

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Гидродинамическая и гидромагнитная устойчивость течения Куэтта

Д.А. Шалыбков

Рассмотрена устойчивость неидеального течения Куэтта в линейном приближении. Изучены условия возникновения и свойства неустойчивости течения. Акцент сделан на свойствах неустойчивости при наличии магнитного поля и неоднородной плотности. Сравнение теоретических и экспериментальных данных даёт хорошее (в пределах нескольких процентов) согласие для параметров неустойчивости.

PACS numbers: 47.20.Qr, 47.65.-d, 52.30.Cv

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200909d.0971

Содержание

1. Введение (971).
 2. Классическое течение Куэтта (972).
 3. Течение с неоднородной плотностью (975).
 - 3.1. Радиальная стратификация плотности. 3.2. Осевая стратификация плотности.
 4. Течение при наличии магнитного поля (978).
 - 4.1. Однородное осевое магнитное поле. 4.2. Азимутальное магнитное поле. 4.3. Винтовое магнитное поле: осевое+азимутальное поле. 4.4. Магнитное поле с учётом холловских токов.
 5. Течение с неоднородной плотностью и магнитным полем (989).
 - 5.1. Радиальная стратификация плотности и азимутальное магнитное поле. 5.2. Осевая стратификация плотности и азимутальное магнитное поле.
 6. Заключение (991).
- Список литературы (992).

1. Введение

Задача об устойчивости течения между вращающимися соосными цилиндрами (течение Тейлора–Куэтта) представляет собой классическую проблему гидродинамической и магнитогидродинамической устойчивости. Изучение ламинарного течения, известного теперь как течение Куэтта, берёт начало в экспериментах по измерению вязкости жидкостей [1–3], выполненных ещё в XIX в.

Рэлей [4] получил условие устойчивости (см. раздел 2, соотношение (26)) к осесимметричным возмущениям для вращающейся идеальной несжимаемой жидкости. Позднее было показано [5], что условие Рэля является необ-

ходимым и достаточным условием устойчивости к осесимметричным возмущениям для идеальной жидкости. Вязкость стабилизирует течение Куэтта, и неидеальное течение, которое является неустойчивым согласно условию (26), теряет устойчивость, только если угловая скорость вращения (или число Рейнольдса) превышает некоторое критическое значение, а условие (26) становится для неидеальной жидкости только достаточным условием устойчивости [6] (см. также [7]). Критические числа Рейнольдса, которые были теоретически рассчитаны Тейлором [8], оказались в прекрасном согласии (различие порядка нескольких процентов) с полученными им экспериментальными данными. В настоящее время существует аналитическая формула, аппроксимирующая кривую устойчивости течения Куэтта для всего диапазона изменения параметров [9].

Способность теории с хорошей точностью воспроизводить экспериментальные результаты и сравнительная простота как теоретических моделей, так и эксперимента предопределили высокий интерес к течению Тейлора–Куэтта как модельной задаче в теории гидродинамической и гидромагнитной устойчивости. Количество публикаций по этой проблеме выражается трёхзначным, если не четырёхзначным, числом. Многие результаты суммированы в монографиях и обзорах (см., например, [7, 10–13]). Каждые два года проходят международные конференции, посвящённые течению Тейлора–Куэтта. Последняя такая конференция (15-я по счёту) прошла во Франции [14] в 2007 г. Подчеркнём, что согласие теоретических и экспериментальных результатов, полученных в задаче об устойчивости течения Куэтта, подтверждает достоверность так называемой теории глобальной устойчивости, для которой существенно наличие граничных условий. Отметим, что результаты, полученные в рамках локального подхода, могут быть недостоверными (т.е. показывать неустойчивость для устойчивых ситуаций и наоборот) [15].

Кроме упоминания об успехах в изучении устойчивости течения Тейлора–Куэтта, необходимо указать и существующие проблемы. Так, течение Куэтта с покоя-

Д.А. Шалыбков. Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Политехническая ул. 26, 194021 Санкт-Петербург, Российская Федерация
Тел. (812) 292-73-26. Факс (812) 297-10-17
E-mail: dasha@astro.ioffe.ru

Статья поступила 8 декабря 2008 г.,
после доработки 18 мая 2009 г.

щимся внутренним цилиндром и вращающимся внешним цилиндром должно быть согласно условию Рэлея устойчивым к осесимметричным возмущениям. Тем не менее уже ранние эксперименты [2, 3] продемонстрировали потерю устойчивости при достаточно быстром вращении. В первоначальных экспериментах Тейлора [8] эта неустойчивость не была обнаружена. Однако дальнейшие эксперименты [16] подтвердили результаты Куэтта. Это расхождение между теорией и экспериментом до сих пор не нашло исчерпывающего объяснения. В настоящее время ситуация остается неоднозначной [17, 18]. В частности, неустойчивость течения, устойчивого с точки зрения линейной теории, может быть вызвана как нелинейными эффектами, так и неидеальностями самого эксперимента: несоосностью цилиндров, неидеальностью их поверхности, нестабильностью вращения и т.д. Устранение указанных неидеальностей устраняет и неустойчивость течения [18, 19]. При этом, чем больше числа Рейнольдса (скорость вращения цилиндров), тем выше требования к точности эксперимента для устранения этих неидеальных неустойчивостей. В качестве неидеальности могут выступать и пограничные эффекты, вызванные, например, конечностью высоты цилиндров [20]. Ими можно пренебречь при малых числах Рейнольдса, но они представляют серьёзную проблему при числах Рейнольдса порядка 10^5 и более.

Хорошо известно (см., например, [21]), что вследствие неустойчивости чисто вращательное ламинарное одномерное течение Куэтта преобразуется в более сложное (но также устойчивое) трёхмерное течение, структура которого зависит от относительной скорости вращения цилиндров. На пути к развитой турбулентности течение Тейлора – Куэтта проходит через несколько таких устойчивых состояний со всё более сложной структурой, которые возникают с возрастанием числа Рейнольдса. Неустойчивость чисто вращательного течения Куэтта ввиду такого её поведения принято называть первичной неустойчивостью течения Тейлора – Куэтта.

Настоящая статья посвящена теоретическому изучению поведения неустойчивости течения Куэтта (т.е. первичной неустойчивости течения Тейлора – Куэтта) под влиянием таких факторов, как стратификация плотности и магнитное поле. Несмотря на длительное изучение проблемы, только за последние годы в этих вопросах был достигнут существенный прогресс, который практически не отражён в обзорной литературе по течению Тейлора – Куэтта. Мы ограничимся лишь простейшей линейной теорией неустойчивости. Это ограничение является несущественным для наших целей, так как уже линейная теория даёт хорошее согласие с экспериментальными данными по первичной неустойчивости.

В разделах 2–5 мы приводим общие уравнения, описывающие поведение системы и определяющие её стационарное состояние. Затем приводятся уравнения, описывающие устойчивость этого стационарного состояния в рамках линейного приближения. Эти уравнения удаётся решить, как правило, только с помощью численных методов, которые являются стандартными и кратко обсуждаются при первом появлении линеаризованных уравнений. Для идеальной жидкости некоторые результаты удаётся получить аналитически. В конце каждого из разделов кратко обсуждаются результаты, касающиеся свойств неустойчивости течения Куэтта. В разделе 6 приводятся общие выводы.

2. Классическое течение Куэтта

Рассмотрим вязкую несжимаемую жидкость с однородными плотностью ρ и динамической вязкостью μ , находящуюся между двумя бесконечно длинными соосными цилиндрами. Эта жидкость описывается следующими гидродинамическими уравнениями:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{U} + \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

где P — давление, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость ($\mu = \rho\nu$), \mathbf{U} — скорость жидкости, \mathbf{g} — ускорение внешних сил. В уравнении (1) мы, как обычно, пренебрегли влиянием объёмной вязкости и трением. Учитывая геометрию задачи, выберем в качестве рабочей системы координат цилиндрическую систему координат (R, ϕ, z) . В отсутствие внешних сил система (1), (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_R}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)U_R - \frac{U_\phi^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial R} + \\ + \nu\left(\Delta U_R - \frac{2}{R^2}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi} - \frac{U_R}{R^2}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\phi}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)U_\phi + \frac{U_\phi U_R}{R} = \\ = -\frac{1}{\rho R}\frac{\partial P}{\partial\phi} + \nu\left(\Delta U_\phi + \frac{2}{R^2}\frac{\partial U_R}{\partial\phi} - \frac{U_\phi}{R^2}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)U_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\Delta U_z, \quad (5)$$

$$\frac{\partial U_R}{\partial R} + \frac{U_R}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

где

$$(\mathbf{A}\nabla)F = A_R\frac{\partial F}{\partial R} + \frac{A_\phi}{R}\frac{\partial F}{\partial\phi} + A_z\frac{\partial F}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial F}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \quad (8)$$

Для цилиндров, вращающихся в общем случае с разными угловыми скоростями, система (3)–(6) допускает решение вида

$$\mathbf{U} = (0, R\Omega(R), 0), \quad P = P(R), \quad \rho = \rho_0 = \text{const}. \quad (9)$$

Отметим, что этот же вид решения сохраняется и при наличии внешних сил вида $\mathbf{g} = \nabla(\psi(R))$, что просто приводит к переопределению давления. Для идеальной жидкости ($\nu = 0$) угловая скорость является произвольной функцией радиуса, удовлетворяющей граничным условиям. При наличии вязкости азимутальная компонента уравнения сохранения импульса (4) фиксирует вид функции $\Omega(R)$:

$$U_\phi(R) = R\Omega = a_\Omega R + \frac{b_\Omega}{R}, \quad (10)$$

где константы a_Ω и b_Ω определяются граничными условиями

$$a_\Omega = \Omega_{\text{in}} \frac{\hat{\mu}_\Omega - \hat{\eta}^2}{1 - \hat{\eta}^2}, \quad b_\Omega = \Omega_{\text{in}} R_{\text{in}}^2 \frac{1 - \hat{\mu}_\Omega}{1 - \hat{\eta}^2}, \quad (11)$$

$$\hat{\eta} = \frac{R_{\text{in}}}{R_{\text{out}}}, \quad \hat{\mu}_\Omega = \frac{\Omega_{\text{out}}}{\Omega_{\text{in}}}, \quad (12)$$

R_{in} и R_{out} — радиусы, Ω_{in} и Ω_{out} — угловые скорости внутреннего и внешнего цилиндров. При известной угловой скорости давление определяется из уравнения (3), которое с учётом (9) принимает вид

$$\Omega^2 R = \frac{1}{\rho_0} \frac{dP}{dR}. \quad (13)$$

Именно течение вида (10) наблюдается экспериментально для устойчивого установившегося течения Тейлора–Куэтта и носит название течения Куэтта. Таким образом, функциональный вид угловой скорости фиксирован и множество всех возможных течений определяется только двумя параметрами: a_Ω , b_Ω (или $\hat{\eta}$ и $\hat{\mu}_\Omega$), которые фиксируются геометрией задачи (зазором между цилиндрами) и граничными условиями. Данное упрощение является следствием цилиндрической геометрии задачи и отсутствует, например, в сферической геометрии. Для полноты упомянем о существовании общего решения для цилиндров с конечной длиной [22], которое, очевидно, зависит не только от радиальной, но и от осевой координаты.

Нас интересует устойчивость решения (9). В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением линейной устойчивости к бесконечно малым возмущениям и представим возмущённое решение в виде

$$\begin{aligned} u_R(R, \phi, z), \quad R\Omega(R) + u_\phi(R, \phi, z), \\ u_z(R, \phi, z), \quad P(R) + p(R, \phi, z), \end{aligned} \quad (14)$$

где u_R , u_ϕ , u_z , p малы по сравнению с невозмущёнными величинами.

Линеаризуя систему (3)–(6) в первом по возмущениям порядке, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_R}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_R}{\partial \phi} - 2\Omega u_\phi = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial R} + \\ + v \left(\Delta u_R - \frac{2}{R^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{u_R}{R^2} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \Omega) u_R = \\ = -\frac{1}{\rho_0 R} \frac{\partial p}{\partial \phi} + v \left(\Delta u_\phi + \frac{2}{R^2} \frac{\partial u_R}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{R^2} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_z}{\partial \phi} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + v \Delta u_z, \quad (17)$$

$$\frac{\partial u_R}{\partial R} + \frac{u_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Для того чтобы завершить постановку задачи, систему (15)–(18) нужно дополнить шестью гранич-

ными условиями. Скорость вязкой жидкости на границе равна скорости границы, и для возмущений скорости имеем

$$u_R = u_\phi = u_z = 0 \quad (19)$$

как для внутреннего ($R = R_{\text{in}}$), так и для внешнего ($R = R_{\text{out}}$) цилиндров.

Коэффициенты системы (15)–(18) зависят только от радиальной координаты, и решение можно представить в виде суммы нормальных мод вида

$$f = f(R) \exp [i(m\phi + kz + \omega t)], \quad (20)$$

где f представляет собой произвольную искомую переменную. Учитывая геометрию задачи, нетрудно понять, что аксиальное волновое число k может принимать произвольные вещественные значения, азимутальное число m может быть только целым числом, а инкремент ω — произвольным комплексным числом. Кроме того, не ограничивая общности, можно рассматривать только положительные k и m . Использование разложения (20) преобразует трёхмерную задачу в одномерную:

$$\begin{aligned} i(\omega + m\Omega) u_R - 2\Omega u_\phi = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{dR} + \\ + v \left[\frac{d^2 u_R}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_R}{dR} - \frac{u_R}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_R - 2i \frac{m}{R^2} u_\phi \right], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} i(\omega + m\Omega) u_\phi + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega) u_R = -\frac{i}{\rho_0} \frac{m}{R} p + \\ + v \left[\frac{d^2 u_\phi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_\phi}{dR} - \frac{u_\phi}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_\phi + 2i \frac{m}{R^2} u_R \right], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} i(\omega + m\Omega) u_z = -\frac{i}{\rho_0} kp + \\ + v \left[\frac{d^2 u_z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_z}{dR} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_z \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} + i \frac{m}{R} u_\phi + iku_z = 0. \quad (24)$$

Для идеальной жидкости ($v = 0$) и осесимметричных возмущений ($m = 0$) система (21)–(24) сводится к одному уравнению второго порядка:

$$-\frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (Ru_R) \right] + k^2 u_R - \frac{k^2}{\omega^2} \frac{1}{R^3} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega)^2 u_R = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) позволяет получить необходимое и достаточное условие устойчивости вращающейся жидкости. Это можно сделать, например, используя результаты классической теории Штурма–Лиувилля. Действительно, уравнение (25) вместе с граничными условиями (19) представляет собой классическую задачу Штурма–Лиувилля о собственных значениях величины k^2/ω^2 [7]. Поскольку k вещественно, то знак ω^2 совпадает со знаком k^2/ω^2 . Согласно общей теории все собственные числа положительны (а значит, течение устойчиво) тогда

и только тогда, когда

$$\frac{1}{R^3} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega)^2 > 0 \quad (26)$$

для любой точки рассматриваемого интервала.

Достаточность условия (26) устойчивости течения впервые было установлено Рэлеем [4] и носит его имя. Исползованный Рэлеем метод перестановки является физически прозрачным и демонстрирует прямую связь критерия (26) с законом сохранения момента импульса (см., например, [7, 23]). Легко показать, что для течения вида (10) условие (26) принимает вид [7]

$$\hat{\mu}_\Omega > \hat{\eta}^2. \quad (27)$$

Таким образом, идеальное течение Куэтта устойчиво к осесимметричным возмущениям, если угловой момент возрастает с увеличением радиуса во всех точках между цилиндрами. Если существуют точки, в которых угловой момент убывает с увеличением радиуса, то течение неустойчиво к осесимметричным возмущениям.

В дальнейшем неустойчивость, возникающую во вращающейся жидкости, будем называть *вращательной неустойчивостью* (ВН).

Общего критерия устойчивости, аналогичного критерию (26), для асимметричных возмущений до сих пор не найдено. Можно только утверждать, что условие (26) является необходимым условием устойчивости к асимметричным возмущениям [24, 25]. Тем не менее хорошо известно, что условие (26) не является достаточным условием устойчивости идеального несжимаемого однородного течения для асимметричных возмущений [26]. В работе [27] показано, что асимметричные моды могут быть неустойчивы на линии Рэля ($\hat{\mu}_\Omega = \hat{\eta}^2$). Однако в работе [28] отмечено, что этот результат чрезвычайно чувствителен к граничным условиям. Этот результат был получен для свободных граничных условий, а при наличии жёстких граничных условий (19) неустойчивые моды пропадают [29].

