Радиационные поправки к отдаче к сверхтонкому расщеплению в мюонии, связанные с рассеянием света на свете

В. А. Шелюто[a], **М. И. Эйдес**[b,c]

[a] *ВНИИМ им. Д. И. Менделеева*
[b] *Петербургский институт ядерной физики РАН*
[c] *Department of Physics and Astronomy, University of Kentucky, USA*

МЮОНИЙ

$$(\,\mu^+\,e^-) \qquad \to \qquad \frac{m_e}{m_\mu} \simeq \frac{1}{206.8}$$

Время жизни $\tau \simeq 2.2 \cdot 10^{-6}$ сек

Сверхтонкое расщепление основного состояния

Однофотонный обмен

$$E_F \quad \sim \quad |\psi(0)|^2 \;\cdot\; (\boldsymbol{\sigma_1} \cdot \boldsymbol{\sigma_2})\Big|_{F=0}^{F=1} \quad \sim \quad (Z\alpha)^4 \, \frac{m}{M} \, m$$

$$\delta E_{HFS} \;\; = \;\; E_F \cdot \Big[\, 1 \; + \; \text{поправки} \,\Big]$$

Теория:

$$\delta E_{HFS}\,(th) \quad = \quad 4\;463\;302.904\;(518)\;(30)\;(70)\;\mathrm{kHz}$$

$$\delta[m_\mu] \;\simeq\; 1.2\times10^{-7}\;, \qquad \delta[\alpha] \;\simeq\; 7\times10^{-9}\;, \qquad \delta[th] \;\simeq\; 1.6\times10^{-8}$$

Эксперимент:

$$\delta E_{HFS} \quad = \quad 4\;463\;302.776\;(51)\;\mathrm{kHz} \qquad \delta = 1.1\times10^{-8}$$

W. Liu et al, Phys. Rev. Lett. **82**, 711 (1999)

Квантовоэлектродинамические поправки

Три малых параметра:

$Z\alpha$ – эффекты связанности,

$\frac{\alpha}{\pi}$ – радиационные поправки (по одной степени $\frac{\alpha}{\pi}$ на каждую петлю),

$\frac{m}{M}$ – отдачный фактор.

Некоторые поправки усилены степенями $\ln \frac{1}{Z\alpha} \simeq 4.9$ или $\ln \frac{M}{m} \simeq 5.3$.

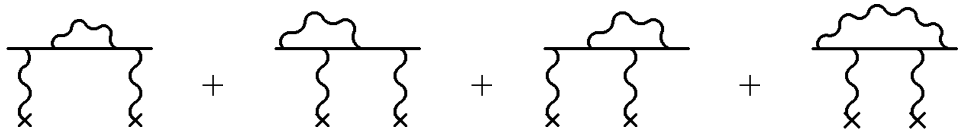
$$\delta E_{QED} = \delta E\,[\text{rad}] + \delta E\,[\text{recoil}] + \delta E\,[\text{rad-recoil}]$$

Радиационные поправки зависят от двух малых параметров α и $Z\alpha$
Могут быть вычислены в пределе внешнего поля.
Степень α соответсвует количеству радиационных петель.

Поправки к отдаче содержат зависимость от отношения масс m/M легкой и тяжелой частиц и параметра $Z\alpha$. Отражают отклонение от предела внешнего поля. Не могут быть описаны с помощью перехода к приведенной массе.

Радиационные поправки к отдаче зависят от всех параметров α, $Z\alpha$ и m/M.

Ведущая радиационная поправка – N. Kroll, F. Pollock, 1951



$$\delta E_{KP} \;=\; \alpha(Z\alpha)E_F \cdot \left[\ln 2 - \frac{13}{4}\right]$$

Второй порядок по малым параметрам.

Вклад третьего порядка можно получить:

