

Автомодельность некоторых интегральных характеристик галактик от карликовых до скоплений.

Г.С. Голицын

С помощью теории подобия и размерности рассмотрены около 50 галактик в окрестности 10 Мпк, из них 18 средних и крупных и 32 карликовых в окрестности 2 Мпк. Определены величины масштаба скорости $U_\alpha = (GL)^{1/5}$, где G - постоянная гравитации, L - светимость объекта. Для мелких объектов этот масштаб примерно втрое меньше наблюдаемых скоростей, а для крупных – около 70 % от них. Это отношение – первый параметр подобия. Вычислены вириалы Π для 28 мелких и 4-х крупных объектов и построены гистограммы. В интервале $\Pi_2 = 5-6$ найден острый пик распределения вероятностей величины вириала. Для крупных объектов оценены их массы M в предположении $\Pi_2 = 5.7$. Введён в рассмотрение параметр $\varepsilon = L/M$, удельная светимость на единицу массы, оказавшийся порядка $10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^3$ для всех рассмотренных объектов. Для скоплений галактик его величина на полпорядка – порядок меньше. Дисперсия скоростей σ сопоставлена с выражением $(\varepsilon r)^{1/3}$, следующим из теории мелкомасштабной турбулентности Колмогорова – Обухова. Обе величины оказались одного и того же порядка с переводным коэффициентом в пределах 1.5 – 6.5, несмотря на различия в массах объектов в 4 – 5 порядков, размеров в полтора – два порядка и т.д.

Сделан вывод, что галактики от карликов до кластеров в отношении их интегральных характеристик могут быть описаны одними и теми же формулами, но со слабо меняющимися численными коэффициентами. Последние могут зависеть от других параметров подобия, связанных, вероятно, в первую очередь с геометрией и морфологией объектов. Такая автомодельность по терминологии Г.И. Баренблатта [9, 16] называется автомодельностью второго рода. На этой основе сделано сопоставление с понятием Фундаментальной Плоскости, введённой для эллиптических галактик в последней четверти прошлого века.

1. В последней четверти прошлого века была замечена корреляция между различными измеряемыми параметрами галактик и их скоплений [1 - 6]. Эти корреляции находятся в разных участках спектра: оптическом, инфракрасном, микроволновом. Были замечены связи между светимостью объекта, его размерами, дисперсией скоростей и т.д. Для эллиптических галактик было введено понятие Фундаментальной Плоскости, ФП [3 – 6] в виде статистической зависимости между измеряемыми характеристиками, например, [4]:

$$\lg r_e = 1.24 \lg \sigma - 0.8 \lg \langle I_e \rangle + \gamma, \quad (1)$$

где r_e - радиус по половинной яркости объекта, σ - дисперсия скоростей в его центральной области, $\langle I_e \rangle$ - средняя яркость в этой области, γ - величина рассогласования. Численные коэффициенты перед логарифмами испытывают разброс

между индивидуальными объектами порядка 10 %, т.е. абсолютные значения параметров ФП имеют разброс порядка 30 %. Образно говоря, ФП имеет конечную толщину.

Понятие ФП было введено для описания статистической общности объектов в виде корреляции измеряемых характеристик эллиптических галактик и близко к ним галактик SO. Однако природа ФП оставалась полной загадкой [3, 4], т.е. ФП – способ описания чисто эмпирических фактов, не имеющих физических объяснений.

ФП может быть спроектирована на любую из двух осей своих трёх переменных, т.е. можно проследить связь между двумя любыми рассматриваемыми характеристиками. Ряд примеров и богатая литература приведены в [3]. Не упоминается там весьма известная связь – соотношение Талли – Фишера [2, 7] между светимостью и скоростями вида $L \propto U^n$, где $n = 2.5 \div 3.5$.