При изучении вязкого течения Куэтта уравнения удобно привести к безразмерному виду. Пусть $d = R_{\text{out}} - R_{\text{in}}$ — зазор между цилиндрами. Примем $R_0 = (R_{\text{in}} d)^{1/2}$ за единицу длины, $\Omega_{\text{in}} R_0$ за единицу скорости, Ω_{in} за единицу частоты, $\rho_0 v \Omega_{\text{in}}$ за единицу давления. Безразмерным числом задачи будет число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\Omega_{\text{in}} R_0^2}{\nu}, \quad (28)$$

а параметрами задачи — $\hat{\mu}_\Omega$, $\hat{\eta}$, m , k , ω . При использовании для безразмерных величин тех же обозначений, что и для размерных, система (21)–(24) принимает вид

$$\begin{aligned} i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_R - 2\text{Re} \Omega u_\phi = -\frac{dp}{dR} + \frac{d^2 u_R}{dR^2} + \\ + \frac{1}{R} \frac{du_R}{dR} - \frac{u_R}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_R - 2i \frac{m}{R^2} u_\phi, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_\phi + \frac{\text{Re}}{R} \frac{d(R^2 \Omega)}{dR} u_R = -i \frac{m}{R} p + \frac{d^2 u_\phi}{dR^2} + \\ + \frac{1}{R} \frac{du_\phi}{dR} - \frac{u_\phi}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_\phi + 2i \frac{m}{R^2} u_R, \quad (30) \end{aligned}$$

$$i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_z = -ikp + \frac{d^2 u_z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_z}{dR} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_z, \quad (31)$$

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} + i \frac{m}{R} u_\phi + ik u_z = 0. \quad (32)$$

В общем случае система уравнений (29)–(32) с соответствующими граничными условиями (19) определяет классическую задачу о собственных значениях вида

$$\mathcal{L}(Y) = 0, \quad (33)$$

где Y представляет собой множество всех параметров задачи (волновые числа, инкремент, безразмерные числа). При этом \mathcal{L} является, вообще говоря, комплексной величиной. Вещественная и мнимая части \mathcal{L} обращаются в нуль одновременно, только тогда, когда все параметры являются собственными числами.

Если решение существует, то области параметров, в которых мнимая часть инкремента $\text{Im}(\omega) > 0$, соответствуют устойчивому течению, а области с $\text{Im}(\omega) < 0$ — неустойчивому течению. Области с $\text{Im}(\omega) = 0$ соответствуют нейтрально устойчивому течению (т.е. возмущения не будут ни возрастать, ни затухать). Течение Куэтта является устойчивым при малых числах Рейнольдса и может терять устойчивость с возрастанием числа Рейнольдса. Тейлор [8] предположил, что течение теряет устойчивость при числе Рейнольдса, соответствующем минимальному числу Рейнольдса для нейтральных областей при всех возможных значениях параметров (далее эти минимальные числа будем называть критическими числами Рейнольдса). Отметим, что в рамках этого подхода мы ничего не можем сказать о величине инкремента неустойчивости (мнимая часть инкремента, как сказано выше, принимается равной нулю). Инкремент неустойчивости можно рассчитать только в рамках нелинейного подхода. Это свойство существенно отличает теорию линейной устойчивости для идеальной жидкости от теории линейной устойчивости неидеальной жидкости. В идеальной жидкости мы, наоборот, можем рассчитать инкремент неустойчивости, но не можем найти число Рейнольдса.

В общем случае на нейтральных кривых вещественная часть инкремента $\text{Re} \omega$ может быть как равной нулю, так и отличной от нуля. Если $\text{Re} \omega = 0$, то неустойчивость развивается как монотонная неустойчивость и, как правило, в результате развития неустойчивости система переходит в новое устойчивое состояние (часто этот процесс называют принципом обмена устойчивостей [7]). Если вещественная часть инкремента отлична от нуля, то неустойчивость развивается как осциллирующая неустойчивость.

Как правило, задачу (33) удаётся решить только с помощью численных методов. При этом применялись три основных метода: 1) метод типа Галёркина, в котором решение аппроксимируется рядом из базисных функций, выбираемых так, чтобы ряд быстро сходился (см., например, [7, 10]); 2) метод типа Рунге–Кутта, в котором вследствие линейности задачи (33) решение сводится к сумме решений нескольких начальных задач, которые находятся методом Рунге–Кутта (см., например, [30]); 3) метод конечных разностей. Для всех трёх методов задача сводится к нахождению детерминанта матрицы (в общем случае комплексной) и поиску нулей

этого детерминанта. В настоящее время предпочтительным представляется третий метод. Первый метод является достаточно громоздким (требует проведения интегрирования для коэффициентов ряда) и не имеет общих рекомендаций по выбору базисных функций. Во втором методе часто возникает проблема сильной зависимости решения от граничных условий. Это приводит к тому, что решение можно найти только тогда, когда пробные начальные условия (которые дополняют граничные условия на одной из границ так, чтобы преобразовать граничную задачу в начальную) близки к искомым начальным условиям. Очевидно, что общего метода, позволяющего найти требуемые близкие пробные начальные условия, не существует.

Типичная кривая нейтральной устойчивости для течения Куэтта схематично представлена на рис. 1. Согласно рис. 1 критические числа Рейнольдса минимальны для покоящегося внешнего цилиндра ($\hat{\mu}_\Omega = 0$). Отметим, что вдоль кривой меняются не только числа Рейнольдса, но и остальные параметры (k , m , $Re\omega$). Для цилиндров, вращающихся в одну сторону, осесимметричная мода всегда наиболее неустойчива и $m = 0$ при $\hat{\mu}_\Omega > 0$. Моды с $m > 0$ становятся наиболее неустойчивыми [31] только для цилиндров, вращающихся в разные стороны ($\hat{\mu}_\Omega < 0$). Значение параметра $\hat{\mu}_\Omega$, при котором происходит переход от осесимметричной неустойчивости к асимметричной, меняется в зависимости от параметра $\hat{\eta}$.

Асимметричная неустойчивость, очевидно, является осциллирующей, $Re\omega \neq 0$. Что касается осесимметричной неустойчивости, то как экспериментальные, так и теоретические результаты указывали, что в этом случае для течения Куэтта применим принцип обмена устойчивостей (т.е. $Re\omega = 0$). Строгое доказательство этого факта дано только недавно [32].

При превышении числом Рейнольдса критического значения течение, имеющее $\hat{\mu}_\Omega > 0$, из основного состояния, определяемого выражением (10), переходит в другое устойчивое состояние, периодическое по вертикальной координате, которое теперь принято называть вихрями Тейлора. При этом на размере периода образуются два

вихря с противоположным вращением. Таким образом, если обозначить аксиальный размер вихря через δz , то аксиальное волновое число, соответствующее этому размеру, определяется выражением $k = \pi/\delta z$. Используя в качестве единицы длины величину R_0 , определённую выше, получим

$$\frac{\delta z}{R_{out} - R_{in}} = \frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{\hat{\eta}}{1 - \hat{\eta}}} \tag{34}$$

Значение k сильно зависит от значения $\hat{\mu}_\Omega$ при фиксированном $\hat{\eta}$. При покоящемся внешнем цилиндре ($\hat{\mu}_\Omega = 0$) вихри Тейлора являются практически квадратными (т.е. высота вихря практически равна зазору между цилиндрами). Экспериментальные значения для критического числа Рейнольдса и аксиального волнового числа, определяемого размером вихря Тейлора для чисел Рейнольдса, слегка превышающих критическое число Рейнольдса, можно сравнить с теоретически рассчитанными критическим числом Рейнольдса и соответствующим ему аксиальным волновым числом. Оказывается, что теоретические и экспериментальные числа совпадают друг с другом с точностью в несколько процентов практически во всём интервале изменения параметров $\hat{\eta}$ и $\hat{\mu}_\Omega$.

Если вещественная часть ω отлична от нуля, то она, как правило, отрицательна (т.е. неустойчивость, если она представляет собой волну, распространяется в направлении противоположном основному вращению). Однако, как мы увидим в разделе 3, этот результат не имеет общего значения, так как существует много исключений, когда вещественная часть ω положительна.

3. Течение с неоднородной плотностью

3.1. Радиальная стратификация плотности

Рассмотренная в разделе 2 задача допускает естественное обобщение для случая неоднородной плотности. Рассмотрим снова несжимаемую жидкость. Будем предполагать, что плотность может быть распределена неоднородно, но динамическая вязкость по-прежнему однородна (т.е. не зависит от плотности). Уравнения (1) и (2) необходимо теперь дополнить уравнением

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{UV}) \rho = 0. \tag{35}$$

Система (1), (2) совместно с (35) снова допускает решение вида (9), но с плотностью, зависящей от радиуса $\rho(R)$, где по-прежнему $\Omega(R)$ — или произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям для идеальной жидкости, или функция вида (10) для вязкой жидкости. Возмущённое состояние (14) теперь необходимо дополнить возмущениями плотности $\rho = \rho_0(R) + \rho(R, \phi, z)$. Все уравнения системы (21)–(24), кроме (21), сохраняют свой вид. В уравнении (21) появляется дополнительный член, связанный с возмущением плотности:

$$i(\omega + m\Omega) u_R - 2\Omega u_\phi - \Omega^2 R \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dR} + v \left[\frac{d^2 u_R}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_R}{dR} - \frac{u_R}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_R - 2i \frac{m}{R^2} u_\phi \right], \tag{36}$$

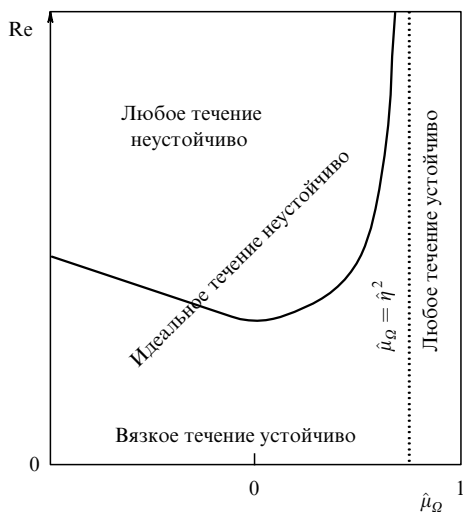


Рис. 1. Типичная кривая нейтральной устойчивости неидеального течения Куэтта (сплошная кривая) при фиксированном $\hat{\eta}$. Вязкое течение неустойчиво в области над кривой и устойчиво в области под кривой. Пунктирной прямой показана предельная линия Рэлея для течения вида (10).

а уравнение (35) после линеаризации и разложения на нормальные моды приобретает вид

$$i(\omega + m\Omega)\rho + \frac{d\rho_0}{dR}u_R = 0. \quad (37)$$

Необходимо отметить, что при решении системы (22)–(24), (36), (37) нужно помнить, что кинематическая вязкость ν теперь также зависит от радиальной координаты, так как $\nu = \mu/\rho_0(R)$, а μ принимается постоянной величиной. Этой зависимостью можно пренебречь только при малой стратификации плотности.

В случае идеальной жидкости и осесимметричных возмущений система уравнений (22)–(24), (36), (37) после несложных преобразований приводится к виду

$$-\frac{d}{dR}\left[\frac{\rho_0}{R}\frac{d}{dR}(Ru_R)\right] + k^2u_R - \frac{k^2}{\omega^2}\rho_0[\kappa^2 + N_R^2]u_R = 0, \quad (38)$$

где

$$\kappa^2 = \frac{1}{R^3}\frac{d}{dR}(\Omega R^2)^2, \quad N_R^2 = \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dR}\Omega^2 R, \quad (39)$$

κ — эпициклическая частота (термин, принятый в астрофизической литературе), N_R — частота плавучести (частота Брента–Вяйсяля). При наличии радиальной внешней силы $g_R(R)$ частота плавучести определяется совместным действием этой силы и центробежной силы:

$$N_R^2 = \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dR}(\Omega^2 R + g_R). \quad (40)$$

Уравнение (38) совместно с граничными условиями (19) по-прежнему составляет классическую задачу Штурма–Лиувилля. Таким образом, для устойчивости идеального несжимаемого течения Куэтта с радиальной стратификацией плотности к осесимметричным возмущениям необходимо и достаточно выполнения условия [33]

$$\kappa^2 + N_R^2 > 0. \quad (41)$$

Условие (41) представляет собой обобщение условия (26) для несжимаемого течения с радиальной стратификацией плотности. Для однородной жидкости условие (41) сводится к условию (26), а для невращающейся жидкости — к условию Рэлея–Тейлора. Таким образом, устойчивая стратификация плотности стабилизирует идеальное течение.

Напомним, что асимметричные моды могут быть неустойчивы за чертой Рэлея (см. раздел 2.1). Эта неустойчивость, однако, сильно зависит от граничных условий и, по-видимому, не существует для классического течения Куэтта. Тем не менее результаты раздела 3.2 демонстрируют, что вертикальная стратификация плотности может играть существенную роль в вопросе устойчивости асимметричных мод за чертой Рэлея. Для радиальной стратификации плотности данный вопрос ещё ждёт своего исследования.

Течение Куэтта с радиальным градиентом плотности не привлекло достаточного внимания. Можно упомянуть только работу [34]. Однако результаты [34] не обладают достаточной полнотой (расчёты выполнены только для покоящегося внешнего цилиндра и при малой

стратификации плотности), которая позволила бы сделать выводы, существенно дополняющие простейшее условие (41). Такое отсутствие интереса, по-видимому, связано с тем, что и простейшая модель однородной несжимаемой жидкости даёт хорошее согласие с экспериментальными данными. Кроме того, экспериментальные данные по течению Куэтта с радиальной стратификацией плотности при наличии дополнительной (кроме центробежной) радиальной силы, насколько известно автору, отсутствуют. Это, по-видимому, обусловлено сложностью создания такой силы в лабораторных условиях. Отметим, что гораздо более сложная задача, с учётом силы плавучести, вызванной радиальным градиентом температуры, привлекла гораздо большее внимание (см., например, [35]), но её обсуждение выходит за рамки данной статьи.

3.2. Осевая стратификация плотности

Предположим наличие внешней силы с постоянным ускорением $g_z\mathbf{e}_z$, направленной вдоль оси цилиндров (в лабораторных условиях для цилиндров, установленных вертикально, эту роль играет сила тяжести). Тогда в правой части уравнения (5) появится дополнительный член g_z :

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)U_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + g_z + \nu\Delta U_z. \quad (42)$$

Нас будет интересовать устойчивость стационарного решения системы (3), (4), (6), (35), (42) при заданной вертикальной стратификации плотности $\rho = \rho(z)$. Предположим, что стационарное решение имеет тот же вид, что и в отсутствие стратификации плотности: $\mathbf{U} = (0, R\Omega(R), 0)$. Тогда

$$\frac{U_\phi^2}{R} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial R}, \quad \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial U_\phi}{\partial R} - \frac{U_\phi}{R^2} = 0, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = g_z. \quad (43)$$

Второе уравнение системы (43) по-прежнему определяет закон вращения (10). Однако, дифференцируя первое уравнение системы (43) по z , а третье уравнение по R и вычитая его из первого, получаем

$$R\Omega^2\frac{d\rho}{dz} = 0. \quad (44)$$

Согласно (44), плотность может зависеть от осевой координаты только при отсутствии вращения. Следовательно, исходное предположение о том, что $\Omega = \Omega(R)$, а $\rho = \rho(z)$ не является самосогласованным и мы должны рассмотреть более общий функциональный вид для Ω и ρ . Функциональный вид $\Omega = \Omega(R)$ фиксируется граничными условиями (угловая скорость вращения цилиндров не зависит от осевой координаты z) и естественно предположить более общее распределение для плотности: $\rho = \rho(R, z)$. Тогда условие (44) принимает вид

$$R\Omega^2\frac{\partial\rho}{\partial z} - g_z\frac{\partial\rho}{\partial R} = 0. \quad (45)$$

Таким образом, даже если начальное распределение плотности в покоящейся жидкости было одномерным, $\rho = \rho(z)$, то под действием центробежной силы оно становится двумерным, $\rho = \rho(R, z)$, что существенно усложняет проблему.

Однако в реальных экспериментах начальная (без вращения) стратификация плотности, так же как и отношение центробежного ускорения к ускорению силы тяжести, мала [36, 37]:

$$\left| \frac{d \ln \rho}{d \ln z} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{R\Omega^2}{g_z} \right| \ll 1. \quad (46)$$

С учётом условий (46) радиальная стратификация плотности согласно (45) является величиной даже более высокого порядка малости, чем вертикальная стратификация плотности. Тогда можно записать

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(z) + \rho_2(R, z) + \dots, \quad |\rho_1| \ll \rho_0, \quad |\rho_2| \ll |\rho_1|, \quad (47)$$

где ρ_0 — однородная плотность. Условие (45), очевидно, выполняется в нулевом приближении, а в первом приближении принимает вид

$$R\Omega^2 \frac{d\rho_1}{dz} - g_z \frac{\partial \rho_2}{\partial R} = 0. \quad (48)$$

Таким образом, стационарное решение системы (3), (4), (6), (35), (42) при ограничениях (46) можно представить в виде

$$U_R = U_z = 0, \quad U_\phi = R\Omega(R),$$

$$P = P_0(z) + P_1(R, z) + \dots, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1(z) + \dots, \quad (49)$$

где $\Omega(R)$ даётся выражениями (10) и (11), а P_0 и P_1 ($P_1 \ll P_0$) определяются из уравнений

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dz} = g_z, \quad \frac{U_\phi^2}{R} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial R}, \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial z} = g_z. \quad (50)$$

Нас интересует устойчивость стационарного состояния (49). В линейном приближении возмущённое течение представим в виде

$$u_R(R, \phi, z), \quad u_\phi(R, \phi, z) + R\Omega(R), \quad u_z(R, \phi, z), \\ P_0(z) + P_1(R, z) + p(R, \phi, z), \quad \rho_0 + \rho_1(z) + \rho(R, \phi, z), \quad (51)$$

где возмущения u_R , u_ϕ , u_z , p , ρ малы по сравнению с невозмущёнными величинами.

При линеаризации системы (3), (4), (6), (35), (42) уравнения (15), (16) и (18) сохраняют свой вид, а уравнения (42) и (35) преобразуются в следующие:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial u_z}{\partial \phi} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z \frac{\rho}{\rho_0} + \nu \nabla^2 u_z, \quad (52)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial \phi} + \frac{d\rho_1}{dz} u_z = 0, \quad (53)$$

и линеаризованная система становится эквивалентной приближению Буссинеска.

