



Вклад рассеяния света на свете в лэмбовский сдвиг в мюонном водороде

Е. Ю. Корзинин, В. Г. Иванов, В. А. Шелюто, С. Г. Каршенбойм

ВНИИМ им. Д. И. Менделеева

ФФК2010, 7-10 декабря 2010, Санкт-Петербург

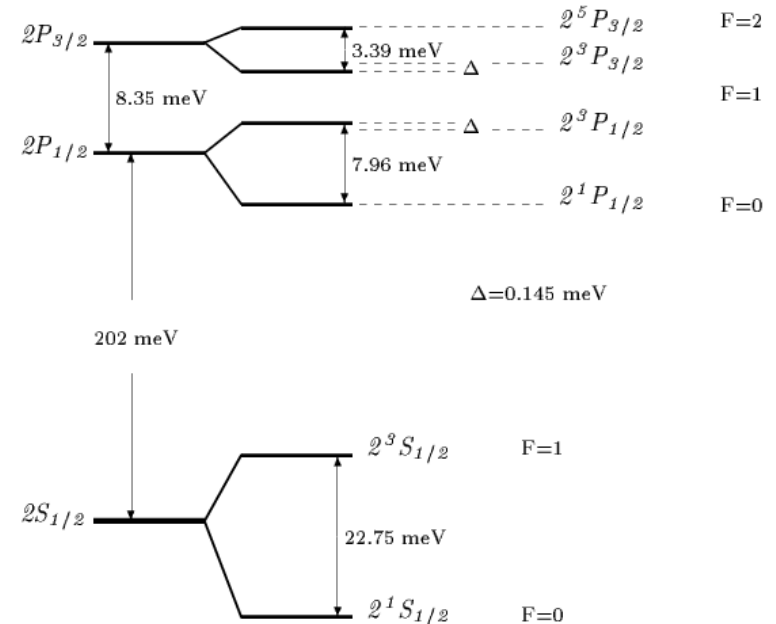
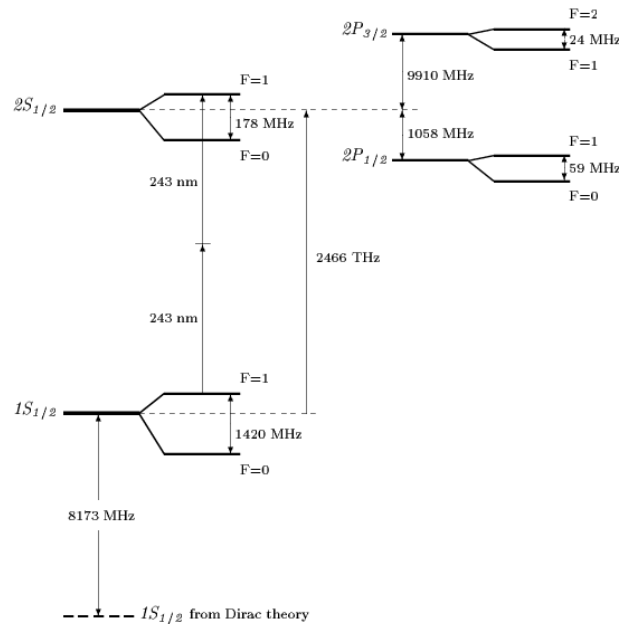


- Лэмбовский сдвиг в мюонном водороде (μH);
- КЭД поправки $\alpha^5 m_\mu$, содержащие электронную петлю;
- Вклад диаграмм с блоком виртуального рассеяния света на свете (LbL);
 - ♦ Трудности вычисления
 - ♦ Приближение статического мюона
 - ♦ Результат
- Заключение



ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ В МЮОННОМ ВОДОРОДЕ (μH)

- $m_\mu \approx 207m_e$, что приводит к отличию спектров H и μH



- Боровский радиус μH в 207 раз меньше чем у H , спектр μH более чувствителен к структуре протона;
- Лэмбовский сдвиг в μH может использоваться для определения радиуса протона $r_p = 0.84184(67) \text{ fm}$ (R. Pohl et al., Nature, **466**, 7303, 213 (2010));
- В связи с достигнутой экспериментальной точностью измерения актуально вычисление КЭД поправок порядка $\alpha^5 m_\mu$;

КЭД поправки с электронными петлями

- Характерный атомный импульс $(Z\alpha)m_\mu \sim m_e$.

