

УДК 524.354.6

© 2011 А. И. Чугунов*

Электропроводность коры нейтронной звезды при низких температурах

ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 194021, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26

Low temperature electrical conductivity of the neutron star crust

A.I. Chugunov *

Ioffe Institute, 26 Polytekhnicheskaya, St Petersburg 194021, Russian Federation

Поступила в редакцию 23 августа 2011 г.

С учетом смешивания волновых функций электронов из-за взаимодействия с кристаллической решёткой атомных ядер проведён расчет электропроводности коры нейтронной звезды при низких температурах. Показано, что существовавшая ранее модель экспоненциального подавления частоты рассеяния электронов на ионах может приводить к завышению оценки электропроводности на несколько порядков. Для использования в приложениях предложена простая интерполяционная формула, сшивающая ранее известные результаты расчета электропроводности при высоких температурах с найденной здесь низкотемпературной асимптотикой.

Ключевые слова: нейтронные звёзды, кинетические коэффициенты

PACS codes: 97.60.Jd, 52.25.Fi

* Электронный адрес <andr.astro@mail.ioffe.ru>

1. Введение

Знание электропроводности коры нейтронных звёзд важно при моделировании многих процессов, протекающих в нейтронных звёздах, таких как омическое затухание магнитного поля и связанный с ним нагрев коры (см., например, Понс и др. 2009, Попов и др. 2009), распространение тока в коре нейтронной звезды при токовом механизме торможения пульсара (см., например, Бескин и Нохрина 2007) и распад неоднородностей магнитного поля, важных для гамма-излучения пульсаров (Барсуков и др. 2006, Барсуков и др. 2007, Барсуков и др. 2009).

Основным переносчиком заряда в коре нейтронной звезды являются электроны, а их основными рассеивателями – ионы (см., например, Потехин и др. 1999). При низких температурах, рассматриваемых в данной работе, ионы образуют кристаллическую решётку и электрон-ионное рассеяние удобно описывать в терминах излучения и поглощения фононов. Эти процессы также называют электрон-фононным рассеянием. В настоящей работе, для простоты, электропроводность вычисляется в предположении отсутствия магнитного поля и считается изотропной.

До сих пор надёжные расчеты электронных кинетических коэффициентов проводились для достаточно высоких температур (Флауэрс и Ито 1976, Байко и Яковлев 1995, Байко и Яковлев 1996, Байко и др. 1998, Потехин и др. 1999, Чугунов и Яковлев 2005), когда электрон-фононное рассеяние эффективно на всей поверхности Ферми и электроны можно считать почти свободными. При этом, основной вклад в рассеяние вносят так называемые электрон-фононные *процессы переброса*, в которых в законе сохранения квазиимпульса присутствует вектор обратной решётки (см., например, Займан 1962), что приводит к существенному изменению направления скорости электрона при рассеянии. При низких температурах T неэкспоненциально малые числа заполнения имеют лишь коротковолновые акустические фононы с достаточно низкими частотами $\omega \sim k_B T / \hbar$, где \hbar – постоянная Планка, а k_B – постоянная Больцмана. Поэтому в процессах переброса квазиимпульс электрона меняется практически в точности на вектор обратной решётки \mathbf{g} . Вместе с законом сохранения энергии, это ограничивает область рассеяния окрестностями границ зон Бриллюэна, где электронные состояния существенно искажены взаимодействием с кристаллической решёткой, а на самих границах в дисперсионном соотношении электронов появляются щели (см., например, Райх и Яковлев 1982, Займан 1962). Такое искажение приводит к подавлению рассеяния электронов в процессах переброса, которое ранее учитывалось лишь приближенно – на основе упрощенной модели вводилось экспоненциальное подавление частоты рассеяния при низких температурах, приводящее к экспоненциальному росту электропроводности (см., например, Гнедин и др. 2001). Такое вымораживание действительно имеет место во многих земных проводниках, в которых поверхность Ферми не пересекается с границами зон Бриллюэна, а, значит, существует минимальный волновой вектор фонона, который может участвовать в процессе переброса [см., например, рис. 117 в книге Займана (1962)]. В коре нейтронной звезды, напротив, поверхность Ферми пересекается с границами зон Бриллюэна. Это вызвано большим количеством обобществлённых электронов, приходящихся на

одно атомное ядро. Соответственно, в рассеянии электронов могут участвовать фононы со сколь угодно малым импульсом (см. раздел 4), что в свою очередь приводит к степенной зависимости электропроводности от температуры. В настоящей работе проведено вычисление электропроводности с корректным учетом искажения электронных состояний кристаллической решёткой.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 описан состав вещества коры нейтронной звезды, введены основные параметры. В разделе 3 описаны электронные состояния вблизи границ зон Бриллюэна, которые использованы в разделе 4 при выводе выражения для электропроводности в коре нейтронной звезды при низких температурах. В разделе 5 показано, что в пределе высоких температур полученное выражение воспроизводит хорошо известную электропроводность, вычисленную в приближении свободных электронов (см., например, Флауэрс и Ито 1976, Райх и Яковлев 1982, Байко и Яковлев 1995). Низкотемпературная асимптотика электропроводности выведена в разделе 6. В разделе 7 предложена интерполяционная формула (39), которая гладко сшивает полученную здесь низкотемпературную асимптотику с наиболее точными расчетами электропроводности при более высоких температурах (Потехин и др. 1999, Гнедин и др. 2001), когда влиянием щелей можно пренебречь. В том же разделе результаты проиллюстрированы на примере электропроводности коры нейтронной звезды со сглаженным равновесным ядерным составом (см. приложение В монографии Хэнсела и др. 2007). В заключительном разделе 8 сделаны выводы и описаны планы дальнейших исследований.

2. Параметры вещества

Кору нейтронных звёзд разделяют на внешнюю, состоящую из атомных ядер (ионов) и вырожденных электронов, и внутреннюю ($\rho_d \gtrsim 4 \times 10^{11} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$), в которой дополнительно присутствуют вырожденные нейтроны, не локализованные в атомных ядрах (см., например, Хэнсел и др. 2007). Для простоты мы будем предполагать, что все атомные ядра при данной плотности ρ являются идентичными. Число нуклонов, связанных в атомном ядре, мы будем обозначать $A_{\text{нuc}}$. Во внутренней коре это число необходимо отличать от величины A — полного числа нуклонов, приходящихся на одно ядро. При плотностях $\rho \lesssim 10^{14} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ все протоны связаны в атомных ядрах и определяют заряд ядра Ze . Так как энергия связи нуклонов в коре нейтронной звезды мала по сравнению с их энергией покоя, концентрацию атомных ядер можно оценить как $n_i = \rho / (A m_u)$, где $m_u = 1.6605 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ — атомная единица массы. Условие квазинейтральности определяет концентрацию электронов $n_e = n_i Z$.

Состояние вырожденных электронов удобно описывать импульсом Ферми p_F или волновым числом Ферми k_F :

$$p_F \equiv \hbar k_F = \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3} = m_e c x_r, \quad (1)$$

где m_e — масса электрона, $x_r \approx 100.9 (\rho_{12} Z/A)^{1/3}$ — параметр релятивизма электронов и ρ_{12} — плотность в единицах $10^{12} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$. В настоящей работе мы будем предполагать,

что электроны являются ультрарелятивистскими ($x_r \gg 1$). Это приближение справедливо при интересующих нас плотностях $\rho \gtrsim 10^{10}$ г/см³. Температура вырождения таких электронов равна

$$T_F = (\epsilon_F - m_e c^2) / k_B \approx 5.93 \cdot 10^9 x_r \text{ К}, \quad (2)$$

где введена фермиевская энергия электронов

$$\epsilon_F \equiv m_e c^2 \sqrt{1 + x_r^2} \approx m_e x_r c^2. \quad (3)$$

В данной работе исследовано вещество при $T \ll T_F$.

Обычно считается, что в коре нейтронной звезды наиболее энергетически выгодной является кристаллизация ионов с образованием объемноцентрированной кубической решётки. Однако гранецентрированная кубическая решётка имеет практически такую же энергию (см., например, Байко 2002). Далее мы рассмотрим решётки обоих типов и покажем, что при низких температурах электропроводность слабо чувствительна к типу кристаллической решётки. Отметим, что аналогичный вывод для случая высоких температур был сделан в работе Потехина и др. (1999). Мы будем рассматривать вещество при температурах $T \lesssim 10^8$ К, которые меньше температуры плавления, что позволяет описывать динамику ионов на языке фононов в кристалле. Волновые числа фононов удобно измерять в радиусах шара (в k -пространстве) равновеликого первой зоне Бриллюэна $q_{BZ} = (6\pi^2 n_i)^{1/3}$. Отметим, что в коре нейтронной звезды на одно ядро приходится много свободных электронов ($Z \gg 1$) и величина q_{BZ} мала по сравнению с диаметром сферы Ферми $2k_F$: $2k_F/q_{BZ} = (4Z)^{1/3} \gg 1$. Например, при характерных зарядах атомных ядер в коре нейтронной звезды $Z \sim 30$ атомных ядер в коре нейтронной звезды отношение $2k_F/q_{BZ} \sim 5$.

Квантовые эффекты в системе ионов становятся важными при $T \lesssim T_p/3$, где

$$T_p = \frac{\hbar \omega_p}{k_B} \approx 7.832 \cdot 10^9 \left(\frac{Z^2}{A A_{\text{нuc}}} \right)^{1/2} \rho_{12}^{1/2} \text{ К} \quad (4)$$

— ионная плазменная температура, $\omega_p = (4\pi Z^2 e^2 n_i / m_i)^{1/2}$ — ионная плазменная частота. Зависимость T_p (точечная линия) от плотности для вещества внутренней коры нейтронной звезды со сглаженным равновесным ядерным составом (см., приложение В в книге Хэнсела и др. 2007) представлена на рисунке 1. Температура плавления T_m превосходит T_p для показанных на нём параметров. Описание величин $E_{\text{gap}}/2$, T_U и \tilde{T}_U дано в разделе 3.

Так как рассматриваемые в данной работе температуры $T \lesssim 10^8$ К более чем на порядок меньше T_p , в кристалле возбуждены лишь низкочастотные фононы ($\omega \sim k_B T / \hbar \ll \omega_p$). Такие фононы имеют малые волновые числа и эффективно взаимодействуют лишь с электронами, чьи состояния могут быть существенно искажены взаимодействием со статической кристаллической решёткой. Поэтому для рассмотрения электрон-фононного рассеяния, важного при расчете электропроводности, необходимо детальное описание электронных состояний, проведённое в следующем разделе.

3. Электроны вблизи границ зон Бриллюэна

В этом разделе для краткости $\hbar = 1$.

Будем описывать электронные состояния, следуя работе Петика и Торсона (1997), и использовать схемы расширенных и периодических зон. Схема периодических зон удобна при рассмотрении рассеяния, так как в законе сохранения квазиимпульса можно исключить вектор обратной решётки \mathbf{g} и рассматривать рассеяние электронов с близкими квазиимпульсами. С другой стороны, электроны в коре нейтронной звезды почти свободны. Поэтому в схеме расширенных зон поверхность Ферми близка к сферической (соответствующую сферу радиуса r_F в импульсном пространстве будем называть сферой Ферми), что удобно, например, в расчетах коэффициентов переноса при высоких температурах. В отличие от большинства задач физики твёрдого тела в земных условиях, использование схемы приведённых зон представляется не оправданным. Дело в том, что большое количество обобществлённых электронов, приходящееся на одно атомное ядро, приводит к наличию большого количества зон проводимости (частично заполненных зон), в каждой из которых поверхность Ферми имеет сложную форму. При этом, каждая незаполненная зона вносит свой нетривиальный вклад в проводимость, а их количество существенно зависит от состава вещества. Поэтому в схеме приведённых зон для каждого заряда ядра Z требуется фактически независимый расчет электропроводности, что чрезвычайно усложняет её исследование. В тоже время, в схеме расширенных зон форма поверхности Ферми качественно не зависит от заряда ядра (слабо искаженная сфера), что позволяет провести единое описание при всех Z .

Спектр энергии электронов в коре нейтронной звезды слегка искажается из-за взаимодействия с решёткой. Это взаимодействие наиболее существенно, когда состояния свободных электронов с импульсами $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ и $\mathbf{p} - \mathbf{g}$ обладают близкими энергиями. Здесь \mathbf{g} — какой-либо вектор обратной решётки. Нас интересуют состояния электронов вблизи поверхности Ферми. Поэтому каждому вектору обратной решётки \mathbf{g} , не превосходящему диаметра сферы Ферми ($g \leq 2k_F$), сопоставим набор векторов \mathbf{p}_0 длиной r_F , для которых выполнено условие равенства энергий свободных электронов с импульсами \mathbf{p}_0 и $\mathbf{p}_0 - \mathbf{g}$. Такие векторы образуют окружность на поверхности Ферми и задаются условием $\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{g} = g^2/2$ (см. рисунок 2). Совокупность этих окружностей для всех векторов $\mathbf{g} \leq 2k_F$ образует область пересечений границ зон Бриллюэна со сферой Ферми. Их проекции на плоскость граней куба объемноцентрированной кубической решётки показаны на рисунке 3. Для примера выбрано вещество состоящее из атомов с зарядами ядер $Z = 2, 10, 30$ и 50 . Толщина линий соответствует (в масштабе рисунка) удвоенной ширине области эффективного смешивания волновых функций ультрарелятивистских электронов $2\Delta k_{\text{mix}}$, вычисленной в приближении точечных ядер с пренебрежением влиянием фактора Дебая-Валлера. Граница сферы Ферми показана жирной окружностью; её центр отмечен точкой. Величина q_{BZ} показана отрезком в левом нижнем углу каждого рисунка. Основная часть поверхности Ферми не подвержена существенному взаимодействию со статической решёткой и остаётся белой на рисунке 3. В этих областях электроны можно с хорошей точно-

стью считать свободными. Так как зоны Бриллюэна являются многогранниками, на поверхности Ферми есть точки принадлежащие их ребрам. В этих точках пересекается несколько окружностей, соответствующих разным векторам обратной решётки \mathbf{g} , а, значит, в их окрестности происходит смешивание более чем двух волновых функций свободных электронов. Однако соответствующие области занимают очень малую часть поверхности Ферми и не должны существенно усиливать рассеяние. Мы будем пренебрегать ими при рассмотрении электронных состояний и учитывать только парное смешивание волновых функций, описываемых импульсами \mathbf{p} и $\mathbf{p} - \mathbf{g}$.