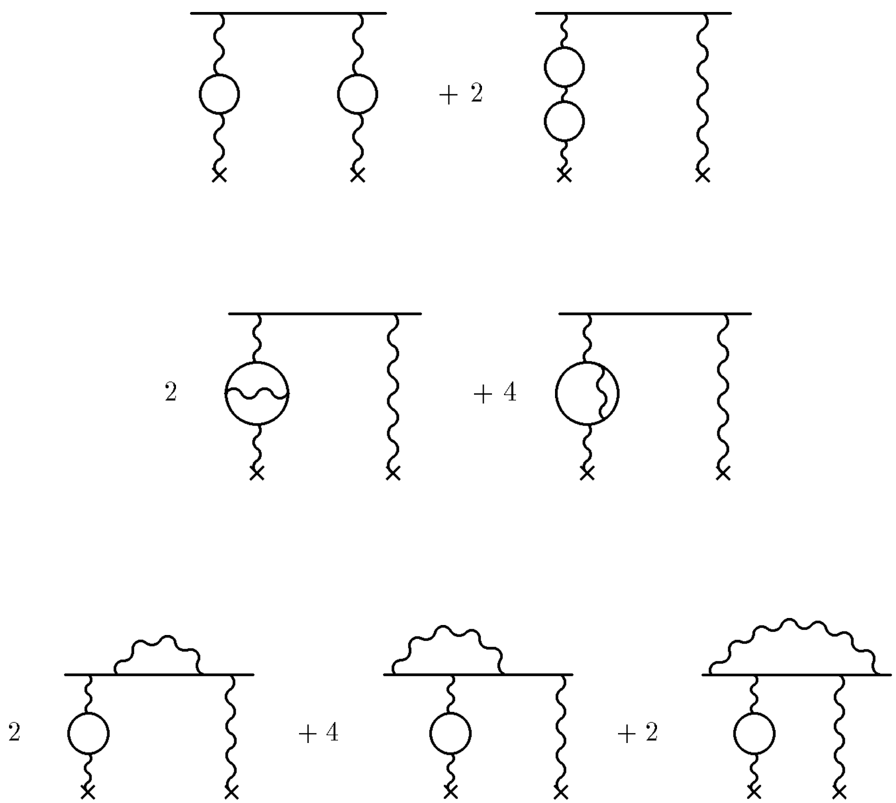
1) добавляя еще одну радиационную петлю к электронной линии – дополнительный параметр $\frac{\alpha}{\pi}$,

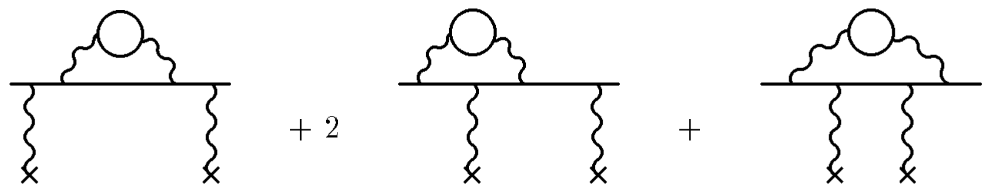
2) вычисляя следующий член по $Z\alpha$,

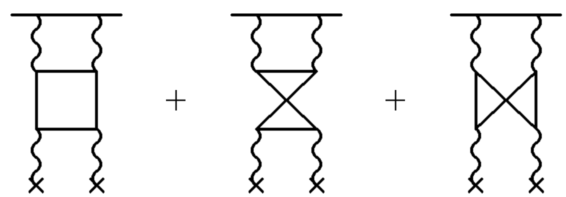
3) восстанавливая пропагатор тяжелой частицы (мюона) – $\frac{m}{M}$.

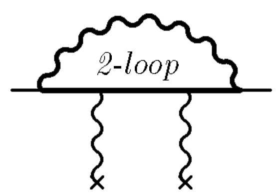
Двухпетлевые радиационные поправки порядка $\alpha^2(Z\alpha)E_F$.

Шесть калибровочно-инвариантных наборов диаграмм:

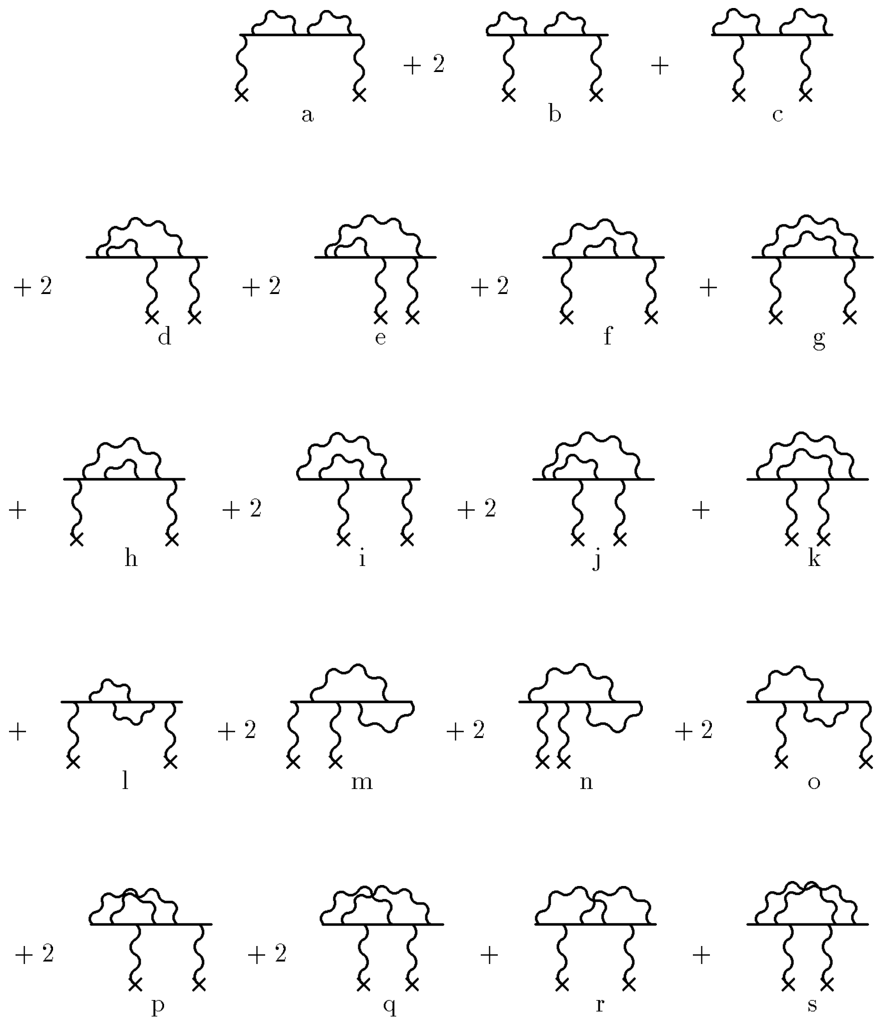



+ 2
+


+
+


2-loop

Шестой калибровочно-инвариантный набор в явном виде



Все двухпетлевые чисто радиационные поправки были вычислены в работах

С. Г. Каршенбойм, В. А. Шелюто, М. И. Эйдес, (1990, 1992) (сверхтонкое расщепление),

T. Kinoshita and M. Nio (1994) (сверхтонкое расщепление),

K. Pachucki,(1993) (лэмбовский сдвиг),

M. I. Eides and V. A. Shelyuto (1995) (сверхтонкое расщепление и лэмбовский сдвиг).

Спустя 15 лет (Phys. Rev. A, февраль 2010) A. Czarnecki et al. еще раз подтвердили результат 1995 г. для лэмбовского сдвига и сверхтонкого расщепления.

Эффекты связанности в двухпетлевых диаграммах
– поправки порядка $\alpha^2(Z\alpha)^2 + \ldots$.

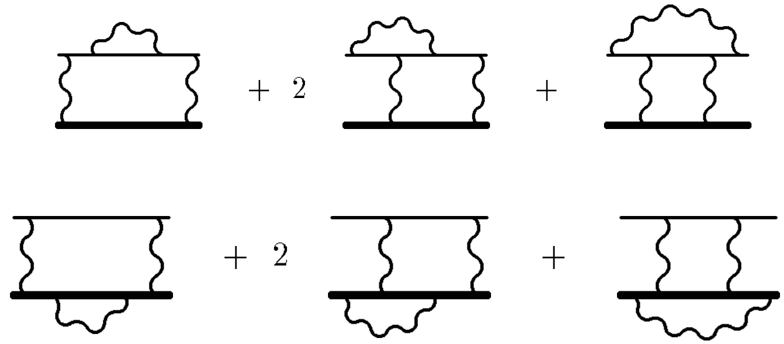
В. А. Ерохин, П. Инделикато, В. М. Шабаев, (2005)

Трехпетлевые радиационные поправки порядка $\alpha^3(Z\alpha)E_F$.

Вычислена часть диаграмм со вставками поляризации вакуума
(10 калибровочно-инвариантных наборов), M. I. Eides and V. A. Shelyuto (2007).

Ведущие радиационные поправки к отдаче порядка $\alpha(Z\alpha)\,\frac{m}{M}\,E_F$.