Среди КЭД эффектов доминируют нерелятивистские вклады диаграмм с электронными петлями;

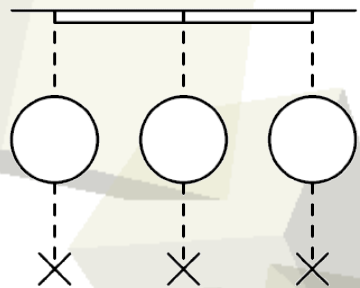
- Ранее вклады поляризации вакуума порядка $\alpha^5 m_\mu$ вычислялись:

А. П. Мартыненко, ЖЭТФ, **128**, 1169 (2005);

T. Kinoshita, M Nio, Phys. Rev. Lett., **82**, 3240 (1999)

E. Borie, Phys. Rev. A **71**, 032508 (2005)

Результаты перевычислены нами (постер на ФФК2009, Дубна):



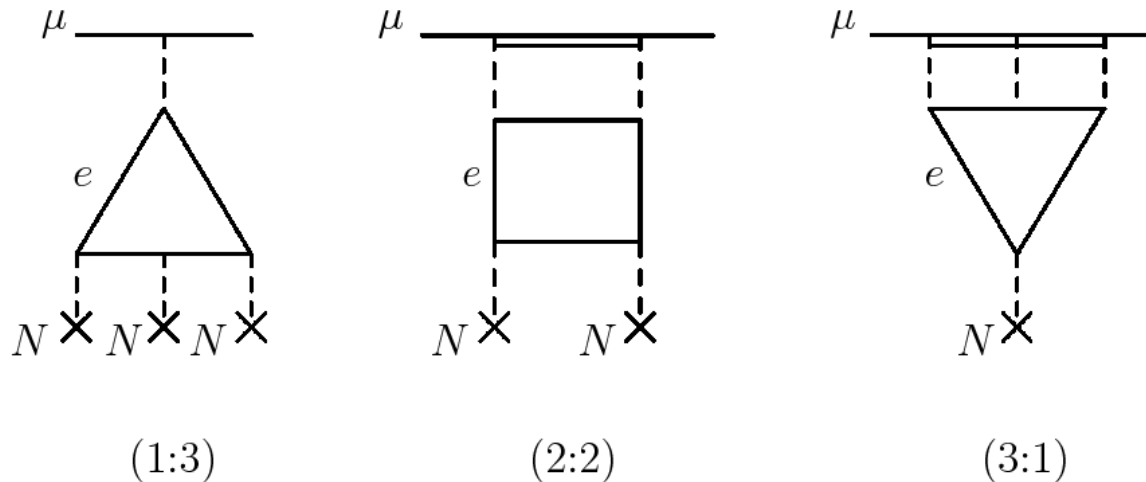
$$\begin{array}{l} \Delta E_{2p-2s} = 0.002535(1) \frac{\alpha^3}{\pi^3} m_r c^2 \\ \Delta E_{2p-2s} = 0.0011681 \frac{\alpha^5}{\pi^3} m_r c^2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{T. Kinoshita, M. Nio, Phys. Rev. Lett. 1999} \\ \text{наша работа} \end{array} \right.$$

V.G. Ivanov, E.Yu. Korzinin, S.G. Karshenboim, Phys. Rev. D **80**, 027702 (2009)

T. Kinoshita, and M. Nio, Phys. Rev. Lett., **103**, 079901 (2009)

диаграммы рассеяния света на свете (LbL)

- Полный набор нерелятивистских вкладов порядка $\alpha^5 m_\mu$ также включает диаграммы с блоком виртуального **рассеяния света на свете (LbL)**, вычислению которых посвящен данный доклад