Природу подобных корреляций следует выяснять на основе теории подобия и размерности [8, 9]. Такие связи должны быть лишь между величинами одинаковой размерности. Изменяемые величины определяются тремя единицами измерений: масса, длина, время. Используется Международная Система, единицами которой являются килограмм, метр, секунда. Если измеряется m величин, определяемых k единицами измерений, то в системе должно быть $m - k$ безразмерных параметров подобия.

В галактиках все величины физически и геометрически связаны гравитацией, характеризуемой постоянной $G = 0.6672 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$. Полезно иметь в виду численное значение её обратной величины $G^{-1} = 1.5 \cdot 10^{10}$, с точностью, лучшей 0.12%. Излучаемая мощность, т.е. светимость, измеряется в Ваттах: $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \text{ с}^{-3}$.

2. Произведение GL , очевидно, имеет размерность пятой степени размерности скорости, что даёт возможность ввести масштаб скорости в виде [10, 11]

$$U_d = (GL)^{1/5}, \quad (2)$$

которого нет нигде в [1 – 7]. Лишь в [1] в конце текста отмечается, что светимость пропорциональна U^4 . Однако там нет ни объёма данных, ни самих данных, поэтому можно предположить, что данные не противоречат показателю степени, равному 5, если их интервал изменений не очень велик. В оптическом диапазоне [7] зависимость светимости от скорости слабее и в размерном виде, очевидно, более сложная.

В [11] автор с помощью теории подобия и размерности рассмотрел скопления галактик. Они характеризуются массами, светимостью, температурой и размерами. Скопления насчитывают многие десятки, сотни и даже тысячи галактик. В их массе велика доля газа, поэтому может быть измерена температура и введена тепловая скорость молекул, среднее значение которой равно

$$c_T = (3kT / \mu m_p)^{1/2}, \quad (3)$$

где $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – константа Больцмана, μm_p – произведение молекулярного веса межгалактического газа $\mu = 0.6$ на массу атома водорода $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг, т.е. $\mu m_p = 1 \cdot 10^{-27}$ кг.

Отношение этих двух скоростей, размерной (2) и тепловой (3), даёт первый параметр подобия

$$\Pi_1 = U_d / c_T, \quad (3')$$

который для 20 скоплений, рассмотренных в [11], оказался практически постоянным и равным 0.26 ± 0.02 .

Из 4-х размерных величин и константы тяготения G , определяемых тремя единицами измерений, можно построить и второй безразмерный критерий, который хорошо известен в астрофизике, но по величине определяется редко. Это отношение потенциальной энергии к удвоенной кинетической энергии и называется вириалом:

$$\Pi_2 = \frac{MG}{U_0^2 R}, \quad (4)$$

где $U_0^2 / 2$ – среднее значение кинетической энергии на единицу массы. В [11] предполагалось, что средние значения скорости U близки к размерному масштабу скорости U_2 согласно (2). Это предположение будет ниже проверено для 50 объектов, находящихся в пределах 10 Мпк от Солнца. Значение скорости U_0 оценивалось как

$$U_0 = (U_r^2 + \sigma^2)^{1/2}, \quad (5)$$

где U_r – максимальное значение вращательной скорости в галактике, σ – дисперсия скоростей. Данные по скоростям содержатся в базе [12]. Ряд данных содержится в книге [13], из которой мы будем использовать Таблицу 9.

Начнём с рассмотрения карликовых галактик в ближайшей к нам окрестности 2 Мпк, согласно обзору [14], откуда выберем объекты с известной массой, представленные в Таблице 1.