Восстанавливаем пропагатор тяжелой частицы в однопетлевых диаграммах



$$\delta E_{el} \;=\; \frac{\alpha(Z\alpha)}{\pi^2}\,\frac{m}{M}\,E_F\left[\;\frac{15}{4}\cdot\ln\frac{M}{m}\;+\;6\,\zeta(3)\;+\;3\pi^2\ln 2\;+\;\frac{\pi^2}{2}\;+\;\frac{17}{8}\;\right],$$

$$\delta E_{\mu l} \;\simeq\; \frac{(Z^2\alpha)(Z\alpha)}{\pi^2}\,\frac{m}{M}\,E_F\left[\;\frac{9}{2}\,\zeta(3)\;-\;3\pi^2\ln 2\;+\;\frac{39}{8}\;\right],$$

J. R. Sapirstein, E. A. Terray, and D. R. Yennie (1983) (численно),
С. Г. Каршенбойм, В. А. Шелюто, М. И. Эйдес, (1986, 1988) (аналитически).

$$\delta E_{m2} \;=\; \alpha(Z\alpha)\left(\frac{m}{M}\right)^2 E_F\left[-\,6\ln 2\;-\;\frac{3}{4}\;-\;\frac{17}{12}\cdot Z^2\;\right]$$

M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto (1998).

Все результаты являются точными в пределе $\alpha \to 0$, $Z\alpha \to 0$ и $m/M \to 0$. Процедура вычислений была устроена таким образом, что даже численные результаты являются строго асимптотическими. Коэффициенты не содержат "хвостов" от вкладов высших порядков.

В настоящее время вычислены все вклады третьего порядка по параметрам α, $Z\alpha$ и m/M. Для дальнейшего уточнения теории сверхтонкого расщепления и лэмбовского сдвига необходимо исследовать поправки четвертого порядка малости по всем параметрам α, $Z\alpha$ и m/M.

Радиационные поправки к отдаче порядка $\alpha^2(Z\alpha)\,\frac{m}{M}\,E_F$.

Необходимо восстановить пропагатор тяжелой частицы (мюона) во всех шести калибровочно-инвариантных наборах диаграмм.

Полученные таким образом диаграммы необходимо дополнить:

1) мюонной поляризацией вакуума,

2) радиационными поправками к мюонной линии,

3) мюонной петлей в рассеянии света на свете,

4) совершенно новым набором диаграмм с одновременными радиационными поправками к электронной и мюонной линиям.

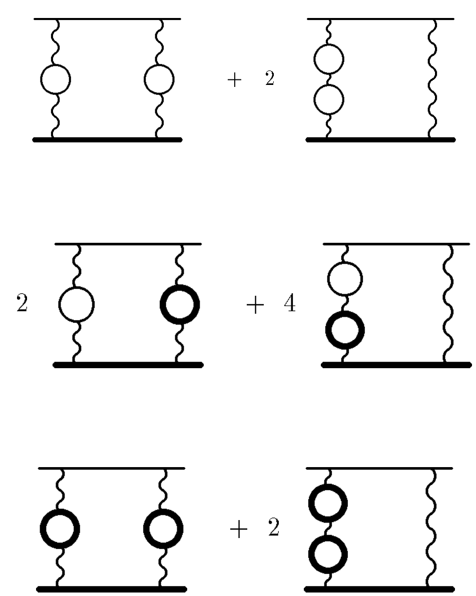
Структура трехпетлевых поправок к сверхтонкому расщеплению

$$\frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3}\,\frac{m}{M}\,\widetilde{E}_F\left[-\frac{4}{3}\cdot\ln^3\frac{M}{m}\;+\;\frac{4}{3}\cdot\ln^2\frac{M}{m}\;+\;C_1\cdot\ln\frac{M}{m}\;+\;C_0\right]$$

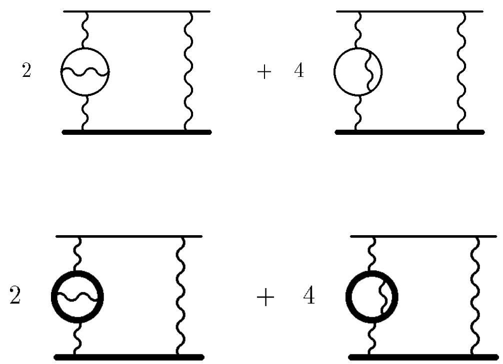
M. I. Eides and V. A. Shelyuto (1984),

С. Г. Каршенбойм, В. А. Шелюто, М. И. Эйдес (1989).

