

Содержание

I. Функция распределения	4
I.1. Состояния в кристалле	4
I.2. Волновые пакеты частиц	5
I.3. Функция распределения	6
I.4. Формулировка кинетического уравнения	7
II. Кинетическое уравнение	9
II.1. Рассеяние на примесях	13
II.2. Интеграл неупругих столкновений	13
III. Времена релаксации	15
III.1. Точечные дефекты и экранированные примеси	16
III.2. Кулоновские примеси	17
III.3. Системы с линейным спектром	17
IV. Проводимость электронного газа	19
IV.1. Проводимость на конечной частоте: вывод из кин. уравнения	21
IV.2. Проводимость на конечной частоте: вывод из кв.-мех. рассмотрения непрямых оптических переходов	22
V. Циклотронный резонанс. Классический эффект Холла	24
V.1. Изотропная дисперсия	24
V.2. Циклотронный резонанс в системах с анизотропной массой	25
V.3. Циклотронная масса при произвольном законе дисперсии	26
V.4. Квантовый циклотронный резонанс	27
V.5. Классический эффект Холла	29
VI. Явления, обусловленные градиентом температуры	30
VI.1. Кинетические коэффициенты и соотношения Онзагера	30
VI.2. Термоэлектрический коэффициент	31
VI.3. Электронная теплопроводность. Закон Видемана-Франца	33
VI.4. Эффекты Зеебека, Пельтье и Томсона	34

VI.5. Термомагнитные явления: эффекты Ледюка-Риги, Эттингсгаузена и Нернста-Эттингсгаузена	35
VII. Квадратичные по электрическому полю вклады в функцию распределения	37
VII.1. Разогрев электронов	37
VII.2. Выстраивание электронных импульсов	38
VIII. Фотогальванический эффект	41
VIII.1. Симметричный анализ	41
VIII.2. Расчёт из кинетического уравнения	42
VIII.3. Циркулярный фототок	44
IX. Эффект фотонного увлечения	47
IX.1. Феноменология	47
IX.2. Расчёт фототока увлечения	48
X. Эффект Шубникова-де Гааза	52
X.1. Плотность состояний в трёхмерных системах	53
X.2. Проводимость в трёхмерных системах	55
X.3. Эффект в двумерных системах	56
XI. Квантовый эффект Холла	58
XI.1. ЦКЭХ: данные эксперимента	58
XI.2. Бесконечный образец	58
XI.3. Конечный образец	59
XI.4. ДКЭХ	62
XII. Слабая локализация	63
XII.1. Оценка поправки к проводимости	65
XII.2. Сбой фазы и аномальная температурная зависимость проводимости	66
XII.3. Магнитосопротивление в классически слабых полях	66
XII.4. Влияние спиновой релаксации	67
XIII. Проводимость при сильной локализации	69
XIII.1. Прыжковая проводимость	69

ХІІІ.2. Прыжки на ближайшие центры	70
ХІІІ.3. Прыжки с переменной длиной. Закон Мотта	71
ХІІІ.4. Кулоновская щель. Закон Эфроса-Шкловского	72

I. Функция распределения

I.1. Состояния в кристалле

В идеальном кристалле есть зоны разрешённых и запрещённых энергий. Электронные состояния в них описываются волновым вектором $\mathbf{k}$, который может принимать значения внутри зоны Бриллюэна, а также дискретными квантовыми числами – проекцией спина на выбранную ось, номером долины и т.д. Верхняя из заполненных зон называется зоной проводимости. Полупроводники, в которых кинетические явления сейчас изучаются наиболее интенсивно, характерны тем, что электроны заполняют часть зоны Бриллюэна вблизи минимума зоны проводимости. Это значит, что характерные значения k далеки от границ зоны Бриллюэна $\pm 2\pi/a_0$, где a_0 – постоянная решётки, а характерные энергии $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ много меньше, чем величины разрешённых и запрещённых зон:

$$ka_0 \ll 1, \quad \varepsilon_{\mathbf{k}} \ll E_g. \quad (1)$$

Волновая функция электрона представляет собой произведение

$$\Psi_{c\mathbf{k}} = u_{c\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}, \quad (2)$$