При линейной стратификации плотности,

$$\frac{d\rho_1}{dz} = \text{const}, \quad (54)$$

коэффициенты линеаризованной системы по-прежнему зависят только от радиуса и решение представимо в виде суммы нормальных мод (20).

Для приведения к безразмерному виду используем величину $R_0 = (R_{\text{in}} d)^{1/2}$ как единицу длины ($d = R_{\text{out}} - R_{\text{in}}$), $\Omega_{\text{in}} R_0$ как единицу скорости, Ω_{in} как единицу частоты, $\rho_0 R_0 \Omega_{\text{in}}^2 / g_z$ как единицу плотности, а $\rho_0 \nu \Omega_{\text{in}}$ как единицу давления. Кроме того, введём частоту плавучести N_z (частоту Брента – Вайсяля):

$$N_z^2 = \frac{g_z}{\rho_0} \frac{d\rho_1}{dz}. \quad (55)$$

Безразмерными числами задачи являются число Рейнольдса Re и число Фруда Fr :

$$Re = \frac{\Omega_{\text{in}} R_0^2}{\nu}, \quad Fr = \frac{\Omega_{\text{in}}}{N_z}. \quad (56)$$

Используя для безразмерных величин те же символы, что и для размерных, получим

$$iRe(\omega + m\Omega) u_R - 2Re \Omega u_\phi = -\frac{dp}{dR} + \frac{d^2 u_R}{dR^2} + \\ + \frac{1}{R} \frac{du_R}{dR} - \frac{u_R}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_R - 2i \frac{m}{R^2} u_\phi, \quad (57)$$

$$iRe(\omega + m\Omega) u_\phi + \frac{Re}{R} \frac{d(R^2 \Omega)}{dR} u_R = -i \frac{m}{R} p + \frac{d^2 u_\phi}{dR^2} + \\ + \frac{1}{R} \frac{du_\phi}{dR} - \frac{u_\phi}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_\phi + 2i \frac{m}{R^2} u_R, \quad (58)$$

$$iRe(\omega + m\Omega) u_z = -ikp + Re \rho + \frac{d^2 u_z}{dR^2} + \\ + \frac{1}{R} \frac{du_z}{dR} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_z, \quad (59)$$

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} + i \frac{m}{R} u_\phi + ik u_z = 0, \quad (60)$$

$$i(\omega + m\Omega) \rho + N_z^2 u_z = 0. \quad (61)$$

В качестве граничных условий по-прежнему используются условия (19) как для внешнего, так и для внутреннего цилиндров.

Условие устойчивости вращающейся жидкости с осевым градиентом плотности к осесимметричным возмущениям имеет вид [33]

$$\frac{1}{R^3} \frac{d(R^2 \Omega)^2}{dR} + N_z^2 > 0, \quad (62)$$

что для однородной жидкости даёт условие Рэлея (26), а для невращающейся жидкости — условие Рэлея – Тейлора. Течение Куэтта с осевым градиентом плотности было рассмотрено теоретически Торпе [38], который пришёл к выводу о том, что устойчивый вертикальный градиент плотности стабилизирует течение и уменьшает осевой размер вихрей Тейлора. Дальнейшие теоретические расчёты [39] и эксперименты [36, 37] с покоящимся внешним цилиндром подтвердили выводы Торпе.

Однако ещё экспериментальные данные [40] продемонстрировали наличие совершенно новой неустойчивости — неустойчивости за чертой Рэлея. Однако парадоксальным образом эта новая неустойчивость не получила должного внимания ни научного сообщества, ни самих авторов, которые не отметили наличие этой неустойчи-

ности ни в аннотации, ни в заключении, а только вскользь упомянули о ней в тексте. Единственным разумным объяснением является, по-видимому, отсутствие достаточной уверенности в точности эксперимента.

Только в 2001 г. линейный анализ устойчивости для идеального течения Куэтта [41, 42] продемонстрировал, что достаточным условием неустойчивости для асимметричных возмущений будет уменьшение с возрастанием радиуса не величины углового момента, а величины угловой скорости:

$$\frac{d\Omega^2}{dr} < 0, \quad (63)$$

что сдвигало границу неустойчивости за черту Рэлея. Отметим, что условие (63) в точности соответствует условию магнитовращательной неустойчивости (см. раздел 4.1, соотношение (97)) и для закона вращения (10) принимает вид

$$\hat{\mu}_\Omega < 1. \quad (64)$$

Иллюстративные результаты [41, 42] для неидеального течения продемонстрировали сохранение неустойчивости за чертой Рэлея ($\hat{\mu}_\Omega = \hat{\eta}^2$).

Проведённый в работе [43] анализ позволил установить пределы применимости (46) уравнений (57)–(61), используемых для изучения устойчивости течения Куэтта с вертикальной стратификацией плотности. Численные результаты [43] показали, что линейная теория в приближении Буссинеска демонстрирует хорошее согласие как с экспериментальными данными до линии Рэлея при малой стратификации (см. в [43] рис. 2), так и с экспериментальными данными [40] за линией Рэлея. Недавно был выполнен новый, гораздо более подробный эксперимент [44], который продемонстрировал хорошее согласие между экспериментальными данными [44] и результатами численных расчётов [43] как до линии Рэлея, так и за ней.

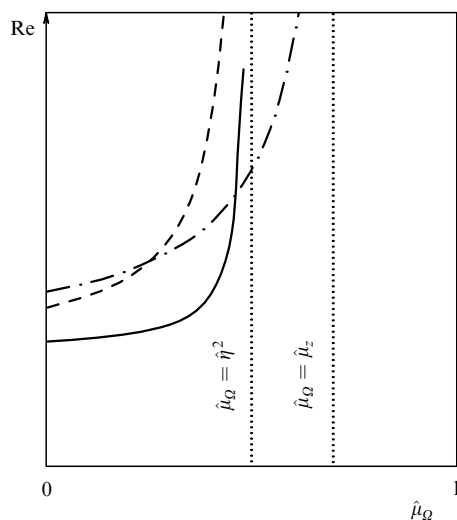


Рис. 2. Схема кривых нейтральной устойчивости при наличии осевой стратификации плотности и фиксированном $\hat{\eta}$: для осесимметричных ($m=0$) возмущений (штриховая кривая), асимметричных ($m=1$) возмущений (штрихпунктирная кривая). Для сравнения приведена кривая (сплошная) для $m=0$ в отсутствие вертикальной стратификации плотности.

Типичное поведение кривых нейтральной устойчивости (ниже кривых течение устойчиво, а выше — неустойчиво) неидеального течения Куэтта с устойчивой вертикальной стратификацией плотности схематично представлено на рис. 2. В отсутствие устойчивой вертикальной стратификации плотности наиболее неустойчива осесимметричная мода (сплошная кривая). Эта кривая в соответствии с условием (26) не пересекает черту Рэлея ($\hat{\mu}_\Omega = \hat{\eta}^2$). Устойчивая стратификация плотности стабилизирует осесимметричную моду (штриховая кривая идёт выше сплошной кривой), но дестабилизирует асимметричные моды, которые остаются неустойчивыми даже за чертой Рэлея вплоть до некоторого предельного значения $\hat{\mu}_\Omega = \hat{\mu}_z$ ($\hat{\eta}^2 < \hat{\mu}_z < 1$). Результаты расчётов [43, 45] демонстрируют, что наибольшее значение $\hat{\mu}_z$ приобретает для моды $m=1$ (штрихпунктирная кривая на рис. 2). Нейтральные кривые для мод с большими m проходят выше кривой для моды $m=1$.

Кроме того, результаты [43, 45] показали, что критерий (63) неустойчивости течения Куэтта с вертикальным градиентом плотности к асимметричным возмущениям является слишком сильным. В действительности предельное значение $\hat{\mu}_z$ сильно зависит от зазора между цилиндрами $\hat{\eta}$ и стремится к единице только в пределе нулевого зазора. Таким образом, чем больше зазор между цилиндрами, тем меньше предельное значение $\hat{\mu}_z$.

Напомним, что асимметричные моды являются более неустойчивыми, чем симметричная мода, для однородного течения Куэтта только для цилиндров, вращающихся в противоположных направлениях [31]. При наличии устойчивой осевой стратификации плотности асимметричные моды могут быть более неустойчивыми и для цилиндров вращающихся в одном направлении.

В отсутствие градиента плотности $\mathcal{R}e\omega = 0$ и неустойчивость развивается как монотонная неустойчивость. Из уравнения (61) видно, что при наличии градиента плотности нейтральная устойчивость соответствует отличной от нуля вещественной части даже для осесимметричной моды и неустойчивость развивается как осциллирующая неустойчивость. Как правило, $\mathcal{R}e\omega < 0$ и неустойчивость развивается как волна, бегущая в направлении противоположном вращению.

Таким образом, осевой градиент плотности, даже являясь устойчивым, дестабилизирует течение Куэтта и приводит к его неустойчивости за чертой Рэлея ($\hat{\mu}_\Omega = \hat{\eta}^2$). Получить простой критерий устойчивости в этом случае не удаётся, что связано с асимметричным характером неустойчивости. Будем называть эту неустойчивость *стратовращательной неустойчивостью* (СВН).

4. Течение при наличии магнитного поля

Несжимаемая однородная проводящая жидкость при наличии магнитного поля описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{U} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (65)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \quad (66)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot}\mathbf{E}, \quad (67)$$

где \mathbf{j} — плотность электрического тока, \mathbf{E} — электрическое поле, \mathbf{B} — магнитное поле, c — скорость света. Если для жидкости применим обычный закон Ома

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{U} \times \mathbf{B} = R_{\text{Om}} \mathbf{j}, \quad (68)$$

где R_{Om} — удельное электрическое сопротивление, то при пренебрежении в уравнении магнитной индукции током смещения

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B} \quad (69)$$

уравнение (67) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}, \quad (70)$$

где η — коэффициент магнитной диффузии. В (70) предполагается, что η однородно и используется условие

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (71)$$

В цилиндрической системе координат уравнения (65), (66), (70) и (71) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_R}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla) U_R - \frac{U_\phi^2}{R} - \frac{1}{4\pi\rho} \left((\mathbf{B}\nabla) B_R - \frac{B_\phi^2}{R} \right) = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial R} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + v \left(\Delta U_R - \frac{2}{R^2} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} - \frac{U_R}{R^2} \right), \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\phi}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla) U_\phi + \frac{U_\phi U_R}{R} - \frac{1}{4\pi\rho} \left((\mathbf{B}\nabla) B_\phi + \frac{B_\phi B_R}{R} \right) = \\ = -\frac{1}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + v \left(\Delta U_\phi + \frac{2}{R^2} \frac{\partial U_R}{\partial \phi} - \frac{U_\phi}{R^2} \right), \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_z}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla) U_z - \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B}\nabla) B_z = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right) + v \Delta U_z, \end{aligned} \quad (74)$$

$$\frac{\partial U_R}{\partial R} + \frac{U_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0, \quad (75)$$

$$\frac{\partial B_R}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla) B_R - (\mathbf{B}\nabla) U_R = \eta \left(\Delta B_R - \frac{2}{R^2} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} - \frac{B_R}{R^2} \right), \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\phi}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla) B_\phi - (\mathbf{B}\nabla) U_\phi + \frac{1}{R} (U_\phi B_R - U_R B_\phi) = \\ = \eta \left(\Delta B_\phi + \frac{2}{R^2} \frac{\partial B_R}{\partial \phi} - \frac{B_\phi}{R^2} \right), \end{aligned} \quad (77)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla) B_z - (\mathbf{B}\nabla) U_z = \eta \Delta B_z, \quad (78)$$

$$\frac{\partial B_R}{\partial R} + \frac{B_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (79)$$

где $(\mathbf{A}\nabla) F$ и ΔF определяются выражениями (7) и (8). Отметим, что из последних четырёх уравнений независимыми являются только три.

4.1. Однородное осевое магнитное поле

При наличии однородного магнитного поля B_0 , направленного вдоль оси вращения, уравнения (72)–(79) допускают стационарное решение общего вида:

$$P = P(R), \quad \rho = \rho_0 = \text{const}, \quad (80)$$

$$U_R(R) = 0, \quad U_\phi(R) = R\Omega(R), \quad U_z(R) = 0, \quad (81)$$

$$B_R(R) = 0, \quad B_\phi(R) = 0, \quad B_z(R) = B_0, \quad (82)$$

где, как и в случае отсутствия магнитного поля, $\Omega(R)$ или является произвольной функцией радиуса, удовлетворяющей граничным условиям для идеальной жидкости, или даётся выражением (10) для неидеальной жидкости, а давление по-прежнему определяется из уравнения (13).

Нас интересует устойчивость стационарного решения (80)–(82). В линейном приближении возмущённое решение представим в виде

$$\begin{aligned} u_R(R, \phi, z), \quad R\Omega(R) + u_\phi(R, \phi, z), \quad u_z(R, \phi, z), \\ b_R(R, \phi, z), \quad b_\phi(R, \phi, z), \quad B_0 + b_z(R, \phi, z), \\ P(R) + \frac{B_0^2}{8\pi} + p(R, \phi, z), \end{aligned} \quad (83)$$

где возмущения $u_R, u_\phi, u_z, b_R, b_\phi, b_z, p$ малы по сравнению с невозмущёнными величинами (отметим, что p является возмущением полного давления с учётом магнитного вклада). Коэффициенты линеаризованной системы (72)–(79) зависят только от радиальной координаты, что позволяет использовать разложение на нормальные моды (20).

Для приведения уравнений к безразмерному виду используем $R_0 = [R_{\text{in}}(R_{\text{out}} - R_{\text{in}})]^{1/2}$ как единицу длины, Ω_{in} как единицу частоты, η/R_0 как единицу возмущённой скорости, B_0 как единицу магнитного поля (возмущённого и невозмущённого) и $\rho_0 v \eta / R_0^2$ как единицу давления.

Линеаризуя систему (72)–(79), разлагая неизвестные величины на нормальные моды (20) и используя для безразмерных величин те же обозначения, что и для размерных, получим

$$\begin{aligned} i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_R - 2\text{Re} \Omega u_\phi - i\text{Ha}^2 k b_R = \\ = -\frac{dp}{dR} + \frac{d^2 u_R}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_R}{dR} - \frac{u_R}{R^2} - \\ - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_R - 2i \frac{m}{R^2} u_\phi, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_\phi + \frac{\text{Re}}{R} \frac{d(R^2 \Omega)}{dR} u_R - i\text{Ha}^2 k b_\phi = \\ = -i \frac{m}{R} p + \frac{d^2 u_\phi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_\phi}{dR} - \frac{u_\phi}{R^2} - \\ - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_\phi + 2i \frac{m}{R^2} u_R, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_z - i\text{Ha}^2 k b_z = -ikp + \frac{d^2 u_z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_z}{dR} - \\ - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_z, \end{aligned} \quad (86)$$

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} + i \frac{m}{R} u_\phi + i k u_z = 0, \quad (87)$$

$$\text{iRe Pm}(\omega + m\Omega) b_R - \text{i}ku_R = \frac{d^2 b_R}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_R}{dR} - \frac{b_R}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) b_R - 2i \frac{m}{R^2} b_\phi, \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \text{iRe Pm}(\omega + m\Omega) b_\phi - \text{Re Pm} R \frac{d\Omega}{dR} b_R - \text{i}ku_\phi = \\ = \frac{d^2 b_\phi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_\phi}{dR} - \frac{b_\phi}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) b_\phi + 2i \frac{m}{R^2} b_R, \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \text{iRe Pm}(\omega + m\Omega) b_z - \text{i}ku_z = \\ = \frac{d^2 b_z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_z}{dR} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) b_z, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\frac{db_R}{dR} + \frac{b_R}{R} + i \frac{m}{R} b_\phi + \text{i}kb_z = 0, \quad (91)$$

где Pm, Ha, Re — безразмерные числа задачи: магнитное число Прандтля, число Гартмана и число Рейнольдса соответственно,

$$\text{Pm} = \frac{\nu}{\eta}, \quad \text{Ha} = \frac{B_0 R_0}{\sqrt{4\pi\rho_0\nu\eta}}, \quad \text{Re} = \frac{\Omega_{\text{in}} R_0^2}{\nu}. \quad (92)$$

Граничные условия для скорости даются выражениями (19) как на внутреннем, так и на внешнем цилиндрах. Граничные условия для магнитного поля зависят от проводящих свойств материала цилиндров. В теоретических расчётах обычно предполагается, что цилиндры являются либо идеальными проводниками, либо идеальными диэлектриками. В случае идеального проводника нормальная компонента магнитного поля и тангенциальные компоненты электрического тока исчезают на границе:

$$b_R = 0, \quad \frac{db_\phi}{dR} + \frac{b_\phi}{R} = 0. \quad (93)$$

Граничные условия (93) применимы как для внутреннего, так и для внешнего цилиндров.

Для идеального диэлектрика (под идеальным мы понимаем диэлектрик с магнитной восприимчивостью равной единице) внутреннее магнитное поле должно быть равно внешнему магнитному полю на границе. При этом условие отсутствия нормальной компоненты электрического тока на границе сразу даёт

$$b_\phi = \frac{m}{kR} b_z. \quad (94)$$

Это условие также применимо и на внутренней, и на внешней границах. Из решения потенциального уравнения $\Delta\psi = 0$ (где $\mathbf{V} = \nabla\psi$) в цилиндрических координатах имеем при $R = R_{\text{in}}$

$$b_R + \frac{\text{i}b_z}{I_m(kR)} \left(\frac{m}{kR} I_m(kR) + I_{m+1}(kR) \right) = 0 \quad (95)$$

и при $R = R_{\text{out}}$

$$b_R + \frac{\text{i}b_z}{K_m(kR)} \left(\frac{m}{kR} K_m(kR) - K_{m+1}(kR) \right) = 0, \quad (96)$$

где I_m и K_m — модифицированные функции Бесселя, которые имеют конечные пределы при $R \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ соответственно.