Первый калибровочно-инвариантный набор



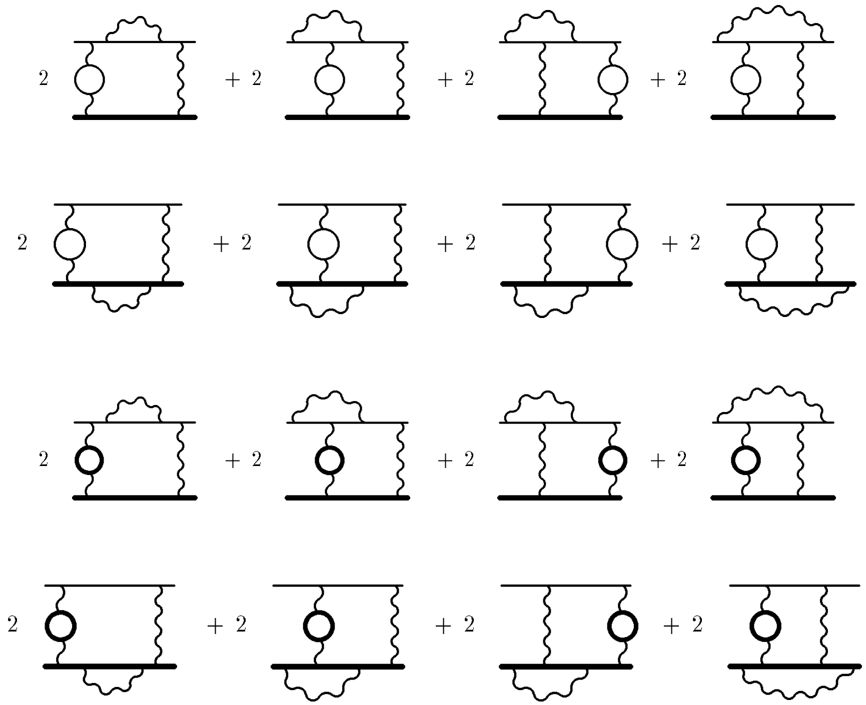
Второй калибровочно-инвариантный набор



$$\delta E_1 \; + \; \delta E_2 \;\; = \;\; \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3}\frac{m}{M}\,\widetilde{E}_F\left\{-\frac{4}{3}\ln^3\frac{M}{m} - \frac{25}{6}\ln^2\frac{M}{m} - \left[6\zeta(3) + \frac{33}{4}\right]\ln\frac{M}{m}\right.$$
$$\left. -\frac{97}{8}\,\zeta(3) - 16\,\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2\pi^2}{3}\ln^2 2 - \frac{2}{3}\ln^4 2 + \frac{5\pi^4}{36} - \frac{13\pi^2}{36} - \frac{4495}{432}\right\}$$