Рассмотрим состояние электрона, описываемое в схеме расширенных зон квазиимпульсом \mathbf{p} , близким к одному из векторов \mathbf{p}_0 и лежащим в одной плоскости с ним и соответствующим вектором \mathbf{g} . Энергия этого состояния, не возмущенная взаимодействием с решёткой, задаётся выражением

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} \approx \varepsilon_{\text{F}} + C_{\parallel} c \Delta p_{\parallel} + C_{\perp} c \Delta p_{\perp}, \quad (5)$$

где

$$C_{\parallel} = \frac{g}{2k_{\text{F}}}; \quad C_{\perp} = \sqrt{1 - C_{\parallel}^2}. \quad (6)$$

Здесь вектор $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$. Величины Δp_{\parallel} и Δp_{\perp} являются координатами вектора $\Delta \mathbf{p}$ в декартовой системе координат с осями \mathbf{e}_{\parallel} и \mathbf{e}_{\perp} такими, что $\mathbf{p}_0 = p_{\text{F}} (C_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel} + C_{\perp} \mathbf{e}_{\perp})$ (см. рисунок 2). Проекция $\Delta \mathbf{p}$ на ось $\mathbf{e}_{\varphi} = [\mathbf{e}_{\parallel} \times \mathbf{e}_{\perp}]$ равна нулю в силу выбора вектора \mathbf{p}_0 .

Так как мы рассматриваем состояние с квазиимпульсом \mathbf{p} , близким к \mathbf{p}_0 , оно будет наиболее сильно смешиваться с состоянием $\mathbf{p} - \mathbf{g}$, а смешиванием с другими состояниями мы будем пренебрегать. Поэтому в схеме периодических зон из, вообще говоря, бесконечного набора состояний, соответствующих каждому квазиимпульсу \mathbf{p} , мы будем выбирать такие два, которые в схеме расширенных зон соответствуют квазиимпульсам \mathbf{p} и $\mathbf{p} - \mathbf{g}$. Состояние с более высокой энергией будем обозначать индексом “+”, а с менее высокой — индексом “−”. Ионы в коре нейтронной звезды являются полностью ионизованными, поэтому потенциал взаимодействия электрона и одиночного атомного ядра $U(r)$ можно считать известным. Так как фермиевская энергия электронов велика по сравнению с энергией взаимодействия электронов с атомными ядрами, энергию выбранной пары электронных состояний можно рассчитать по теории возмущений (см., например, Займан 1962):

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{k}}^{\pm} &= \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{g}}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{g}}}{2}\right)^2 + E_{\mathbf{g}}^2} \\ &= \varepsilon_{\text{F}} + C_{\perp} c \Delta p_{\perp} \pm \sqrt{(C_{\parallel} c \Delta p_{\parallel})^2 + E_{\mathbf{g}}^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$E_{\mathbf{g}} = n_i U_{\mathbf{g}} = 4 \pi n_i Z e^2 \phi(g) \quad (8)$$

— полуширина щели, $U_{\mathbf{g}} = 4 \pi Z e^2 \phi(g)$ — фурье-компонента потенциала $U(r)$ и

$$\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{g}} = \varepsilon_{\text{F}} - C_{\parallel} \Delta p_{\parallel} + C_{\perp} \Delta p_{\perp} \quad (9)$$

— невозмущенная энергия состояния с импульсом $\mathbf{p} - \mathbf{g}$ (см. рисунок 2). Величина $\phi(\mathbf{g}) = \phi(g)$ не зависит от направления \mathbf{g} благодаря изотропии потенциала $U(r)$. Её можно представить как (см., например, Гнедин и др. 2001)

$$\phi(q) = e^{-W(q)} \frac{F(q)}{q^2 \epsilon(q)}. \quad (10)$$

Здесь

$$F(q) = \frac{1}{Z} \int e n_p(r) \exp(i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}) d^3r \quad (11)$$

— формфактор атомных ядер, описывающий распределение электрического заряда (протонов) по ядру, $W(q)$ — фактор Дебая-Валлера, учитывающий колебания ионов вокруг положения равновесия и $\epsilon(q)$ — статическая продольная диэлектрическая проницаемость электронной плазмы. В приближении точечных ядер [$n_p = Z\delta(\mathbf{r})$], использованном на рисунке 3, $F(q) = 1$. Для расчета диэлектрической проницаемости воспользуемся простейшей моделью Томаса-Ферми

$$\epsilon(q) = 1 + \frac{k_{\text{TF}}^2}{q^2}, \quad (12)$$

в которой экранирование потенциала пробного заряда электронами характеризуется одним параметром — волновым числом Томаса-Ферми

$$k_{\text{TF}}^2 = 4\pi^2 e^2 \frac{\partial n_e}{\mu_e} \approx \frac{\alpha_f}{\pi} (2k_F)^2. \quad (13)$$

Здесь $\mu_e \approx \epsilon_F$ — химический потенциал электронов и $\alpha_f \equiv e^2/(\hbar c) \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Эта модель применима при $q \ll k_{\text{TF}}$. Однако, нас будут интересовать и области соответствующие волновым числам $q \sim k_F$, в которых, строго говоря, необходимо использовать более точную теорию. Для случая свободных вырожденных электронов диэлектрическая проницаемость вычислена Янковичи (1962). Однако он не учитывал искажение энергетического спектра электронов из-за взаимодействия с решёткой¹. Оно может быть важным для экранирования при волновых векторах \mathbf{q} близких к векторам обратной решётки и приводить к анизотропии диэлектрической проницаемости. Учет последнего эффекта представляется интересной темой для отдельного исследования, которое, насколько известно автору, еще не проведено для случая вещества коры нейтронных звёзд. Тем не менее, при больших переданных импульсах $q \sim k_F$ экранирование является слабым ($\epsilon \approx 1$). Поэтому при расчете электропроводности применение точной модели экранирования не должно приводить к качественно новым эффектам по сравнению с моделью Томаса-Ферми. Это позволяет ограничиться использованием последней в настоящей работе.

В схеме периодических зон волновая функция с учетом взаимодействия со статической кристаллической решёткой записывается в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_{\sigma, \mathbf{p}}^+ &= u_{\mathbf{k}} \Psi_{\sigma}^{\text{free}}(\mathbf{p}) + v_{\mathbf{k}} \Psi_{\sigma}^{\text{free}}(\mathbf{p} - \hbar \mathbf{g}), \\ \Psi_{\sigma, \mathbf{p}}^- &= v_{\mathbf{k}} \Psi_{\sigma}^{\text{free}}(\mathbf{p}) - u_{\mathbf{k}} \Psi_{\sigma}^{\text{free}}(\mathbf{p} - \hbar \mathbf{g}), \end{aligned} \quad (14)$$

¹Пользуясь случаем, выражаю благодарность одному из анонимных рецензентов, который обратил моё внимание на этот эффект.

где $\Psi_\sigma^{\text{free}}(\mathbf{p})$ — волновая функция свободного электрона с импульсом \mathbf{p} и спиральностью σ (Берестецкий и др. 2002), а коэффициенты разложения $u_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{g}}/[2\epsilon_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}})]^{1/2}$ и $v_{\mathbf{k}} = (\epsilon_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}})^{1/2}/(2\epsilon_{\mathbf{k}})^{1/2}$. Здесь $\xi_{\mathbf{k}} = C_{\parallel} c \Delta p_{\parallel}$, $\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{(C_{\parallel} c \Delta p_{\parallel})^2 + E_{\mathbf{g}}^2}$.

Соответствие индексов состояний и квазиимпульсов в схеме расширенных и периодических зон приведено в таблице 1 (см. также рисунок 2). Например, при $\Delta p_{\parallel} < 0$ состояние с квазиимпульсом \mathbf{p} и индексом “+” в схеме периодических зон отвечает состоянию с квазиимпульсом $\mathbf{p} - \mathbf{g}$ в схеме расширенных зон.

Следуя работе Гнедина и др. (2001), оценим при каких температурах искажение волновых функций и дисперсионного соотношения электронов взаимодействием со статической решёткой становится существенным для рассмотрения электрон-фононного рассеяния. Характерную величину щели оценим при $g \sim k_{\text{F}}$

$$E_{\text{gap}} = 2V_{g=k_{\text{F}}} \sim \frac{4e^2}{3\pi} \frac{F(k_{\text{F}}) e^{-W(k_{\text{F}})}}{\epsilon(k_{\text{F}})} k_{\text{F}}. \quad (15)$$

Численное значение полуширины щели (в температурных единицах) показано на рисунке 1 сплошной линией. Из-за различия скоростей фононов и электронов, присутствие щелей начинает существенно влиять на электрон-фононное рассеяние при на порядок более низких температурах $T \lesssim T_{\text{U}}$. Действительно, взаимодействие электронов со статической решёткой искажает их дисперсионное соотношение в областях с характерным размером $\Delta k_{\text{mix}} \sim E_{\text{gap}}/V_{\text{e}}$, где $V_{\text{e}} \approx c$ — скорость электронов, тогда как при температуре $k_{\text{B}} T \sim E_{\text{gap}}$ электроны эффективно рассеиваются на фононах с волновыми числами $q \sim k_{\text{B}} T/V_{\text{ph}}$, где $V_{\text{ph}} \sim \omega_p/q_{\text{BZ}}$ — типичная скорость акустических фононов ($V_{\text{ph}} \ll c$). Соответственно в рассеянии участвуют электроны с импульсами лежащими в области с характерным размером $q \sim (c/V_{\text{ph}})\Delta k_{\text{mix}} \gg \Delta k_{\text{mix}}$. В основной части этой области электронные состояния искажены незначительно. Поэтому при $k_{\text{B}} T \sim E_{\text{gap}}$ основную часть актов фонон-электронного рассеяния можно рассматривать в приближении свободных электронов, как это и было сделано Потехиным и др. (1999). Однако при уменьшении температуры характерное волновое число фононов q становится сравнимым с Δk_{mix} и приближение свободных электронов становится неприменимым для рассмотрения электрон-фононного рассеяния. Требуется более детальное описание электронных состояний. Это происходит при температурах

$$T \lesssim T_{\text{U}} = \frac{V_{\text{ph}} E_{\text{gap}}}{V_{\text{e}} k_{\text{B}}} \sim \alpha_{\text{f}} T_{\text{p}} \frac{Z^{1/3}}{3} e^{-W(k_{\text{F}})} F(k_{\text{F}}). \quad (16)$$

В этой оценке мы пренебрегли электронным экранированием (поскольку $k_{\text{TF}} \ll k_{\text{F}}$). Характерную температуру T_{U} будем называть температурой вымораживания процессов переброса. По меркам нейтронных звёзд она мала (см. штрих-пунктирную линию на рисунке 1), но достигается, например, в изолированных нейтронных звёздах с возрастом $t \gtrsim 10^6$ лет (см., например, Гусаков и др. 2005, Яковлев и др. 2011, Штернин и др. 2011), которые, могут проявлять себя как пульсары (Лоример 2010, Попов и др. 2009, Болдин и Попов 2010). Отметим, что в работе Гнедина и др. (2001) температура вымораживания процессов переброса была оценена в приближении

$F(q) = 1$: $\tilde{T}_U = \alpha_f T_p Z^{1/3}/3$. Однако вблизи границы с ядром звезды величина $F(k_F) \sim 0.3$, что и вызывает отличие температуры T_U от \tilde{T}_U , показанной на рисунке 1 штриховой линией.

4. Электропроводность. Общие формулы

После описания параметров вещества и электронных состояний в коре нейтронной звезды можно перейти к расчету электропроводности. Непосредственное решение кинетического уравнения с учетом всех процессов рассеяния является очень сложной задачей. Мы ограничимся оценкой с помощью вариационного метода (см., например, Займан 1962) и будем вычислять электропроводность как максимум функционала

$$\sigma = |\mathbf{I}_1|^2 / I_2 \quad (17)$$

при варьировании пробной функции $\Phi_{\mathbf{k}}$, описывающей отклонение функции распределения электронов от равновесной. Здесь интеграл

$$I_2 = \frac{1}{k_B T} \sum_{\nu} \int \int \int (\Phi_{\mathbf{k}} - \Phi_{\mathbf{k}'})^2 P_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \nu}^{\mathbf{p}'}$$

$$\times \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \quad (18)$$

определяет удвоенную скорость генерации энтропии при поглощении фононов (что равно полной скорости генерации энтропии в процессах поглощения и рождения фононов). Интегрирование ведется по квазиимпульсам электрона (в схеме расширенных зон) до и после рассеяния ($\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ и $\mathbf{p}' = \hbar \mathbf{k}'$), а также по волновому вектору рассеивающего (поглощаемого) фонона \mathbf{q} . Вероятность соответствующего рассеяния $P_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \nu}^{\mathbf{p}'}$ в интересующем нас пределе $\mathbf{p}' \approx \mathbf{p} - \mathbf{g}$ вычислена в приложении 1. Суммирование ведётся по ветвям фононных мод ν . Так как рассеяние электрона происходит с сохранением спиральности (см. приложение 1), то соответствующие индексы не влияют на результат и здесь опущены. Нормировочный интеграл I_1 в (17) даётся выражением:

$$\mathbf{I}_1 = \int e \mathbf{V}_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}} \frac{\partial f}{\partial E_{\mathbf{p}}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (19)$$

где $f(\mathbf{p}) = 1/[\exp((E_{\mathbf{p}} - \mu_e)/k_B T) + 1]$ равновесная фермиевская функция распределения электронов.

Выберем простую пробную функцию (о корректности такого выбора см. приложение 2), не содержащую вариационных параметров $\Phi_{\mathbf{k}} = \mathbf{V}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}$, где $\mathbf{V}_{\mathbf{k}} = \partial E_{\mathbf{k}} / \partial \mathbf{p}$ — скорость электронов, а \mathbf{u} — единичный вектор в направлении электрического поля. Индекс состояния “+” или “−” здесь не требуется, так как мы используем схему расширенных зон, где квазиимпульс однозначно определяет состояние электрона. Можно показать, что такая пробная функция даёт лучшую оценку электропроводности, чем еще более простая пробная функция $\Phi_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}/k$. Интеграл \mathbf{I}_1 можно вычислить

в приближении свободных электронов ($\mathbf{V}_{\mathbf{k}} = \mathbf{n}c$, где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$), так как на основной части поверхности Ферми электроны почти свободны (см. рисунок 3). Простое интегрирование даёт $|\mathbf{I}_1| = eck_F^2/(6\pi^2 \hbar)$.