где $u_{c\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ – блоховская амплитуда, периодическая с периодом a_0 , а $\psi_{\mathbf{k}}$ – плавная огибающая, меняющаяся на расстояниях много больших постоянной решётки. Вблизи минимума зоны проводимости идеального кристалла электрон описывается одночастичным гамильтонианом $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$, блоховская амплитуда с хорошей точностью равна u_{c0} , т.е. не зависит от $\mathbf{k}$, а огибающая удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{H}_0\psi_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}\psi_{\mathbf{k}}. \quad (3)$$

Например, вблизи минимума зоны проводимости, если не принимать во внимание другие степени свободы, $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ – квадратичная изотропная функция волнового вектора, $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/(2m)$, где m – эффективная масса, и огибающая – плоская волна:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (4)$$

Объём кристалла здесь и далее принимается за единицу.

Граничные условия Борна-Кармана:

$$\psi_{\mathbf{k}}(x + L_x, y, z) = \psi_{\mathbf{k}}(x, y + L_y, z) = \psi_{\mathbf{k}}(x, y, z + L_z) = \psi_{\mathbf{k}}(x, y, z). \quad (5)$$

Из цикличности этих условий следует, что $k_i L_i$ ($i = x, y, z$) должно быть целым числом, умноженным на 2π . Поэтому k_i оказываются дискретными переменными, квантованными с шагом $2\pi/L_i$. Но в макроскопическом образце объёмом $V = L_x L_y L_z$ этот шаг очень мал, и при суммировании по $\mathbf{k}$ можно переходить к интегрированию:

$$\sum_{\mathbf{k}} \Phi(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{k} \frac{V}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{k}). \quad (6)$$

I.2. Волновые пакеты частиц

До сих пор мы описывали электроны стационарными блоховскими решениями уравнения Шрёдингера $\psi_{\mathbf{k}}$. Однако эти функции бесполезны для изучения кинетических явлений, так как они соответствуют определённому значению квазиимпульса $\mathbf{k}$, в то время как координата остается совершенно неопределённой. Этот недостаток можно исправить, сформировав волновой пакет из блоховских состояний. Притом желательно всё-таки наиболее точно определить квазиимпульс $\mathbf{k}$. Для этого возьмем сумму блоховских волн по малому интервалу $\Delta\mathbf{k}$ (сокращение этого интервала ограничено точностью определения координат). Из принципа неопределённости имеем $\Delta k \Delta r \sim 1$. При рассеянии электроны имеют конечную длину свободного пробега l , поэтому неопределённость их координат должна быть меньше l . А верхний допустимый предел для Δk – это, очевидно сам квазиимпульс k . Таким образом должно быть выполнено условие

$$k \gg \Delta k \sim 1/\Delta r \gg 1/l, \quad \text{т.е.} \quad kl \gg 1. \quad (7)$$

Для того чтобы найти скорость электрона, описываемого волновым пакетом, рассмотрим интеграл

$$J = \int_{\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k}} d\mathbf{k}' e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - i\varepsilon_{\mathbf{k}'} t/\hbar} u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}), \quad (8)$$

где интегрирование идёт по окрестности $\Delta\mathbf{k}$ вокруг какого-то определённого импульса $\mathbf{k}$. При $\Delta k \ll k$ этот интеграл приближённо равен

$$J = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\varepsilon_{\mathbf{k}} t/\hbar} \int_{\Delta\mathbf{k}} d\delta\mathbf{k} e^{i\delta\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r} - (\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}/\partial\mathbf{k})t/\hbar]}. \quad (9)$$

Этот интеграл имеет порядок $(\Delta k)^3$ только если $|\mathbf{r} - (\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}/\partial\mathbf{k})t/\hbar| \ll 1$. Значит,

$$\mathbf{r} \approx \frac{1}{\hbar} \frac{\partial\varepsilon_{\mathbf{k}}}{\partial\mathbf{k}} t, \quad (10)$$