M. I. Eides, H. Grotch and V. A. Shelyuto (2001)

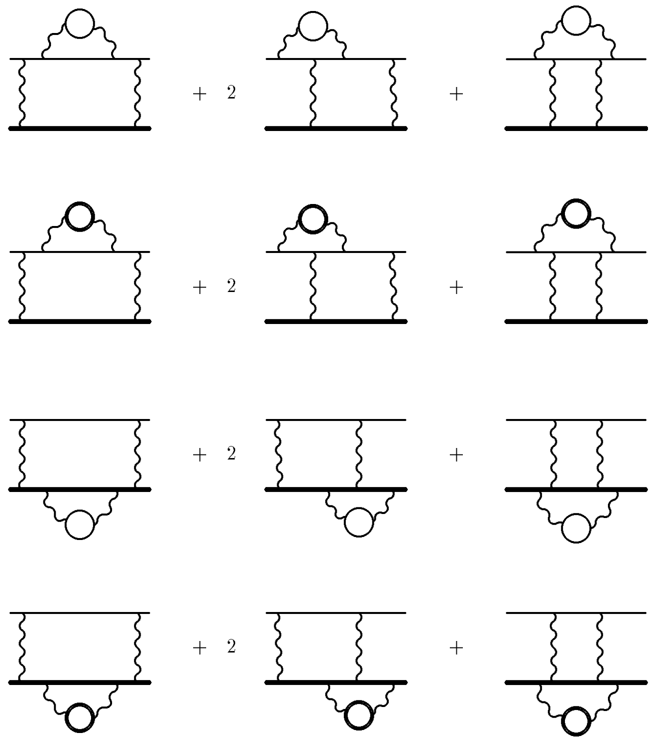
Третий калибровочно-инвариантный набор



$$\delta E_3 \quad = \quad \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3}\,\frac{m}{M}\,\widetilde{E}_F\left\{\ \frac{5}{2}\ln^2\frac{M}{m} \ + \ \left[\ 6\,\zeta(3) \ - \ 4\pi^2\ \ln 2 \ + \ \frac{83}{4}\ \right]\ln\frac{M}{m} \quad + \quad 29.8805\ \right\}$$

M. I. Eides, H. Grotch and V. A. Shelyuto (2003)

Четвертый калибровочно-инвариантный набор

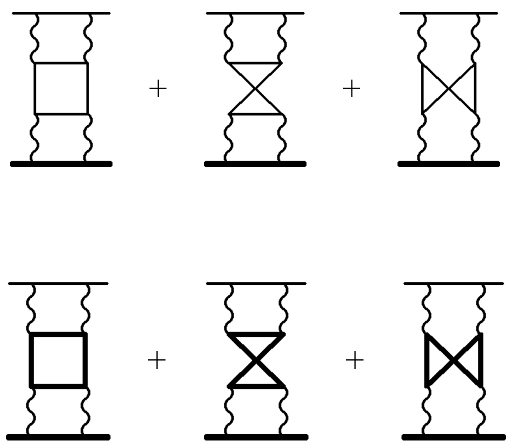


$$\delta E_{4e} \quad = \quad \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3}\frac{m}{M}\,\widetilde{E}_F\left\{\ \frac{3}{4}\ \ln^2\frac{M}{m} \quad + \quad \left[\ \frac{5\pi^2}{3} \ - \ \frac{155}{9}\ \right]\ln\frac{M}{m} \quad + \quad 7.\,08444\ \right\},$$

$$\delta E_{4\mu} \quad = \quad \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3}\frac{m}{M}\,\widetilde{E}_F\left\{\ \left[\ 3\,\zeta(3) \ - \ 2\pi^2\ \ln 2 \ + \ \frac{13}{4}\ \right]\ln\frac{M}{m} \quad + \quad 11.\,230\ \right\}.$$

M. I. Eides and V. A. Shelyuto (2009)

Пятый калибровочно-инвариантный набор

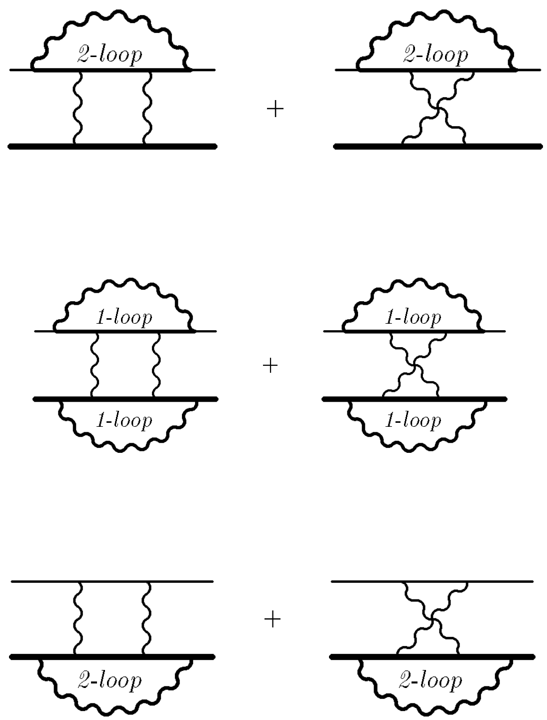


$$\delta E_{5NR} = \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} E_F \, [\, -0.4725 \,] \, ,$$

$$\delta E_{5e} = \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} \frac{m}{M} \widetilde{E}_F \left[\frac{9}{4} \cdot \ln^2 \frac{M}{m} + C_{51} \cdot \ln \frac{M}{m} + C_{50e} \right] ,$$

$$\delta E_{5\mu} = \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3} \frac{m}{M} \widetilde{E}_F \cdot C_{50\mu} \, .$$