После подстановки вероятности рассеяния $P_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \nu}^{\mathbf{p}'}$ [выражение (A6)], интегрирование по \mathbf{k}' проводится элементарно с помощью дельта-функции от квазиимпульса. Напомним, что мы рассматриваем электропроводность при низких температурах, когда основной вклад в рассеяние электронов на фононах вносят состояния с квазиимпульсами \mathbf{p} , лежащими вблизи векторов \mathbf{p}_0 (см. рисунок 2). Описывая такие состояния в схеме периодических зон, запишем интеграл по электронным состояниям в (18) в виде суммы интегралов по двумерному вектору $\Delta \mathbf{k} = \Delta \mathbf{p}/\hbar = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)/\hbar$ и азимутальному углу $\varphi_{\mathbf{k}}$ вектора \mathbf{k} :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{n_i}{4(2\pi)^5 m_i k_B T} \sum_{(j)} \sum_{(j')} \sum_{\mathbf{g}} \sum_{\nu} \\
 &\times \int [(\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'}) \cdot \mathbf{u}]^2 \frac{n_{\mathbf{q}, \nu}}{\omega_{\mathbf{q}, \nu}} f_{\mathbf{p}} (1 - f_{\mathbf{p}'}) \\
 &\times \{(\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{g}) U_{\mathbf{g}} C_{\perp} F_{uv}^{\mathbf{g}}\}^2 \\
 &\times \delta(E_{\mathbf{k}} + \hbar\omega_{\mathbf{q}, \nu} - E_{\mathbf{k}'}) C_{\perp} k_F d\varphi_{\mathbf{k}} d^2 \Delta k d^3 q. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Суммирование ведётся по векторам \mathbf{g} и индексам электронных состояний (j) , $(j') = “+”, “-”$. В подынтегральном выражении индексы мод (j) и (j') опущены для краткости обозначений. Определение множителей $F_{uv}^{\mathbf{g}}$ дано в приложении 1. Дополнительный коэффициент $1/2$ в (20) необходим, так как при суммировании по индексу (j) каждое состояние электрона до рассеяния учитывается дважды из-за избыточности схемы периодических зон.

Отметим, что для векторов \mathbf{g} , которые можно получить друг из друга преобразованиями симметрии решётки, интеграл в (20) будет отличаться только за счет множителя $[(\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'}) \cdot \mathbf{u}]^2$, не удовлетворяющего этой симметрии из-за наличия вектора \mathbf{u} . Так как суммирование в (20) идёт по всем векторам обратной решётки, то для каждого из них мы можем провести под интегралом усреднение по, вообще говоря, 48-ми векторам обратной решётки \mathbf{g}_e , получающимся из данного вектора \mathbf{g} преобразованиями симметрии кубической решётки (перестановкой и сменой знаков координат)

$$\frac{1}{48} \sum_{\mathbf{g}_e} [(\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'}) \cdot \mathbf{u}]^2 = \frac{1}{3} (\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'})^2. \tag{21}$$

Доказательство этого утверждения приведено в приложении 3.

Вектор $\Delta \mathbf{k}$ в локальной декартовой системе координат $(\mathbf{e}_{\parallel}, \mathbf{e}_{\perp})$ записывается как $(\Delta k_{\parallel}, \Delta k_{\perp})$. Разность скоростей $\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'} = \partial \Delta E / \partial \mathbf{p}$, где разность энергий

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= E_{\mathbf{k}}^{(j)} - E_{\mathbf{k}'}^{(j')} = -C_{\perp} c \hbar q_{\perp} \\
 &\pm \sqrt{(C_{\parallel} c \hbar \Delta k_{\parallel})^2 + E_{\mathbf{g}}^2} \\
 &\mp \sqrt{[C_{\parallel} c \hbar (\Delta k_{\parallel} + q_{\parallel})]^2 + E_{\mathbf{g}}^2}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Здесь первый знак “+” или “–” соответствует индексу (j), а второй знак “–” или “+” — взятому с обратным знаком индексу (j'). Легко убедиться, что разность скоростей $\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'}$ не зависит от Δk_{\perp} и направлена вдоль вектора \mathbf{g} . Это позволяет провести интегрирование по компоненте Δk_{\perp} :

$$\int f(E) [1 - f(E + \hbar\omega_{\mathbf{q},\nu})] d\Delta k_{\perp} = \frac{\omega_{\mathbf{q},\nu}}{C_{\perp} \hbar c} \frac{1}{1 - e^{-z_{\nu}}}, \quad (23)$$

где $z_{\nu} = \hbar\omega_{\mathbf{q},\nu}/(k_{\text{B}}T)$ и использовано соотношение $dE_{\mathbf{k}}^{(j)} = C_{\perp} \hbar c d\Delta k_{\perp}$ [см. выражение (7)]. После замены переменных $d\Delta E = d(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}'}) = \hbar |\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'}| d\Delta k_{\parallel}$, интегрирование по $d\Delta E$ проводится элементарно с помощью дельта-функции от энергии. В результате интеграл I_2 можно записать как

$$I_2 = \frac{n_i}{12 (2\pi)^5} \frac{p_{\text{F}}}{\hbar^2 m_i k_{\text{B}}T} \sum_{\mathbf{g}} U^2(\mathbf{g}) \sum_{\nu} I_3^{\mathbf{g},\nu}, \quad (24)$$

где введён новый интеграл

$$\begin{aligned} I_3^{\mathbf{g}} &= \frac{C_{\perp}^2}{c} \sum_{(j)} \sum_{(j')} \sum_{\nu} \int |\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'}| \frac{n_{\mathbf{q},\nu}}{1 - e^{-z_{\nu}}} \\ &\times (F_{uv}^{\mathbf{g}})^2 (\mathbf{e}_{\mathbf{q},\nu} \cdot \mathbf{g})^2 d\varphi_{\mathbf{k}} d^3 q. \end{aligned} \quad (25)$$

Теперь электропроводность легко представить через *эффективное* время релаксации электронов τ :

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau}{x_{\text{T}} m_e}, \quad \tau = \frac{p_{\text{F}}^2 v_{\text{F}}}{4\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda_{\sigma}}, \quad (26)$$

где

$$\Lambda_{\sigma} = \frac{p_{\text{F}}}{8\pi^2} \frac{\hbar}{k_{\text{B}}T m_i} \sum_{\mathbf{g}} \phi(g)^2 I_3^{\mathbf{g}} \quad (27)$$

можно рассматривать как “обобщенный” кулоновский логарифм.

Так как скорости фононов малы по сравнению со скоростями электронов, в законе сохранения энергии можно пренебречь энергией фонона и записать квазиимпульсы электронов, способных принимать участие в рассеянии на фононе с волновым вектором \mathbf{q} , в виде:

$$\Delta p_{\parallel} = -\frac{\tilde{p}_{\parallel}}{2} \pm \frac{\tilde{p}_{\perp}}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{\tilde{p}_{\mathbf{g}}^2}{\Delta \tilde{p}^2}}, \quad (28)$$

$$\Delta p'_{\parallel} = \frac{\tilde{p}_{\parallel}}{2} \pm \frac{\tilde{p}_{\perp}}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{\tilde{p}_{\mathbf{g}}^2}{\Delta \tilde{p}^2}}. \quad (29)$$

Здесь введены обозначения $\tilde{p}_{\mathbf{g}} = E_{\mathbf{g}}/(c C_{\parallel})$, $\tilde{p}_{\perp} = \hbar q_{\perp} C_{\perp}/C_{\parallel}$, $\tilde{p}_{\parallel} = \hbar q_{\parallel}$, $\Delta \tilde{p}^2 = \tilde{p}_{\parallel}^2 - \tilde{p}_{\perp}^2$. Подставив явный вид функций $F_{uv}^{\mathbf{g}}$ для электронов с квазиимпульсами (28) и (29),

проведём аналитические преобразования и запишем общее выражение для интеграла

$$I_3^{\mathbf{g}} = 2C_{\parallel} C_{\perp}^2 \sum_{\nu} \int \frac{(\Delta\tilde{p}^2)^{7/2} (\Delta\tilde{p}^2 + 4\tilde{p}_{\mathbf{g}}^2)^{1/2}}{(4\tilde{p}_{\parallel}^2 \tilde{p}_{\mathbf{g}}^2 + (\Delta\tilde{p}^2)^2)^2} \times \frac{e^{-z\nu}}{(1 - e^{-z\nu})^2} (\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{g})^2 d\varphi_{\mathbf{k}} d^3 q. \quad (30)$$

Здесь интегрирование ведётся в области, где либо $\Delta\tilde{p}^2 > 0$, либо $\Delta\tilde{p}^2 < -4\tilde{p}_{\mathbf{g}}^2$ (заштрихованные области на рис. 4), в которой законы сохранения допускают рассеяние.

В выражении (30) уже проведено суммирование по индексам электронных состояний (j) и (j'). Однако для понимания физики электрон-фононного рассеяния при низких температурах важно знать переходы между какими электронными состояниями реализуются при заданном значении вектора \mathbf{q} . Типы процессов рассеяния обозначим индексами вида “ $\pm\pm$ ”, где первый знак определяется индексом начального состояния электрона (j), а второй — индексом конечного состояния (j'). Например, процесс “ $++$ ” это переход из состояния $\Psi_{\sigma, \mathbf{p}}^+$ в $\Psi_{\sigma, \mathbf{p}'}^+$ (напомним, спиральность σ сохраняется при рассеянии). Можно показать, что процессы “ $++$ ” и “ $--$ ” идут при $|\tilde{p}_{\parallel}| > |\tilde{p}_{\perp}|$ (жирная штриховка на рисунке 4), а процессы “ $+-$ ” и “ $-+$ ” — при $\tilde{p}_{\perp}^2 > \tilde{p}_{\parallel}^2 + 4\tilde{p}_{\mathbf{g}}^2$ (тонкая штриховка на рисунке 4). Фононы с волновым вектором, лежащим в области $\tilde{p}_{\parallel}^2 < \tilde{p}_{\perp}^2 < \tilde{p}_{\parallel}^2 + 4\tilde{p}_{\mathbf{g}}^2$ (незаштрихованная область на рисунке 4), не участвуют в процессах рассеяния электронов, соответствующих вектору \mathbf{g} , так как такое рассеяние не может удовлетворить законам сохранения энергии и квазиимпульса [см. выражения (28) и (29)]. Тем не менее, они могут участвовать в рассеянии при другой ориентации вектора обратной решётки, а также в нормальных процессах рассеяния электронов, рассмотренных Райхом и Яковлевым (1982) и идущих на всей поверхности Ферми. Последние, однако, не вносят существенного вклада в электропроводность (см. раздел 7).

Как видно из рисунка 4, фононы со сколь угодно малым волновым числом q могут принимать участие в рассеянии электронов в процессах “ $++$ ” и “ $--$ ”. Однако Гнедин и др. (2001), следуя статье Райха и Яковлева (1982) и по аналогии с многими земными материалами (см., например, Займан 1962), предположили, что для участия в процессе переброса фонон должен обладать волновым числом не менее некой критической величины q_{\min} . Эта величина была оценена как ширина областей, возмущённых взаимодействием с решёткой, $q_{\min} \sim k_{\min} \sim E_{\mathbf{g}}/(\hbar c)$. На основе этой ошибочной оценки и была предложена модель экспоненциального подавления (уменьшения) частоты рассеяния электронов в процессах переброса при низких температурах $T \lesssim T_U$ [см. выражение (40)]. В действительности, величина q_{\min} определяется минимальным расстоянием от поверхности Ферми до границы зоны Бриллюэна. В случае многих земных проводников оно может быть отлично от нуля из-за малого количества обобществлённых электронов, приходящихся на один атом проводника (см., например, Займан 1962). Соответственно, такие вещества будут подвержены экспоненциальному вымораживанию процессов переброса при низких температурах. Однако, как уже отмечалось выше, в коре нейтронной звезды на один узел кристаллической решётки

ки приходится много электронов и поверхность Ферми пересекается с границами зон Бриллюэна. Это и приводит к тому, что в процессах переброса могут участвовать фононы со сколь угодно малыми волновыми числами, а, значит, к частотам рассеяния не применима модель экспоненциального вымораживания. Требуется более детальное рассмотрение, проведённое в настоящей работе.

Отметим, что процессы “+–” и “–+” действительно требуют участия фононов с волновыми числами $q \gtrsim q_{\min} \approx k_{\min}$ (см. рисунок 4). Поэтому рассеяние данного типа подвержено экспоненциальному вымораживанию [частоты рассеяния $\propto \exp(-T_U/T)$ при $T \ll T_U$] и при низких температурах не существенно.

5. Предел высоких температур

Покажем, что в случае высоких температур $T \gg T_U$, когда электрон-фононное рассеяние эффективно вдали от границ зон Бриллюэна и искажением спектра электронов из-за взаимодействия со статической решёткой можно пренебречь, наш результат [выражения (27) и (30)] совпадает с хорошо известным кулоновским логарифмом, полученным в приближении свободных электронов (см., например, Флауэрс и Ито 1976, Райх и Яковлев 1982, Байко и Яковлев 1995). Положим в (30) $\tilde{p}_{\mathbf{g}} = 0$. Тогда интеграл $I_3^{\mathbf{g}, \nu}$ перепишется в виде

$$I_3^{\mathbf{g}} = 2 C_{\parallel} C_{\perp}^2 \sum_{\nu} \int \frac{e^{-z_{\nu}} (\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{g})^2}{(1 - e^{-z_{\nu}})^2} d\varphi_{\mathbf{k}} d^3 q. \quad (31)$$

Теперь достаточно перейти от интегрирования по волновым векторам фонона \mathbf{q} к интегрированию по положению квазиимпульса электрона до и после рассеяния на поверхности Ферми, которое традиционно используется при расчетах в приближении свободных электронов. Для этого, в согласии с выражениями (28) и (29), запишем продольную компоненту квазиимпульса электрона до и после рассеяния $\Delta p_{\parallel} = -\tilde{p}_{\parallel}/2 + \tilde{p}'_{\parallel}/2$ и $\Delta p'_{\parallel} = \tilde{p}_{\parallel}/2 + \tilde{p}'_{\parallel}/2$, а в качестве поперечных компонент возьмём $\Delta p_{\perp} = C_{\parallel} \Delta p_{\parallel} / C_{\perp}$ и $\Delta p'_{\perp} = -C_{\parallel} \Delta p'_{\parallel} / C_{\perp}$. Очевидно, что состояния с такими квазиимпульсами лежат на поверхности Ферми (точнее на касательной к ней плоскости, см. рисунок 5). Заметим, что $d\varphi_{\mathbf{q}} = C_{\perp} k_{\text{F}} (d\varphi_{\mathbf{k}'} - d\varphi_{\mathbf{k}})$, где $\varphi_{\mathbf{k}'}$ азимутальный угол вектора \mathbf{k}' . Теперь в (31) можно перейти к интегрированию по $d\Omega$ и $d\Omega'$ — элементам сферических углов в направлениях векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}' и записать кулоновский логарифм в виде

$$\begin{aligned} \Lambda_{\sigma} &= \frac{2 p_{\text{F}}^2}{k_{\text{B}} T m_{\text{i}}} \sum_{\mathbf{g}} \phi(g)^2 g^2 \sum_{\nu} \int \frac{e^{-z_{\nu}}}{(1 - e^{-z_{\nu}})^2} \\ &\times (\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{g})^2 \left(1 - \frac{g^2}{4 k_{\text{F}}^2}\right) \frac{d\Omega d\Omega'}{4\pi 4\pi}. \end{aligned} \quad (32)$$

Легко убедиться в том, что частота рассеяния, определяемая формулой (32), совпадает с низкотемпературной асимптотикой выражений (3) и (4) из работы Райха и Яковлева (1982), полученных в приближении свободных электронов.