Очевидно, что аксиальное однородное магнитное поле устойчиво само по себе. Однако ещё в 1959 г. Велихов [46] показал, что такое магнитное поле дестабилизирует течение Куэтта и условие устойчивости идеального течения к осесимметричным возмущениям принимает вид

$$\frac{d\Omega^2}{dR} > 0, \quad (97)$$

что для закона вращения (10) соответствует неравенству $\hat{\mu}_\Omega > 1$. Поскольку в отсутствие поля течение устойчиво к осесимметричным возмущениям при $\hat{\mu}_\Omega > \hat{\eta}^2$, то основным проявлением дестабилизирующего влияния осевого однородного магнитного поля является дестабилизация течений с $\hat{\eta}^2 < \hat{\mu}_\Omega < 1$. Эту неустойчивость принято называть *магнитовращательной неустойчивостью* (МВН). Всплеск интереса к МВН произошёл после осознания её важности как возможного механизма, ответственного за турбулизацию аккреционных дисков [47–49]. Отметим, что неустойчивость, обусловленная азимутальным магнитным полем (см. раздел 4.2), может быть даже более важной для понимания природы турбулентности аккреционных дисков. Подчеркнём, что МВН для аккреционных дисков была получена либо в рамках локального подхода, при котором не учитываются граничные условия, либо посредством численного моделирования. В обоих случаях надёжность получаемых результатов вызывает серьёзные сомнения. Проблемы локального подхода кратко упоминались во введении (по отношению к аккреционным дискам см. также [50]). Относительно численных расчётов можно сказать, что они проводятся для значений параметров, которые очень далеки от параметров типичных для аккреционных дисков. Таким образом, сегодня вопрос о наличии МВН в аккреционных дисках можно считать открытым.

Достаточно неожиданным является то, что критерий (97) не зависит от величины магнитного поля и не переходит в критерий Рэлея (26) в пределе малых магнитных полей. Этот парадокс, как указал Велихов [46], вызван приближением идеальной жидкости. В идеальной жидкости магнитное поле заморожено в жидкость и при возмущении малого объёма жидкости возмущается вместе с ним. При этом возмущённая часть магнитной силовой линии остаётся связанной с невозмущённой частью силовой линии, которая вращается с невозмущённой угловой скоростью. Таким образом, возмущённый объём жидкости сохраняет не угловой момент (как было бы в отсутствие поля), а угловую скорость, и критерий (26) заменяется критерием (97).

Если магнитное поле при учёте диссипативных процессов успеет продиффундировать из возмущённого объёма (или распастся в нём) за время развития неустойчивости, то оно не будет влиять на развитие неустойчивости. Учитывая, что время распада магнитного поля обратно пропорционально коэффициенту магнитной диффузии η , а время развития неустойчивости обратно пропорционально кинематической вязкости ν , то МВН должна зависеть от магнитного числа Прандтля Pm (см. (92)). При малых Pm магнитное поле не успеет продиффундировать из возмущённого объёма только при быстром вращении (большие числа Рейнольдса) и МВН может проявляться только для больших чисел Рей-

нольдса (см. ниже). В целом, чем выше магнитное число Прандтля, тем для меньших чисел Рейнольдса должна проявляться МВН.

Следует отметить, что в экспериментах по замагниченному течению Куэтта [51–54] используются жидкие металлы, которые имеют очень малые Pm (порядка 10^{-5} и менее) и, действительно, МВН до сих пор не наблюдалась экспериментально. Результаты работы [55] по утверждению её авторов демонстрируют МВН для сферической геометрии. Однако исходное состояние течения (в отсутствие магнитного поля) было уже неустойчивым (турбулентным), и, следовательно, наблюдаемая неустойчивость не является начальной неустойчивостью течения. Это обстоятельство не позволяет отождествлять наблюдаемую неустойчивость с МВН. Скорее можно говорить о неустойчивости магнитного поля под действием турбулентного течения.

Расчёты Чандрасекара для неидеальной жидкости [7], выполненные в пределе малого Pm для гидродинамически неустойчивого течения с $\hat{\mu}_\Omega < \hat{\eta}^2$, продемонстрировали, в согласии с экспериментом, что магнитное поле только стабилизирует течение. Дальнейшие расчёты [56–59], выполненные в том же приближении малого Pm , подтвердили стабилизирующее влияние магнитного поля. На этом фоне остались незамеченными расчёты [60], которые продемонстрировали наличие МВН и для гидродинамически неустойчивого течения ($\hat{\mu}_\Omega < \hat{\eta}^2$) при $Pm \sim 1$.

В работе [61] показано, что для гидродинамически неустойчивых течений в приближении малого Pm и узкого зазора ($1 - \hat{\eta} \ll 1$) магнитовращательная неустойчивость действительно исчезает. Численные расчёты [62] обобщили этот результат для произвольного зазора между цилиндрами. Расчёты [62] показали, что значение $Pm = 0,25$ является минимальным, при котором ещё наблюдается магнитовращательная неустойчивость для течений с $0 < \hat{\mu}_\Omega < \hat{\eta}^2$.

Результаты [62] проиллюстрированы на рис. 3, где схематично показано поведение кривых нейтральной устойчивости (течение устойчиво под кривыми и неустойчиво над кривыми) для случая гидродинамически

неустойчивого течения Куэтта ($\hat{\mu}_\Omega < \hat{\eta}^2$). Видно, что течение действительно неустойчиво в отсутствие магнитного поля при $Re > Re_0$, так как кривые нейтральной устойчивости пересекают ось ординат в точке Re_0 , которая соответственно представляет собой критическое число Рейнольдса в отсутствие магнитного поля. При этом при малых Pm магнитное поле только подавляет неустойчивость (критические числа Рейнольдса возрастают с увеличением числа Гартмана). Однако при $Pm \geq 1$ для малых магнитных полей возникает МВН (неустойчивость течения возникает при числах Рейнольдса меньших, чем Re_0). Отметим, что кривая для $Pm \ll 1$ становится универсальной при достаточно малых Pm ($Pm < 10^{-2}$). Кривая для больших Pm , наоборот, не универсальна. Её минимум смещается в зависимости от величины Pm и тем глубже, чем больше Pm (однако никогда не достигает нуля, так как магнитное поле само по себе устойчиво).

Вернемся к главному эффекту МВН — дестабилизации течений с $\hat{\eta}^2 < \hat{\mu}_\Omega < 1$. Для таких течений типичная кривая нейтральной устойчивости представлена на рис. 4. Поскольку течение гидродинамически устойчиво, то кривая не пересекает ось ординат. Главной особенностью этой кривой является наличие минимума при определённом значении магнитного поля (так как в отсутствие поля течение устойчиво, а сильное поле стабилизирует течение). Результаты [62] продемонстрировали, что координаты этого минимума на плоскости (L, Rm) постоянны, если магнитное число Прандтля достаточно мало ($Pm < 10^{-2}$), где L — число Лундквиста, Rm — магнитное число Рейнольдса

$$L = \frac{B_0 R_0}{(4\pi\rho_0)^{1/2}\eta}, \quad Rm = \frac{\Omega_{in} R_0^2}{\eta}. \quad (98)$$

При малых Pm процессы вязкой диссипации, пропорциональные ν , происходят существенно медленнее, чем процессы джоулевой диссипации, пропорциональные η , и безразмерные числа Rm и L действительно больше подходят для описания течений с малыми Pm . Отметим, что кривая нейтральной устойчивости на рис. 4 становится

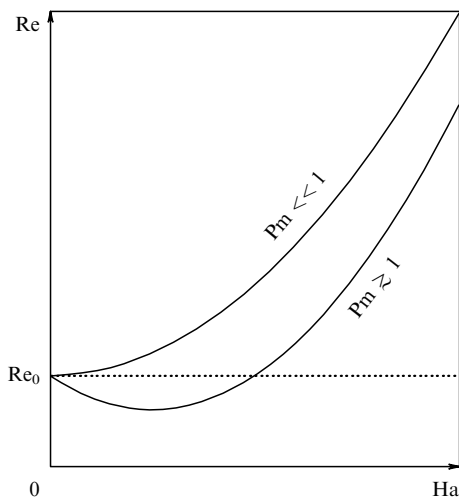


Рис. 3. Схема кривых нейтральной устойчивости для гидродинамически неустойчивого течения Куэтта ($\hat{\mu}_\Omega < \hat{\eta}^2$) при наличии однородного осевого магнитного поля (см. пояснение в тексте).

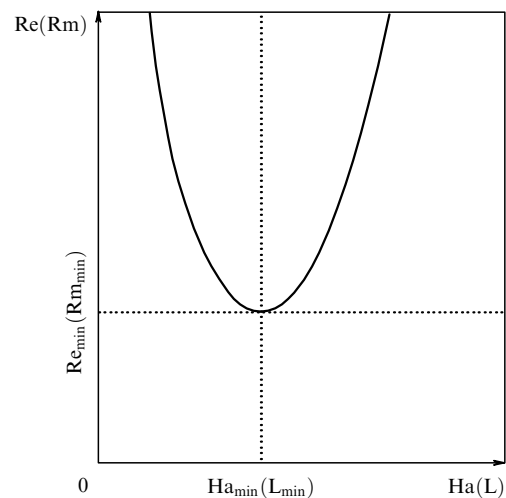


Рис. 4. Схема кривой нейтральной устойчивости для гидродинамически устойчивого течения Куэтта ($\hat{\eta}^2 < \hat{\mu}_\Omega < 1$) при наличии однородного осевого магнитного поля.

ся универсальной в переменных Rm и L (не зависит от Pm) при $Pm < 10^{-2}$.

Результаты [62] получены с использованием точных уравнений (84)–(91). Однако расчёты при очень малых Pm сталкиваются с существенными техническими трудностями (как это всегда бывает в численном расчёте при наличии параметров, принимающих очень большие или очень малые значения). Этим трудностям можно избежать, если использовать приближённые уравнения. При этом необходимо использовать не приближение Чандра-секара, в котором мало только Pm , а более последовательное приближение, в котором одновременно считаются малыми члены пропорциональные кинематической вязкости [61].

Возможно ли наблюдение МВН в экспериментах с жидкими металлами для течений с $\hat{\eta}^2 < \hat{\mu}_\Omega < 1$? Результаты [62, 63] указывают, что ответ, по-видимому, отрицательный. Действительно, при малых Pm мы имеем

$$Re \sim Pm^{-1}, \quad (99)$$

что для $Pm \sim 10^{-5}$ даёт числа Рейнольдса порядка 10^6 и выше. Как указывалось во введении, при таких больших числах Рейнольдса неустойчивость наблюдается даже для теоретически устойчивых течений, что, возможно, объясняется неидеальностью эксперимента. При этом относительная точность, которая требуется для устранения этих "неидеальных" неустойчивостей должна быть порядка или меньше Pm . Такая точность является в настоящий момент недостижимой. Таким образом, наблюдение МВН при экспериментах с жидкими металлами представляется крайне сложной задачей из-за проблемы отделения "неидеальных" неустойчивостей от собственно МВН. Более перспективными могут оказаться эксперименты с плазмой [64].

Отметим, что в работе [65] численно найдено, что на линии Рэлея ($\hat{\mu} = \hat{\eta}^2$) зависимость критических чисел Рейнольдса от Pm определяется не выражением (99), а значительно более пологим соотношением

$$Re \sim Pm^{-1/2}. \quad (100)$$

Этот результат можно получить теоретически [63], учитывая, что $a_\Omega = 0$ (см. (11)) в выражении для угловой скорости (10). При зависимости (100) критические числа Рейнольдса будут существенно меньше ($\sim 10^4$), чем при зависимости (99). Однако результаты расчётов [63] продемонстрировали, что изменение критических чисел Рейнольдса при малых Pm происходит практически скачком вблизи линии Рэлея (реально в очень узкой области, относительная ширина которой порядка Pm), что сильно затрудняет проведение экспериментов (в частности, необходимо поддерживать вращение цилиндров с очень высокой относительной точностью, не хуже порядка величины Pm). В работе [66] было отмечено, что если критические числа Рейнольдса брать не для оптимального магнитного поля (при котором они минимальны), а для фиксированного магнитного поля, то и скачок не будет таким резким. Действительно, при больших магнитных полях скачок не является резким, однако сами числа Рейнольдса уже очень велики, что сохраняет в силе все обсуждавшиеся выше проблемы.

Относительно структуры МВН можно сказать, что так же как и для течения без магнитного поля [31],

наиболее неустойчивой модой для цилиндров, вращающихся в одном направлении, при небольших магнитных полях является осесимметричная ($m = 0$) монотонная ($Re\ \omega = 0$) мода. Дальнейшее поведение зависит от типа граничных условий и величины параметра Pm . Для непроводящих граничных условий осесимметричная монотонная мода остаётся наиболее неустойчивой с возрастанием Na . Ситуация меняется для проводящих граничных условий. Прежде всего при Pm , меньших, чем ~ 1 , существует критическое число Гартмана Na_{cr} . При $Na > Na_{cr}$ наиболее неустойчивой будет асимметричная мода ($m = 1$) [62, 67]. Смена осесимметричной неустойчивости асимметричной неустойчивостью при $Na > Na_{cr}$ и проводящих граничных условиях впервые была получена в пределе узкого зазора и $Pm = 0$ в работе [59]. Тем не менее вопрос требует дальнейшего исследования, потому что, как показано в [63], в отличие от результатов [59], осциллирующая ($\omega \neq 0$) осесимметричная мода может быть наиболее неустойчивой. Отметим, что впервые осциллирующая осесимметричная неустойчивость течения Куэтта для идеально проводящих цилиндров при больших Na была получена в [56].

Как уже было сказано, осевое волновое число k , соответствующее критическому числу Рейнольдса, определяет осевой размер вихря Тейлора, возникающего в результате неустойчивости. При наличии вертикального магнитного поля ячейка вытягивается вдоль магнитного поля и осевой размер вихря увеличивается [62, 63].

Как показывают результаты расчётов и экспериментальные данные осесимметричная неустойчивость обычно является монотонной (т.е. $\omega = 0$). Тем не менее строгое доказательство этого утверждения до сих пор отсутствует. При больших магнитных полях и проводящих граничных условиях осесимметричная неустойчивость, как было сказано выше, может быть осциллирующей ($Re\ \omega \neq 0$). Асимметричная неустойчивость всегда является осциллирующей. Результаты [63] показали, что $Re\ \omega > 0$ и вращение вихрей Тейлора ориентировано в том же направлении, что и вращение основного течения.

4.2. Азимутальное магнитное поле

При наличии азимутального магнитного поля уравнения (72)–(79) допускают стационарное решение общего вида:

$$P = P(R), \quad \rho = \rho_0 = \text{const}, \quad (101)$$

$$U_R = 0, \quad U_\phi = R\Omega(R), \quad U_z = 0, \quad (102)$$

$$B_R = 0, \quad B_\phi = B_\phi(R), \quad B_z = 0, \quad (103)$$

где по-прежнему для идеальной жидкости $\Omega(R)$ и $B_\phi(R)$ являются произвольными функциями радиуса, удовлетворяющими граничным условиям. Для диссипативной жидкости угловая скорость даётся, как обычно, выражением (10), а выражение для магнитного поля находится из уравнения (77):

$$B_\phi(R) = a_B R + \frac{b_B}{R}, \quad (104)$$

где константы a_B и b_B определяются из граничных условий:

$$a_B = \frac{B_{in}}{R_{in}} \frac{\hat{\eta}(\hat{\mu}_B - \hat{\eta})}{1 - \hat{\eta}^2}, \quad b_B = B_{in} R_{in} \frac{1 - \hat{\mu}_B \hat{\eta}}{1 - \hat{\eta}^2}, \quad (105)$$

здесь

$$\hat{\mu}_B = \frac{B_{\text{out}}}{B_{\text{in}}}, \quad (106)$$

$\hat{\eta}$ даётся выражением (12), а B_{in} и B_{out} — азимутальные магнитные поля на внутреннем и внешнем цилиндрах соответственно. Отметим, что в выражении (104) первое слагаемое в правой части соответствует однородной осевой плотности тока j_z ,

$$j_z = \frac{c}{2\pi} a_B, \quad (107)$$

а второе слагаемое является бестоковым. Давление по-прежнему определяется из уравнения (72), которое теперь принимает вид

$$\Omega^2 R = \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dR} \left(P + \frac{B_\phi^2}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi\rho_0} \frac{B_\phi^2}{R}. \quad (108)$$

Для исследования устойчивости стационарного решения (101)–(103) в линейном приближении представим возмущённое решение в виде

$$\begin{aligned} u_R(R, \phi, z), \quad R\Omega(R) + u_\phi(R, \phi, z), \quad u_z(R, \phi, z), \\ b_R(R, \phi, z), \quad B_\phi(R) + b_\phi(R, \phi, z), \quad b_z(R, \phi, z), \\ P(R) + \frac{B_\phi^2(R)}{8\pi} + p(R, \phi, z), \end{aligned} \quad (109)$$

где возмущения $u_R, u_\phi, u_z, b_R, b_\phi, b_z, p$ малы по сравнению с невозмущёнными величинами. Коэффициенты линеаризованной системы (72)–(79) зависят только от радиальной координаты, что позволяет использовать разложение на нормальные моды (20).

