

“Физика и астрофизика – от фундаментальных
констант до гамма-всплесков и космологии”,
конференция памяти
Д.А. Варшаловича и Е.П. Мазеца

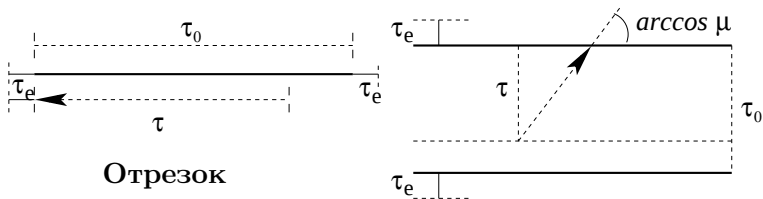
Вероятности выхода и средние числа
рассеяния фотонов в плоских средах

Д.И. Нагирнер

Санкт-Петербургский государственный
университет

20.11.2024

Изотропное монохроматическое рассеяние



Отрезок

Слой

- ▶ Параметры: τ_0 и λ — вероятность переизлучения.
- ▶ Вероятность свободного прохода фотона оптического расстояния τ в отрезке: $e^{-\tau}$.
- ▶ Вероятность свободного прохода фотона с глубины τ в слое под углом $\arccos \mu$: $e^{-\tau/\mu}$.
- ▶ Вероятность свободного выхода фотона с глубины τ в слое под произвольным углом:

$$\int_0^1 e^{-\tau/\mu} \frac{d\mu}{\mu} = E_1(\tau), \quad E_n(\tau) = \int_0^1 e^{-\tau/\mu} \mu^{n-2} d\mu = \int_1^\infty e^{-y\tau} \frac{dy}{y^n}. \quad (1)$$

Выход фотонов с глубины τ

- ▶ Вероятности выхода после рассеяний: через левую $P(\tau, \tau_0)$ и правую $P(\tau_0 - \tau, \tau_0)$ границы.
- ▶ Вероятности выхода из слоя после рассеяний: через верхнюю $P(\tau, \tau_0)$, нижнюю $P(\tau_0 - \tau, \tau_0)$.

- ▶ Уравнение:

$$L(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} K(\tau') d\tau', \quad (2)$$

$$P(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} L(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) P(\tau', \tau_0) d\tau'. \quad (3)$$

- ▶ Отрезок

$$K(\tau) = e^{-\tau}, \quad L(\tau) = e^{-\tau}. \quad (4)$$

- ▶ Слой

$$K(\tau) = E_1(\tau), \quad L(\tau) = E_2(\tau). \quad (5)$$

- ▶ Полная вероятность $\mathcal{P}(\tau, \tau_0) = P(\tau, \tau_0) + P(\tau_0 - \tau, \tau_0)$.

Средние числа рассеяний

- ▶ **Функция Грина $\Gamma_*(\tau, \tau_1, \tau_0)$ уравнения (3):**

$$\Gamma_*(\tau, \tau_1, \tau_0) = \delta(\tau - \tau_1) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) \Gamma_*(\tau', \tau_1, \tau_0) d\tau'. \quad (6)$$

- ▶ $\Gamma_*(\tau, \tau_1, \tau_0)$ — **среднее число фотонов, родившихся на глубине τ_1 и излучившихся затем на глубине τ .**
- ▶ **Среднее число рассеяний фотона, родившегося на глубине τ , во всей среде:**

$$N(\tau, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} \Gamma_*(\tau, \tau_1, \tau_0) d\tau_1 = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) N(\tau', \tau_0) d\tau'. \quad (7)$$

- ▶ **Разделенные средние $N_E(\tau, \tau_0)$ и $N_A(\tau, \tau_0)$:**

$$N(\tau, \tau_0) = \mathcal{P}(\tau, \tau_0) N_E(\tau, \tau_0) + [1 - \mathcal{P}(\tau, \tau_0)] N_A(\tau, \tau_0). \quad (8)$$

Связи между функциями

► Полные величины:

$$(1 - \lambda)N(\tau, \tau_0) + \mathcal{P}(\tau, \tau_0) = 1. \quad (9)$$

► Выражения разделенных через полную:

$$N_E(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda N(\tau, \tau_0)}{1 - (1 - \lambda)N(\tau, \tau_0)} \left[1 - (1 - \lambda) \frac{\partial \ln N(\tau, \tau_0)}{\partial \lambda} \right], \quad (10)$$

$$N_A(\tau, \tau_0) = 1 + \lambda \frac{\partial \ln N(\tau, \tau_0)}{\partial \lambda}. \quad (11)$$