то есть волновой пакет перемещается со скоростью

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}}. \quad (11)$$

Во внешнем поле $\mathbf{F}$ электрон получает от поля в единицу времени энергию $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{k}}$. Но она должна быть равна скорости изменения энергии электрона

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \hbar \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt}. \quad (12)$$

Отсюда получаем

$$\frac{d(\hbar \mathbf{k})}{dt} = \mathbf{F}. \quad (13)$$

I.3. Функция распределения

В идеальном кристалле в отсутствие внешних полей электрон с волновым вектором $\mathbf{k}$ согласно (13) летит бесконечно долго, сохраняя его направление и величину. В реальных системах есть отклонения от идеальности: дефекты кристаллической решётки, примеси, а также колебания кристалла – фононы. Все эти причины приводят к изменению волнового вектора электрона, летящего в реальном кристалле. На языке квантовой механики электрон под действием этих факторов переходит из состояния с волновым вектором $\mathbf{k}$ в состояние с каким-то другим волновым вектором $\mathbf{k}'$, то есть *рассеивается*. Также может происходить изменение спинового состояния электрона или – в многодолинных системах – номера его долины.

За всеми электронами следить невозможно, поэтому вводится *функция распределения* $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$ – число электронов с волновым вектором $\mathbf{k}$, находящихся в момент времени t в окрестности точки $\mathbf{r}$. По функции распределения вычисляются макроскопические величины, измеряемые в эксперименте. Например, концентрация электронов и плотность электрического тока

$$N(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu \mathbf{k}} f_{\nu \mathbf{k}}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e \sum_{\nu \mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} f_{\nu \mathbf{k}}(\mathbf{r}, t). \quad (14)$$

Здесь ν – дискретный индекс, нумерующий спиновые состояния, а также, если есть, долины. В случае простой зоны в однодолинном полупроводнике функция распределения не зависит от спина, и суммирование по ν даёт двойку. Скорость при заданном законе дисперсии определяется выражением (11).

По определению, функция распределения имеет смысл только для описания классических свойств, так как в квантовой области одновременное задание квазиимпульса и координаты противоречит принципу неопределённости. Поэтому пользоваться функцией распределения в фазовом пространстве $(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ можно только при выполнении условия квазиклассичности (7).

I.4. Формулировка кинетического уравнения

Из-за рассеяния электронов их функция распределения меняется во времени. Такие изменения можно описать следующим уравнением, называемым кинетическим:

$$\frac{df}{dt} = \text{St}[f], \quad (15)$$

где $\text{St}[f]$ – так называемый интеграл столкновений.

Левая часть может быть переписана в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (16)$$

Здесь согласно (11), (13) $\hbar d\mathbf{k}/dt = \mathbf{F}$ – внешней силе, а $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ – скорости волнового пакета.

Интеграл столкновений зависит от типа рассеяния. Важным случаем является *упругое* рассеяние, который далее и рассмотрим. Тогда правая часть кинетического уравнения является разностью прихода из других состояний $\mathbf{k}'$ и ухода в них из $\mathbf{k}$ при рассеянии. Вероятности таких процессов обозначим $W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ и $W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$ (слева – конечный, справа – начальный квазиимпульс в соответствии с обозначением W_{fi}). Поэтому

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\hbar} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} + \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}'} (W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}'} - W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}). \quad (17)$$

Для плавного потенциала рассеяния можно использовать уравнения движения волновых пакетов для нахождения $W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$ чисто классическими методами. Однако, в наиболее реалистичных ситуациях рассеивающий потенциал не плавный, а представляет собой набор резких пиков от случайно расположенных примесей. Это затрудняет квазиклассическое описание, но квантовая механика даёт простое решение.

При квазиклассическом описании мы стремимся оперировать только классическими понятиями, используя однако некоторые правила, связывающие их с квантовомеханическими величинами для достижения количественно строгих результатов. Одно

из таких правил, называемое в силу своей важности “золотым”, определяет чисто классическую величину – вероятность рассеяния – через квантово-механические величины:

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}|^2 \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}). \quad (18)$$

Здесь $T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$ – амплитуда рассеяния:

$$T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{p}} \frac{V_{\mathbf{k}'\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + i0} + \dots, \quad (19)$$

где $V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$ – матричный элемент рассеивающего потенциала $V(\mathbf{r})$, рассчитанный на невозмущённых функциях (в данном случае – плоских волнах).