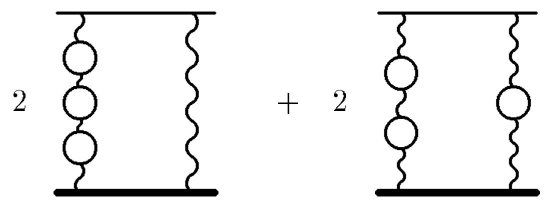
Шестой калибровочно-инвариантный набор



$$\delta E_{6\,comb} \quad = \quad \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3}\,\frac{m}{M}\,\widetilde{E}_F\left[\,-\,\frac{15}{8}\,\zeta(3)\;+\;\frac{15\pi^2}{4}\,\ln 2\;+\;\frac{27\pi^2}{16}\;-\;\frac{147}{32}\,\right]$$

M. I. Eides, H. Grotch and V. A. Shelyuto (2004)

Ведущий четырехпетлевой вклад

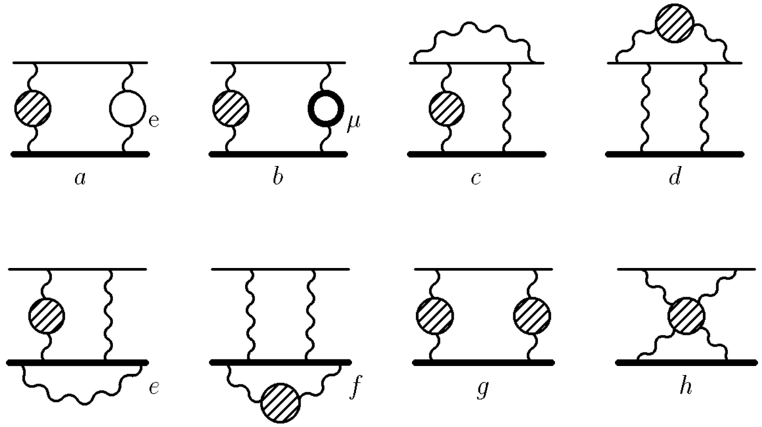


В главном логарифмическом приближении вклад в сверхтонкое расщепление легко получить из разложения эффективного заряда

$$\delta E_{4\log} = \frac{\alpha^3(Z\alpha)}{\pi^4}\frac{m}{M}\,E_F\left[-\frac{8}{9}\ln^4\frac{M}{m} + \ldots\right] \simeq \frac{\alpha^2(Z\alpha)}{\pi^3}\frac{m}{M}\,E_F\Big[-1.67\Big]\,.$$

Слагаемые с низшими степенями логарифма и константа несколько уменьшат конечный результат, но его масштаб останется прежним. Таким образом, ведущий четырехпетлевой вклад (пятого порядка малости) должен быть учтен при окончательном вычислении всех вкладов четвертого порядка $\alpha^2(Z\alpha)(m/M)\,E_F$.

Однопетлевые радиационные поправки к ведущему адронному вкладу



$$\delta E \quad \simeq \quad \delta E\,(\mathrm{had}) \cdot \left[\, 1 \;+\; \frac{\alpha}{\pi} \left[\ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \;-\; 1.94\,(5) \right] \right]$$

S. I. Eidelman, S. G. Karshenboim, and V. A. Shelyuto (2002, 2009),

S. G. Karshenboim, V. A. Shelyuto and A. I. Vainshtein (2008).

Теория:

$$\delta E_{HFS}\,(th) \;=\; 4\ 463\ 302.904\ (518)\ (30)\ (70)\ \text{kHz}$$

$$\delta[m_\mu] \;\simeq\; 1.2\times 10^{-7}\ , \qquad \delta[\alpha] \;\simeq\; 7\times 10^{-9}\ , \qquad \delta[th] \;\simeq\; 1.6\times 10^{-8}$$

Эксперимент:

$$\delta E_{HFS} \;=\; 4\ 463\ 302.776\ (51)\ \text{kHz} \qquad \delta = 1.1\times 10^{-8}$$

W. Liu et al, Phys. Rev. Lett. **82**, 711 (1999)

Комбинируя теоретические и экспериментальные данные (M. I. Eides, H. Grotch, and V. A. Shelyuto, Theory of Light Hydrogenic Bound States. Springer, 2007),

получаем значение отношения масс мюона и электрона

$$\frac{m_\mu}{m_e} \;=\; 206.\,768\ 282\ 9\ (41) \qquad \delta = 2.0\times 10^{-8}$$

с погрешностью в шесть раз меньшей, чем в прямом эксперименте.