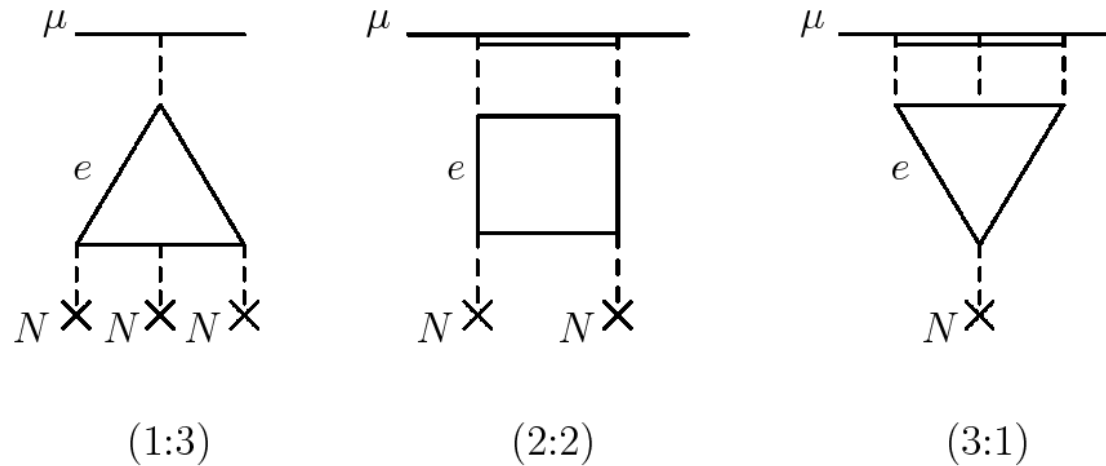
Диаграммы (2:2) и (3:1) содержат в мюонной части кулоновскую функцию Грина (обозначена двойной линией)

$$S_C(E_\zeta \pm \omega, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_{\lambda} \frac{|\lambda(\mathbf{p})\rangle \langle \lambda(\mathbf{p}')|}{E_\zeta \pm \omega - E_\lambda + i0}$$

Даже в нерелятивистском приближении вычисления с кулоновской функцией Грина оказываются сложны и не были выполнены ни для одной из этих диаграмм.



LbL: исходное состояние



(1:3) — (Wichmann-Kroll) наиболее исследованный вклад: имеются приближенные формулы (точность 1 %) и точная формула в виде 2-х кратного интеграла;

К. Pachucki, Phys. Rev. A **53**, 2092 (1996);

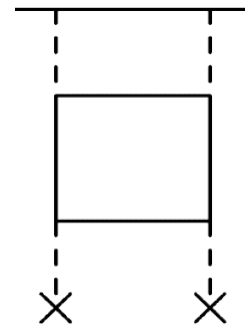
М.И. Еидес, Н. Гротч, В.А. Шельюто, Phys. Rep. **342**, 63 (2001);

(2:2) — был вычислен в 'приближении рассеяния' Е. Борие, (Phys. Rev. A **72** (2005)) с погрешностью вычисления 15%.

Погрешность приближения рассеяния и последующих дополнительных приближений не исследовалась;

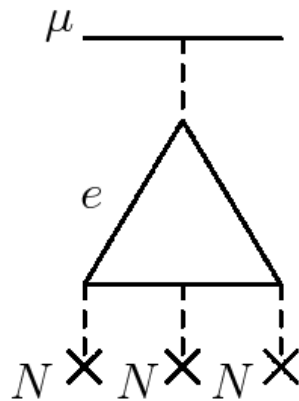
М.И. Еидес, Н. Гротч, В.А. Шельюто, *Theory of Light Hydrogenic Bound States*, (Springer, 2007) — критика приближения рассеяния;

(3:1) — ранее не вычислялся и считался наиболее трудным;

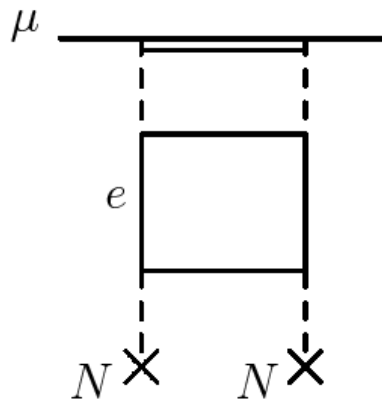




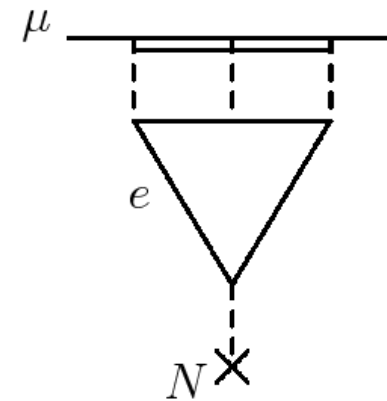
LbL: основные результаты



(1:3)