6. Предел низких температур

Рассмотрим предел низких температур, расчет в котором и является задачей настоящей статьи. Под низкими температурами подразумеваем $T \ll T_U$, когда состояния электронов, участвующих в рассеянии, существенно искажены взаимодействием с кристаллической решёткой. Процессы “+–” и “–+” требуют участия фонона с волновым числом $q \gtrsim E_g/(\hbar c)$ (см. рисунок 4). Энергии таких фононов $\hbar\omega \sim \hbar q V_{\text{ph}} \sim k_B T_U$ и, при рассматриваемых условиях, существенно превосходят тепловую энергию. Поэтому “+–” и “–+” рассеянием можно пренебречь из-за экспоненциально малых чисел заполнения фононных мод $n_{\mathbf{q},\nu}$. Для процессов “++” и “--” при $T \ll T_U$ волновые числа фононов, вносящих наибольший вклад в рассеяние, малы по сравнению с $E_g/(c\hbar)$. Тогда интеграл $I_3^{\mathbf{g},\nu}$ можно записать как

$$I_3^{\mathbf{g}} = \frac{\hbar^3 C_{\perp}^2 c^3}{4 C_{\parallel}^4 E_g^3} \sum_{\nu} \int \frac{(C_{\parallel}^2 q_{\parallel}^2 - C_{\perp}^2 q_{\perp}^2)^{7/2}}{q_{\parallel}^4} \times \frac{e^{-z\nu}}{(1 - e^{-z\nu})^2} (\mathbf{e}_{\mathbf{q},\nu} \cdot \mathbf{g})^2 d\varphi_{\mathbf{k}} d^3 q, \quad (33)$$

Интегрирование ведётся по области $C_{\parallel} |q_{\parallel}| > C_{\perp} |q_{\perp}|$, соответствующей “++” и “--” процессам.

Для простоты используем упрощенную модель фононного спектра $\omega_1 = \omega_2 = V_{\text{ph}} q$, $\omega_3 = \omega_p$. Моды $\nu = 1$ и 2 соответствуют поперечной поляризации, а третья мода — продольной. Изотропность фононного спектра в данной модели сводит интегрирование по $d\varphi_{\mathbf{k}}$ в (33) к умножению на 2π . Только фононы первых двух мод способны иметь частоты $\omega \sim k_B T/\hbar$, а вклад в интеграл $I_3^{\mathbf{g}}$ от третьей моды экспоненциально мал $\propto \exp(-T_p/T)$.

Введем сферическую систему координат для вектора \mathbf{q} с полярным углом θ , отсчитываемым от $\mathbf{e}_{\varphi} = [\mathbf{e}_{\parallel} \times \mathbf{e}_{\perp}]$ и азимутальным углом φ , измеряемым от вектора \mathbf{e}_{\parallel} (см. рисунок 6). Здесь \mathbf{e}_{\parallel} , \mathbf{e}_{\perp} и \mathbf{e}_{φ} — орты локальной декартовой системы координат, введённой в разделе 3. Косинус угла Θ между вектором \mathbf{q} и \mathbf{g} равен $\cos(\Theta) = q_{\parallel}/q = \sin(\theta) \cos(\varphi)$. Поскольку в нашем случае поперечные фононы вырождены, их вектора поляризации можно выбирать произвольным образом в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{q} . Для простоты, выберем вектор поляризации первой акустической моды так, чтобы он был перпендикулярен вектору \mathbf{g} . Тогда вектор поляризации второй акустической моды лежит в плоскости (\mathbf{g}, \mathbf{q}) . Соответственно (см. рисунок 7) $(\mathbf{e}_{\mathbf{q},\nu} \cdot \mathbf{g})^2 = \sin^2(\Theta) g^2$. Только эта мода и даёт вклад в интеграл $I_3^{\mathbf{g},\nu}$, который после перехода к переменным q , θ и φ можно взять аналитически и записать кулоновский логарифм в виде

$$\Lambda_{\sigma} = \frac{135 \pi^2 \zeta(5)}{\alpha_f^3} \frac{p_F^2}{2m_i k_B T} \left(\frac{k_B T}{V_{\text{ph}} p_F} \right)^6 \times \sum_{\mathbf{g}} e^{W(\mathbf{g})} \frac{\mathfrak{B}(C_{\parallel})}{F(\mathbf{g})} \left(1 + \frac{k_{\text{TF}}^2}{g^2} \right). \quad (34)$$

Здесь $\zeta(5) \approx 1.037$ — значение дзета-функции Римана и введена функция

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}(C_{\parallel}) &= C_{\perp}^2 [(54C_{\perp}^6 + 92C_{\perp}^4 - 2C_{\perp}^2) K(C_{\parallel}^2) \\ &\quad - (3C_{\perp}^6 + 118C_{\perp}^4 - 27C_{\perp}^2 + 4) E(C_{\parallel}^2)], \end{aligned} \quad (35)$$

в которой $K(x) \equiv \int_0^{\pi/2} [1 - x \sin^2(t)]^{-1/2} dt$ и $E(x) \equiv \int_0^{\pi/2} [1 - x \sin^2(t)]^{1/2} dt$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Отметим, что итоговое выражение для кулоновского логарифма (34) обратно пропорционально фурье-образу рассеивающего потенциала $\phi(\mathbf{g})$ [поэтому, например, формфактор атомных ядер $F(q)$ оказывается в знаменателе выражения (34)], а не пропорционально $\phi^2(\mathbf{g})$, как в приближении свободных электронов (32). Этот факт справедлив лишь в пределе низких температур, но остаётся верным и без использования модельного спектра фононов, так как коэффициент $1/E_{\mathbf{g}}^3$ выносится из под знака интегрирования до использования каких либо предположений о фононном спектре [см. выражение (33)]. Можно показать, что, при рассеянии на фононах с малым волновым вектором \mathbf{q} , множители $F_{uv}^{\mathbf{g}}$ для наиболее существенных при низких температурах процессов “++” и “--” оказываются пропорциональными $\propto 1/\phi(\mathbf{g})$ (см. приложение 1), что сокращается с явной зависимостью матричных элементов рассеяния от $\phi(\mathbf{g})$, а оставшаяся зависимость кулоновского логарифма $\propto 1/\phi(\mathbf{g})$ приходит из разности скоростей $|\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'}|$.

Согласно выражению (34), частота электрон-фононного рассеяния за счет процессов переброса при низких температурах оказывается пропорциональной T^5 , а не вымораживается экспоненциально, как было предположено в работе Гнедина и др. (2001). При малых температурах кулоновский логарифм, определяемый нормальными электрон-фононными процессами, также пропорционален T^5 (см. выражение (41) и работу Райха и Яковлева 1982). Однако из-за того, что нормальные процессы приводят лишь к медленной диффузии импульса по поверхности Ферми, процессы переброса, рассмотренные в настоящей работе, доминируют и при низких температурах. Детальное сравнение результатов проведено в разделе 7.

Для дальнейшего исследования аппроксимируем функцию $\mathfrak{W}(C_{\parallel})$ выражением:

$$\mathfrak{W}(C_{\parallel}) \approx 4 (1 - C_{\parallel}^2) \exp(12(C_{\parallel} - 1)). \quad (36)$$

Точность аппроксимации (36) проиллюстрирована на рисунке 8. На нём показаны точные значения функций $\mathfrak{W}(C_{\parallel})$, $C_{\parallel}^2 \mathfrak{W}(C_{\parallel})$ и $\mathfrak{W}(C_{\parallel}) [20(1 - C_{\parallel}^2)]$ (символы) и величины, соответствующие аппроксимации (линии). Видно, что все функции имеют максимум в довольно узкой области $0.7 \lesssim C_{\parallel} \lesssim 1$, где аппроксимация (36) позволяет хорошо воспроизводить точные значения соответствующих функций. Эта область соответствует $g \gtrsim k_{\text{F}}$ и даёт основной вклад в рассеяние электронов. В ней $k_{\text{TF}}^2/g^2 \sim 4\alpha_{\text{f}}/\pi \ll 1$, благодаря чему электронным экранированием можно пренебречь. Форм фактор атомных ядер, следуя работе Чугунова и Хэнсела 2007, представим в виде $F(g) = \exp(-w_{\text{form}} C_{\parallel}^2/2)$, где параметр $w_{\text{form}} = 43 r_{\text{p}}^2/a^2$ зависит от плотности. Здесь r_{p} — эквивалентный радиус распределения протонов в атомном ядре (радиус ядра с однородной протонной плотностью, в котором достигается такой же

среднеквадратичный радиус распределения заряда, что и в реальных атомных ядрах при данной массовой плотности ρ ; аппроксимация зависимости r_p от плотности для модели сглаженного равновесного ядерного состава приведена в приложении В монографии Хэнсела и др. 2007). Фактор Дебая-Валлера запишем в виде $W(g) = w_{\text{DW}} C_{\parallel}^2 / 2$. В рассматриваемом пределе низких температур величина $w_{\text{DW}} \approx 2.4 (A_{\text{nuc}} Z / x_r)^{-1/2}$.

Выражение (34) можно упростить, учитывая, что в сумму по \mathbf{g} входит много слагаемых [так как $q_{\text{BZ}}^3 \ll (2k_{\text{F}})^3$] и суммирование можно приближенно заменить интегрированием по векторам \mathbf{g} , считая их равномерно распределенным в k -пространстве с постоянной концентрацией $n_{\mathbf{g}} = (8\pi^3 n_i)^{-1}$. Соответствующий интеграл можно взять аналитически [при использовании аппроксимации (36)], однако результат интегрирования является слишком громоздким. Тем не менее, он хорошо аппроксимируется выражением:

$$\Lambda_{\sigma} = 5\alpha_{\text{f}}^2 \frac{Z^{2/3}}{C^6} \frac{p_{\text{F}}^2}{m_i k_{\text{B}} T_{\text{p}}} \left(\frac{T}{\tilde{T}_{\text{U}}} \right)^5 e^{0.4w}. \quad (37)$$

где $w = w_{\text{form}} + w_{\text{DW}}$, а $C = V_{\text{ph}} q_{\text{BZ}} / \omega_{\text{p}}$. В рассматриваемом пределе низких температур влияние фактора Дебая-Валлера незначительно ($w_{\text{DW}} \lesssim 0.15$), тогда как форм фактор атомных ядер вблизи границы коры с ядром нейтронной звезды соответствует величине $w_{\text{form}} \lesssim 8$, что существенно увеличивает кулоновский логарифм.

В качестве эффективной скорости фононов V_{ph} возьмём значение фазовой скорости ω_{ν}/q при $q \rightarrow 0$, усредненное по направлениям волнового вектора \mathbf{q} и поляризациям акустических фононов $\nu = 1, 2$:

$$V_{\text{ph}} = \lim_{q \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \sum_{\nu} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{q}}}{4\pi} \left(\frac{\omega_{\nu}}{q} \right)^{-5} \right]^{-1/5}. \quad (38)$$

Соответствующее значение постоянной $C \approx 0.36$ (Чугунов и Хэнсел 2007). Эта величина, а, значит, и электропроводность, практически не зависит от типа кристаллической решётки атомных ядер (объёмно- или гранецентрированная кубическая). Отметим, что этот вывод справедлив благодаря упрощающим предположениям, сделанным в данном разделе. Более точный расчет с учетом истинного спектра фононов и прямым суммированием по векторам обратной решётки может выявить зависимость от типа решётки, но маловероятно, что эта зависимость будет существенной для приложений.

7. Анализ результатов

На рисунке 9 показана зависимость электропроводности от температуры для вещества со сглаженным равновесным ядерным составом при плотности $\rho = 10^{12}$ г/см³, 10^{13} г/см³ и 10^{14} г/см³. Заштрихованы области $T \leq T_{\text{U}} \approx 1.25 \cdot 10^7$, $1.8 \cdot 10^7$ и $6.2 \cdot 10^6$ К соответственно. Вне этих областей электропроводность можно рассматривать в приближении почти свободных электронов. Наиболее точный на сегодняшний день расчет кулоновского логарифма $\Lambda_{\sigma}^{\text{high}}$ для вещества внешней коры нейтронной звезды в

этом приближении был сделан Потехиным и др. (1999); там же предложена аппроксимация результатов расчета. В приложении А к последующей статье Гнедина и др. (2001) были рассчитаны и аппроксимированы кулоновские логарифмы во внутренней коре нейтронной звезды. Эти результаты реализованы в виде общедоступного кода на языке Fortran². На рисунке они показаны длинной штриховой линией. При температурах $T \ll T_U$ кулоновский логарифм вычислен в настоящей работе — см. выражение (37). Величину кулоновского логарифма, формально рассчитанную по этой формуле при всех температурах, будем обозначать $\Lambda_\sigma^{\text{low}}$. Соответствующая ей электропроводность показана на рисунке 9 короткими штрихами. В промежуточной области температур вычисление кулоновского логарифма необходимо проводить численно в соответствии с выражениями (27) и (30) и с учетом точного спектра и поляризации фононных мод (см., например, Байко и др. 2001, Байко 2002). Однако кулоновский логарифм при промежуточных температурах можно оценить на основе простой интерполяции

$$\Lambda_\sigma^{\text{int}} \approx \left[\frac{1}{\Lambda_\sigma^{\text{high}}} + \frac{1}{\Lambda_\sigma^{\text{low}}} \right]^{-1}. \quad (39)$$

Эта интерполяция воспроизводит пределы высоких ($T \gg T_U$) и низких ($T \ll T_U$) температур, а в промежуточной области описывает гладкую зависимость кулоновского логарифма от параметров, показанную на рисунке 9 сплошной линией. Видно, что асимптотики $\Lambda_\sigma^{\text{high}}$ и $\Lambda_\sigma^{\text{low}}$ (длинные и короткие штрихи соответственно) довольно надёжно ограничивают электропроводность при промежуточных температурах. Можно надеяться, что интерполяция справедлива при всех температурах, по крайней мере, по порядку величины. Отметим, что переход с асимптотики $\Lambda_\sigma^{\text{high}}$ на $\Lambda_\sigma^{\text{low}}$ происходит при температурах, заметно меньших T_U . Это вызвано тем, что основной вклад в рассеяние при низких температурах даёт вектора обратной решётки $g \sim 1.8k_F$ (рисунок 8), которым соответствуют меньшие ширины щелей, чем величина E_{gap} , использованная в оценке (16).