Таблица 1. Параметры карликовых галактик

№	Название	$M \cdot 10^6 M_{\text{sol}}$	R , пк	$L \cdot 10^6 L_{\text{so}}$	U_o^2 , км ² / с ²	Π_2	U_d , км/с	$\Pi_1 = U_0 / U_d$	$\varepsilon \cdot 10^{-4}$
1	WLM	150	710	50.2	505	1.8	67	0.34	0.67
2	IC 10	1580	475	160	964	14.9	83	0.37	0.20
3	NGC 147	110	170	131	527	5.3	81	0.28	2.38
4	NGC 145	130	155	125	630	5.7	81	0.31	2.00
5	NGC 205	740	260	366	2120	5.8	100	0.46	0.99
6	M 32	2120	635	383	2650	5.4	101	0.51	0.36

7	Sculptor	6.4	110	2.15	50	5.0	89	0.08	0.67
8	LGS 3	13	160	1.33	123	2.9	32	0.35	0.21
9	IC 163	795	585	63.6	515	11.4	70	0.32	0.16
10	Phoenix	33	310	0.90	80	5.8	30	0.30	0.06
11	Fornax	68	460	15.5	110	5.8	53	0.20	0.46
12	Carina	13	210	0.43	47	5.7	26	0.26	0.07
13	Leo A	11	185	3.03	87	3.0	38	0.25	0.55
14	Sextans B	885	445	40.7	810	10.6	64	0.44	0.09
15	NGC3109	6550	630	160	4500	10.0	84	0.80	0.05
16	Antlia	12	230	1.73	40	5.6	34	0.20	0.29
17	Leo I	22	215	4.79	80	5.5	42	0.21	0.44
18	Sextans A	395	700	55.7	425	5.7	68	0.30	0.28
19	Sextans	19	335	0.50	44	5.6	27	0.25	0.05
20	Leo II	9.7	160	0.58	45	5.8	28	0.24	0.12
21	GR 8	7.6	110	3.43	170	1.8	40	0.33	0.90
22	Ursa Minor	23	200	0.29	110	4.5	24	0.44	0.03
23	Draco	22	180	0.26	91	5.8	24	0.40	0.03
24	Sag DEG	9.6	125	0.25	57	5.8	45	0.17	1.43
25	NGC 6828	1640	260	93.4	2280	12.0	77	0.62	0.12
26	DDO 210	5.4	95	0.91	50	4.9	30	0.24	0.30
27	IC 5152	400	390	70.3	1025	4.3	72	0.44	0.35
28	Pegasus	58	280	12	174	5.	51	0.26	0.41

В первую очередь найдём значения вириала для объектов из [14], для которых в [12 - 14] приводятся все необходимые для (4) величины. Таких объектов оказывается 32. Сюда входят 28 объектов из Табл. 1 со значениями скоростей из Табл. 8 [14] и 4 средних и крупных объекта: Млечный Путь, МП, Андромеда, М31, Магеллановы Облака. Величины Π_2 варьируют от 1.8 до 14.9. На рис. 1 представлена гистограмма значений вириала. Эта гистограмма, т.е. эмпирическое распределение вероятностей, представлена на Рис. 1 для интервалов от Π_2 через 1.0 от $\Pi_2 = 1.5-2$ до $\Pi_2 = 15$. Для значений Π_2 от 5 до 6 виден резкий пик, в который входят все 4 названных выше объекта. При более детальном построении гистограммы оказывается, что пик приходится на интервал от 5.5 до 6.0. Для нас, т.е. МП, значения $\Pi_2 = 4.6$. Может быть, в значении массы $M = 170 \cdot 10^{40}$ кг из [13] недоучтена тёмная материя.

Таблица 2. Параметры близлежащих до 10 Мпк галактик по Таблице 9 из [13]

№	Назв.	$R \cdot 10^{20}$ м	$L \cdot 10^{35}$ Вт	$M \cdot 10^{40}$ кг	U_d км/с	U_0 , км/с	$\frac{U_0}{U_d}$	Π_2	$\frac{L}{M} 10^{-5}$ $\text{м}^2/\text{с}^3$	$\frac{\sigma\tau}{\sigma}$ км/с	$\frac{\sigma\tau}{\sigma}$
1	МП	4.63	80	170	222	240	1.08	4.6	0.47	130	1.08
2	М31	5.64	94	300	229	301	1.31	5.3	0.31	120	0.75
3	БМО	1.13	12	3	152	56	0.37	5.0	4	165	5.0
4	ММО	0.55	2	1.4	106	52	0.49	5.0	1.4	192	3