(2:2)



(3:1)

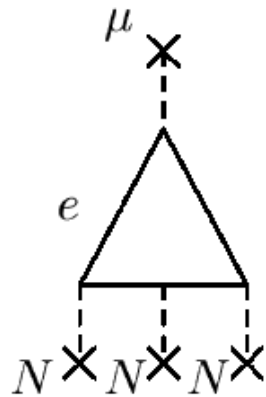
Для вклада (1:3)

- получено новое точное выражение (использовалось для проверки блоков вычислений для (2:2));

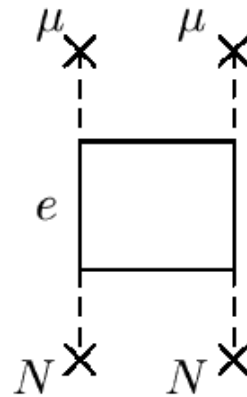
Для вкладов (2:2), (3:1)

- Рассмотрено приближение статического мюона;
- Доказана его применимость, что существенно упрощает выражения;
- Получены численные результаты для мюонного водорода, дейтерия и иона гелия;

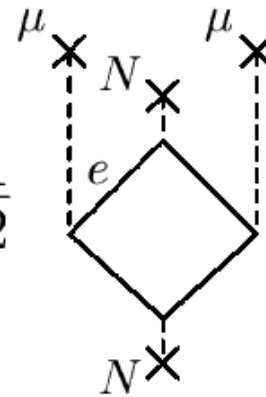
LbL: приближение статического мюона



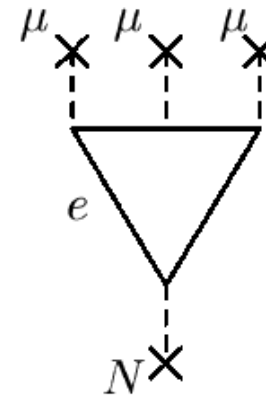
(1:3)



+ $\frac{1}{2}$



(2:2)



(3:1)

В этом приближении кулоновская функция Грина отсутствует:

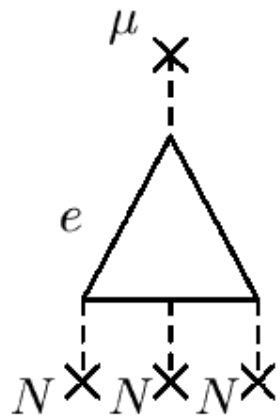
$$\Delta E_{1:3}(\zeta) = (4\pi\alpha) (-4\pi Z\alpha)^3 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 \mathbf{k}_3^2 \mathbf{k}_4^2} \mathcal{F}_\zeta(\mathbf{k}_1) \cdot \mathcal{L},$$

$$\Delta E_{2:2}(\zeta) = (4\pi\alpha)^2 (-4\pi Z\alpha)^2 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 \mathbf{k}_3^2 \mathbf{k}_4^2} \\ \times \left[\mathcal{F}_\zeta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + \frac{1}{2} \mathcal{F}_\zeta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \right] \cdot \mathcal{L},$$

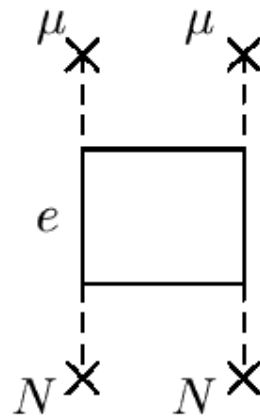
$$\Delta E_{3:1}(\zeta) = (4\pi\alpha)^3 (-4\pi Z\alpha) \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathbf{k}_1^2 \mathbf{k}_2^2 \mathbf{k}_3^2 \mathbf{k}_4^2} \mathcal{F}_\zeta(\mathbf{k}_4) \cdot \mathcal{L},$$