Штрих пунктирная линия на рисунке 9 показывает электропроводность, вычисленную в рамках модели экспоненциального вымораживания процессов рассеяния, предложенной Гнединым и др. (2001) для описания низких температур $T \lesssim T_U$. Соответствующий кулоновский логарифм записывается в виде:

$$\Lambda_\sigma^{\text{exp}} = \Lambda_\sigma^{\text{high}} \exp\left(-\frac{T_U}{T}\right) + \Lambda_\sigma^{\text{norm}} \left[1 - \exp\left(-\frac{T_U}{T}\right) \right], \quad (40)$$

где

$$\Lambda_\sigma^{\text{norm}} = \frac{360 \zeta(5)}{Z x_r} \frac{k_B T}{m_e c^2} \left(\frac{T}{T_p} \right)^4 \quad (41)$$

— кулоновский логарифм, определяемый нормальными процессами электрон-фононного рассеяния (Райх и Яковлев 1982). В действительности численное значение $\Lambda_\sigma^{\text{norm}}$ оказывается очень малым

$$\frac{\Lambda_\sigma^{\text{norm}}}{\Lambda_\sigma^{\text{low}}} \approx 2.4 \cdot 10^{-11} \frac{Z}{30} \left(\frac{C}{0.36} \right)^6 e^{-0.4w} \quad (42)$$

²<http://www.ioffe.ru/astro/conduct/>

и не влияет на результат.

Отметим, что в работе Гнедина и др. (2001) влияние форм-фактора атомных ядер на температуру T_U не учитывалось и для строгого соответствия её результатам, при вычислении по формуле (40), надо положить $T_U = \tilde{T}_U$. Электропроводность, соответствующая такому кулоновскому логарифму $\tilde{\Lambda}_\sigma^{\text{exp}}$, показана точечной линией. Согласно рисунку 9 использование модели экспоненциального подавления процессов рассеяния приводит к завышению электропроводности при низких температурах на несколько порядков, особенно при использовании кулоновского логарифма $\tilde{\Lambda}_\sigma^{\text{exp}}$.

Кулоновский логарифм $\Lambda_\sigma^{\text{norm}}$ определяется нормальными процессами, идущими при всех температурах на всей поверхности Ферми, а не концентрирующимися вблизи границ зон Бриллюэна. Этот механизм рассеяния здесь не рассматривался. В приближении некоррелированного рассеяния соответствующая частота релаксации электронов должна быть прибавлена в вычисленной нами. Это эквивалентно сложению соответствующих кулоновских логарифмов. Однако, численное значение $\Lambda_\sigma^{\text{norm}}$ оказывается на десять порядков меньше, чем $\Lambda_\sigma^{\text{low}}$ [см. выражение (42)], так как релаксация функции распределения идёт за счет медленной диффузии по импульсам, обусловленной большим количеством малоугловых рассеяний. Поэтому нормальные процессы, как и при высоких температурах (см., например, Потехин и др. 1999), не оказывают влияния на электропроводность.

На рисунке 10 представлена зависимость электропроводности вещества со сглаженным равновесным ядерным составом от плотности. Для примера выбраны температуры $T = 3 \cdot 10^7$, 10^7 и $3 \cdot 10^6$ К (верхний, средний и нижний рисунок, соответственно). Как и на рисунке 9, длинные и короткие штрихи соответствуют высоко- и низкотемпературным асимптотикам кулоновского логарифма $\Lambda_\sigma^{\text{high}}$ и $\Lambda_\sigma^{\text{low}}$, а сплошной линией показана интерполяция (39). Штрих-пунктирной линией показана электропроводность в модели экспоненциального вымораживания процессов переброса $\Lambda_\sigma^{\text{exp}}$ (Гнедин и др. 2001). При $T = 3 \cdot 10^6$ К и плотностях $\rho \sim 10^{13}$ г/см³ эта модель приводит к завышению оценок электропроводности более, чем на два порядка. Однако уже при температурах $T \sim 10^7$ К электропроводность в экспоненциальной модели (40) и интерполяция (39) отличаются всего на порядок, а при $T \sim 3 \cdot 10^7$ К — не более, чем в несколько раз. Наконец, при температуре $T \sim 10^8$ К (не показанной на рисунке 10), существенно превышающей максимальное значение температуры $T_U \sim 1.8 \cdot 10^7$ К (см. рисунок 1), электропроводность определяется высокотемпературной асимптотикой $\Lambda_\sigma^{\text{high}}$, полученной в приближении свободных электронов (Потехин и др. 1999, Гнедин и др. 2001). В этом случае модель экспоненциального подавления процессов переброса (40) и интерполяция (39) дают практически одинаковый результат.

Точечная линия, соответствующая кулоновскому логарифму $\tilde{\Lambda}_\sigma^{\text{exp}}$, демонстрирует еще большее завышение электропроводности относительно расчета по интерполяции (39).

На рисунке 10 заштрихованы области, соответствующие температурам $T < T_U$.

Как уже обсуждалось выше, широко используемое приближение свободных электронов вне этих областей является оправданным и предложенная здесь интерполяция (39) практически совпадает с результатом, полученным в этом приближении в работах Потехина и др. (1999) и Гнедина и др. (2001). Однако уже при $T = T_U$ использование модели экспоненциального вымораживания рассеяния приводит к заметному (в 2.7 раз) завышению электропроводности.

Тонкой вертикальной точечной линией на рисунке 10 показана плотность нейтронизации $\rho_n = 4.3 \cdot 10^{11}$ г/см³. При переходе через неё состав вещества изменяется скачком (появляются свободные нейтроны), что сопровождается скачком электропроводности и других кинетических коэффициентов (см., например, Гнедин и др. 2001).

8. Заключение

С помощью вариационного метода проведён расчет электропроводности вещества коры нейтронных звёзд в пределе низких температур $T \ll T_U$ (раздел 6). При расчете учтено влияние статической решётки атомных ядер на волновые функции электронов (раздел 3). Показано, что электропроводность не зависит от типа кристаллической решётки. Предложена интерполяционная формула (39), позволяющая вычислять электропроводность при любых температурах. Продемонстрировано, что ранее существовавшая модель экспоненциального подавления частоты рассеяния (Гнедин и др. 2001) может завышать электропроводность на несколько порядков (раздел 7); указаны причины несовершенства этой модели (раздел 4).

Полученные результаты важны для исследования затухания магнитного поля в нейтронных звездах с внутренними температурами $T \lesssim 10^7$ К, которые могут проявлять себя как пульсары. Кроме того, электропроводность коры важна для построения моделей растекания по коре нейтронной звезды токов, текущих по пульсарной трубке. Другим приложением проведённого здесь расчета электропроводности может стать анализ ограничений на размеры гор, удерживаемых проводимостью коры, в аккрецирующих миллисекундных пульсарах (Вежелис и Мелатос 2010).

В дальнейшем планируется обобщить результаты настоящей работы на другие кинетические коэффициенты (теплопроводность и сдвиговую вязкость), которые ранее вычислялись в приближении свободных электронов (Потехин и др. 1999, Чугунов и Яковлев 2005) или с использованием модели экспоненциального вымораживания электрон-фононного рассеяния (Гнедин и др. 2001), которая, так же как и для электропроводности может приводить к завышению коэффициентов переноса на несколько порядков. Кроме того, планируется рассмотреть влияние электрон-электронных процессов переброса, которые ранее не рассматривались при исследовании электрон-электронных столкновений в коре нейтронной звезды (Штернин и Яковлев 2006, Штернин 2008), однако могут быть важными при низких температурах (см., например, Ландау и Померанчук 1937).

Я благодарю Д.Г. Яковлева за рекомендацию темы этой работы и многочисленные полезные обсуждения и выражаю благодарность Д.П. Барсукову и М.М. Глазову

за ценные консультации. Я так же благодарен анонимным рецензентам за ценные замечания позволившие улучшить эту работу.

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для молодых кандидатов наук (МК-5857.2010.2), грантом РФФИ (11-02-00253-а) и программой Ведущие научные школы России (НШ 3769.2010.2).

Приложение А. Матричный элемент и вероятность перехода

В этом разделе мы используем схему периодических зон и рассмотрим рассеяние на фононе с малым волновым вектором \mathbf{q} . В этом случае в рассеянии участвуют электроны с близкими квазиимпульсами и справедливо (в случае поглощения фонона) соотношение $\mathbf{p} + \hbar \mathbf{q} = \mathbf{p}'$. Вероятность рассеяния электрона на фононе может быть представлена в виде

$$P_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \nu}^{\mathbf{p}' } = \frac{2\pi}{\hbar} \left| M_{\mathbf{q}}^{(i)(i')}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \right|^2 f_{\mathbf{p}} (1 - f_{\mathbf{p}'}) \times \delta(E_{\mathbf{p}} + \hbar \omega_{\mathbf{q}, \nu} - E_{\mathbf{p}'}), \quad (\text{A1})$$

где индексы состояния электрона до и после рассеяния (i) и (i') в $P_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \nu}^{\mathbf{p}'}$ для краткости опущены, а матричный элемент перехода равен (Займан 1962)

$$M_{\mathbf{q}}^{(i)(i')}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{n_i n_{\mathbf{q}, \nu}^{1/2}}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \left(\frac{\hbar}{m_i n_i V \omega_{\mathbf{q}, \nu}} \right)^{1/2} \times J_{\mathbf{q}, \nu}^{(i)(i')}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (2\pi)^4 \delta_{\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{q}}. \quad (\text{A2})$$

Здесь V — нормировочный объем, $\omega_{\mathbf{q}, \nu}$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu}$ — частота и вектор поляризации фонона и

$$J_{\mathbf{q}, \nu}^{(i)(i')}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \langle \Psi_{\sigma, \mathbf{p}}^{(i)} | \nabla U_a | \Psi_{\sigma', \mathbf{p}'}^{(i')} \rangle. \quad (\text{A3})$$

Здесь σ, σ' — спиральности до и после рассеяния. После подстановки волновых функций электрона (14) в начальном и конечном состоянии получим:

$$|J_{\mathbf{q}, \nu}^{++}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|^2 \approx |J_{\mathbf{q}, \nu}^{--}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|^2 \approx 4\epsilon^2 (\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{g})^2 U_g^2 C_{\perp}^2 (v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} - u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'})^2 \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (\text{A4})$$

$$|J_{\mathbf{q}, \nu}^{+-}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|^2 \approx |J_{\mathbf{q}, \nu}^{-+}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|^2 \approx 4\epsilon^2 (\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{g})^2 U_g^2 C_{\perp}^2 (v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} + u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'})^2 \delta_{\sigma, \sigma'}. \quad (\text{A5})$$

Таким образом, спиральность сохраняется при рассеянии. В выражениях (A4) пренебрежено слагаемыми, содержащими $U_{\mathbf{q}}(\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{q})$. Для низкочастотных поперечных фононов они малы из-за поперечной поляризации $(\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{q}) \propto q^2/q_{\text{BZ}}$ (см., например, Байко 2000). Действительно, при $T \lesssim T_U$ типичные волновые числа фононов $q \ll k_{\text{TF}}$. Поэтому, благодаря электронному экранированию, $U_{\mathbf{q}} \propto 1/k_{\text{TF}}^2$ и $U_{\mathbf{q}}(\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{q}) \propto q^2/(k_{\text{TF}}^2 q_{\text{BZ}})$, что много меньше учтенного нами основного слагаемого $U_{\mathbf{g}}(\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{g}) \propto g^{-1} \sim q_{\text{BZ}}^{-1}$. Для продольных фононов $(\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{q}) \approx q$ и вклады в

$\left| J_{\mathbf{q}}^{(i)(i')}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \right|^2$ от слагаемых пропорциональных $U_{\mathbf{q}}^2 q^2$ и $q U_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{g}}(\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{g})$ нужно рассмотреть по-отдельности. Первое из них $U_{\mathbf{q}}^2 q^2$ описывает нормальные процессы рассеяния, которые могут идти на всей поверхности Ферми (а не только в областях её пересечения с границами зон Бриллюэна). Их вклад в рассеяние при низких температурах рассчитан Райхом и Яковлевым (1982) и, как показано в разделе 7, мал. Можно показать, что при $T \lesssim T_U$ перекрестное слагаемое $\propto q U_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{g}}(\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{g})$ также вносит пренебрежимо малый вклад из-за существенно большей, по сравнению с поперечными фононами, фазовой скорости продольных фононов $\sim \omega_p / k_{TF}$.

Так как матричный элемент (A4) содержит вектор обратной решётки, мы будем называть соответствующие процессы “процессами переброса”. Строго говоря, такое название не всегда является точным — в законе сохранения квазиимпульса, записанном в схеме расширенных зон Бриллюэна, может отсутствовать вектор обратной решётки. Однако, как показано в разделе 5, в пределе высоких температур кулоновский логарифм, вычисленный с использованием матричных элементов (A4), воспроизводит выражение, полученное Райхом и Яковлевым (1982) для процессов переброса в приближении свободных электронов.