5	205	0.31	1.23	1.44	96	37	0.39	-	0.85	64	2.1
6	221	0.10	0.81	0.4	89	70	0.79	-	2	58	0.87
7	253	4.51	74	21.5	217	213	0.98	-	3.4	248	2.6
8	598	1.95	8	17	140	88	0.63	-	0.49	98	3.1
9	2403	2.77	24	34	174	110	0.63	5.7	0.71	125	1.2
10	3031	2.77	65	11.2	219	212	0.99	-	0.58	117	0.8
11	4258	9.74	180	378	261	240	0.92	-	0.48	167	1.3
12	4736	1.69	94	48	229	145	0.63	-	1.96	149	1.4
13	5128	3.33	233	187	275	288	1.05	-	1.25	161	1.5
14	5194	6.41	310	98	291	113	0.39	-	3.16	272	2.5
15	5236	3.33	135	40	246	123	0.50	-	3.38	224	-
16	5457	8.20	217	520	270	87	0.32	-	0.42	151	8.5

В Таблице 2 приведены данные для 22 средних галактик из Табл. 9 в [13]. Для 18 из них в базе данных [12] нет значений масс, которые для остальных 4-х взяты из [15]. Согласно Рис. 1 значение вириала от 5 до 6 является наиболее вероятным для выбранного набора объектов. Поэтому значение массы представляется возможным оценить из формулы (4) при заданном среднем значении $\Pi_2 = 5.7$ в виде

$$M = 5.7G^{-1}U^2R = 8.55U^2R \cdot 10^{20} \text{ кг} \quad (6)$$

По известным из [12] значениям квадрата скорости с учётом (5) и размера. Как это может работать, показывает корреляция, сравнивающая значения масс из Таблицы 1 и 4-х обозначенных выше (МП, М31, БМО, ПМО) со значениями, рассчитанными согласно (6): коэффициент корреляции равен 0.991.

В работах [1-6] приводятся значения отношений массы M к светимости объекта, причём в разных спектральных областях. Здесь будет оценено обратное значение

$$\varepsilon = L / M, \quad (7)$$

размерность которого – отношение квадрата длины к кубу времени. Это совпадает с размерностью скорости диссипации кинетической энергии на единицу массы в теории турбулентности Колмогорова – Обухова. В нашем случае энергия генерируется во внутrigалактических процессах и диссипирует путём излучения в космос. В единицах измерений, принятых в [14], относящихся к Солнцу, для которого светимость $L = 4 \cdot 10^{26}$ Вт, масса $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг, мерой ε является $2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$. Значения ε приведены в обеих таблицах. Для карликов её значения варьируют от 0.02 до 2.38 со средним значением 0.46 ± 0.37 на $10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$. Можно отметить некоторую положительную корреляцию величины ε с ростом размеров объекта. Разброс в значениях ε по всей видимости отражает особенности (геометрического?) строения объектов и к его крайним значениям следует привлечь внимание исследователей.

В Таблице 1 приведено сопоставление величины

$$\sigma_T = (\varepsilon r)^{1/3}, \quad (8)$$

следующей из теории Колмогорова – Обухова с дисперсиями скоростей из Таблицы 7 обзора Матео [14], которые даны там для 16 объектов. Отношение σ_r / σ имеет некоторый разброс, но его среднее значение равно 1.6 ± 0.5 и это при разбросе размеров на порядок. Для получения для этого отношения значения единицы величина εr должна быть уменьшена вчетверо ($1.6^3 \approx 4$). Это можно сделать, уменьшив размер r в четыре раза, т.к. в [14] приводятся значения дисперсии σ , относящиеся к центральным областям галактик. В целом, порядок величин, наблюдаемых и оцениваемых дисперсий скоростей близки, и растут с размерами объекта.