► Односторонние средние числа рассеяний

$$N_E(\tau, \tau_0) = \frac{P(\tau, \tau_0)N_+(\tau, \tau_0) + P(\tau_0 - \tau, \tau_0)N_+(\tau_0 - \tau, \tau_0)}{\mathcal{P}(\tau, \tau_0)}. \quad (12)$$

► Связь односторонних величин:

$$N_+(\tau, \tau_0) = \lambda \frac{\partial \ln P(\tau, \tau_0)}{\partial \lambda}, \quad N_-(\tau, \tau_0) = N_+(\tau_0 - \tau, \tau_0). \quad (13)$$

Выражения через одну функцию

► Интеграл от функции Грина

$$\Psi(\tau, \tau_0) = \int_0^{\tau} G_*(\tau', 0, \tau_0) d\tau', \quad \Psi(0, \tau_0) = 1. \quad (14)$$

► Односторонняя вероятность выхода

$$P(\tau, \tau_0) = \frac{1}{2} - [1 - P(0, \tau_0) - P(\tau_0, \tau_0)] \left[\Psi(\tau, \tau_0) - \frac{1}{2} \Psi(\tau_0, \tau_0) \right] - \\ - P(\tau_0, \tau_0) [\Psi(\tau, \tau_0) - \Psi(\tau_0 - \tau, \tau_0)]. \quad (15)$$

► Полная вероятность

$$P(\tau, \tau_0) = 1 - (1 - \lambda) \Psi(\tau_0, \tau_0) [\Psi(\tau, \tau_0) + \Psi(\tau_0 - \tau, \tau_0) - \Psi(\tau_0, \tau_0)]. \quad (16)$$

► Крайние значения

$$P(0, \tau_0) = 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Psi(\tau_0, \tau_0)} + (1 - \lambda) \Psi(\tau_0, \tau_0) \right], \quad (17)$$

$$P(\tau_0, \tau_0) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Psi(\tau_0, \tau_0)} - (1 - \lambda) \Psi(\tau_0, \tau_0) \right]. \quad (18)$$

Явные точные решения

- ▶ Все функции для отрезка элементарны

$$\Psi(\tau) = \Psi(\tau, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - \frac{C_0}{k} e^{-k(\tau+\tau_e)} = \frac{1 - (1-k)e^{-k\tau}}{k}, \quad (19)$$

$$k = \sqrt{1-\lambda}, \quad \tau_e = \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k}, \quad C_0 = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{\lambda}. \quad (20)$$

- ▶ Для слоя при $\tau_0 = \infty$ все через интегралы
- ▶ Асимптотика при $\tau \gg 1$

$$\Psi(\tau) = \Psi(\tau, \infty) \sim \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - \frac{C_0}{k} e^{-k(\tau+\tau_e)}, \quad \frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = 1, \quad (21)$$

$$\tau_e(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \operatorname{arccotg} \mathcal{X}(1/\eta, \lambda) \frac{d\eta}{1 - k^2 \eta^2}, \quad (22)$$

$$\mathcal{X}(1/\eta, \lambda) = \frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{\eta}{2} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta}}{\frac{\pi\eta}{2}}, \quad C_0 = \frac{k}{\sqrt{1-\lambda+k^2}}. \quad (23)$$

Точные выражения для отрезка

$$\Psi(\tau, \tau_0) = \frac{\operatorname{cth} k(\tau_0 + 2\tau_e)}{k} - C_0 \frac{\operatorname{ch} k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{k \operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)}, \quad k = \sqrt{1 - \lambda}, \quad (24)$$

$$\Psi(\tau_0, \tau_0) = 1 + \frac{C_0}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\tau_0}{2}}{\operatorname{ch} k \frac{\tau_0 + 2\tau_e}{2}} = \frac{\operatorname{th} k \frac{\tau_0 + 2\tau_e}{2}}{k}. \quad (25)$$

► Выход с концов отрезка

$$P(0, \tau_0) = 1 - \frac{k}{\operatorname{th} k(\tau_0 + 2\tau_e)}, \quad P(\tau_0, \tau_0) = \frac{k}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)}. \quad (26)$$