Для приведения уравнений к безразмерному виду используем $R_0 = [R_{\text{in}}(R_{\text{out}} - R_{\text{in}})]^{1/2}$ как единицу длины, Ω_{in} как единицу частоты, η/R_0 как единицу возмущённой скорости, B_{in} как единицу магнитного поля (возмущённого и невозмущённого) и $\rho_0 v \eta / R_0^2$ как единицу давления.

Линеаризуя систему (72)–(79), разлагая неизвестные величины на нормальные моды (20) и принимая для безразмерных величин те же обозначения, что и для размерных, получим

$$\begin{aligned} i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_R - 2\text{Re} \Omega u_\phi - i\text{Ha}^2 \frac{m}{R} B_\phi b_R + \\ + 2\text{Ha}^2 \frac{B_\phi}{R} b_\phi = -\frac{dp}{dR} + \frac{d^2 u_R}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_R}{dR} - \frac{u_R}{R^2} - \\ - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_R - 2i \frac{m}{R^2} u_\phi, \end{aligned} \quad (110)$$

$$\begin{aligned} i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_\phi + \frac{\text{Re}}{R} \frac{d(R^2 \Omega)}{dR} u_R - \frac{\text{Ha}^2}{R} \frac{d(RB_\phi)}{dR} - \\ - i\text{Ha}^2 \frac{m}{R} B_\phi b_\phi = -i \frac{m}{R} p + \frac{d^2 u_\phi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_\phi}{dR} - \frac{u_\phi}{R^2} - \\ - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_\phi + 2i \frac{m}{R^2} u_R, \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_z - i\text{Ha}^2 \frac{m}{R} B_\phi b_z = -ikp + \frac{d^2 u_z}{dR^2} + \\ + \frac{1}{R} \frac{du_z}{dR} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_z, \end{aligned} \quad (112)$$

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} + i \frac{m}{R} u_\phi + ik u_z = 0, \quad (113)$$

$$\begin{aligned} i\text{Re} \text{Pm}(\omega + m\Omega) b_R - i \frac{m}{R} B_\phi u_R = \frac{d^2 b_R}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_R}{dR} - \\ - \frac{b_R}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) b_R - 2i \frac{m}{R^2} b_\phi, \end{aligned} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} i\text{Re} \text{Pm}(\omega + m\Omega) b_\phi - \text{Re} \text{Pm} R \frac{d\Omega}{dR} b_R + \\ + R \frac{d}{dR} \left(\frac{B_\phi}{R} \right) u_R - i \frac{m}{R} B_\phi u_\phi = \frac{d^2 b_\phi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_\phi}{dR} - \\ - \frac{b_\phi}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) b_\phi + 2i \frac{m}{R^2} b_R, \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} i\text{Re} \text{Pm}(\omega + m\Omega) b_z - i \frac{m}{R} B_\phi u_z = \frac{d^2 b_z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_z}{dR} - \\ - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) b_z, \end{aligned} \quad (116)$$

$$\frac{db_R}{dR} + \frac{b_R}{R} + i \frac{m}{R} b_\phi + ik b_z = 0, \quad (117)$$

где

$$\text{Pm} = \frac{v}{\eta}, \quad \text{Ha} = \frac{B_{\text{in}} R_0}{\sqrt{4\pi\rho_0 v \eta}}, \quad \text{Re} = \frac{\Omega_{\text{in}} R_0^2}{v} \quad (118)$$

(заметим, что число Ha здесь отличается от числа Гартмана, определённого в разделе 4.1).

Граничные условия для скорости даются выражениями (19). Для магнитного поля для идеально проводящих цилиндров граничные условия даются выражением (93), а для непроводящих цилиндров — выражением (94) и (95) или (96).

Необходимое и достаточное условие устойчивости вращающейся идеальной жидкости к осесимметричным возмущениям при наличии азимутального магнитного поля получено Мишелем [68]:

$$\frac{1}{R^3} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega)^2 - \frac{R}{4\pi\rho_0} \frac{d}{dR} \left(\frac{B_\phi}{R} \right)^2 > 0. \quad (119)$$

Условие (119) легко получить, сводя задачу к уравнению второго порядка аналогично тому, как это описано в разделе 2. Первое слагаемое, как и следовало ожидать, соответствует условию Рэлея (26). Согласно (119) азимутальное магнитное поле в отличие от однородного аксиального магнитного поля может быть неустойчивым и в отсутствие вращения (как хорошо известно из теории устойчивости плазменного пинча (см., например, [69])). Будем называть вращение устойчивым к осесимметричным возмущениям, если оно устойчиво согласно условию Рэлея (первый член в выражении (119) положителен) и неустойчивым в противоположном случае. Аналогично, будем называть азимутальное магнитное поле устойчивым к осесимметричным возмущениям, если второй член (с учётом знака) в выражении (119) положителен, и неустойчивым, если он отрицателен. Таким образом, любое неустойчивое (устойчивое) согласно (26) вращение $\Omega(R)$ может быть стабилизировано (дестабилизировано) азимутальным магнитным полем $B_\phi(R)$ с соответствующей структурой и амплитудой. Очевидно, что обратное также верно и неустойчивое (устойчивое) азимутальное магнитное поле может быть стабилизировано (дестабилизировано) соответствующим вращением.

Используя для азимутального магнитного поля выражение (104), легко показать, что магнитное поле устойчиво, если

$$0 \leq \hat{\mu}_B \leq \frac{1}{\hat{\eta}} \equiv \hat{\mu}_0, \quad (120)$$

и неустойчиво при всех других $\hat{\mu}_B$. Напомним, что вращение устойчиво при $\hat{\mu}_\Omega > \hat{\eta}^2$. Если $\hat{\mu}_B$ лежит вне интервала (120), то согласно (119) для любого закона вращения (любого $\hat{\mu}_\Omega$) существует критическое значение магнитного поля, при превышении которого течение становится неустойчивым. Очевидно, что критическое значение магнитного поля равняется нулю для неустойчивых вращений и возрастает с увеличением угловой скорости для устойчивых вращений.

Достаточно неожиданным представляется то, что вопрос об устойчивости течения Куэтта при наличии азимутального магнитного поля не привлек широкого внимания. В частности, автору не известны экспериментальные результаты. Кроме того, до недавнего времени существовала только одна теоретическая работа для реального диссипативного течения Куэтта [70], в которой было рассмотрено бестоковое магнитное поле ($\hat{\mu}_B = \hat{\eta}$ или $a_B = 0$). Поскольку рассмотренное $\hat{\mu}_B$ принадлежит интервалу (120), то неудивительно, что в работе [70] была получена только стабилизация течения азимутальным магнитным полем.

Недавно [71, 72] были выполнены теоретические расчёты устойчивости неидеального течения Куэтта к осесимметричным возмущениям при наличии азимутального магнитного поля для произвольных $\hat{\mu}_B$ и как для проводящих, так и для непроводящих граничных условий. Для простоты авторы ограничились изучением монотонных ($Re\omega = 0$) осесимметричных возмущений, которые, как правило, наиболее неустойчивы. Результаты [71, 72] продемонстрировали, что устойчивость диссипативного течения Куэтта к осесимметричным возмущениям согласуется с идеальным критерием (119). При этом диссипативные процессы стабилизируют течение и возникают два критических числа: критическое число Рейнольдса и критическое число Гартмана. Таким образом, диссипативное течение с $\hat{\mu}_\Omega < \hat{\eta}^2$ реально теряет устойчивость только при достаточно быстром вращении (большом числе Рейнольдса), а азимутальное магнитное поле с $\hat{\mu}_B < 0$ или $\hat{\mu}_B > 1/\hat{\eta}$ реально теряет устойчивость только при достаточно большой амплитуде (большом числе Гартмана). В общем случае течение, имеющее и неустойчивое вращение, и неустойчивое магнитное поле, устойчиво только при числах Рейнольдса и Гартмана меньших критических (см. кривую 1 на рис. 5). При этом критическое число Рейнольдса максимально в отсутствие магнитного поля и спадает до нуля при некотором конечном числе Гартмана. В свою очередь, критическое число Гартмана максимально в отсутствие вращения и спадает до нуля при некотором конечном числе Рейнольдса. Таким образом, комбинация неустойчивого вращения и неустойчивого магнитного поля в общем случае усиливает неустойчивость течения Куэтта. Исключение имеет место для простейшего решения уравнений магнитной гидродинамики

$$\mathbf{V} = \pm \frac{\mathbf{B}}{(4\pi\rho)^{1/2}}. \quad (121)$$

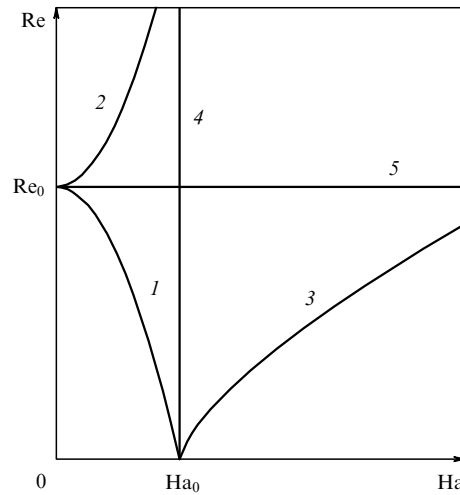


Рис. 5. Схема кривых нейтральной устойчивости к осесимметричным возмущениям при неустойчивом вращении и неустойчивом магнитном поле (кривая 1), при неустойчивом вращении и устойчивом магнитном поле (кривая 2), при устойчивом вращении и неустойчивом магнитном поле (кривая 3), при нейтральном вращении и неустойчивом магнитном поле (кривая 4), при неустойчивом вращении и нейтральном магнитном поле (кривая 5). Для кривых 1, 2 и 5 течение устойчиво (неустойчиво) под (над) кривыми. Для кривой 4 течение неустойчиво (устойчиво) справа (слева) от кривой. И наконец, для кривой 3 течение неустойчиво (устойчиво) под (над) кривой.

Хорошо известно, что такое решение для идеальной жидкости устойчиво (см., например, [7]). Устойчивость течения Куэтта, которое подчиняется соотношению (121), легко проверить прямой подстановкой (121) в условие (119). Таким образом, для идеального течения Куэтта, в котором вращение и магнитное поле задаются произвольными функциями радиуса, легко выбрать такую функцию радиуса, при которой и вращение, и магнитное поле будут неустойчивыми, но их комбинация, связанная условием (121), даст устойчивое течение [73]. При этом и вращение, и магнитное поле будут устойчивы в одних точках и неустойчивы в других (очевидно, что точки неустойчивости вращения будут точками устойчивости магнитного поля и наоборот). Для диссипативного течения Куэтта, когда угловая скорость задаётся функцией (10), а магнитное поле функцией (104), в работе [73] показано, что компенсация неустойчивостей имеет место для осесимметричных возмущений для цилиндров, вращающихся в противоположных направлениях, $\hat{\mu}_\Omega < 0$, с магнитным полем, меняющим знак между цилиндрами, $\hat{\mu}_B < 0$, и при выполнении соотношения $\hat{\eta}|\hat{\mu}_B| \leq |\hat{\mu}_\Omega|$. При этом течение устойчиво в некоторой окрестности линии, соответствующей устойчивости идеального течения Куэтта.

Устойчивость течений с неустойчивым вращением и устойчивым магнитным полем иллюстрируется кривой 2 на рис. 5, а течений с устойчивым вращением и неустойчивым магнитным полем — кривой 3. Естественно, устойчивое магнитное поле стабилизирует течение и критические числа Рейнольдса возрастают с увеличением числа Гартмана. Аналогично, устойчивое вращение стабилизирует неустойчивое магнитное поле и критические числа Гартмана возрастают с увеличением числа Рейнольдса. Отметим характерную особенность комбинации неустойчивого магнитного поля и устойчивого

вращения: течение неустойчиво при малых числах Рейнольдса и устойчиво при больших числах Рейнольдса. Это происходит потому, что данная неустойчивость является по своей природе неустойчивостью магнитного поля, а не вращения. Будем называть эту неустойчивость *пинчевой неустойчивостью* (ПН).

Кроме устойчивых и неустойчивых решений для осесимметричных возмущений существуют также нейтрально устойчивое вращение (при $\hat{\mu}_\Omega = \hat{\eta}^2$) и нейтрально устойчивое магнитное поле (при $\hat{\mu}_B = 1/\hat{\eta}$), которые не влияют на критические числа Гартмана или Рейнольдса, соответственно (кривые 4 и 5 на рис. 5). Отметим, что кривые 1, 2 и 5 имеют одинаковое значение $\hat{\mu}_\Omega$ (так как критические числа Рейнольдса при $Na = 0$ совпадают), но разные значения $\hat{\mu}_B$, а кривые 1, 3 и 4 имеют соответственно одинаковое значение $\hat{\mu}_B$, но разные значения $\hat{\mu}_\Omega$.

Результаты расчётов показывают: критические числа Рейнольдса для осесимметричных ($m = 0$) монотонных ($Re \omega = 0$) возмущений не зависят от магнитного числа Прандтля. Этот результат легко получить аналитически [71]. Следовательно, Na_0 также не зависит от Rm . Нетрудно также понять, что как число, при котором критическое число Рейнольдса обращается в нуль, Na_0 не зависит также от параметров течения ($\hat{\mu}_\Omega$).

Граничные условия, в целом, качественно не влияют на описанную выше картину, хотя количественно критические числа, естественно, зависят от граничных условий. Тем не менее есть некоторые особенности, зависящие от граничных условий. Так, для проводящих цилиндров и для течений с $-1 < \hat{\mu}_B < 0$ осевое волновое число, соответствующее минимальному числу Гартмана, равно нулю и одномерные возмущения являются в этом случае наиболее неустойчивыми. Для диэлектрических цилиндров наиболее неустойчивыми всегда являются двумерные возмущения [71]. Кроме того, для проводящих цилиндров существует паразитное решение, в некоторых случаях затрудняющее исследование [72].

До сих пор мы обсуждали случай осесимметричных возмущений. Однако хорошо известно, что в случае плазменного пинча наиболее неустойчивыми являются возмущения с $m = 1$ (см., например, [69]). При отсутствии вращения необходимое и достаточное условие устойчивости идеальной жидкости с азимутальным полем к асимметричным адиабатическим возмущениям (в действительности к возмущениям с $m = 1$, так как возмущения с большими m более устойчивы) в цилиндрической геометрии было получено Тайлером [74] (см. также [75]):

$$-\frac{d}{dR} (RB_\phi^2) > 0. \quad (122)$$

Если магнитное поле даётся выражением (104), то нетрудно показать, что условие (122) выполняется, если

$$0 \leq \hat{\mu}_B \leq \frac{4\hat{\eta}(1 - \hat{\eta}^2)}{3 - 2\hat{\eta}^2 - \hat{\eta}^4} \equiv \hat{\mu}_1. \quad (123)$$

Легко получить, что при $0 < \hat{\eta} < 1$ имеем $\hat{\mu}_1 < \hat{\mu}_0$ и интервал (123) всегда уже, чем интервал (120). В этом смысле течение Куэтта с азимутальным магнитным полем более неустойчиво к возмущениям с $m = 1$, чем к осесимметричным возмущениям. Отметим, что бестоковое азимутальное магнитное поле ($\hat{\mu}_B = \hat{\eta}$) лежит внутри интервала (123) и устойчиво как к осесимметричным, так и к асимметричным возмущениям. Кроме того, для

пинча в случае, когда жидкость заполняет весь объём внутри внешнего радиуса, имеем $\hat{\eta} = 0$ и интервал (123) вырождается. Следовательно, для пинча возмущения с $m = 1$ всегда будут неустойчивыми (в отсутствие вращения). Это свойство действительно хорошо известно (см., например, [69]).

В работе [76] исследовалась устойчивость течения Куэтта с азимутальным магнитным полем к асимметричным возмущениям. Результаты расчётов показали, что магнитные поля, как и для осесимметричных возмущений, делятся на устойчивые и неустойчивые к асимметричным возмущениям в соответствии с идеальным критерием (122). Соответственно будем называть магнитное поле устойчивым к асимметричным возмущениям, если $\hat{\mu}_B$ принадлежит интервалу (123), и неустойчивым в противоположном случае. По-прежнему неустойчивое магнитное поле теряет устойчивость в диссипативной жидкости только тогда, когда число Гартмана превышает некоторое критическое значение Na_1 .

К сожалению, как говорилось выше, для вращения критерий, позволяющий классифицировать вращение как устойчивое или как неустойчивое к асимметричным возмущениям, до сих пор не получен. Тем не менее мы всегда можем определить устойчивость течения с помощью прямого численного расчёта. По-прежнему вязкость стабилизирует течение и существует критическое число Рейнольдса Re_1 , при превышении которого неустойчивое течение реально теряет устойчивость. Очевидно, что критические числа Гартмана тем выше, чем ближе к интервалу устойчивости (123) лежит $\hat{\mu}_B$. Критические числа Рейнольдса для асимметричных, возмущений, в отличие от таковых для осесимметричных зависят от Rm . Тем не менее критические числа Гартмана лишь слабо зависят от Rm для непроводящих граничных условий и не зависят от Rm для проводящих граничных условий. Подчеркнём, что в расчётах критические числа Гартмана были найдены только для двух мод: $m = 0$ и $m = 1$ [76].