Часто достаточно оставить только первое слагаемое – такой подход называется борновским приближением. Видно, что в борновском приближении справедлив принцип детального равновесия:

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (20)$$

В отсутствие внешних полей и пространственных градиентов решением кинетического уравнения при упругом рассеянии является любая функция энергии $f(\varepsilon_{\mathbf{k}})$. В равновесии устанавливается распределение Ферми-Дирака $f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}})$, но происходит это за счёт процессов, идущих с изменением энергии электронов – рассеяния на фононах или межэлектронного взаимодействия.

II. Кинетическое уравнение

Выведем кинетическое уравнение для функции распределения из квантовой механики. Для этого запишем гамильтониан системы. Рассеяние может быть описано вкладом в потенциальную энергию $V(\mathbf{r})$. С учётом внешних полей, чей вклад обозначим за $U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$, гамильтониан есть сумма

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + U + V. \quad (21)$$

Система считается однородной.

Состояние квантово-механической системы, в которой волновой вектор электрона не фиксирован, а может меняться, описывается матрицей плотности. Уравнение для неё имеет вид

$$i\hbar\dot{\rho} = [\mathcal{H}_0 + U + V, \rho]. \quad (22)$$

Будем считать внешние поля и рассеяние малыми возмущениями. Тогда удобно работать в базисе собственных состояний гамильтониана $\mathcal{H}_0$ – плоских волн. В этом базисе

$$i\hbar\dot{\rho}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = (\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}})\rho_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}_1} [(U + V)_{\mathbf{k}'\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} - \rho_{\mathbf{k}'\mathbf{k}_1}(U + V)_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}]. \quad (23)$$

Классической функции распределения $f_{\mathbf{k}}$ соответствуют диагональные компоненты матрицы плотности $\rho_{\mathbf{k}\mathbf{k}}$. Сейчас мы получим уравнение, которому удовлетворяет $f_{\mathbf{k}}$. Оно будет иметь вид кинетического уравнения Больцмана, но его столкновительная часть будет выведена из квантово-механического уравнения для матрицы плотности (23). По дороге мы сформулируем критерии применимости кинетического уравнения.

Напишем уравнение (23) для $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$:

$$i\hbar\dot{f}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}_1} [(U + V)_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} - \rho_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}(U + V)_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}]. \quad (24)$$

Матричный элемент потенциальной энергии внешних полей:

$$U_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = -\mathbf{F} \cdot \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = i\mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = -i\mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}. \quad (25)$$

Поэтому первое слагаемое в правой части:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}_1} (U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} - \rho_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}U_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}) &= i\mathbf{F} \cdot \sum_{\mathbf{k}_1} \left(\frac{\partial \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}}{\partial \mathbf{k}_1} \rho_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} + \rho_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} \frac{\partial \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}}{\partial \mathbf{k}_1} \right) \\ &= -i\mathbf{F} \cdot \sum_{\mathbf{k}_1} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} \left(\frac{\partial \rho_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}_1} + \frac{\partial \rho_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}}{\partial \mathbf{k}} \right) = -i\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \rho_{\mathbf{k}\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} = -i\mathbf{F} \cdot \frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Мы видим, что внешнее поле не перемешивает состояния с различными волновыми векторами.

А вот матричный элемент рассеяния из состояния $\mathbf{k}$ в состояние $\mathbf{k}'$ отличен от нуля – он равен фурье-компоненте $V_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}}$, определяемой как обычно:

$$V_{\mathbf{q}} = \int d\mathbf{r} V(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \quad V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (27)$$

То есть рассеяние приводит к появлению недиагональных по $\mathbf{k}$ компонент у матрицы плотности.