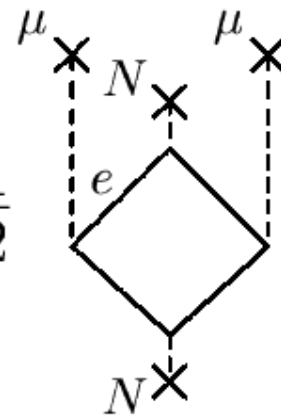
приближение статического мюона



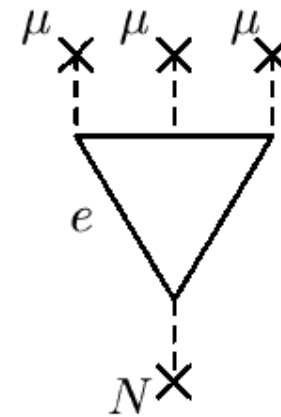
(1:3)



+ $\frac{1}{2}$



(2:2)



(3:1)

- Ранее неизвестный вклад (3:1) легко определяется из симметрии выражений

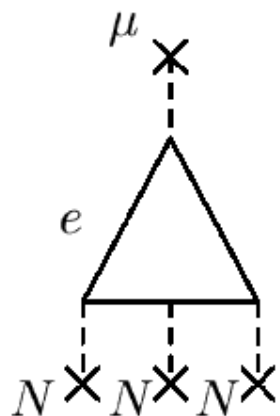
$$\Delta E_{(3:1)} = \frac{1}{Z^2} \Delta E_{(1:3)}$$

- Структура выражений в этом приближении аналогична точным и отличается заменой кулоновской функции Грина на дельта функции по импульсу и энергии (ω) в петлях;

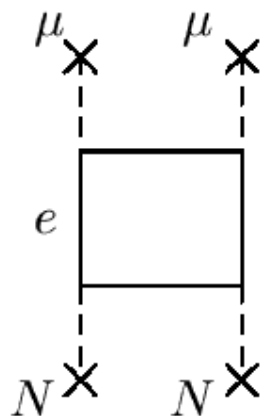
$$S_C(E_\zeta \pm \omega, \mathbf{p}, \mathbf{p}') \rightarrow (2\pi)^4 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(\omega)$$



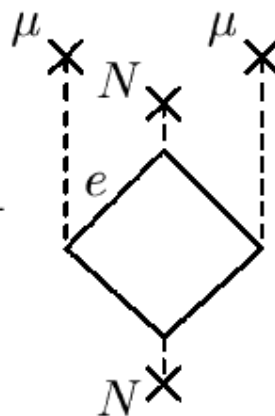
приближение статического мюона



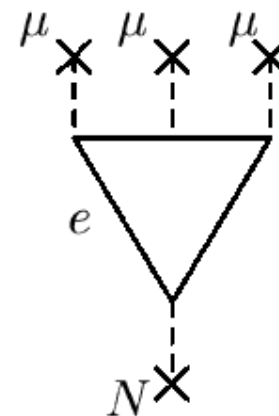
(1:3)



+ $\frac{1}{2}$



(2:2)



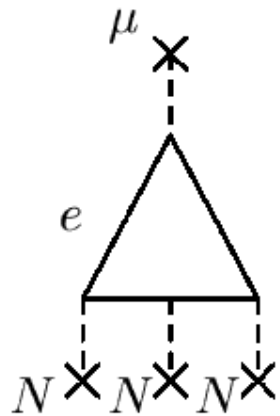
(3:1)

- Приближение основано на малости характерной энергии атомных уровней по сравнению с масштабом петлевых энергий
- Соответствующий **параметр малости**:

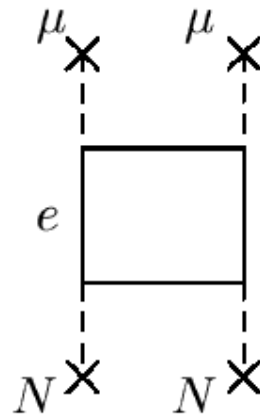
$$\frac{(Z\alpha)^2 m_\mu}{m_e} \simeq Z^2 \cdot 1\%$$



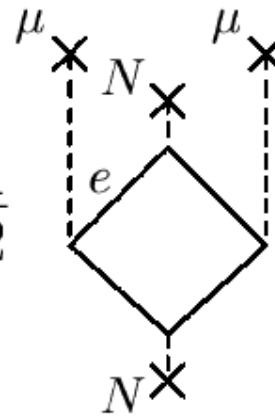
приближение статического мюона



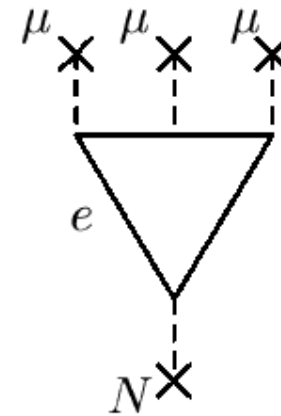
(1:3)