Сопоставим отношение полных скоростей (5) к нашему масштабу (1), определяемому светимостью объекта. Это отношение приведено в столбце 7 Таблицы 1. Для 33 карликовых объектов оно варьирует от 0.16 до 0.52 со средним значением 0.33 ± 0.11 . Таким образом, наш масштаб (1) втрое больше полного масштаба скоростей (5), вращательных и турбулентных, но порядок величин тот же.

3. Близкие, но отличающиеся оценки получаются и для больших и средних галактик в Таблице 2. Отношение наблюдаемых скоростей к масштабу (1) здесь побольше: 0.77 ± 0.26 , но также в основном меньше 1, хотя для трёх объектов: МП, М31, и NGC3031 оно больше единицы. При этом отношение $U_{\text{rot}} / U_d \approx 0.6$, а для полной скорости оно возрастает до 0.8.

После оценок масс согласно (6) возможна оценка величины ε по (7). Светимости и массы этого класса галактик оцениваются 10^9 степени этих величин для Солнца. Таким образом, значения ε также измеряется величиной $2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$. Для четырёх только что выше перечисленных объектов значения ε равны, соответственно, 0.94, 0.63, а для Магеллановых облаков 6 и 1.4 на $10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$. Две последние цифры почти на порядок больше, чем для других объектов и требуют внимательного анализа. За исключением Магеллановых облаков в среднем $\varepsilon = 0.64 \pm 0.28$ в указанных только что единицах, что вполне сопоставимо с величиной 0.64 ± 0.37 для карликов Таблицы 1.

Для дисперсии скоростей теоретическая оценка (8) относится к наблюдаемой в среднем как 6.7 ± 2.5 . Это значит, что в среднем следует уменьшить величину εr в $300 \approx 6.7^3$ раз. Опять же крайние значения призывают к более серьёзному анализу.

4. Интересно сравнить удельную высвечиваемую мощность галактик с таковой для их скоплений. Расчёты с использованием данных Таблицы 1 из [11] показывают, что для кластеров эта величина на полтора - два порядка меньше, варьируя от $0.15 \cdot 10^{-5}$ до $0.32 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$. При пятикратном разбросе значений ε можно отменить тенденцию к её уменьшению от молодых скоплений при красном сдвиге $z \approx 0.8 - 1.2$ и небольших значениях вириала $\Pi_2 \approx 2 \div 4$ до более отрелаксировавших скоплений с $\Pi_2 \approx 6 \div 9$ при $z \approx 0.4 - 0.5$. Согласно [11] эти эффекты сопровождаются и ростом масс кластеров.

Однако для газовой температуры изменений не видно, она остаётся в среднем 6.0 ± 2.1 кэВ. Поскольку остаётся убеждение, что излучение связано с температурой (в [11] показано по размерности и по наблюдениям, что $L \propto T^{5/2}$), то создаётся впечатление, что уменьшение удельной (на единицу массы) светимости происходит за счёт присоединения несветящейся, т.е. “тёмной” материи.

Напоминаем, что при температурах $2 \div 9$ кэВ в кластерах излучение формируется в рентгеновском диапазоне. Индивидуальные галактики излучение формируют в оптике, конкретно звезды с температурами меньше 1 эВ, т.е. меньше 10^4 К.

5. Подытожим основные результаты.