Для краткости, соответствующие функции от $u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}, v_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}'}$ в выражениях (A4) будем обозначать $F_{uv}^{\mathbf{g}}$. Например для “++” процессов $[(j) = (j') = “+”]$ $F_{uv}^{\mathbf{g}} = v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} - u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'}$. Окончательно вероятность перехода записывается как

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \nu}^{\mathbf{p}'} &= (2\pi)^4 \frac{n_i n_{\mathbf{q}, \nu}}{2m_i \omega_{\mathbf{q}, \nu}} (\mathbf{e}_{\mathbf{q}, \nu} \cdot \mathbf{g})^2 (F_{uv}^{\mathbf{g}})^2 U_g^2 \\ &\times f_{\mathbf{p}} (1 - f_{\mathbf{p}'}) \delta(E_{\mathbf{p}} + \hbar \omega_{\mathbf{q}, \nu} - E_{\mathbf{p}'}) \\ &\times \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta_{\sigma, \sigma'}. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Приложение В. О выборе пробной функции $\Phi_{\mathbf{k}}$

Рассмотренные в настоящей работе электрон-фононные процессы переброса при низких температурах неэффективны для электронов с импульсами вдали от границ зон Бриллюэна (в белых частях поверхности Ферми на рисунках 3 и 12). Такие электроны вначале должны приблизить свой импульс к области эффективного электрон-фононного рассеяния (локализованной вблизи границ зон Бриллюэна) с помощью серии малоугловых рассеяний, идущих на всей поверхности Ферми. Лишь потом они могут подвергнуться более мощному электрон-фононному процессу переброса, существенно меняющему скорость и квазиимпульс электрона в схеме расширенных зон. Малоугловыми рассеивателями электронов в коре нейтронной звезды могут являться как сами электроны, так и электрон-фононные нормальные процессы. Последние, однако, оказываются менее эффективными. Поэтому далее будем рассматривать только электрон-электронное рассеяние.

Двухступенчатый механизм рассеяния может приводить к тому, что отклонение функции распределения электронов от равновесной будет расти с удалением от границ зон Бриллюэна. В вариационном формализме это выражается в том, что величина пробной функции $\Phi_{\mathbf{k}}$ в наиболее удалённых от границ точках может быть существенно больше, чем вблизи границ. Это, в свою очередь, приведёт к увеличению интеграла I_1 в выражении (17), а, значит, к увеличению электропроводности. Более того, если мы выберем пробную функцию, которая равна нулю на расстояниях от границ зон Бриллюэна, меньших некоторого значения k_m , то в релаксации соответствующей функции распределения с помощью электрон-фоонных процессов переброса смогут участвовать только фононы с волновым числом $q > k_m$. Соответственно, интеграл I_2 в пределе низких температур $T \ll V_{\text{ph}}k_m/k_B$ станет экспоненциально малым $\propto \exp(-V_{\text{ph}}k_m/(k_B T))$, а электропроводность экспоненциально большой. Однако если мы рассчитаем интеграл I_2 , описывающий генерацию энтропии, с учетом электрон-электронного рассеяния, то его величина напротив окажется большой (а электропроводность малой) из-за быстрого изменения пробной функции $\Phi_{\mathbf{k}}$. Истинное значение электропроводности соответствует максимуму функционала (17) при учете всех механизмов рассеяния (генерации энтропии). Этот максимум достигается на такой пробной функции, которая — с одной стороны — является достаточно плавной, чтобы генерация энтропии в электрон-электронных столкновениях была не слишком большой, а — с другой стороны — минимизирует генерацию энтропии при рассмотренном здесь электрон-фоонном рассеянии. Подобная ситуация может иметь место при рассмотрении электропроводности в полупроводниках, когда электрон-электронные столкновения определяют форму функции распределения, но не препятствуют электропроводности, определяемой более медленным рассеянием на примесях или фононах (см., например, Гантмахер и Левинсон 1984). Кроме того, похожее явление возникает и при рассмотрении теплопроводности решётки, обусловленной рассеянием на примесях (см. §6 главы 8 в книге Займана 1962).

При выборе гладкой пробной функции $\Phi_{\mathbf{k}}$ в разделе 4 неявно предполагается, что для всех точек на поверхности Ферми ближайшая граница зоны Бриллюэна находится достаточно близко, чтобы электрон-электронное рассеяние не позволяло существенного изменения пробной функции на этом масштабе. Иначе говоря, электрон-электронное рассеяние должно успевать сглаживать функцию распределения. Это предположение является оправданным в широком диапазоне параметров из-за того, что поверхность Ферми часто пересекается многочисленными границами высоких зон Бриллюэна благодаря большому количеству электронов $Z \sim 30$, приходящихся на один узел кристаллической решётки (атомное ядро) в коре нейтронной звезды. Покажем это более строго.

Поскольку электрон-электронное рассеяние является малоугловым, время, требуемое для изменения квазиимпульса электрона на величину Δk , можно оценить как $\tau_{\Delta k} \sim \tau_e^{\text{diff}} [\Delta k/(\pi k_F)]^2$. Здесь τ_e^{diff} — время, требуемое для поворота импульса электрона на угол π под действием электрон-электронных столкновений. В качестве последнего возьмём время релаксации импульса электронов, определяющее сдвиговую вязкость. Эта величина была рассчитана Штерниным (2008) с учетом затухания Ландау

поперечных плазмонов. Если время диффузии $\tau_{\Delta k}$ будет меньше времени релаксации импульса τ , то наш расчет с гладкой пробной функцией $\Phi_{\mathbf{k}}$ будет оправдан, так как для пробных функций, существенно отличающихся вблизи границ зон Бриллюэна и в наиболее удалённых от них точках, электрон-электронные столкновения приведут к увеличению интеграла I_2 , а, значит, к худшей вариационной оценке электропроводности.

Для оценки характерной величины $\tau_{\Delta k}$ сверху сопоставим каждой точке на сфере Ферми расстояние до ближайшей границы зоны Бриллюэна. Максимальное расстояние обозначим как Δk_{\max} . Для атомных ядер с зарядами $Z = 2 - 100$ расстояние Δk_{\max} было определено методом Монте-Карло для объемно- и грани-центрированной кубической решёток и аппроксимировано выражением

$$\Delta k_{\max} \sim 0.6 q_{\text{BZ}} Z^{-1/3}. \quad (\text{B1})$$

Точность аппроксимации проиллюстрирована на рисунке 11. Несмотря на отличия точного расчета от аппроксимации до полутора раз, для дальнейших оценок мы ограничимся использованием простой формулы (B1). Отметим, что типичное расстояние до ближайшей границы зоны Бриллюэна на много меньше, чем Δk_{\max} . Это показано на рисунке 12, который аналогичен рисунку 3, но ориентирован так, что волновой вектор наиболее удалённый от границ зон Бриллюэна перпендикулярен плоскости рисунка. Штриховой окружностью радиуса Δk_{\max} показана область, в которой отсутствуют границы зон Бриллюэна. Видно, что в большинстве других точек на поверхности Ферми в окружность такого радиуса попадёт много линий, соответствующих границам зоны Бриллюэна. То есть большинство других точек на поверхности Ферми находятся во много раз ближе к границам зон Бриллюэна. Поэтому на основной части поверхности Ферми время диффузии к такой границе $\tau_{\Delta k}$ будет существенно меньше нашей оценки в предположении $\Delta k = \Delta k_{\max}$. Следовательно, отклонение функции распределения электронов от равновесной (а, значит, и лучшая пробная функция $\Phi_{\mathbf{k}}$) будет более плавной функцией.

Далее время τ будем вычислять с использованием интерполяции кулоновского логарифма (39). Если условие $\tau_{\Delta k} = \tau$ выполняется при некоторой температуре T_{ee} , то при температурах $T < T_{\text{ee}}$ будет верно соотношение $\tau_{\Delta k} < \tau$ из-за более резкой температурной зависимости времени τ ($\tau_{\Delta k} \propto T^{5/3}$). Поэтому в области $T < T_{\text{ee}}$, показанной тонкой штриховкой на рисунке 13, использование гладкой пробной функции $\Phi_{\mathbf{k}}$ оправдано.

При достаточно высоких температурах (жирная штриховка на рисунке 13)

$$T \gtrsim T_{\text{ph}} = \frac{\hbar}{k_{\text{B}}} V_{\text{ph}} \Delta k_{\max} \approx 0.6 C T_{\text{p}} Z^{-1/3} \quad (\text{B2})$$

фононные моды с волновыми числами $q \sim \Delta k_{\max}$ имеют неэкспоненциально малые числа заполнения, а, значит, электрон-фононное рассеяние эффективно на всей поверхности Ферми. Поэтому даже без учета электрон-электронных столкновений максимум определяющего электропроводность функционала (17) будет достигаться на

плавных пробных функциях Φ_k . Характерная температура T_{ph} показана на рисунке короткой штриховой линией.

При промежуточных температурах, показанных серым цветом на рисунке 13, на поверхности Ферми появляются области, в которых время диффузии квазиимпульса к областям эффективного электрон-фононного рассеяния может быть больше времени τ . Поэтому время релаксации импульса в этих областях будет определяться временем диффузии к границе зоны Бриллюэна, а не усредненным по поверхности Ферми временем рассеяния τ . Это может приводить к повышению электропроводности. Однако такое повышение не может быть слишком большим, так как эффективное время релаксации в области температур $T_{\text{ee}} \lesssim T \lesssim T_{\text{ph}}$ не может превышать время $\tau_{\Delta k}$, которое при $\rho \gtrsim 10^{11} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ в указанной области температур отличается от τ не более, чем в несколько раз. При плотности $\rho \lesssim 10^{10} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ отличие может составлять порядок величины. Заметим, что приведённая оценка представляется завышенной, так как для большинства точек на поверхности Ферми время диффузии существенно меньше, и реальное отличие электропроводности должно быть менее существенным.

В рассмотренной нами области $T \ll T_U$ (температура T_U показана на рисунке 13 длинной штриховой линией) диффузия по импульсам за счет электрон-электронных столкновений оказывается достаточно быстрой при всех плотностях.

Кроме того, мы не учитывали наличие магнитного поля в коре нейтронной звезды. В отсутствие рассеяния магнитное поле приводит к вращению компоненты импульса электрона, перпендикулярной магнитному полю, а, значит, импульс будет регулярно приближаться к линиям пересечения сферы Ферми с границами зон Бриллюэна. Таким образом, отклонение функции распределения электронов от равновесной будет сглаживаться при достаточной скорости вращения:

$$\tau \gtrsim \tau_B = \omega_g^{-1} \Delta k / k_F \approx 4.3 \cdot 10^{18} A^{-1/3} Z^{-1/3} \frac{\rho^{12}}{B_{12}} \text{ с}, \quad (\text{В3})$$

где $\omega_g = eB / (x_T m_e c)$ — гирочастота электронов, а B_{12} — магнитное поле в единицах 10^{12} Гс. Отметим, что из-за малости отношения $\Delta k / k_F$ условие (В3) не противоречит условию изотропной электропроводности $\tau \omega_g \ll 1$, справедливому при полях $B \lesssim 10^{12}$ Гс практически во всей области параметров показанных на рисунке 13. В случае $\tau \omega_g \gtrsim 1$ электропроводность становится анизотропной (Урпин и Яковлев 1980, Потехин 1999). Пусть T_B — температура, при которой $\tau = \tau_B$. Тогда условие $\tau \gtrsim \tau_B$ выполняется при $T \lesssim T_B$, так как время релаксации растёт с уменьшением температуры. Характерные температуры T_B для магнитных полей $B = 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}$ Гс показаны на рисунке 13 штрихпунктирными линиями. При $B = 10^{12}$ Гс практически во всей изображенной на рисунке области параметров скорость вращения импульса электрона в магнитном поле оказывается достаточно быстрой, чтобы он по крайней мере один раз пересёк границу зоны Бриллюэна за характерное время релаксации электронов τ . Поле 10^{11} Гс приводит к достаточно быстрому сглаживанию функции распределения практически во всей области $T_{\text{ee}} \lesssim T \lesssim T_{\text{ph}}$. Сравнительно слабое для нейтронных звёзд поле 10^{10} Гс также существенно сокращает область, в которой скорость электрон-электронных столкновений может ограничивать время релаксации

импульса.

Таким образом, использование гладкой пробной функции $\Phi_{\mathbf{k}}$ представляется оправданным, по крайней мере, при наличии магнитного поля $B \gtrsim 10^{11}$ Гс. При меньших полях в области $T_{\text{ee}} \lesssim T \lesssim T_{\text{ph}}$ расчет электропроводности вещества с равновесным ядерным составом при использовании гладкой пробной функцией может занижать электропроводность, но не более, чем на порядок.

Мы рассмотрели влияние неравномерности рассеяния на сфере Ферми с масштабом $\sim \Delta k_{\text{max}}$. Согласно рисунку 12 густота линий пересечения сферы Ферми с границами зон Бриллюэна (а, значит, и скорость рассеяния) неоднородна и на большем масштабе $\sim q_{\text{VZ}}$. Однако эта неоднородность не столь сильна и не должна существенно сказываться на электропроводности. Тем не менее, этот вывод требует дополнительной проверки.

Приложение С. Усреднение $[(\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'}) \cdot \mathbf{u}]^2$ по направлениям векторов обратной решётки

Разность скоростей $(\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'}) = \mathbf{V}(\mathbf{q})$ направлена вдоль вектора \mathbf{g} (см. раздел 4), а её величина определяется координатами волнового вектора фонона q_{\parallel} , q_{\perp} и q_{φ} . Поэтому при фиксированных значениях q_{\parallel} , q_{\perp} и q_{φ} суммирование по векторам \mathbf{g}_e , получающимся из \mathbf{g} преобразованиями симметрии кубической решётки (сменами знаков и перестановками координат), эквивалентно суммированию по векторам, получающимся из $\mathbf{V}(\mathbf{q})$ теми же преобразованиями. Таким образом

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{48} \sum_{\mathbf{g}_e} [(\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'}) \cdot \mathbf{u}]^2 &= \\
 &= \frac{1}{48} \{ (V_x u_x + V_y u_y + V_z u_z)^2 + \\
 &+ (V_y u_x + V_x u_y + V_z u_z)^2 + \\
 &+ (-V_x u_x + V_z u_z + V_z u_z)^2 + \\
 &+ (-V_y u_x + V_x u_y + V_z u_z)^2 + \dots \} \\
 &= \frac{1}{3} (\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'})^2 \mathbf{u}^2 = \frac{1}{3} (\mathbf{V}_{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{k}'})^2
 \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Байко и др. (D.A. Baiko, A.D. Kaminker, A.Y. Potekhin, et al.), Phys. Rev. Lett. **81**, 5556 (1998).
- Байко и др. (D.A. Baiko, A.D. Kaminker, D.G. Yakovlev), Phys. Rev. E **64**, 057402 (2001).
- Д.А. Байко, Д.Г. Яковлев, Письма в Астрон. журн. **21**, 705 (1995).
- Д.А. Байко, Д.Г. Яковлев, Письма в Астрон. журн. **22**, 787 (1996).
- Д.А. Байко, Дисс. *Кинетические явления в остывающих нейтронных звёздах*, канд. физ.-матем. наук, ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург (2000).
- Байко (D.A. Baiko), Phys. Rev. E **66**, 056405 (2002).
- Д.П. Барсуков, Е.М. Кантор, А.И. Цыган, Астрон. журн. **83**, 184(2006).
- Д.П. Барсуков, Е.М. Кантор, А.И. Цыган, Астрон. журн. **84**, 523 (2007).
- Д.П. Барсуков, П.И. Полякова, А.И. Цыган, Астрон. журн. **86**, 95 (2009).
- В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Квантовая электродинамика* (М.: Физматлит, 2002).
- Бескин и Нохрина (V.S. Beskin and E.E. Nokhrina), Astrophys. Space Sci. **308**, 589 (2007).
- Болдин и Попов (P.A. Boldin and S.B. Popov), Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **407**, 1090 (2010).
- Вегелис и Мелатос (M. Vegelius and A. Melatos), Astrophys. J. **717**, 404 (2010).
- В.Ф. Гантмахер, Э.А. Левинсон, *Рассеяние носителей тока в металлах и полупроводниках*, (М.: Наука 1984).
- Гнедин и др. (O.Y. Gnedin, D.G. Yakovlev, A.Y. Potekhin), Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **324**, 725 (2001).
- Гусаков и др. (M.E. Gusakov, A.D. Kaminker, D.G. Yakovlev, et al.), Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **363**, 555 (2005)
- Дж. Займан, *Электроны и фононы* (М.: Издательство иностранной литературы, 1962).
- Л.Д. Ландау и И.Я. Померанчук, ЖЭТФ, **7**, 379 (1937).
- Лоример (D.R. Lorimer), arXiv:1008.1928.
- Петик и Торсон (C.J. Pethick and V. Thorsson), Phys. Rev. D **56**, 7548 (1997).