► Выход через верх и через обе границы

$$P(\tau, \tau_0) = C_0 \frac{\operatorname{sh} k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)}, \quad (27)$$

$$\mathcal{P}(\tau, \tau_0) = P(\tau, \tau_0) + P(\tau_0 - \tau, \tau_0) = C_0 \frac{\operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} - \tau \right)}{\operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right)}. \quad (28)$$

Асимптотики вероятностей выхода из слоя при $\tau_0 \gg 1$

$$\Psi(\tau, \tau_0) \sim \frac{\operatorname{cth} k(\tau_0 + 2\tau_e)}{\sqrt{1 - \lambda}} - C_0 \frac{\operatorname{ch} k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{k \operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)}, \quad (29)$$

$$\Psi(\tau_0, \tau_0) \sim \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda}} \operatorname{th} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right). \quad (30)$$

► Крайние вероятности выхода

$$P(0, \tau_0) \sim 1 - \frac{\sqrt{1 - \lambda}}{\operatorname{th} k(\tau_0 + 2\tau_e)}, \quad P(\tau_0, \tau_0) \sim \frac{\sqrt{1 - \lambda}}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)}, \quad (31)$$

$$P(0, \tau_0) = P(0, \tau_0) + P(\tau_0, \tau_0) \sim 1 - \sqrt{1 - \lambda} \operatorname{th} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right). \quad (32)$$

► Вероятность выхода вверх при $\tau \gg 1$

$$P(\tau, \tau_0) \sim C_0 \frac{\sqrt{1 - \lambda}}{k} \frac{\operatorname{sh} k(\tau_0 - \tau + \tau_e)}{\operatorname{sh} k(\tau_0 + 2\tau_e)}. \quad (33)$$

► Вероятность выхода через обе границы

$$P(\tau, \tau_0) \sim C_0 \frac{\sqrt{1 - \lambda}}{k} \frac{\operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} - \tau \right)}{\operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right)}. \quad (34)$$

Числа рассеяний в отрезке и в слое

- Рождение на краях отрезка и на τ

$$N(0, \tau_0) = N(\tau_0, \tau_0) = \frac{1}{k} \operatorname{th} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right), \quad (35)$$

$$N(\tau, \tau_0) = \frac{1}{k^2} \left[1 - C_0 \frac{\operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} - \tau \right)}{\operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right)} \right], \quad k = \sqrt{1 - \lambda}. \quad (36)$$

- Асимптотика при рождении на границах слоя

$$N(0, \tau_0) = N(\tau_0, \tau_0) \sim \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda}} \operatorname{th} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right). \quad (37)$$

- Асимптотика при рождении на $\tau \gg 1$

$$N(\tau, \tau_0) \sim \frac{1}{1 - \lambda} - \frac{C_0}{k\sqrt{1 - \lambda}} \frac{\operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} - \tau \right)}{\operatorname{ch} k \left(\frac{\tau_0}{2} + \tau_e \right)}. \quad (38)$$

Числа рассеяний в слое при чистом рассеянии

- Асимптотики при $\tau_0 \gg 1$, поправки порядка $e^{-\tau_0}$.

$$N_+(\tau_0, \tau_0) = \frac{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^2}{2} \times \\ \times \left(1 - \frac{4}{5} \frac{1}{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^2} - \frac{4\tau'_e(1)}{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^3} \right), \quad (39)$$

$$N_+(0, \tau_0) = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}[\tau_0 + 2\tau_e(1)]}} \times \\ \times \left(1 + \frac{2}{5} \frac{1}{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^2} + \frac{2\tau'_e(1)}{[\tau_0 + 2\tau_e(1)]^3} \right), \quad (40)$$

$$N(0, \tau_0) = P(0, \tau_0)N_+(0, \tau_0) + P(\tau_0, \tau_0)N_+(\tau_0, \tau_0) = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} [\tau_0 + 2\tau_e(1)]. \quad (41)$$

- Постоянные $\tau_e(1) = 0.7104460898$, $\tau'_e(1) = -0.8203170$.

Заключение

Задача о монохроматическом изотропном рассеянии в отрезке и слое (параметры λ и τ_0 , аргумент τ).

1. Вероятности выхода и средние числа рассеяний выражены через характеристическое число k и экстраполированную длину τ_e , зависящие от λ .
2. Введены односторонние числа рассеяний.
3. Показано, что точные выражения для одномерной среды совпадают по виду с асимптотиками для трехмерных сред.
4. Получены более точные асимптотики при $\tau_0 \gg 1$, в частности, для чистого рассеяния ($\lambda = 1$).