+ $\frac{1}{2}$



(2:2)



(3:1)

Если в кулоновской функции Грина пренебречь энергией состояния по сравнению с характерной энергией в петле, то

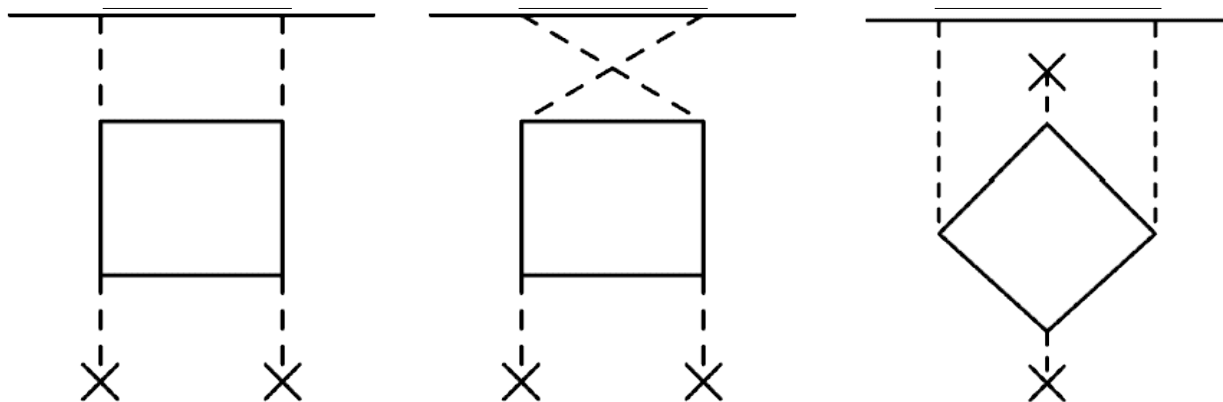
$$S_C(E_\zeta \pm \omega, \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_{\lambda} \frac{|\lambda(\mathbf{p})\rangle \langle \lambda(\mathbf{p}')|}{E_\zeta \pm \omega - E_\lambda + i0} \rightarrow \sum_{\lambda} \frac{|\lambda(\mathbf{p})\rangle \langle \lambda(\mathbf{p}')|}{\pm \omega + i0} = \frac{(2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{\pm \omega + i0}$$

Комбинация оставшихся знаменателей приводит к дельта-функции по энергии .

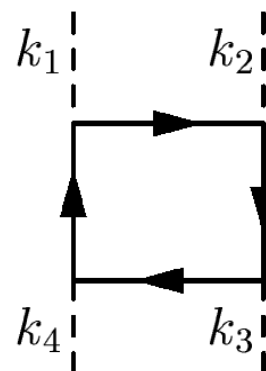


приближение статического мюона

■ Интегрирование по ω для (2:2):



Рассмотрим блок LbL:



Обозначим $k_{10} = \omega$, $k_{20} = -\omega$;

Мюонный фактор (сумма прямой и перекрестной диаграмм)

$$\mu \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ k_1 \quad k_2 \end{array} + \mu \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ k_2 \quad k_1 \end{array}$$

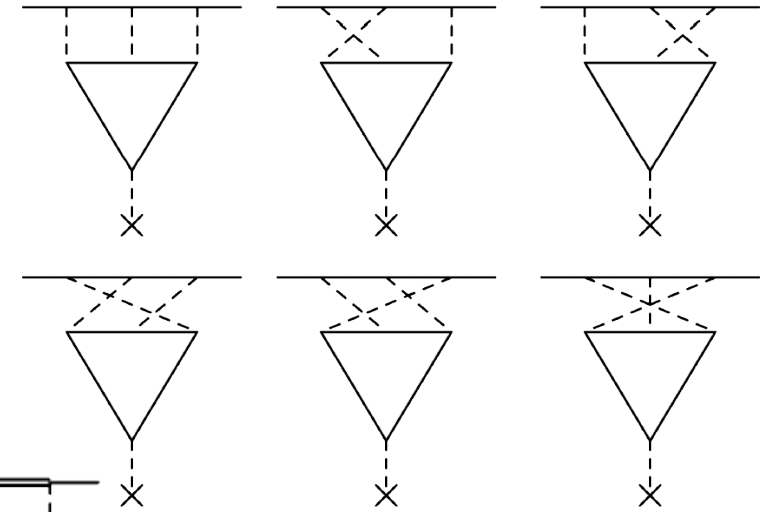
$$\frac{i}{\omega + i0} + \frac{i}{-\omega + i0} = 2\pi\delta(\omega)$$



