep crustal heating in the X-ray transient KS 1731-260," *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **382**, L43–L47 (2007).
- [389] Haensel P., Zdunik J.L., "Models of crustal heating in accreting neutron stars," *Astron. Astrophys.*, **480**, 459–464 (2007).
- [390] Lombardo U., Schulze H.-J., "Superfluidity in neutron star matter," *Lecture Notes in Physics*, **578**, 30–53 (2001).
- [391] Akmal A., Pandharipande V.R., Ravenhall D.G., "Equation of state of nucleon matter and neutron star structure," *Phys. Rev. C*, **58**, 1804–1828 (1998).

- [392] Heiselberg H., Hjorth-Jensen M., “Phases of dense matter in neutron stars,” *Phys. Rep.*, **328**, 237–327 (2000).
- [393] Gusakov M.E., Kaminker A.D., Yakovlev D.G., Gnedin O.Y., 2005, “The cooling of Akmal-Pandharipande-Ravenhall neutron star models,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **363**, 555–562 (2005).
- [394] Jones P.B., “Amorphous and heterogeneous phase of neutron star matter,” *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 3589–3592 (1999).
- [395] Jones P.B., “Heterogeneity of solid neutron-star matter: transport coefficients and neutrino emissivity,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **351**, 956–966.
- [396] Potekhin A.Y., Yakovlev D.G., “Thermal structure and cooling of neutron stars with magnetized envelopes,” *Astron. Astrophys.*, **374**, 213–226 (2001).
- [397] Pavlov G.G., Zavlin V.E., “Polarization of thermal X-rays from isolated neutron stars,” *Astrophys. J.*, **529**, 1011–1018 (2000).
- [398] Van Riper K., “Neutron star thermal evolution,” *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **75**, 449–462 (1991).
- [399] Bonanno A., Urpin V., Belvedere G., “Protoneutron star dynamos: pulsars, magnetars, and radio-silent X-ray emitting neutron stars,” *Astron. Astrophys.*, **451**, 1049–1052 (2006).
- [400] Thorolfsson A., Rögnvaldsson Ö.E., Yngvason J., Gudmundsson E.H., “Thomas-Fermi calculations of atoms in magnetic neutron stars. II. Finite temperature effects,” *Astrophys. J.*, **502**, 847–857 (1998).
- [401] Silant’ev N.A., Yakovlev D.G., “Radiative heat transfer in surface layers of neutron stars with a magnetic field,” *Astrophys. Space Sci.*, **71**, 45–50 (1980).
- [402] Schaaf M.E., “Surface-to-core temperature variation of homogeneously magnetized neutron stars,” *Astron. Astrophys.*, **227**, 61–70 (1990).
- [403] Heyl J.S., Hernquist L., “Multidimensional thermal structure of magnetized neutron star envelopes,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **324**, 292–304 (2001).
- [404] Page D. 1995, “Surface temperature of a magnetized neutron star and interpretation of the ROSAT data. I. Dipolar fields,” *Astron. Astrophys.*, **442**, 273–285.
- [405] Shibanov Yu.A., Yakovlev D.G., 1996, “On cooling of magnetized neutron stars,” *Astron. Astrophys.*, **309**, 171–178.
- [406] Potekhin A.Y., Urpin V., Chabrier G. “The magnetic structure of neutron stars

- and their surface-to-core temperature relation,” *Astron. Astrophys.*, **443**, 1025–1028 (2005).
- [407] Chen J.M.C., Clark J.W., Krotscheck E., Smith R. A., “Nucleonic superfluidity in NSs:  $^1S_0$  neutron pairing in the inner crust,” *Nucl. Phys.*, **A 451**, 509–540 (1986).
- [408] Chen, J. M. C., Clark, J. W., Davé, R. D., & Khodel, V. V., “Pairing gaps in nucleonic superfluids,” *Nucl. Phys.*, **A 555**, 59–89 (1993).
- [409] Ainsworth T.L., Wambach J., Pines D., “Effective interactions and superfluid energy gaps for low density neutron matter,” *Phys. Lett. B*, **222**, 173–178 (1989).
- [410] Wambach J., Ainsworth T.L., Pines D., “Quasiparticle interactions in neutron matter for applications in neutron stars,” *Nucl. Phys.*, **A555**, 128–150 (1993).
- [411] Schulze H.-J., Cugnon J., Lejeune A., Baldo M., Lombardo U., “Medium polarization effects on neutron matter superfluidity,” *Phys. Lett. B*, **375**, 1–8 (1996).
- [412] Colpi M., Geppert U., Page D., “Period clustering of the anomalous X-ray pulsars and magnetic field decay in magnetars,” *Astrophys. J.*, **529**, L29–L32 (2000).
- [413] Pons J.A., Link B., Miralles J.A., Geppert U., “Evidence for heating of neutron stars by magnetic field decay,” *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 071101 [1] (2007).
- [414] Rüter S.B., Hempel M., Schaffner-Bielich J., “Outer crust of nonaccreting cold neutron stars,” *Phys. Rev. C*, **73**, 035804 [16 pages] (2006).
- [415] Kaminker A.D., Yakovlev D.G., Potekhin A.Y., Shibasaki N., Shternin P.S., Gnedin O.Y., “Magnetars as cooling neutron stars with internal heating,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **371**, 477–483 (2006); “Cooling of magnetars with internal layer heating,” *Astrophys. Space Sci.*, **308**, 423–430 (2007).
- [416] Shibanov Yu.A., Pavlov G.G., Zavlin V.E., Ventura J., “Model atmospheres and radiation of magnetic neutron stars. I. The fully ionized case,” *Astron. Astrophys.*, **266**, 313–320 (1992).
- [417] Шибанов Ю.А., Завлин В.Е. «Расчёты фотосфер магнитных нейтронных звезд» // *Письма в Астрон. журн.*, **21**, 5–12 (1995).
- [418] Rajagopal M., Romani R., Miller M.C., “Magnetized iron atmospheres for neutron stars,” *Astrophys. J.*, **479**, 347–356 (1997).
- [419] Mori K., Ho W.C.G., “Modelling mid-Z element atmospheres for strongly magnetized neutron stars,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **377**, 905–919 (2007).
- [420] Shafranov V.D., “Electromagnetic waves in a plasma,” in *Reviews of Plasma Physics*,