- Понс и др. (J.A. Pons, J.A. Miralles, U. Geppert), *Astron. Astrophys.* **496**, 207 (2009).
- Попов и др. (S.B. Popov, J.A. Pons, J.A. Miralles, et al.), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **401**, 2675 (2010).
- Потехин (А.У. Potekhin), *Astron. Astrophys.* **351**, 787 (1999)
- Потехин и др. (А.У. Potekhin, D.A. Baiko, P. Haensel et al.), *Astron. Astrophys.* **346**, 345 (1999).
- Потехин и Шабрие (А.У. Potekhin and G. Chabrier), *Phys. Rev. E* **62**, 8554 (2000).
- Райх и Яковлев (М.Е. Raikh and D.G. Yakovlev), *Astrophys. Space Sci.* **87**, 193 (1982).
- В.А. Урпин, Д.Г. Яковлев, *Астрон. журн.* **57**, 738 (1980).
- Флауэрс и Ито (E. Flowers, N. Itoh), *Astrophys. J.* **206**, 218 (1976).
- Хэнсел и др. (P. Haensel, А.У. Potekhin, D.G. Yakovlev), *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure* (New York: Springer Verlag, 2007).
- Чугунов и Хэнсел (А.И. Chugunov and P. Haensel), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **381**, 1143 (2007).
- А.И. Чугунов, Д.Г. Яковлев, *Астрон. журн.* **82**, 814 (2005).
- Яковлев и др. (D.G. Yakovlev, W.C.G. Ho, P.S. Shternin, et al.), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **411**, 1977 (2011).
- Штернин и др. (P.S. Shternin, D.G. Yakovlev, C.O. Heinke, et al.), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.: Letters*, **412**, L108 (2011).
- Штернин и Яковлев (P.S. Shternin and D.G. Yakovlev), *Phys. Rev. D* **74**, 043004 (2006).
- Штернин (P.S. Shternin), *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 205501 (2008).
- Янковичи (B. Jancovici), *Nuovo Cimento* **25**, 428 (1962).

	“+” состояние	“−” состояние
$\Delta p_{\parallel} > 0$	\mathbf{p}	$\mathbf{p} - \mathbf{g}$
$\Delta p_{\parallel} < 0$	$\mathbf{p} - \mathbf{g}$	\mathbf{p}

Таблица 1: Таблица соответствия параметров состояний в схеме периодических и расширенных зон. Указан квазиимпульс, описывающий в схеме расширенных зон Бриллюэна состояние, соответствующее заданному квазиимпульсу \mathbf{p} и индексу состояния (“+” или “−”) в схеме периодических зон. Строки соответствуют разным знакам компоненты Δp_{\parallel} .

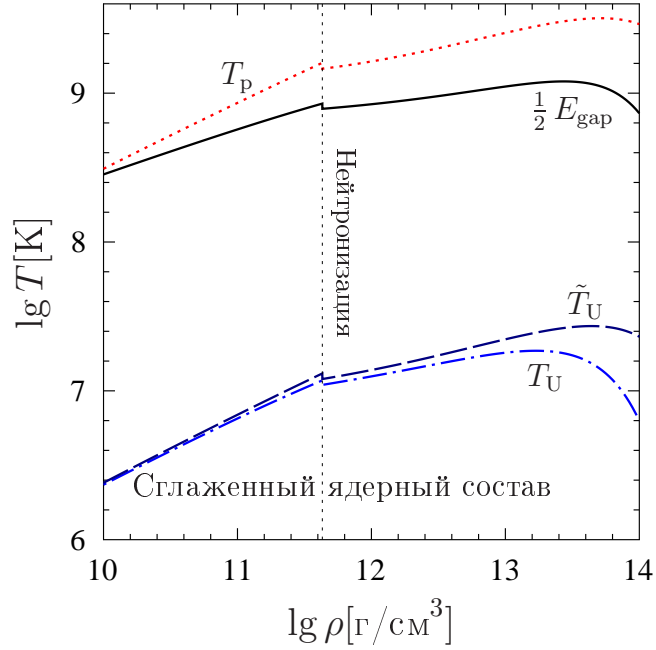


Рис. 1: Диаграмма температура-плотность для вещества внутренней коры в модели сглаженного ядерного состава. Описание величин T_p , E_{gap} , T_U и \tilde{T}_U дано в тексте. Вертикальной точечной линией показана плотность нейтронизации, на которой происходит резкое изменение состава вещества, вызывающее слабый скачок всех указанных на рисунке параметров.

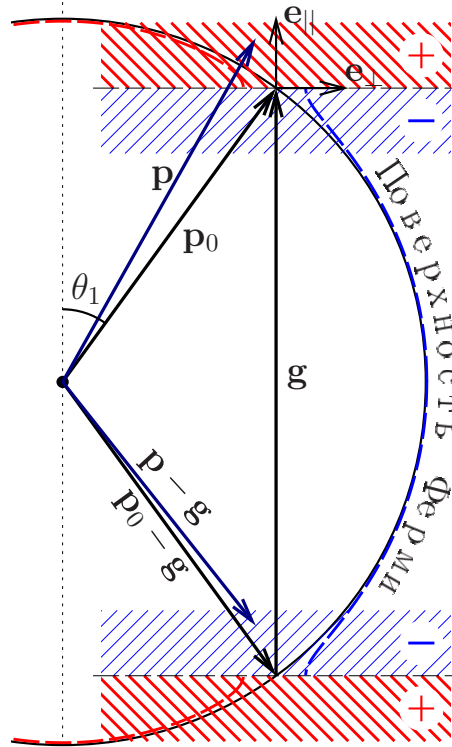


Рис. 2: Схема расположения импульсов \mathbf{p} , $\mathbf{p} - \mathbf{g}$, \mathbf{p}_0 и вектора обратной решётки \mathbf{g} в окрестности сферы Ферми в схеме расширенных зон. Последняя показана на рисунке дугой окружности. Жирной штриховой линией показана поверхность Ферми с учетом взаимодействия с решёткой (она испытывает разрыв вблизи вектора \mathbf{p}_0 ; для наглядности величина щели увеличена более чем на порядок по сравнению с типичными значениями в коре нейтронной звезды). Жирная штриховка соответствует состояниям “+” в схеме периодических зон, тонкая — состояниям “-”. Вертикальная точечная линия проходит через центр сферы Ферми, отмеченный точкой, и параллельна вектору \mathbf{g} .

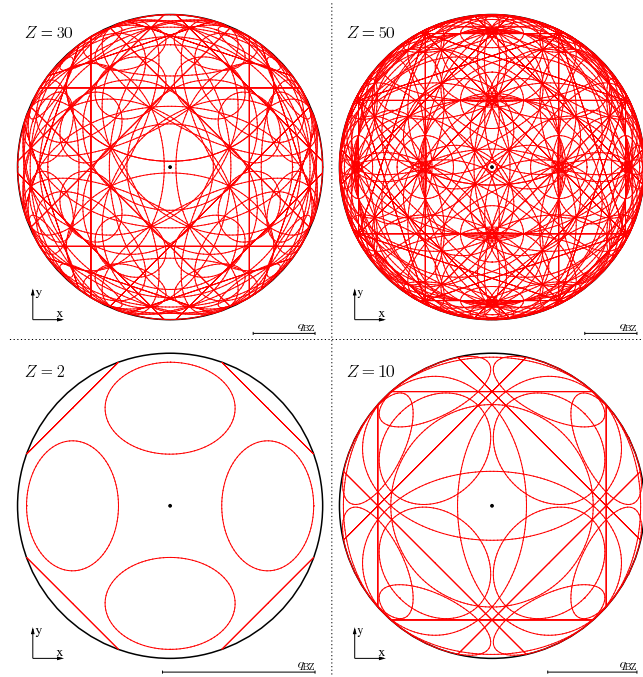


Рис. 3: Проекция линий пересечения границ зон Бриллюэна и сферы Ферми (большие окружности) на грань куба объемноцентрированной решётки [плоскость (x, y)] для зарядов $Z = 2, 10, 30$ и 50 . Толщина линий соответствует удвоенной ширине области наибольшего искажения электронных волновых функций $2\Delta k_{\text{mix}}$. Величина q_{BZ} показана в левом нижнем углу каждого рисунка; точкой показан центр сферы Ферми.

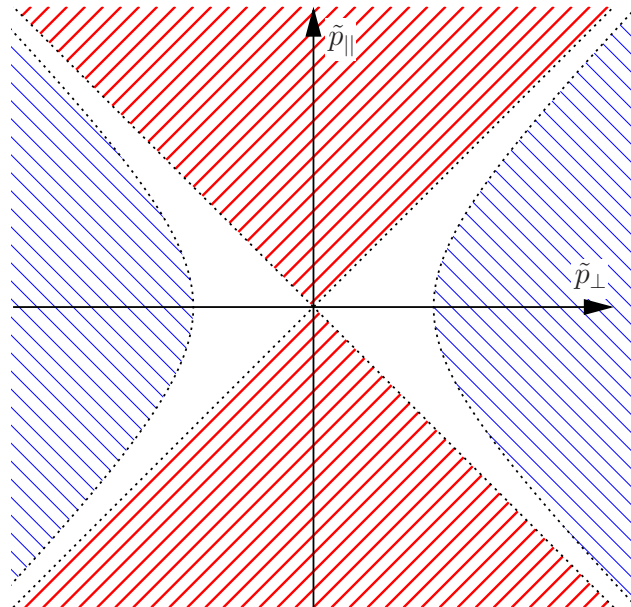


Рис. 4: Волновые векторы фононов, соответствующие различным типам процессов рассеяния. Жирная штриховка — процессы “++” и “--”, тонкая штриховка — “+-” и “-+”. В (30) интегрирование ведётся по всем заштрихованным областям.

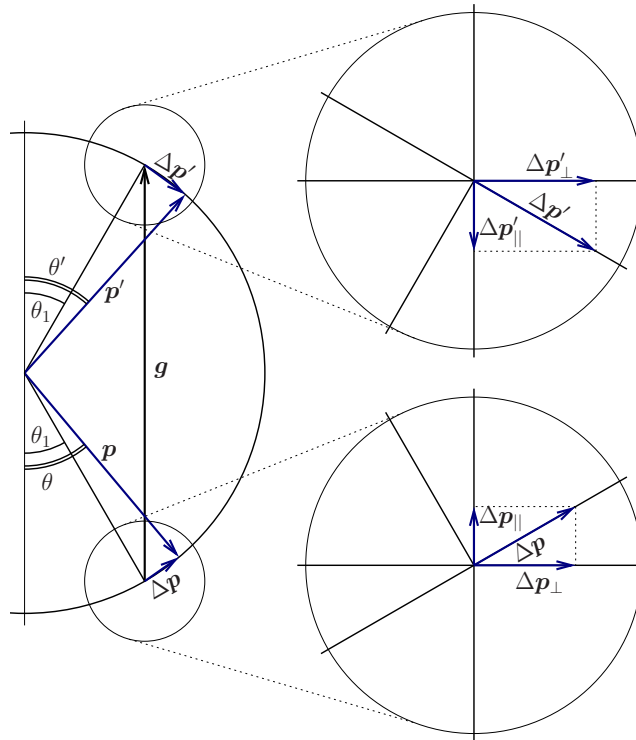


Рис. 5: Схема расположения импульса электрона на поверхности Ферми до и после рассеяния.

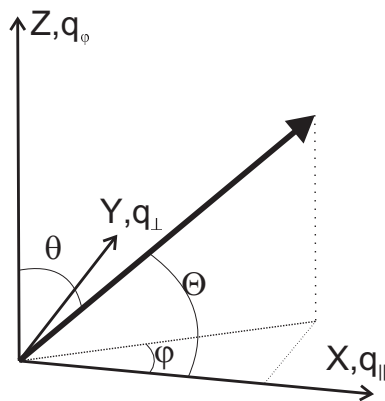


Рис. 6: Схема расположения углов в сферической системе координат задающей вектор q .

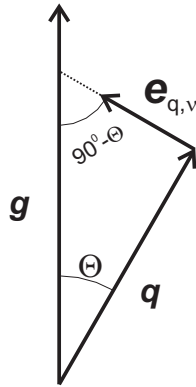


Рис. 7: Схема расположения вектора поляризации, вектора \mathbf{q} и вектора \mathbf{g} .