Выпишем уравнение для тех недиагональных элементов матрицы плотности, которые присутствуют в правой части уравнения для $\dot{f}_{\mathbf{k}}$:

$$i\hbar \dot{f}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}_1} (V_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} \rho_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}} - \rho_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1} V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}}) = \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} (\rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}} - \rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{q}}), \quad (28)$$

то есть для $\rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}}$:

$$i\hbar \dot{\rho}_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}} = (\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}) \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}'} V_{\mathbf{q}'} (\rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{q}',\mathbf{k}} - \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}+\mathbf{q}'}). \quad (29)$$

Уравнение для $\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{q}}$ получается заменой $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}$. Здесь мы пренебрегаем влиянием внешних полей на рассеяние. Производную по времени заменим на $\dot{\rho} = s\rho$, где малый параметр $s \ll \varepsilon_{\mathbf{k}}/\hbar$ описывает адиабатически медленное включение взаимодействия с рассеивателями. Параметр $s > 0$, что соответствует экспоненциальному e^{st} убыванию возмущения при $t \rightarrow -\infty$.

$$\rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}} = \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + i\hbar s} \sum_{\mathbf{q}'} V_{\mathbf{q}'} (\rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{q}',\mathbf{k}} - \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}+\mathbf{q}'}). \quad (30)$$

Подстановка в уравнение (24) даёт:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\hbar} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) f_{\mathbf{k}} = -\frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} V_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}'} \left[\frac{\rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{q}',\mathbf{k}} - \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}+\mathbf{q}'}}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + i\hbar s} - (\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}) \right]. \quad (31)$$

Рассмотрим произведение $V_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}'}$:

$$V_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}'} = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' V(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}') e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{q}'\cdot\mathbf{r}')}. \quad (32)$$

В каждом конкретном образце имеется свой беспорядок, описываемый своим потенциалом V . Нас будут интересовать свойства образца, усреднённые по реализациям этого

потенциала. Например, если он создан хаотически расположенными примесями, то мы усредним по положениям примесей. Такое среднее есть

$$\langle V_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}'} \rangle = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \mathcal{K}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) e^{-i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{q}' \cdot \mathbf{r}')}, \quad (33)$$

где введён коррелятор случайного потенциала

$$\mathcal{K}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \langle V(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}') \rangle. \quad (34)$$

Из-за однородности и изотропии системы в среднем он может зависеть только от модуля разности координат.

Переходя в (33) к интегрированию по разности и полусумме координат, получаем, что $\mathbf{q} + \mathbf{q}' = 0$:

$$\langle V_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}'} \rangle = \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{q}'} \langle |V_{\mathbf{q}}|^2 \rangle \equiv \delta_{\mathbf{q}, -\mathbf{q}'} \mathcal{K}(\mathbf{q}). \quad (35)$$

Здесь использована вещественность потенциала беспорядка: $V(-\mathbf{q}) = V^*(\mathbf{q})$ и введён фурье-образ коррелятора случайного потенциала $\mathcal{K}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{R} \mathcal{K}(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}}$. Но если $\mathbf{q} + \mathbf{q}' = 0$, то элементы матрицы плотности в правой части (31) сведутся к функции распределения:

$$-\frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{K}(\mathbf{q}) \left[\frac{f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + i\hbar s} - (\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}) \right]. \quad (36)$$

Делая во втором слагаемом вместо $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}$ эквивалентную замену $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} - \mathbf{q}$, приводим правую часть кинетического уравнения к виду

$$-\frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}} \mathcal{K}(\mathbf{q}) (f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + i\hbar s} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} + i\hbar s} \right). \quad (37)$$

Видно, что сумма в круглых скобках чисто мнимая. Переходя к пределу $s \rightarrow 0$ и используя правило

$$\text{Im} \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + i0} = -\pi \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}), \quad (38)$$

получаем кинетическое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\hbar} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) f_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{k}'} W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} (f_{\mathbf{k}} - f_{\mathbf{k}'}). \quad (39)$$

Здесь введён волновой вектор $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \mathbf{q}$ и вероятность рассеяния $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$ на случайном потенциале:

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{K}(|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}). \quad (40)$$