Как уже говорилось в разделе 2, для течения Куэтта в отсутствие магнитного поля неустойчивость для цилиндров, вращающихся в одну сторону, является осесимметричной и становится асимметричной только для цилиндров, вращающихся в противоположные стороны. Однако для азимутального магнитного поля интервал устойчивости по отношению к асимметричным возмущениям (123) уже, чем интервал устойчивости по отношению к осесимметричным возмущениям (120). Таким образом, с возрастанием $\hat{\mu}_B$ магнитное поле теряет устойчивость сначала по отношению к моде $m = 1$ (существует только одно критическое число Гартмана Na_1). По мере дальнейшего возрастания $\hat{\mu}_B$ дестабилизируется также и осесимметричная мода (возникает второе критическое число Гартмана Na_0). При наличии вращения ситуация становится более сложной и единственное, что можно утверждать, это то, что неустойчивость будет иметь моду $m = 0$ или $m = 1$. Какая из мод наиболее неустойчива, сильно зависит от параметров (мода, например, может изменяться с изменением величины магнитного поля). Таким образом, трудно найти критерий, позволяющий ответить на этот вопрос без проведения прямого численного расчёта [76].

Для асимметричных возмущений различные комбинации устойчивых и неустойчивых вращения и магнитного поля ведут себя, как правило, аналогично случаю

осесимметричных возмущений. Например, устойчивое магнитное поле стабилизирует течение Куэтта и критические числа Рейнольдса (если они существуют) возрастают с увеличением напряжённости магнитного поля.

Существует, однако, важное различие между осесимметричными и асимметричными возмущениями. Это различие проявляется при рассмотрении комбинации устойчивого вращения и устойчивого магнитного поля. Течение с устойчивыми к осесимметричным возмущениям вращением и магнитным полем остаётся устойчивым. Однако течение с устойчивыми к асимметричным возмущениям вращением и азимутальным магнитным полем может быть неустойчивым. Эта неустойчивость, аналогичная МВН для однородного осевого поля, впервые была описана, по-видимому, в работе [77], хотя авторы и не отождествили эту неустойчивость как комбинарованную неустойчивость для двух устойчивых компонент. Будем называть эту неустойчивость *азимутальной магнитовращательной неустойчивостью* (АМВН).

Кривая нейтральной устойчивости для АМВН впервые рассчитана в работе [78] (см. также [45, 79]). Типичный вид кривой нейтральной устойчивости приведён на рис. 6. Основное отличие АМВН от МВН заключается в наличии минимального числа Гартмана, при котором неустойчивость существует. При МВН левая ветвь асимптотически стремится к оси ординат, но не пересекает её (см. рис. 4). Для АМВН левая ветвь выходит на асимптотику, наклонную к оси ординат. В результате для каждого числа Гартмана, большего некоторого критического значения, существует два числа Рейнольдса: минимальное и максимальное, между которыми течение неустойчиво. Таким образом, течение устойчиво при малых и больших числах Рейнольдса и неустойчиво при промежуточных числах Рейнольдса (рис. 6).

Отметим, что АМВН существует и для неустойчивого магнитного поля и в этом случае она комбинируется с ПН, что создает общую сложную картину. В зависимости от параметров области существования обеих неустойчивостей могут либо явно отделяться друг от друга, либо пересекаться [78].

В заключение перечислим некоторые открытые вопросы, существенные для понимания устойчивости

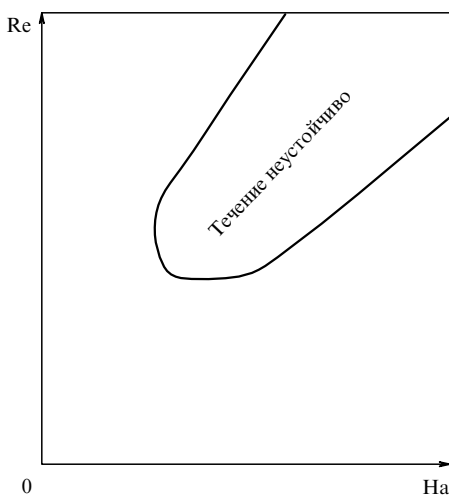


Рис. 6. Схема кривой нейтральной устойчивости по отношению к моде $m = 1$ для комбинации устойчивого вращения и устойчивого азимутального магнитного поля.

течения Куэтта при наличии азимутального магнитного поля. Как уже было сказано, простейшее решение уравнений магнитной гидродинамики устойчиво [7]. Это приводит к компенсации неустойчивостей для осесимметричных возмущений [73]. Такая же компенсация неустойчивостей должна существовать и для асимметричных возмущений. Существенным является также вопрос пределов существования АМВН. Для идеальной жидкости АМВН существует для течений, в которых угловая скорость убывает с радиусом [77]. Было бы желательно обобщить этот результат для случая диссипативной жидкости. Результаты [78, 79] позволяют предположить, что кривая нейтральной устойчивости для АМВН, аналогично таковой в случае МВН, стремится к некоторой универсальной кривой в координатах (L, Rm) при $Rm \ll 1$. Этот результат было бы также интересно подтвердить расчётами с более малым Rm .

4.3. Винтовое магнитное поле: осевое + азимутальное поле

При наличии винтового магнитного поля $\mathbf{B} = (0, B_\phi, B_z)$ уравнения (72)–(79) допускают стационарное решение общего вида

$$P = P(R), \quad \rho = \rho_0 = \text{const}, \quad (124)$$

$$U_R = 0, \quad U_\phi = R\Omega(R), \quad U_z = 0, \quad (125)$$

$$B_R = 0, \quad B_\phi = B_\phi(R), \quad B_z = B_z(R), \quad (126)$$

где для идеальной жидкости $\Omega(R)$, $B_\phi(R)$ и $B_z(R)$ — произвольные функции радиуса, удовлетворяющие граничным условиям. Для диссипативной жидкости угловая скорость даётся выражением (10), азимутальное магнитное поле — выражением (104), а B_z находится из уравнения (78):

$$B_z(R) = a_z + b_z \ln(R), \quad (127)$$

здесь

$$a_z = B_{z \text{ in}} \left(1 - \frac{1 - \hat{\mu}_z}{\ln \hat{\eta}} \ln R_{\text{in}} \right), \quad b_z = B_{z \text{ in}} \frac{1 - \hat{\mu}_z}{\ln \hat{\eta}}, \quad (128)$$

$$\hat{\mu}_z = \frac{B_{z \text{ out}}}{B_{z \text{ in}}}, \quad (129)$$

$B_{z \text{ in}}$ и $B_{z \text{ out}}$ — напряжённости осевого магнитного поля на внутреннем и внешнем цилиндрах соответственно.

Отметим, что в выражении (127) первое слагаемое является бестоковым, а второе соответствует азимутальной плотности тока j_ϕ ,

$$j_\phi = \frac{c}{4\pi} \frac{b_z}{R}. \quad (130)$$

Давление по-прежнему определяется из уравнения (72), которое теперь принимает вид

$$\Omega^2 R = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dR} \left(P + \frac{B_\phi^2 + B_z^2}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi\rho} \frac{B_\phi^2}{R}. \quad (131)$$

Нас интересует устойчивость стационарного решения (124)–(126). В линейном приближении возмущённое

решение представим в виде

$$\begin{aligned} & u_R(R, \phi, z), \quad R\Omega(R) + u_\phi(R, \phi, z), \quad u_z(R, \phi, z), \\ & b_R(R, \phi, z), \quad B_\phi(R) + b_\phi(R, \phi, z), \quad B_z(R) + b_z(R, \phi, z), \\ & P(R) + \frac{B_\phi^2(R) + B_z^2(R)}{8\pi} + p(R, \phi, z), \end{aligned} \quad (132)$$

где возмущения $u_R, u_\phi, u_z, b_R, b_\phi, b_z, p$ малы по сравнению с невозмущёнными величинами. Коэффициенты линеаризованной системы (72)–(79) будут зависеть только от радиальной координаты, что позволяет использовать разложение на нормальные моды (20).

Для приведения уравнений к безразмерному виду используем $R_0 = [R_{in}(R_{out} - R_{in})]^{1/2}$ как единицу длины, Ω_{in} как единицу частоты, η/R_0 как единицу возмущённой скорости, B_{zin} как единицу магнитного поля (возмущённого и невозмущённого) и $\rho_0 v \eta / R_0^2$ как единицу давления.

Линеаризуя систему (72)–(79), разлагая неизвестные величины на нормальные моды (20) и используя для безразмерных величин те же обозначения, что и для размерных, получим

$$\begin{aligned} & i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_R - 2\text{Re} \Omega u_\phi - i\text{Ha}^2 \alpha \frac{m}{R} B_\phi b_R + \\ & + 2\alpha \text{Ha}^2 \frac{B_\phi}{R} b_\phi - i\text{Ha}^2 k B_z b_R = -\frac{dp}{dR} + \frac{d^2 u_R}{dR^2} + \\ & + \frac{1}{R} \frac{du_R}{dR} - \frac{u_R}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2\right) u_R - 2i \frac{m}{R^2} u_\phi, \end{aligned} \quad (133)$$

$$\begin{aligned} & i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_\phi + \frac{\text{Re}}{R} \frac{d(R^2 \Omega)}{dR} u_R - \alpha \frac{\text{Ha}^2}{R} \frac{d(R B_\phi)}{dR} - \\ & - i\text{Ha}^2 \alpha \frac{m}{R} B_\phi b_\phi - i\text{Ha}^2 k B_z b_\phi = -i \frac{m}{R} p + \frac{d^2 u_\phi}{dR^2} + \\ & + \frac{1}{R} \frac{du_\phi}{dR} - \frac{u_\phi}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2\right) u_\phi + 2i \frac{m}{R^2} u_R, \end{aligned} \quad (134)$$

$$\begin{aligned} & i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_z - i\text{Ha}^2 \alpha \frac{m}{R} B_\phi b_z - \text{Ha}^2 \frac{dB_z}{dR} b_R - \\ & - i\text{Ha}^2 k B_z b_z = -ikp + \frac{d^2 u_z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_z}{dR} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2\right) u_z, \end{aligned} \quad (135)$$

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} + i \frac{m}{R} u_\phi + ik u_z = 0, \quad (136)$$

$$\begin{aligned} & i\text{Re} \text{Pm}(\omega + m\Omega) b_R - ik B_z u_R - i\alpha \frac{m}{R} B_\phi u_R = \frac{d^2 b_R}{dR^2} + \\ & + \frac{1}{R} \frac{db_R}{dR} - \frac{b_R}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2\right) b_R - 2i \frac{m}{R^2} b_\phi, \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned} & i\text{Re} \text{Pm}(\omega + m\Omega) b_\phi - \text{Re} \text{Pm} R \frac{d\Omega}{dR} b_R + \alpha R \frac{d}{dR} \left(\frac{B_\phi}{R}\right) u_R - \\ & - i\alpha \frac{m}{R} B_\phi u_\phi - ik B_z u_\phi = \frac{d^2 b_\phi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_\phi}{dR} - \frac{b_\phi}{R^2} - \\ & - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2\right) b_\phi + 2i \frac{m}{R^2} b_R, \end{aligned} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} & i\text{Re} \text{Pm}(\omega + m\Omega) b_z + \frac{dB_z}{dR} u_R - i\alpha \frac{m}{R} B_\phi u_z - ik B_z u_z = \\ & = \frac{d^2 b_z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_z}{dR} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2\right) b_z, \end{aligned} \quad (139)$$

$$\frac{db_R}{dR} + \frac{b_R}{R} + i \frac{m}{R} b_\phi + ik b_z = 0. \quad (140)$$

Безразмерными числами задачи опять являются магнитное число Прандтля Pm , число Гартмана Ha , которое здесь удобно определить иначе, чем в разделах 2, 3 и 4.1, 4.2, число Рейнольдса Re и отношение напряжённостей α азимутального и аксиального магнитного полей на внутреннем цилиндре:

$$\text{Pm} = \frac{\nu}{\eta}, \quad \text{Ha} = \frac{B_{zin} R_0}{\sqrt{4\pi\rho_0\nu\eta}}, \quad \text{Re} = \frac{\Omega_{in} R_0^2}{\nu}, \quad \alpha = \frac{B_{in}}{B_{zin}}. \quad (141)$$

Граничные условия для скорости даются выражениями (19) как на внутреннем, так и на внешнем цилиндрах. Для магнитного поля по-прежнему применимы либо граничные условия (93) для проводящих цилиндров, либо граничные условия (94), (95), (96) для непроводящих цилиндров.

Существенным отличием рассматриваемого случая от всех предыдущих является наличие других свойств симметрии. Как результат, при изучении течения Куэтта с винтовым магнитным полем мы должны рассмотреть возмущения как с $m > 0$, так и с $m < 0$. Эквивалентно, можно ограничиться возмущениями с $m > 0$, но рассмотреть конфигурации магнитного поля как с $\alpha > 0$, так и с $\alpha < 0$.

К сожалению, детальный анализ устойчивости течения Куэтта при наличии винтового магнитного поля до сих пор не проведён. Для исследования устойчивости самого магнитного поля часто используют так называемый энергетический принцип [80]. Этот принцип обобщён для случая, в котором присутствует стационарное течение, в работе [81]. Тем не менее результаты работ [80, 81] носят слишком общий характер и не позволяют получить простых условий устойчивости. Говоря об устойчивости самого винтового магнитного поля прежде всего следует упомянуть работы [82, 83]. В работе [82] показано, что винтовое магнитное поле неустойчиво, если

$$\int_{R_{in}}^{R_{out}} B_\phi^2 R dR > 2 \int_{R_{in}}^{R_{out}} B_z^2 R dR. \quad (142)$$

В работе [83] для винтового магнитного поля и идеальной проводящей плазмы получены три различных условия устойчивости. Первое из них — это достаточное условие устойчивости, второе — необходимое условие устойчивости, третье — необходимое и достаточное условие устойчивости. К сожалению, наиболее интересное необходимое и достаточное условие зависит от нулей решения уравнения Эйлера–Лагранжа (уравнения второго порядка аналогичного уравнению (25), но при наличии винтового магнитного поля), которые в общем случае неизвестны (хотя и могут быть найдены в конкретных случаях), и, следовательно, практически трудноприменимо. Отметим, что и достаточное, и необходимое условия были обобщены для случая присутствия ради-

альной силы [74]. Для осесимметричных возмущений в несжимаемой жидкости достаточное условие устойчивости обобщено для случая вращающейся жидкости Ховардом и Гуптой [26]. Необходимое условие устойчивости в отсутствие вращения было получено Сайдамом [84], оно применимо для конфигураций винтового магнитного поля, в которых имеется критическая точка $mB_\phi - kB_z = 0$. В работе [85] условие Сайдама обобщено для случая, при котором в жидкости присутствует течение (см. также [86]).

Устойчивость диссипативного пинча исследовалась в работе [87]. В случае пинча жидкость, в отличие от таковой в течении Куэтта, заполняет всю область внутри внешнего радиуса пинча ($R_{in} = \hat{\eta} = 0$) и согласно (11) и (105) угловая скорость постоянна, $\Omega = \text{const}$ ($b_\Omega = 0$), а в азимутальном магнитном поле согласно (104) и (105) сохраняется только первый член ($b_B = 0$), порождаемый постоянным осевым током. Важным отличием пинча от течения Куэтта является также наличие свободной, а не фиксированной внешней границы.

При наличии постоянного осевого поля B_0 задача допускает аналитическое решение, выраженное через модифицированные функции Бесселя. В частности, в [87] показано, что в пределе нулевой вязкости (как обсуждалось выше, этот предел хорошо соответствует экспериментам с жидкими металлами) возмущения с $m = -1$ и осевым волновым числом таким, что $B_\phi(R_{out})/R_{out} + kB_0 = 0$, всегда неустойчивы (см. также [88]). Отметим, что устойчивость, как уже упоминалось, зависит от знака азимутального числа. Оказывается, что возмущения с $m < 0$ более неустойчивы (или, что эквивалентно, как было сказано выше, конфигурации магнитного поля с $\alpha < 0$ более неустойчивы).

Отметим результаты Лонгаретти [89], который для сжимаемой жидкости получил критерий устойчивости отличный от критерия Сайдама.

Что касается собственно течения Куэтта, то недавно было показано, что добавление бестокового азимутального магнитного поля (устойчивого самого по себе) к постоянному осевому магнитному полю дестабилизирует течение Куэтта по отношению к осесимметричным возмущениям [90, 91]. При наличии осевого магнитного поля течение Куэтта становится неустойчивым за линией Рэлея, но критические числа Рейнольдса очень велики при малых магнитных числах Прандтля типичных для экспериментов с жидкими металлами (см. раздел 4.1). Оказывается [90, 91], что добавление к осевому магнитному полю бестокового азимутального магнитного поля существенно понижает величину критических чисел Рейнольдса (от $\sim 10^6$ до $\sim 10^4$).

4.4. Магнитное поле с учётом холловских токов

Если в жидкости существуют холловские токи, то закон Ома (68) приобретает вид

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{U} \times \mathbf{B} = R_{Om} \mathbf{j} + R_H \mathbf{j} \times \mathbf{b}, \quad (143)$$

где R_H — удельное холловское сопротивление, \mathbf{b} — единичный вектор вдоль магнитного поля.

При учёте холловских токов уравнение (67) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} - \beta \text{rot}(\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}), \quad (144)$$

где βB — коэффициент холловской диффузии. Здесь и далее предполагается, что η и β не зависят от координат.