- vol. 3, edited by Leontovich M.A. (New York: Consultants Bureau, 1967) 1–157.
- [421] Гнедин Ю.Н., Павлов Г.Г. // *Журн. экперим. теор. физ.*, **65**, 1806 (1973)
- [422] Schubert C., “Vacuum polarisation tensors in constant electromagnetic fields,” Parts I and II, *Nucl. Phys.*, **B585**, 407–442 (2000).
- [423] Pavlov G.G., Gnedin, Yu.N., “Vacuum polarization by a magnetic field and its astrophysical manifestations,” *Sov. Sci.. Rev. E: Astrophys. Space Phys.* **3**, 197–253 (1984).
- [424] Adler S.L., “Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field,” *Ann. Phys. (N.Y.)*, **67**, 599–647 (1971).
- [425] Heyl J.S., Hernquist L., “Birefringence and dichroism of the QED vacuum,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 6485–6492 (1997); “Analytic form for the effective Lagrangian of QED and its application to pair production and photon splitting,” *Phys. Rev. D*, **55** 2449–2454 (1997).
- [426] Kohri K., Yamada S., “Polarization tensors in strong magnetic fields,” *Phys. Rev. D*, **65**, 043006 [10 pages] (2002).
- [427] Ho W.C.G., Lai D., “Atmospheres and spectra of strongly magnetized neutron stars – II. The effect of vacuum polarization,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **338**, 233–252 (2003).
- [428] Potekhin A.Y., Lai D., Chabrier G., Ho W.C.G., “Electromagnetic polarization in partially ionized plasmas with strong magnetic fields and neutron star atmosphere models,” *Astrophys. J.*, **612**, 1034–1043 (2004).
- [429] Soffel M., Ventura J., Herold H., Ruder H., Nagel W., 1983, “Propagation of high frequency waves in strongly magnetized plasmas. Mode ambiguities due to vacuum polarization,” *Astron. Astrophys.*, **126**, 251–259 (1983).
- [430] Lai D., Ho W.C.G., “Polarized X-Ray emission from magnetized neutron stars: Signature of strong-field vacuum polarization,” *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 071101 [4 pages] (2003).
- [431] Вайнштейн Л.А., Собельман И.И., Юков Е.А. *Возбуждение атомов и уширение спектральных линий*. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
- [432] Däppen W., Anderson L., Mihalas D., “Statistical mechanics of partially ionized stellar plasma – The Planck-Larkin partition function, polarization shifts, and simulations of optical spectra,” *Astrophys. J.*, **319**, 195–206 (1987).

- [433] Bulik T., Pavlov G.G., “Polarization modes in a strongly magnetized hydrogen gas,” *Astrophys. J.*, **469**, 373–387 (1996).
- [434] Itoh, N., “Electrical conductivity and emissivity of the pulsar surface,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **173**, 1P–3P (1975).
- [435] Lenzen R., Trümper J. “Reflection of X rays by neutron star surfaces,” *Nature*, **271**, 216–220 (1978).
- [436] Brinkmann W., “Thermal radiation from highly magnetized neutron stars,” *Astron. Astrophys.*, **82**, 352–361 (1980).
- [437] van Adelsberg M., Lai D., Potekhin A.Y., Arras P., “Radiation from condensed surface of magnetic neutron stars,” *Astrophys. J.*, **628**, 902–913 (2005).
- [438] Pérez-Azorín J.F., Miralles J.A., Pons J.A., “Thermal radiation from magnetic neutron star surfaces,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **433**, 275–283 (2005).
- [439] Ашкрофт Р., Мермин Н. *Физика твёрдого тела*. – В 2 томах. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1979.
- [440] Займан Дж. *Принципы теории твёрдого тела*. – 2-е изд., доп. – Пер. с англ. под ред. Б. Л. Бонч-Бруевича. – М.: Мир, 1974. – 472 с.
- [441] Walter F.M., Wolk S.J., Neuhäuser R., “Discovery of a nearby isolated neutron star,” *Nature* **379**, 233–235 (1996).
- [442] Walter F.M., Matthews, L.D., “The optical counterpart of the isolated neutron star RX J185635–3754,” *Nature* **389**, 358–360 (1997).
- [443] Motch C., Zavlin V.E., Haberl F., “The proper motion and energy distribution of the isolated neutron star RX J0720.4–3125,” *Astron. Astrophys.*, **408**, 323–330 (2003).
- [444] Suleimanov V., Potekhin A.Y., Werner K., “Models of magnetized neutron star atmospheres: thin atmospheres and partially ionized hydrogen atmospheres with vacuum polarization,” *Astron. Astrophys.*, **500**, 891–899 (2009).
- [445] Ho W.C.G., Potekhin A.Y., Chabrier G., “Model X-ray spectra of magnetic neutron stars with hydrogen atmospheres,” *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **178**, 102–109 (2008).