приближение статического мюона

■ Интегрирование по ω для (3:1):

$$\begin{aligned}
 & \mu \frac{k_1}{k_1^2} \frac{k_2}{k_2^2} \frac{k_3}{k_3^2} + \mu \frac{k_2}{k_2^2} \frac{k_1}{k_1^2} \frac{k_3}{k_3^2} + \mu \frac{k_1}{k_1^2} \frac{k_3}{k_3^2} \frac{k_2}{k_2^2} \\
 & + \mu \frac{k_3}{k_3^2} \frac{k_1}{k_1^2} \frac{k_2}{k_2^2} + \mu \frac{k_2}{k_2^2} \frac{k_3}{k_3^2} \frac{k_1}{k_1^2} + \mu \frac{k_3}{k_3^2} \frac{k_2}{k_2^2} \frac{k_1}{k_1^2}
 \end{aligned}$$



Обозначая энергии фотонов как $k_{10} = \omega_1$, $k_{20} = \omega_2$ ($k_{30} = -\omega_1 - \omega_2$), и явно выписывая перестановки для мюонного фактора, находим

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{\omega_1 + i0} \frac{i}{\omega_1 + \omega_2 + i0} + \frac{i}{\omega_2 + i0} \frac{i}{\omega_1 + \omega_2 + i0} \\
 & + \frac{i}{\omega_1 + i0} \frac{i}{-\omega_2 + i0} + \frac{i}{-\omega_1 - \omega_2 + i0} \frac{i}{-\omega_2 + i0} \\
 & + \frac{i}{\omega_2 + i0} \frac{i}{-\omega_1 + i0} + \frac{i}{-\omega_1 - \omega_2 + i0} \frac{i}{-\omega_1 + i0} \\
 & = \left(\frac{i}{\omega_1 - i0} - \frac{i}{\omega_1 + i0} \right) \left(\frac{i}{\omega_2 - i0} - \frac{i}{\omega_2 + i0} \right) \\
 & = 2\pi\delta(\omega_1) \times 2\pi\delta(\omega_2) .
 \end{aligned}$$



приближение статического мюона

ИТОГО :

- Приближение основано на малости характерной энергии атомных уровней по сравнению с масштабом петлевых энергий;
- В этом приближении диаграммы можно вычислять при помощи стандартной техники фейнмановских параметров;
- погрешность приближения:

$$\frac{(Z\alpha)^2 m_\mu}{m_e} \simeq Z^2 \cdot 1\%$$

- Ранее неизвестный вклад (3:1):

$$\Delta E_{(3:1)} = \frac{1}{Z^2} \Delta E_{(1:3)}$$



приближение статического мюона

- В этом приближении диаграммы вычисляются при помощи стандартной техники фейнмановских параметров
- Вклад (2:2) имеет вид

$$\Delta E_{2:2}(\zeta) = \frac{3}{4\pi} \alpha(Z\alpha)^3 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \mathcal{F}_\zeta(\mathbf{q}) \mathcal{J}_{2:2} ,$$

$$\mathcal{F}_\zeta(\mathbf{q}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Psi_\zeta^*(\mathbf{p}) \Psi_\zeta(\mathbf{p} + \mathbf{q})$$

$$\mathcal{J}_{2:2}(\mathbf{q}^2) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 dw \int_0^1 dt$$
$$\times \sum_{k=1,2} \left\{ \frac{\mathcal{B}_{2:2}^{(k)}}{\left(s_{2:2}^{(k)} \mathbf{q}^2 + m_e^2\right)} + \frac{\mathcal{C}_{2:2}^{(k)} \mathbf{q}^2}{\left(s_{2:2}^{(k)} \mathbf{q}^2 + m_e^2\right)^2} + \frac{\mathcal{D}_{2:2}^{(k)} \mathbf{q}^4}{\left(s_{2:2}^{(k)} \mathbf{q}^2 + m_e^2\right)^3} \right\}$$