Легко проверить, что все три рассмотренные магнитные конфигурации (80)–(82), (101)–(103), (124)–(126) удовлетворяют также и магнитогидродинамическим уравнениям с учётом холловских токов (65), (66), (144). В этом разделе мы не будем выписывать уравнения для частных случаев однородного осевого магнитного поля и азимутального магнитного поля (они легко получаются из приведённых ниже общих уравнений, если положить $B_z = 0$ или $B_\phi = 0$ соответственно), а выпишем сразу общие уравнения для случая присутствия обоих полей. В результате линеаризации, разложения на нормальные моды и нормализации уравнения (133)–(136) и (140) сохраняют свой вид, а уравнения (137)–(139) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} i \text{Re Pm}(\omega + m\Omega) b_R - ikB_z u_R - i\alpha \frac{m}{R} B_\phi u_R = \\ = \frac{d^2 b_R}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_R}{dR} - \frac{b_R}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) b_R - 2i \frac{m}{R^2} b_\phi - \\ - \alpha_H \left(i \frac{m}{R} \frac{dB_z}{dR} b_R - \alpha \frac{m^2}{R^2} B_\phi b_z - k \frac{m}{R} B_z b_z - \right. \\ \left. - ik \frac{dB_\phi}{dR} b_R + \alpha k \frac{m}{R} B_\phi b_\phi + k^2 B_z b_\phi - i\alpha k \frac{B_\phi}{R} b_R \right), \quad (145) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \text{Re Pm}(\omega + m\Omega) b_\phi - \text{Re Pm} R \frac{d\Omega}{dR} b_R + \\ + \alpha R \frac{d}{dR} \left(\frac{B_\phi}{R} \right) u_R - i\alpha \frac{m}{R} B_\phi u_\phi - ikB_z u_\phi = \\ = \frac{d^2 b_\phi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_\phi}{dR} - \frac{b_\phi}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) b_\phi + 2i \frac{m}{R^2} b_R - \\ - \alpha_H \left(-\alpha k \frac{m}{R} B_\phi b_R - k^2 B_z b_R - \frac{dB_z}{dR} \frac{db_R}{dR} - \right. \\ \left. - \frac{d^2 B_z}{dR^2} b_R + i\alpha \frac{m}{R} \frac{B_\phi}{R} b_z - i\alpha \frac{m}{R} \frac{dB_\phi}{dR} b_z - \right. \\ \left. - i\alpha \frac{m}{R} B_\phi \frac{db_z}{dR} - ik \frac{dB_z}{dR} b_z - ikB_z \frac{db_z}{dR} - i\alpha \frac{2}{R} kB_\phi b_\phi \right), \quad (146) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i \text{Re Pm}(\omega + m\Omega) b_z + \frac{dB_z}{dR} u_R - i\alpha \frac{m}{R} B_\phi u_z - ikB_z u_z = \\ = \frac{d^2 b_z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_z}{dR} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) b_z - \\ - \alpha_H \left[\alpha \frac{dB_\phi}{dR} \left(\frac{2}{R} b_R + \frac{db_R}{dR} + i \frac{m}{R} b_\phi \right) + \alpha \frac{d^2 B_\phi}{dR^2} b_R + \right. \\ \left. + \alpha B_\phi \left(i \frac{m}{R} \frac{db_\phi}{dR} + \frac{m^2}{R^2} b_R + \frac{1}{R} \frac{db_R}{dR} + 2i \frac{m}{R^2} b_\phi \right) + \right. \\ \left. + B_z \left(ik \frac{b_\phi}{R} + ik \frac{db_\phi}{dR} + k \frac{m}{R} b_R \right) + ik \frac{dB_z}{dR} b_\phi \right], \quad (147) \end{aligned}$$

где α_H — холловский параметр (отношение времени холловской диффузии магнитного поля к времени омической диссипации магнитного поля),

$$\alpha_H = \frac{\beta B_{zin}}{\eta}. \quad (148)$$

В (145)–(147) безразмерные числа даются выражениями (141), члены пропорциональные α_H обусловлены эффектом Холла.

Напомним также, что для винтового магнитного поля мы должны использовать как $m > 0$, так и $m < 0$.

При наличии эффекта Холла и идеального диэлектрика на границе магнитное поле на границе жидкости по-прежнему должно быть равно внешнему магнитному полю и условия (95) и (96) не изменяются.

Для проводящих граничных условий условия обнуления тангенциальных компонент электрического поля в первом порядке по возмущениям дают

$$\frac{db_\phi}{dR} + \frac{b_\phi}{R} = i\alpha_H B_\phi \left(kb_\phi - \frac{m}{R} b_z \right). \quad (149)$$

Это условие по-прежнему применимо как на внутреннем, так и на внешнем цилиндрах. Условие отсутствия нормальной компоненты магнитного поля на границе ($b_R = 0$) сохраняется.

В работе [92] было рассмотрено влияние холловских токов на устойчивость течения Куэтта при наличии вертикального однородного магнитного поля. Без учёта холловских токов направление магнитного поля не имеет значения, важна только его величина (уравнения (84)–(91) зависят только от Ha^2). Холловские токи приводят к тому, что устойчивость течения зависит как от величины магнитного поля, так и от его направления. Более того, при наличии эффекта Холла течение Куэтта с однородным аксиальным магнитным полем неустойчиво для любого закона вращения (критические числа Рейнольдса существуют для любого $\dot{\mu}_\Omega$). Впервые дестабилизация вращения с возрастающей угловой скоростью под действием эффекта Холла была получена для аккреционных дисков [93]. Течения устойчивые даже для МВН ($\dot{\mu}_\Omega > 1$) дестабилизируются магнитным полем с направлением противоположным направлению вращения (при положительном знаке холловского сопротивления). Эффект Холла также дестабилизирует течения, которые были неустойчивы и без его учёта, например течение с покоящимся внешним цилиндром. При этом критические числа Рейнольдса существенно уменьшаются. Тем не менее оценки величины магнитного поля, при котором можно наблюдать холловскую магнитовращательную неустойчивость (ХМВН) при экспериментах с жидкими металлами, приводят к слишком большим значениям магнитных полей ($\sim 10^7$ Гс), что создаёт серьёзные препятствия для проведения соответствующих экспериментов. Однако ХМВН может оказаться важной для астрофизических приложений (особенно для слабоионизованных аккреционных дисков [93–96]). Подчеркнём, тем не менее, что развитие ХМВН даже в астрофизических объектах требует достаточно больших магнитных полей [92, 97].

В работе [98] было показано, что эффект Холла может оказывать существенное влияние также и на пинчевую неустойчивость азимутального магнитного поля. Отметим, что следствием этого эффекта может быть различная напряжённость азимутального магнитного поля в различных полушариях нейтронной звезды. Кроме того, результаты расчётов [98] показали, что под действием эффекта Холла АМВН распространяется на произвольные законы вращения, аналогично МВН. Тем не менее лабораторному наблюдению всех этих эффектов по-

прежнему препятствует большая напряжённость магнитного поля, при которой они могут проявляться.

5. Течение с неоднородной плотностью и магнитным полем

Несжимаемая неоднородная жидкость при наличии магнитного поля описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \mathbf{g} + \nu\Delta\mathbf{U} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (150)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (151)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta\Delta\mathbf{B}, \quad (152)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\rho = 0. \quad (153)$$

5.1. Радиальная стратификация плотности и азимутальное магнитное поле

Уравнения (150)–(153) допускают решение вида

$$U_R = 0, \quad U_\phi = R\Omega(R), \quad U_z = 0, \quad (154)$$

$$B_R = 0, \quad B_\phi = B_\phi(R), \quad B_z = 0, \quad (155)$$

$$\rho = \rho_0(R), \quad P = P_0(R), \quad (156)$$

где $\Omega(R)$ и $B_\phi(R)$, как и ранее, — либо произвольные функции, удовлетворяющие граничным условиям для идеальной жидкости, либо функции, определяемые выражениями (10) и (104) для диссипативной жидкости, а давление P_0 определяется уравнением (108).

Легко показать, что для идеальной жидкости и осесимметричных возмущений линеаризованная система (150)–(153) аналогично системам в случае только с радиальной стратификацией плотности (см. раздел 3.1) и только с азимутальным магнитным полем (см. раздел 4.2) сводится к уравнению второго порядка

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dR} \left[\rho_0 \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (Ru_R) \right] + k^2 \rho_0 u_R - \\ & - \rho_0 \frac{k^2}{\omega^2} \left[\frac{1}{R^3} \frac{d}{dR} (R^2\Omega)^2 - \frac{R}{4\pi\rho_0} \frac{d}{dR} \left(\frac{B_\phi}{R} \right)^2 + \right. \\ & \left. + (g_R + \Omega^2 R) \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dR} \right] = 0. \end{aligned} \quad (157)$$

Уравнение (157) с граничными условиями (19) по-прежнему является классической задачей Штурма–Лиувилля. Таким образом, для устойчивости течения Куэтта к осесимметричным возмущениям необходимым и достаточным является выполнение условия

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^3} \frac{d}{dR} (R^2\Omega)^2 - \frac{R}{4\pi\rho_0} \frac{d}{dR} \left(\frac{B_\phi}{R} \right)^2 + \\ & + (g_R + \Omega^2 R) \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dR} > 0. \end{aligned} \quad (158)$$

Условие (158) представляет собой обобщение условия Михаеля (119) для случая неоднородной несжимаемой

жидкости. Более подробное изучение устойчивости решения (154)–(156) для течения Куэтта не проводилось. Подчеркнём, что, как и в случае отсутствия магнитного поля, кинематическая вязкость в общем случае зависит от радиальной координаты (её можно считать постоянной только в приближении малой стратификации).

Для полноты обсуждения отметим, что в отсутствие вращения известны необходимое и достаточное условие устойчивости азимутального магнитного поля как к осесимметричным, так и к асимметричным возмущениям при наличии как радиальной, так и осевой стратификации плотности [75]. При наличии вращения и осесимметричных возмущений показано, что условия, обобщающие условия, полученные в [75], являются лишь достаточными для устойчивости [99].

5.2. Осевая стратификация плотности и азимутальное магнитное поле

При наличии вертикальной стратификации плотности $\rho = \rho(z)$ в разделе 3.2 было показано, что система (150)–(153) допускает в качестве решения угловую скорость вида (10) только в пределе медленного вращения и небольшой стратификации плотности (46). Легко показать, что это же верно при наличии азимутального магнитного поля, зависящего только от радиальной координаты. Таким образом, система (150)–(153) при ограничениях (46) допускает решение вида

$$U_R = 0, \quad U_\phi = R\Omega(R), \quad U_z = 0, \quad (159)$$

$$B_R = 0, \quad B_\phi = B_\phi(R), \quad B_z = 0, \quad (160)$$

$$P = P_0(z) + P_1(R, z), \quad \rho = \rho_0 + \rho_1(z), \quad (161)$$

где ρ_0 — однородная плотность, P — полное (с учётом магнитной части) давление, $|P_1/P_0| \ll 1$, $\rho_1/\rho_0 \ll 1$, $\Omega(R)$ и $B_\phi(R)$, как обычно, — либо произвольные функции, удовлетворяющие граничным условиям для идеальной жидкости, либо функции, определяемые выражениями (10) и (104) для неидеальной жидкости.

Рассмотрим задачу о линейной устойчивости решения (159)–(161), используя возмущённое решение вида: $\mathbf{U} + \mathbf{u}(R, \phi, z)$, $\mathbf{B} + \mathbf{b}(R, \phi, z)$, $\rho_0 + \rho_1(z) + \rho(R, \phi, z)$, $P_0(z) + P_1(R, z) + B_\phi^2/8\pi + p(R, \phi, z)$. С учётом условий (46) линеаризованная система (150)–(153) принимает классический вид приближения Буссинеска с коэффициентами, зависящими только от радиуса. Следовательно, мы можем использовать разложение на нормальные моды (20). Таким образом, после линеаризации, разложения на нормальные моды и нормализации (нормировочные константы приведены в разделах 3.2 и 4.2) система (150)–(153) принимает вид (как обычно, для нормализованных величин использованы те же обозначения, что и для ненормализованных)

$$\begin{aligned} i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_R - 2\text{Re} \Omega u_\phi - i\text{Ha}^2 \frac{m}{R} B_\phi b_R + \\ + 2\text{Ha}^2 \frac{B_\phi}{R} b_\phi = -\frac{dp}{dR} + \frac{d^2 u_R}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_R}{dR} - \frac{u_R}{R^2} - \\ - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_R - 2i \frac{m}{R^2} u_\phi, \end{aligned} \quad (162)$$

$$\begin{aligned} i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_\phi + \frac{\text{Re}}{R} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega) u_R - \frac{\text{Ha}^2}{R} \frac{d}{dR} (RB_\phi) - \\ - i\text{Ha}^2 \frac{m}{R} B_\phi b_\phi = -i \frac{m}{R} p + \frac{d^2 u_\phi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_\phi}{dR} - \frac{u_\phi}{R^2} - \\ - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_\phi + 2i \frac{m}{R^2} u_R, \end{aligned} \quad (163)$$

$$\begin{aligned} i\text{Re}(\omega + m\Omega) u_z - i\text{Ha}^2 \frac{m}{R} B_\phi b_z = -ikp + \text{Re} \rho + \\ + \frac{d^2 u_z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{du_z}{dR} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) u_z, \end{aligned} \quad (164)$$

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} + i \frac{m}{R} u_\phi + ik u_z = 0, \quad (165)$$

$$\begin{aligned} i\text{Re} \text{Pm}(\omega + m\Omega) b_R - i \frac{m}{R} B_\phi u_R = \frac{d^2 b_R}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_R}{dR} - \\ - \frac{b_R}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) b_R - 2i \frac{m}{R^2} b_\phi, \end{aligned} \quad (166)$$

$$\begin{aligned} i\text{Re} \text{Pm}(\omega + m\Omega) b_\phi - \text{Re} \text{Pm} R \frac{d\Omega}{dR} b_R + \\ + R \frac{d}{dR} \left(\frac{B_\phi}{R} \right) u_R - i \frac{m}{R} B_\phi u_\phi = \frac{d^2 b_\phi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_\phi}{dR} - \\ - \frac{b_\phi}{R^2} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) b_\phi + 2i \frac{m}{R^2} b_R, \end{aligned} \quad (167)$$

$$\begin{aligned} i\text{Re} \text{Pm}(\omega + m\Omega) b_z - i \frac{m}{R} B_\phi u_z = \\ = \frac{d^2 b_z}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{db_z}{dR} - \left(\frac{m^2}{R^2} + k^2 \right) b_z, \end{aligned} \quad (168)$$

$$\frac{db_R}{dR} + \frac{b_R}{R} + i \frac{m}{R} b_\phi + ik b_z = 0, \quad (169)$$

$$i(\omega + m\Omega)\rho + N_z^2 u_z = 0. \quad (170)$$

Безразмерные числа задачи — магнитное число Прандтля Pm , число Гартмана Ha , число Рейнольдса Re и число Фруда Fr ,

$$\text{Pm} = \frac{\nu}{\eta}, \quad \text{Ha} = \frac{B_{in} R_0}{\sqrt{4\pi\rho_0\nu\eta}}, \quad \text{Re} = \frac{\Omega_{in} R_0^2}{\nu}, \quad \text{Fr} = \frac{\Omega_{in}}{N_z}, \quad (171)$$

где N_z — частота Брента–Вэйсяля (55).

Общее условие устойчивости для идеального течения Куэтта при наличии осевой стратификации плотности и азимутального магнитного поля неизвестно. Для неидеального течения Куэтта эта проблема впервые рассмотрена в работе [45]. Отдельно рассмотрены три случая: 1) азимутальной магнитовращательной неустойчивости, когда и магнитное поле, и вращение по отдельности устойчивы, 2) магнитное поле устойчиво к осесимметричным возмущениям, но неустойчиво к возмущениям с $m = 1$ (одно критическое число Гартмана), 3) магнитное поле неустойчиво к возмущениям как с $m = 0$, так и с $m = 1$.

Кратко говоря, устойчивость течения Куэтта в этом случае демонстрирует комбинированные свойства устой-

чивости при наличии стратификации плотности без магнитного поля и устойчивости при наличии магнитного поля с однородной плотностью и создает чрезвычайно сложную картину.

Так, в первом случае можно говорить как о влиянии осевой стратификации плотности на АМВН, так и о влиянии магнитного поля на СВН. Влияние стратификации плотности сводится в основном к тому, что оно дестабилизирует вращение по отношению к асимметричным возмущениям и вращение, которое было устойчивым при однородной плотности, может стать неустойчивым при наличии осевой стратификации плотности. Напомним, что АМВН существует для любого вращения с убывающей по абсолютному значению угловой скоростью. СВН существует в более узком интервале (в зависимости от зазора между цилиндрами). Азимутальное магнитное поле дестабилизирует течения с убывающей угловой скоростью и при наличии устойчивой стратификации плотности. При этом устойчивая стратификация плотности увеличивает критические числа Рейнольдса и Гартмана. Влияние магнитного поля на СВН совершенно аналогично его влиянию на ВН. При малых Rm магнитное поле подавляет неустойчивость (критические числа Рейнольдса возрастают), но при $Rm > 1$ магнитное поле усиливает неустойчивость, если величина магнитного поля не слишком велика (критические числа Рейнольдса меньше с полем, чем без поля).

Наиболее существенной чертой влияния устойчивой осевой стратификации плотности на неустойчивое магнитное поле является существенное увеличение областей устойчивости для течений с комбинацией неустойчивого вращения и неустойчивого магнитного поля.