- 1) Введённый ранее [10, 11] для скоплений галактик масштаб скорости (1) $U_d = (GL)^{1/5}$ оказался хорошо описывающим наблюдаемые в галактиках скорости, вращательные и дисперсию, а также полные скорости согласно (5). Для карликовых галактик в пределах 1 Мпк отношение полной скорости (5) к этому масштабу равно 0.33 ± 0.11 . Это отношение служит первым параметром подобия Π_1 . Для средних и крупных галактик в пределах 10 Мпк согласно Таблицы 9 из [13] этот параметр ближе к единице: 0.77 ± 0.26 , т.е. лучше в среднем оценивает скорости. Для некоторых крупных галактик: Млечный путь, Андромеда, - он немного больше единицы.
- 2) Знание полных скоростей, масс и размеров объектов позволяет оценить второй параметр подобия Π_2 , отношение потенциальной энергии объекта к удвоенной кинетической энергии, называемой просто вириалом, формула (4). Для 28 объектов обзора Матео [14] он варьирует от 1.8 до 14.9 с резким увеличением числа объектов в интервале от 5 до 6. Сюда же относятся Андромеда, оба Магеллановых облака и близок Млечный Путь с Π_2 чуть меньше 5. Это дало основание оценить массы галактик упомянутой Таблицы 9 из [13] при $\Pi_2=5.7$.
- 3) Введён в рассмотрение новый физический параметр – удельная, на единицу массы, светимость по (7). По размерности он аналогичен скорости диссипации/генерации кинетической энергии турбулентности на единицу массы в теории Колмогорова – Обухова. Эта величина оказалась порядка $10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^3$. Для карликов, если опустить объекты №№ 3, 4 и 24, значение $10^4 \varepsilon$ равно $0.33 \pm 0.20 \text{ м}^2/\text{с}^3$, а для трёх указанных выше – почти на порядок больше. Набор из 16 галактик Таблицы 2 можно разделить пополам по значению $\varepsilon \approx 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}^3$. Для меньших значений ε имеем 0.54 ± 0.13 на 10^{-5} и это, в основном, крупные галактики. Для другой половины $\varepsilon = 2.6 \pm 1.1$ на $10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}^3$, т.к. перекрывается карликами. Эта же величина оценена и для скоплений из [11]. Для них эта величина варьирует между 0.15 и 0.03 на $10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}^3$, т.е. на порядок меньше, чем для галактик нашей Таблицы 2. Для скоплений наблюдается тенденция к уменьшению величины ε с возрастом объекта, что при отсутствии тенденций в росте температуры и сохранения зависимости $L \propto T^{5/2}$ (рекомендуемой в [11] к определению расстояний до скоплений) можно понять к набору с возрастом “тёмной материи”.

- 4) Аналогия с турбулентностью призывает оценить дисперсию скоростей σ , наблюдаемую в пределах от 6 до 200 км/с. Согласно теории Колмогорова – Обухова значение σ оценивается формулой (8). Данные для карликов есть в обзоре [14], а для галактик – в [12]. Отношение $(\varepsilon r)^{1/3} / \sigma$ оказывается заметно большим единицы, что говорит о необходимости уменьшить произведение εr , соответственно.
- 5) С точки зрения теории подобия и размерности выявленную ситуацию можно характеризовать как проявление автомодельности второго рода. При этом выделяются основные степенные закономерности от управляющих параметров, такие как (1), (4), (7), (8), но их отношения к соответствующим наблюдаемым в виде численных характеристик проявляют слабую зависимость от подкласса объектов, к которым они применяются, несмотря на то, что эти классы по массе могут различаться на три - четыре порядка, по светимости – на два порядка, по размерам – на порядок. А численные упомянутые коэффициенты меняются в худших случаях лишь в несколько раз. Это следует интерпретировать так, что эти численные коэффициенты проявляют слабую зависимость от каких-то других безразмерных параметров подобия, например, от геометрических, вроде отношения aspect ratio, т.е. вертикального и горизонтального, степени эллиптичности, числа рукавов спирали, наличия центрального бара и т.п. Сходная ситуация описана в [16] для мелкомасштабной турбулентности, когда выполняется основная зависимость от произведения εr , но численный коэффициент оказывается слабой функцией от числа Рейнольдса. Конечно, нужна гораздо большая статистика для уточнения наших результатов, но это уже дело для профессиональных и не старых астрономов.