Мы действовали во втором порядке по V , что соответствует борновскому приближению теории возмущений. Ясно, что можно получить и более высокие по степени V вклады в интеграл столкновений. Они имеют малость $\sim \hbar/\varepsilon_k \tau \sim 1/kl$, где τ и $l = v_k \tau$ – соответственно время релаксации и длина свободного пробега. Формула, справедливая во всех порядках, имеет вид (18):

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} \langle |T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}|^2 \rangle \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}) \quad (41)$$

с амплитудой рассеяния (19). Например, в следующем за борновским приближении – в третьем порядке по потенциалу рассеяния – она имеет вид

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\langle |V_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}}|^2 \rangle + 2\text{Re} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\langle V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}-\mathbf{k}'} \rangle}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} + i0} \right) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}). \quad (42)$$

Если потенциал гауссов, то есть имеет только корреляторы чётных степеней, то вклада третьего порядка нет. Но если это не так, то этот вклад бывает важен, поскольку в нём есть асимметричная часть:

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^{(a)} = \frac{(2\pi)^2}{\hbar} \sum_{\mathbf{p}} \text{Im} \langle V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}'-\mathbf{p}} V_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} \rangle \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}}) = -W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(a)}. \quad (43)$$

Для этой части не выполнен принцип детального равновесия. Можно представлять асимметричное рассеяние как рассеяние на клине или треугольнике.

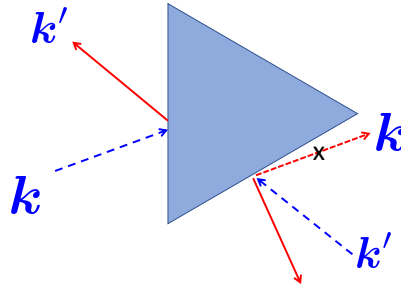


Рис. 1. Иллюстрация асимметричного рассеяния. При рассеянии на треугольнике вероятности процессов $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$ и $\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}$ не совпадают.

II.1. Рассеяние на примесях

Важный пример случайного потенциала – рассеяние на идентичных произвольно расположенных примесях. В этом случае

$$V(\mathbf{r}) = \sum_i V_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i), \quad V_{\mathbf{q}} = V_0(q) \sum_i e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_i}, \quad (44)$$

где $\mathbf{R}_i$ – координаты примесей, а $V_0(q)$ – фурье-компонента потенциала одной примеси, считающейся изотропной. Коррелятор случайного потенциала в этом случае есть

$$\mathcal{K}(q) = \langle |V_{\mathbf{q}}|^2 \rangle = |V_0(q)|^2 \left\langle \sum_{i,j} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_i} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_j} \right\rangle_{\mathbf{R}_{i,j}}. \quad (45)$$

При $i \neq j$ в сумме будут быстро осциллирующие вклады, которые уйдут при усреднении по расположению примесей. Поэтому ненулевой ответ будет только от слагаемых с $i = j$, то есть от матричных элементов рассеяния на одной и той же примеси. Он пропорционален количеству (концентрации) примесей N_i и описывает независимое рассеяние всеми примесями. В результате $\mathcal{K}(q) = N_i |V_0(q)|^2$ и

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} N_i |V_0(|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|)|^2 \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}). \quad (46)$$

Если рассчитать следующую поправку, она также будет отлична от нуля при рассеянии на одной и той же примеси. То есть потенциал примесей не является гауссовым. Её асимметричная часть:

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^{(a)} = \frac{(2\pi)^2}{\hbar} N_i \sum_{\mathbf{p}} \text{Im} \{ V_0(\mathbf{k} - \mathbf{k}') V_0(\mathbf{k}' - \mathbf{p}) V_0(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}}) = -W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(a)}. \quad (47)$$

II.2. Интеграл неупругих столкновений

Интеграл столкновений – правая часть кинетического уравнения – равен разности приходного и уходящего слагаемых. Заметим, что при упругом рассеянии он линеен по функции распределения.