приближение статического мюона

$$|\mathcal{B}_{2:2} = \frac{x^2 y (1-v) v (1-w)}{c_y^2 \sqrt{w G}} \left[5 G f_1 + 5 \frac{w^2}{G} f_2 + 3 w f_3 \right]$$

$$\mathcal{B}'_{2:2} = -2 \frac{x^2 y (1-v) (1-w) w}{c_y \sqrt{G}} \left[\frac{G}{w} C + R \right],$$

$$y' = x(1-y),$$

$$z' = x y z,$$

$$c_x = x(1-x),$$

$$c_y = y'(1-y'),$$

$$c_z = z'(1-z'),$$

$$G = \left(v \frac{c_z}{c_y} - h^2 \right),$$

$$B = \frac{1}{G_h} \left(\frac{v(1-x)z'}{c_y} - gh \right),$$

$$h = \frac{v y' z'}{c_y},$$

$$g = - \left(u(1-v) + \frac{v(1-x)y'}{c_y} \right),$$

$$d = t(1-w) + Bw,$$

$$C = c_y + y'(1-2y'),$$

$$R = c_z + z'(1-2z') + h^2 [2c_y + y'(1-2y')] \\ + h(1+y') + h z'(1-6y'),$$

$$f_1 = -(1-y')y'^3,$$

$$f_2 = (h y' + z')^2 \left\{ -h^2 c_y - c_z + h [1 - z' - y'(1-2z')] \right\},$$

$$f_3 = -\frac{1}{3} y \{ 10 h^2 (1-y') y'^2 + 5 h [3 z' + y'(1-4 z') - 1] y' \\ + z' [5 z' + 5 y'(1-2 z') - 6] \},$$

- Интегрирования по фейнмановским параметрам выполнялось численно с помощью VEGAS



численные результаты для вклада LbL

- Вклад эффектов рассеяния света на свете в лэмбовский сдвиг (2p-2s) в мюонном водороде, дейтерии и ионе гелия-4

Вклад	$\Delta E(\mu\text{H})$ [мэВ]	$\Delta E(\mu\text{D})$ [мэВ]	$\Delta E(\mu^4\text{He})$ [мэВ]
1:3	-0.001 018(4)	-0.001 098(4)	-0.019 95(6)
2:2	0.001 15(1)	0.001 24(1)	0.0114(4)
3:1	-0.001 02(1)	-0.001 10(1)	-0.0050(2)
Всего	-0.000 89(2)	-0.000 96(2)	-0.0136(6)

(1:3) — хорошо известен, использовался для проверки исходных выражений;

(2:2) — согласуется с результатом Borie, но значительно точнее;

(3:1) — новый результат;



численные результаты для вклада LbL

Проверки:

- В вычислениях вкладов диаграмм (1:3) и (2:2) использовалось одинаковое представление для блока LbL;
- Также была проведена проверка блока LbL, когда один из фотонов имеет нулевой импульс;
- Чтобы убедиться в отсутствии ошибки при введении и интегрировании по фейнмановским параметрам, для диаграммы (2:2) были проведены численные интегрирования по импульсам без объединения знаменателей. Результаты имеют точность около 3% и хорошо согласуются с результатами таблицы.





- Завершено вычисление ведущего вклада (порядка $\alpha^5 m_\mu$) от эффектов рассеяния света на свете в лэмбовский сдвиг (2p-2s) для легких мюонных атомов;
- Вычисление проведено в приближении статического мюона, для которого оценена погрешность приближения;
- Получен полный результат для нерелятивистских поправок порядка $\alpha^5 m_\mu$ для мюонного водорода, дейтерия и иона гелия-4
- Результаты опубликованы:
 - 1) S.G. Karshenboim, V.G. Ivanov, E.Yu. Korzinin, V.A. Shelyuto, *Phys. Rev. A* 81, 060501(R) (2010)
 - 2) С.Г. Каршенбойм, Е.Ю. Корзинин, В.Г. Иванов, В. А. Шелюто, *Письма в ЖЭТФ*, 92, 9-15 (2010)



Спасибо за внимание!