Рассмотрим проблемы с точки зрения теории подобия и размерности, хорошее совпадение с точностью до численных коэффициентов размерных величин с наблюдаемыми даёт возможность и здесь построить нечто, аналогичное фундаментальной плоскости. Например, используя (6), представим эту формулу в виде

$$\lg M = 2 \lg U + \lg R + \gamma ,$$

где γ будет включать в себя разброс в значениях вириала и других параметров, вроде численных коэффициентов, возникающих при сопоставлении размерных величин с измеряемыми. Аналогичное выражение можно получить из соображений размерности в виде $\lg R = \lg M + 0.4 \lg L + \gamma$, $\gamma = \frac{3}{5} \lg G + \dots$ множитель, получаемый при сопоставлении наблюдаемой величины с размерной. Напоминаем, что эти численные коэффициенты могут зависеть от безразмерных параметров подобия, связанных с геометрией и морфологией рассматриваемых объектов.

В заключение выражаю глубокую благодарность О.К. Сильченко и О.Г. Чхетиани за помощь в работе, которая была частично поддержана Программой Президиума РАН № 19.

ЛИТЕРАТУРА

1. Faber S., Jackson R. ApJ. **204**, 668, 1976.
2. Tully R.B., Fisher J.R. Astron. Astrophys. **54**, 661, 1977.
3. Pahre M.A., Djorgovski S.G. In: Arnold M. Et al (eds). The Nature of Elliptical Galaxies. Proc. 2-nd Stromlo Symp. 1997.
4. Jargenson I., Franx M., Kjaergaard P. MNRAS, **280**, 167-186, 1996.
5. Djorgovski S.G., Davies M. ApJ. **313**, 59, 1987.
6. Dressler A. Astrophys. J. **317**, 1, 1987.
7. Zaritsky D. Et al. Astron. J. **147**, 174, 2014.
8. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике // М.: Наука, 7-е изд. 1972.
9. Баренблатт Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг // Долгопрудный: Интеллект, 2009.
10. Голицын Г.С. Статистика и динамика природных процессов и явлений. М.: Красанд, 2012.
11. Голицын Г.С. // Кластеры галактик, критерии подобия и соотношения между их измеряемыми характеристиками. УФН. **185**, 12, 1323-1332б 2015.
12. leda.univ-lion1.fr
13. Сурдин В.Г. (ред. сост.). Галактики. М.: Физматлит, 2013.
14. Mateo M. MNRAS, 1998.
15. Электронный ресурс (Wikipedia), статьи по отдельным галактикам, в каждой порядка сотни ссылок.
16. Баренблатт Г.И., Корин А. Дж., Простокишин В.М. УФН, **184**, 265, 2014.

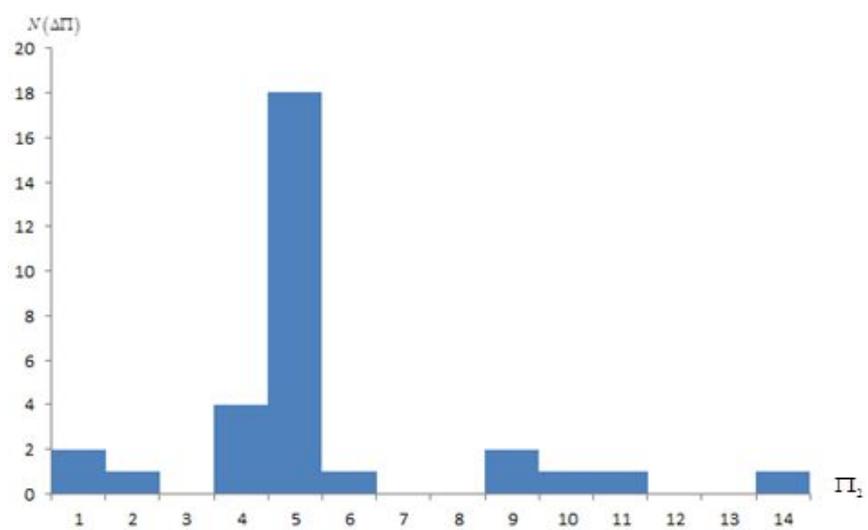


Рис. 1