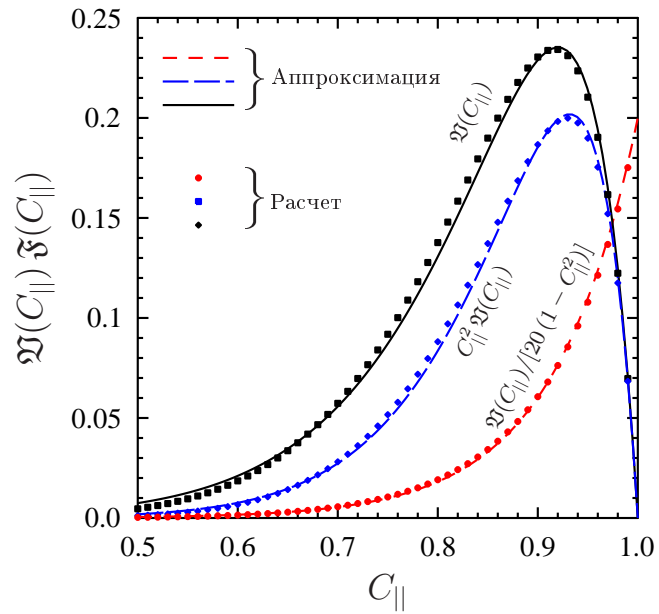


Рис. 8: Функция $\mathfrak{W}(C_{\parallel})$ (квадраты) и её аппроксимация (36) (сплошная линия). На графике также показаны функции $C_{\parallel}^2 \mathfrak{W}(C_{\parallel})$ и $\mathfrak{W}(C_{\parallel}) [20(1 - C_{\parallel}^2)]$ (символы). Соответствующие величины, полученные с использованием аппроксимации (36), показаны линиями.

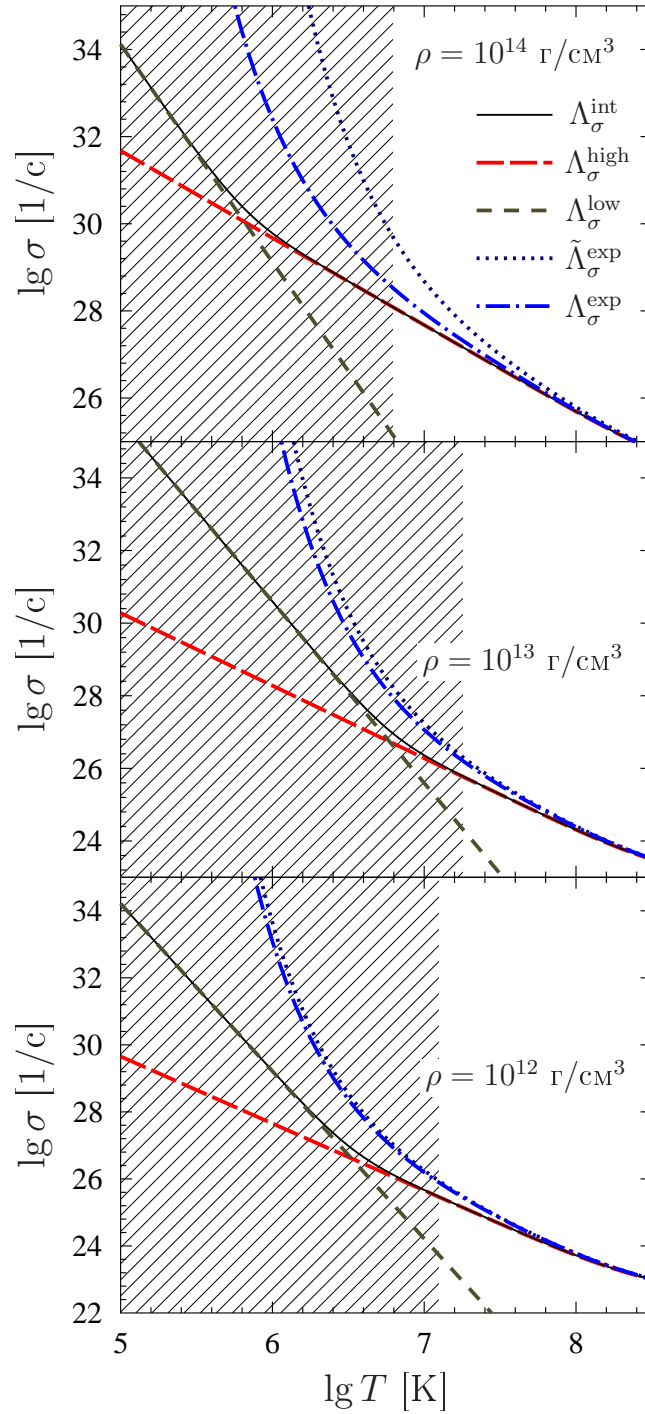


Рис. 9: Зависимость электропроводности σ от температуры в коре нейтронной звезды со сглаженным равновесным ядерным составом при плотностях $\rho = 10^{12}$, 10^{13} и 10^{14} г/см³. Сплошная линия — интерполяция(39), длинные и короткие штрихи — высоко- и низкотемпературные асимптотики $\Lambda_{\sigma}^{\text{high}}$ и $\Lambda_{\sigma}^{\text{low}}$ (37). Штрих-пунктирная и точечная и линии — расчеты в модели экспоненциального вымораживания с учетом и без учета влияния форм фактора атомных ядер на температуру T_U ($\Lambda_{\sigma}^{\text{exp}}$ и $\tilde{\Lambda}_{\sigma}^{\text{exp}}$). Заштрихованы области $T \leq T_U$.

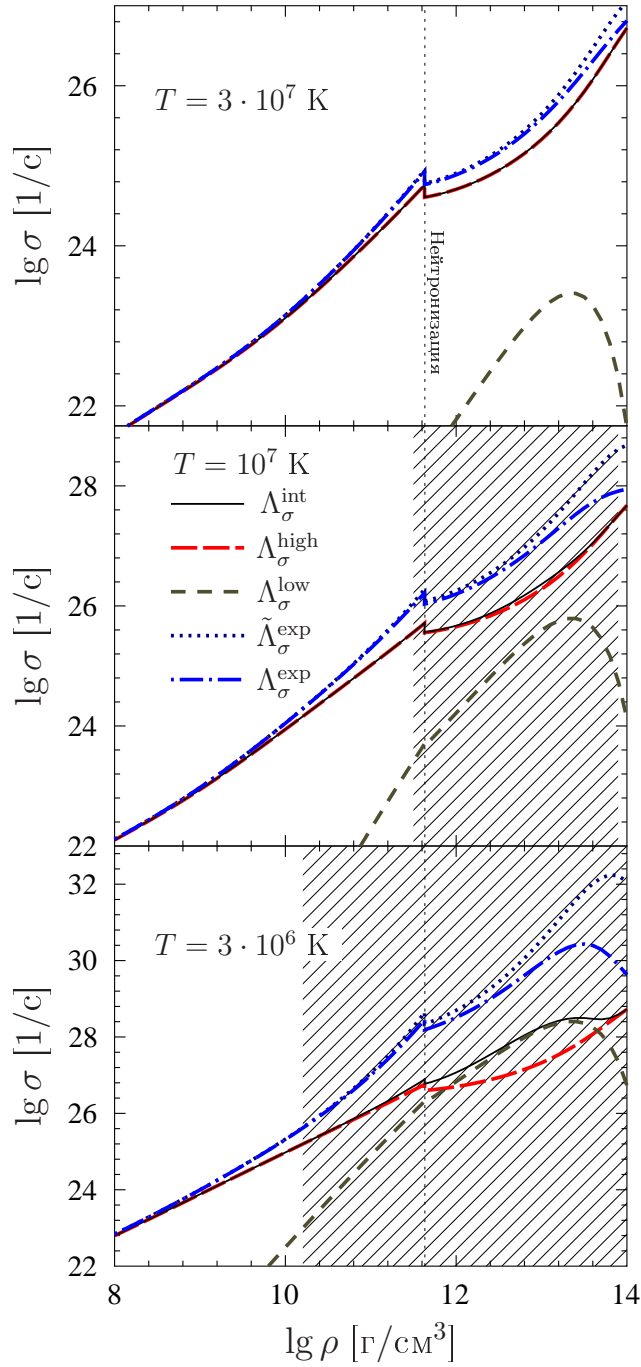


Рис. 10: Зависимость электропроводности σ от плотности ρ в коре нейтронной звезды со сглаженным равновесным ядерным составом при температурах $T = 3 \cdot 10^7$, 10^7 и $3 \cdot 10^6$ К. Сплошная линия — интерполяция (39), короткие штрихи, длинные штрихи, точечная и штрих-пунктирная линии — электропроводность, соответствующая кулоновским логарифмам $\Lambda_\sigma^{\text{high}}$, $\Lambda_\sigma^{\text{low}}$ и $\tilde{\Lambda}_\sigma^{\text{exp}}$, $\Lambda_\sigma^{\text{exp}}$. Заштрихованы области плотностей, при которых $T < T_U$ (для температуры $3 \cdot 10^7$ К такая область отсутствует). Вертикальной точечной линией показана плотность нейтронизации $\rho_d = 4.3 \cdot 10^{11}$ г/см³.

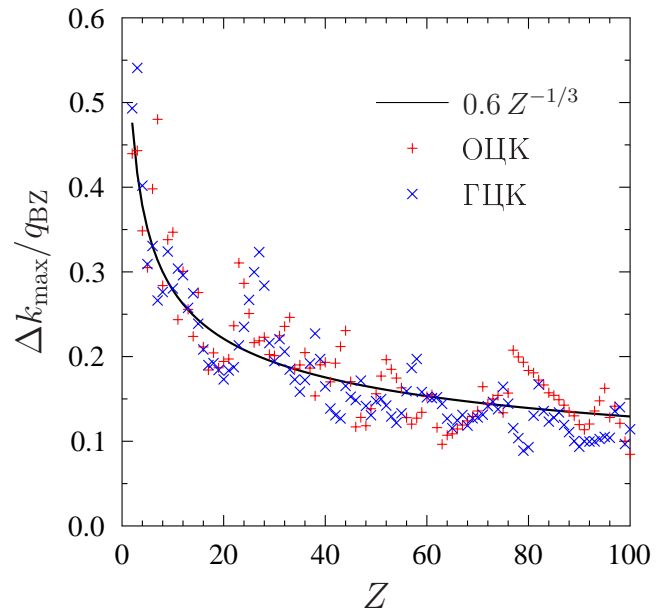


Рис. 11: Максимальное расстояние от точки на поверхности Ферми до ближайшей границы зоны Бриллюэна Δk_{\max} в зависимости от заряда атомных ядер Z . Символы $+$ и \times — точный расчет для ОЦК и ГЦК кристаллических решёток, линия — аппроксимация (B1).

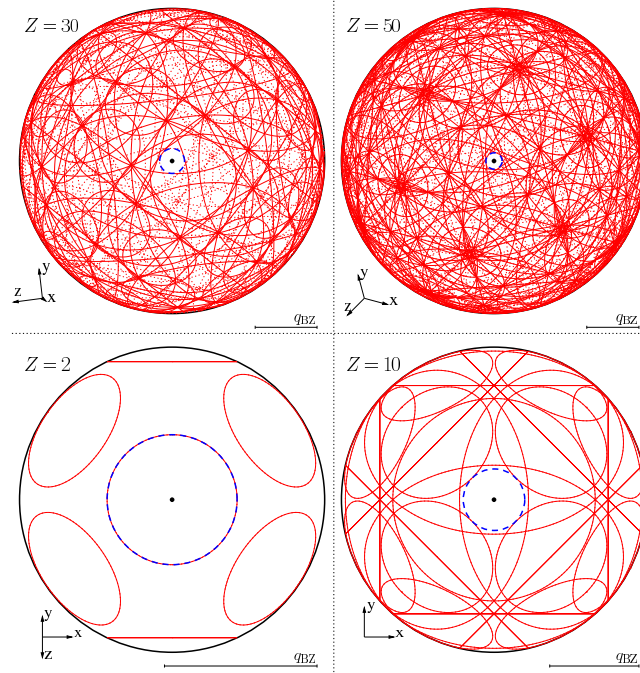


Рис. 12: Линии пересечения границ зон Бриллюэна и сферы Ферми, ориентированной так, что волновой вектор, наиболее удалённый от границ зон Бриллюэна перпендикулярен плоскости рисунка. Сплошные линии соответствуют обращенной к нам части поверхности Ферми, точечные идут по её обратной стороне. Для примера взяты заряды $Z = 2, 10, 30$ и 50 . Для зарядов $Z = 2$ и 10 точечные линии совпадают со сплошными так как плоскость симметрии кристалла совпадает с плоскостью рисунка. Оси координат, соответствующие рёбрам объемноцентрированной кубической решётки, показаны в нижнем левом углу каждого рисунка. Толщина линий, в масштабе рисунка, равна удвоенной ширине области наибольшего искажения электронных волновых функций $2\Delta k_{\text{mix}}$. Величина q_{BZ} показана в левом нижнем углу каждого рисунка; точкой показан центр сферы Ферми. Штриховая окружность в центре имеет радиус Δk_{max} .

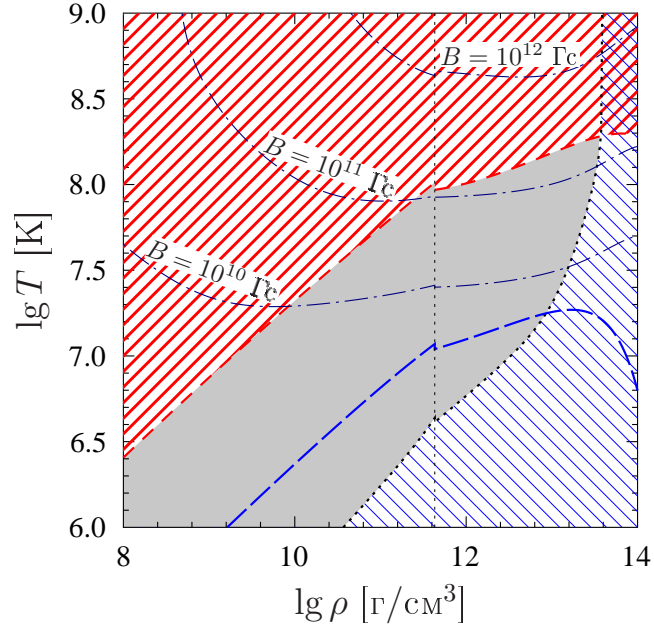


Рис. 13: Зависимость температур T_{ee} (точечная линия) и T_{ph} (короткая штриховая линия) от плотности для коры нейтронной звезды со сглаженным равновесным ядерным составом. В заштрихованной жирными линиями области $T > T_{ph}$ электрон-фононное рассеяние достаточно эффективно на всей поверхности Ферми. Тонкая штриховка соответствует области $T < T_{ph}$, когда электрон-электронное рассеяние успевает сглаживать функцию распределения электронов. В серой области скорость электрон-электронного рассеяния может ограничивать рассеяние электронов на некоторых участках поверхности Ферми. Длинными штрихами показана температура T_U . Штрих пунктирными линиями показаны температуры T_B , соответствующие магнитным полям $B = 10^{10}$, 10^{11} и 10^{12} Гс. Вертикальная точечная линия — плотность нейтронизации.