6. Заключение

Описанные в статье результаты демонстрируют, что, несмотря на более чем столетнюю историю изучения проблемы устойчивости течения Куэтта, мы ещё далеки от её полного понимания. Это тем более верно при наличии дополнительных факторов, таких, например, как неоднородность плотности и наличие магнитного поля. Эти факторы были выбраны не случайно, а ввиду их чрезвычайной распространённости как в лабораторных, так и в естественных условиях, например в астрофизических объектах.

Кратко просуммируем, основные результаты, касающиеся неустойчивости течения Куэтта.

Классическое идеальное течение Куэтта устойчиво к осесимметричным возмущениям, если величина углового момента возрастает с увеличением расстояния (26). Общий критерий для асимметричных возмущений до сих пор не установлен. Тем не менее и теория, и эксперимент дают, что для цилиндров, вращающихся в одном направлении, наиболее неустойчива осесимметричная мода. Эта неустойчивость является монотонной (вещественная часть инкремента неустойчивости равна нулю) и называется *вращательной неустойчивостью*. Вязкость стабилизирует ВН, и неидеальное течение Куэтта, которое неустойчиво в соответствии с критерием (26), реально теряет устойчивость только при достаточно быстром вращении (большом числе Рейнольдса). Для ВН наблюдается хорошее согласие между теорией и экспериментом. Для полноты отметим, что теоретические результаты предсказывают, что асимметричная

неустойчивость возможна за чертой Рэлея, но не для жёстких, как в течении Куэтта, а для свободных граничных условий.

Устойчивая вертикальная стратификация плотности стабилизирует осесимметричную моду, но дестабилизирует асимметричные моды, которые становятся более неустойчивыми даже для цилиндров, вращающихся в одном направлении. Наиболее неустойчивой в этом случае является мода с $m = 1$, а неустойчивость перестаёт быть монотонной и становится осциллирующей. Более того, эта неустойчивость дестабилизирует течение даже за чертой Рэлея. Будем называть эту неустойчивость *стратовращательной неустойчивостью*. Предел распространения СВН находится между пределом Рэлея (26) и пределом классической магнитовращательной неустойчивости (97) и сильно зависит от величины зазора между цилиндрами — предел тем меньше, чем больше зазор. Подобное поведение может свидетельствовать о сильной зависимости данной неустойчивости от граничных условий. Для исследования этого вопроса приходится выходить за рамки классического течения Куэтта. Однако получаемые результаты, неоднозначны. С одной стороны, есть результаты, показывающие, что СВН исчезает в отсутствие жёстких границ [100], с другой стороны, имеются результаты, показывающие, что СВН сохраняется и для нежёстких границ с отсутствием напряжений на границах [101]. Как уже было сказано, для течения Куэтта также наблюдается хорошее согласие между теоретическими и экспериментальными данными по СВН [44].

Однородное осевое магнитное поле, являясь устойчивым само по себе, тем не менее, дестабилизирует течение Куэтта. Эта неустойчивость, называемая *магнитовращательной неустойчивостью*, исторически является наиболее известной неустойчивостью течения Куэтта, за исключением, пожалуй, собственно ВН. Она проявляется для течений как неустойчивых, так и устойчивых в отсутствие магнитного поля. Для течений, неустойчивых в отсутствие магнитного поля, критические числа Рейнольдса могут уменьшаться при наличии поля. Тем не менее это свойство сильно зависит от магнитного числа Прандтля и проявляется, только если $Rm \sim 1$. Однако основное проявление МВН — это дестабилизация течений с угловой скоростью, убывающей по величине с возрастанием радиуса, и изменение критерия устойчивости с (26) на (97). Критические числа этой неустойчивости сильно зависят от магнитного числа Прандтля, что приводит к трудностям при проведении экспериментов. В результате, МВН до сих пор не наблюдалась экспериментально.

Азимутальное магнитное поле усложняет проблему тем, что может быть неустойчивым само по себе (без вращения). Это так называемая *пичевая неустойчивость*. Таким образом, комбинация азимутального магнитного поля и вращения создаёт сложную картину взаимодействия ВН и ПН. В зависимости от параметров наиболее неустойчивой является либо мода с $m = 0$, либо мода с $m = 1$. Отметим два интересных факта касающихся этого случая. Во-первых, это компенсация неустойчивостей, когда комбинация неустойчивого вращения и неустойчивого магнитного поля могут дать устойчивое течение. Во-вторых, это противоположное явление, когда комбинация устойчивого вращения и устойчивого магнитного поля приводят к так называемой

мой азимутальной магнитовращательной неустойчивости. Свойства АМВН практически такие же, как и МВН, включая пределы распространения (она дестабилизирует течения с уменьшающейся величиной угловой скорости), кроме того, что АМВН является асимметричной ($m = 1$). Экспериментальная реализация интересных режимов при наличии азимутального магнитного поля требует организации токов внутри самой жидкости, что, по-видимому, представляет собой некоторую проблему.

Ситуация с винтовым магнитным полем ещё более сложная. Единственный результат, который следует упомянуть, — это существенное уменьшение критических чисел Рейнольдса при совместном действии однородного вертикального магнитного поля и бестокового азимутального магнитного поля (которое само по себе устойчиво). Проведённые эксперименты, интерпретируются авторами как подтверждение такой винтовой магнитовращательной неустойчивости [102–104]. Тем не менее подобная интерпретация подвергается сомнению [105, 106], а наблюдаемая неустойчивость объясняется как результат транзитного усиления мод от граничных слоев, а не глобальной неустойчивости. Таким образом, сегодня вопрос остаётся открытым.

Теоретически наиболее перспективным с точки зрения исследования неустойчивости является эффект Холла. Расчёты для однородного осевого магнитного поля показали, что в результате этого эффекта происходит дестабилизация течения с любым законом вращения. Основным препятствием как для лабораторной реализации, так и для проявления этого эффекта в природных условиях является необходимость в слишком большой напряжённости магнитного поля. Отметим, что чувствительность устойчивости вращения замагниченной жидкости к изменению закона Ома является, по-видимому, универсальной чертой. Так, результаты работы [107] продемонстрировали, что изменение закона Ома при наличии пылевой составляющей также приводит к дестабилизации вращения с произвольным профилем угловой скорости.

Изучение устойчивости течения Куэтта при одновременном действии неоднородной плотности и магнитного поля находится, можно сказать, ещё в самом начале. Однако уже первые результаты, продемонстрировали чрезвычайно сложную картину взаимодействия СВН с АМВН и ПН.

Автор выражает признательность анонимному рецензенту за замечания, которые позволили улучшить стиль изложения материала.

Работа выполнена при частичной поддержке программой "Ведущие научные школы" (грант НШ-2600.2008.2).

Список литературы

1. Mallock A *Proc. R. Soc. London A* **45** 126 (1888)
2. Couette M *Ann. Chim. Phys.* **21** 433 (1890)
3. Mallock A *Philos. Trans. R. Soc. London A* **187** 41 (1896)
4. Lord Rayleigh *Proc. R. Soc. London A* **93** 148 (1917)
5. Synge J L *Proc. R. Soc. Can.* **27** 1 (1933)
6. Synge J L *Proc. R. Soc. London A* **167** 250 (1938)
7. Chandrasekhar S *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford: Clarendon Press, 1961)
8. Taylor G J *Philos. Trans. R. Soc. London A* **223** 289 (1923)
9. Dutcher C S, Muller S J *Phys. Rev. E* **75** 047301 (2007)
10. Drazin P G, Reid W H *Hydrodynamic Stability* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981)
11. DiPrima R C, Swinney H L, in *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence* (Topics in Applied Physics, Vol. 45, Eds H L Swinney, J P Gollub) (Berlin: Springer-Verlag, 1981) p. 139
12. Tagg R *Nonlin. Sci. Today* **4** (3) 1 (1994)
13. Chossat P, Iooss G *The Couette–Taylor Problem* (New York: Springer-Verlag, 1994)
14. *15th Intern. Couette–Taylor Workshop, 9–12 July 2007, LMPG, Le Havre Univ., France; J. Phys.: Conf. Ser.* **137** (2008)
15. Brevdo L, Bridges T J *Proc. R. Soc. London A* **453** 1345 (1997)
16. Taylor G I *Proc. R. Soc. London A* **157** 546 (1936)
17. Dubrulle B et al. *Phys. Fluids* **17** 095103 (2005)
18. Ji H et al. *Nature* **444** 343 (2006)
19. Schultz-Grunow F Z. *Angew. Math. Mech.* **39** 101 (1959)
20. Hollerbach R, Fournier A *AIP Conf. Proc.* **733** 114 (2004)
21. Andereck C D, Liu S S, Swinney H L J. *Fluid Mech.* **164** 155 (1986)
22. Wendl M C *Phys. Rev. E* **60** 6192 (1999)
23. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Гидродинамика* (М.: Наука, 1986) с. 143 [Landau L D, Lifshitz E M *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1987)]
24. Leblanc S, Le Duc A J. *Fluid Mech.* **537** 433 (2005)
25. Billant P, Gallaire F J. *Fluid Mech.* **542** 365 (2005)
26. Howard L N, Gupta A S J. *Fluid Mech.* **14** 463 (1962)
27. Blaes O M, Glatzel W *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **220** 253 (1986)
28. Goldreich P, Narayan R *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **213** 7P (1985)
29. Kubotani H et al. *Prog. Theor. Phys.* **82** 523 (1989)
30. Roberts P "Appendix to paper Donnelly and Schwarz" *Proc. R. Soc. London A* **283** 550 (1965)
31. Langford W F et al. *Phys. Fluids* **31** 776 (1988)
32. Herron I H, Ali H N *Quart. Appl. Math.* **61** 279 (2003)
33. Fricke K J, Smith R C *Astron. Astrophys.* **15** 329 (1971)
34. Jenny M, Nsom B *Phys. Fluids* **19** 108104 (2007)
35. Manela A, Frankel I J. *Fluid Mech.* **588** 59 (2007)
36. Boubnov B M, Gledzer E B, Hopfinger E J J. *Fluid Mech.* **292** 333 (1995)
37. Caton F, Janiaud B, Hopfinger E J J. *Fluid Mech.* **419** 93 (2000)
38. Thorpe S A, in *Notes on 1966 Summer Geophysical Fluid Dynamics* (Woods Hole, MA: Woods Hole Oceanographic Institute, 1966) p. 80
39. Hua B L, Le Gentil S, Orlandi P *Phys. Fluids* **9** 365 (1997)
40. Withjack E M, Chen C F J. *Fluid Mech.* **66** 725 (1974)
41. Molemaker M J, McWilliams J C, Yavneh I *Phys. Rev. Lett.* **86** 5270 (2001)
42. Yavneh I, McWilliams J C, Molemaker M J J. *Fluid Mech.* **448** 1 (2001)
43. Shalybkov D, Rüdiger G *Astron. Astrophys.* **438** 411 (2005)
44. Le Bars M, Le Gal P *Phys. Rev. Lett.* **99** 064502 (2007)
45. Rüdiger G, Shalybkov D A *Astron. Astrophys.* **493** 375 (2009)
46. Велихов Е П *ЖЭТФ* **36** 1398 (1959) [Velikhov E P *Sov. Phys. JETP* **9** 995 (1959)]
47. Balbus S A, Hawley J F *Astrophys. J.* **376** 214 (1991)
48. Balbus S A, Hawley J F *Rev. Mod. Phys.* **70** 1 (1998)
49. Balbus S A *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **41** 555 (2003)
50. Mahajan S M, Krishan V *Astrophys. J.* **682** 602 (2008)
51. Donnelly R J, Ozima M *Phys. Rev. Lett.* **4** 497 (1960)
52. Donnelly R J, Ozima M *Proc. R. Soc. London A* **266** 272 (1962)
53. Donnelly R J, Caldwell D R J. *Fluid Mech.* **19** 257 (1964)
54. Brahma A *Phys. Scr.* **2** 108 (1970)
55. Sisan D R et al. *Phys. Rev. Lett.* **93** 114502 (2004)
56. Chang T S, Sartory W K *Proc. R. Soc. London A* **301** 451 (1967)
57. Hassard B D, Chang T S, Ludford G S S *Proc. R. Soc. London A* **327** 269 (1972)
58. Soundalgekar V M, Ali M A, Takhar H S *Int. J. Energy Res.* **18** 689 (1994)
59. Chen C-K, Chan M H J. *Fluid Mech.* **366** 135 (1998)
60. Kurzweg U H J. *Fluid Mech.* **17** 52 (1963)
61. Goodman J, Ji H J. *Fluid Mech.* **462** 365 (2002)
62. Rüdiger G, Shalybkov D *Phys. Rev. E* **66** 016307 (2002)
63. Rüdiger G, Schultz M, Shalybkov D *Phys. Rev. E* **67** 046312 (2003)
64. Wang Z et al. *Phys. Plasmas* **15** 102109 (2008)
65. Willis A P, Barenghi C F *Astron. Astrophys.* **388** 688 (2002)
66. Velikhov E P et al. *Phys. Lett. A* **356** 357 (2006)
67. Shalybkov D A, Rüdiger G, Schultz M *Astron. Astrophys.* **395** 339 (2002)

68. Michael D H *Mathematika London* **1** 45 (1954)
69. Кадомцев Б Б, в сб. *Вопросы теории плазмы* Вып. 2 (Под ред. М А Леонтовича) (М.: Госатомиздат, 1963) с. 132
70. Edmonds F N (Jr.) *Phys. Fluids* **1** 30 (1958)
71. Shalybkov D *Phys. Rev. E* **73** 016302 (2006)
72. Shalybkov D *Phys. Rev. E* **75** 047302 (2007)
73. Shalybkov D *Phys. Rev. E* **76** 027302 (2007)
74. Tayler R J *J. Nucl. Energy C* **3** 266 (1961)
75. Tayler R J *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **161** 365 (1973)
76. Rüdiger G et al. *Phys. Rev. E* **76** 056309 (2007)
77. Ogilvie G I, Pringle J E *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **279** 152 (1996)
78. Rüdiger G et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **377** 1481 (2007)
79. Rüdiger G et al. *Astron. Nachr.* **328** 1158 (2007)
80. Bernstein I B et al. *Proc. R. Soc. London A* **244** 17 (1958)
81. Frieman E, Rotenberg M *Rev. Mod. Phys.* **32** 898 (1960)
82. Lundquist S *Phys. Rev.* **83** 307 (1951)
83. Newcomb W A *Ann. Physics* **10** 232 (1960)
84. Suydam B R, in *Proc. Second United Nat. Intern. Conf. on the Peaceful uses of Atomic Energy* Vol. 31 (Geneva, 1958) p. 157 [Сайдем Б, в сб. *Труды Второй Международ. конф. по мирному использованию атомной энергии. Избранные докл. иностранных ученых. Физика горячей плазмы и термоядерные реакции* (Под ред. В Ф Кадицина) (М.: Изд-во Главного упр. по использованию атомной энергии при СМ СССР, 1959) с. 89]
85. Bondeson A, Iacono R, Bhattacharjee A *Phys. Fluids* **30** 2167 (1987)
86. Wang C et al. *J. Plasma Phys.* **70** 651 (2004)
87. Tayler R J *Rev. Mod. Phys.* **32** 907 (1960)
88. Tayler R J, Hopgood F R A *J. Nucl. Energy C* **5** 355 (1963)
89. Longaretti P-Y *Phys. Lett. A* **320** 215 (2003)
90. Hollerbach R, Rüdiger G *Phys. Rev. Lett.* **95** 124501 (2005)
91. Rüdiger G et al. *Astron. Nachr.* **326** 409 (2005)
92. Rüdiger G, Shalybkov D *Phys. Rev. E* **69** 016303 (2004)
93. Wardle M *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **307** 849 (1999)
94. Balbus S A, Terquem C *Astrophys. J.* **552** 235 (2001)
95. Sano T, Stone J M *Astrophys. J.* **570** 314 (2002)
96. Sano T, Stone J M *Astrophys. J.* **577** 534 (2002)
97. Rüdiger G, Kitchatinov L L *Astron. Astrophys.* **434** 629 (2005)
98. Rüdiger G et al. *Astron. Nachr.* **330** 12 (2009)
99. Chanmugam G *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **187** 769 (1979)
100. Umurhan O M *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **365** 85 (2006)
101. Dubrulle B et al. *Astron. Astrophys.* **429** 1 (2005)
102. Rüdiger G et al. *Astrophys. J. Lett.* **649** L145 (2006)
103. Stefani F et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 184502 (2006)
104. Stefani F et al. *Astron. Nachr.* **329** 652 (2008)
105. Liu W, Goodman J, Ji H *Phys. Rev. E* **76** 016310 (2007)
106. Liu W *Phys. Rev. E* **77** 056314 (2008)
107. Mikhailovskii A B et al. *Phys. Plasmas* **15** 014504 (2008)

Hydrodynamic and hydromagnetic stability of the Couette flow

D.A. Shalybkov

*Ioffe Physical Technical Institute, Russian Academy of Sciences,
Politekhnikeskaya ul. 26, 194021 Saint-Petersburg, Russian Federation
Tel. (7-812) 292-73 26. Fax (7-812) 297-10 17
E-mail: dasha@astro.ioffe.ru*

The stability of dissipative Couette flow is examined in the linear approximation. The onset conditions and properties of flow instability are studied, with special emphasis placed on magnetic field and density stratification effects. Theoretical and experimental results on instability parameters are found to be in good (within a few percent) agreement.

PACS numbers: 47.20.Qr, **47.65.** – d, 52.30.Cv

DOI: 10.3367/UFNr.0179.200909d.0971

Bibliography — 107 references

Received 8 December 2008, revised 18 May 2009

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **179** (9) 971–993 (2009)

Physics – Uspekhi **52** (9) (2009)