В случае рассеяния не на примесях, а на фононах он имеет следующий вид:

$$\text{St}[f_{\mathbf{k}}] = - \sum_{\mathbf{k}'} [W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} (1 - f_{\mathbf{k}'}) - W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} f_{\mathbf{k}'} (1 - f_{\mathbf{k}})], \quad (48)$$

где вероятность рассеяния

$$W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{q}, \pm, \nu} |M(\mathbf{q}, \nu)|^2 \left(N_{\nu\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \delta_{\mathbf{q}, \pm(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}} \pm \hbar\Omega_{\nu\mathbf{q}}). \quad (49)$$

Здесь верхний знак описывает процесс с испусканием, а нижний – с поглощением фонона, $N_{\nu\mathbf{q}}$ и $\Omega_{\nu\mathbf{q}}$ – числа заполнения и частота фононов ветви ν с волновым вектором $\mathbf{q}$, а $M(\mathbf{q}, \nu)$ – матричный элемент электрон-фононного взаимодействия. Для деформационного взаимодействия с акустическими фононами $|M_{DA}|^2 \sim 1/q$, а для пьезо-оптического (фр  лиховского) взаимодействия $|M_{PO}|^2 \sim q$. В случае рассеяния 2D электронов на 3D фононах закон сохранения квазиимпульса выполняется только для компонент в плоскости: $\mathbf{q}_{\parallel} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$, а матричный элемент

$$M_{2D}(\mathbf{q}) = M_{3D}(\mathbf{q}) \int_{-\infty}^{\infty} dz \varphi^2(z) e^{iq_z z}, \quad (50)$$

$\varphi(z)$ – волновая функция размерного квантования.

В отличие от примесей, фононы могут обмениваться с электронами не только импульсами, но и энергией. Интеграл электрон-фононного рассеяния унуляется, если $N_{\nu\mathbf{q}}$ – распределение Бозе-Эйнштейна, а $f_{\mathbf{k}}$ – функция Ферми-Дирака с одинаковыми температурами:

$$N = \frac{1}{e^{\hbar\Omega/T} - 1}, \quad f_0 = \frac{1}{e^{(\varepsilon_k - \varepsilon_F)/T} + 1}, \quad (51)$$

так как при этом справедливы равенства

$$(N + 1) = e^{\hbar\Omega/T} N, \quad 1 - f_{\mathbf{k}} = e^{(\varepsilon_k - \varepsilon_F)/T} f_{\mathbf{k}}, \quad (52)$$

откуда следует, например для испускания, когда $\varepsilon_k = \varepsilon_{k'} + \hbar\Omega$:

$$(N + 1)f_{\mathbf{k}}(1 - f_{\mathbf{k}'}) = Nf_{\mathbf{k}'}(1 - f_{\mathbf{k}}). \quad (53)$$

Межэлектронное взаимодействие быстро устанавливает равновесное распределение $f_{\mathbf{k}} = f_0$ с некой температурой T_e . Однако электронная система сама по себе не может изменить свою полную энергию. Поэтому на более поздних временах за счёт взаимодействия с фононами происходит релаксация электронной температуры к температуре реш  тки T .

III. Времена релаксации

Вернёмся к упругому рассеянию (например, на примесях). В этом случае интеграл столкновений имеет вид (39)

$$\text{St}[f_{\mathbf{k}}] = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}'} \mathcal{K}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}) (f_{\mathbf{k}'} - f_{\mathbf{k}}). \quad (54)$$

В случае изотропного закона дисперсии ε_k величина волнового вектора при рассеянии сохраняется: $k' = k$, а меняется его направление. Рассмотрим однородный в пространстве 2D случай. Тогда $\mathbf{k} = (k, \varphi_{\mathbf{k}})$, и величина переданного при рассеянии системе примесей волнового вектора есть

$$q = |\mathbf{k}' - \mathbf{k}| = k \sqrt{2(1 - \cos \theta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'})} = 2k \left| \sin \left(\frac{\theta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}{2} \right) \right|, \quad \theta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \varphi_{\mathbf{k}'} - \varphi_{\mathbf{k}}. \quad (55)$$

Важным свойством интеграла столкновений является то, что он зависит от разности углов до и после рассеяния. Отсюда следует, что он не смешивает различные фурье-гармоники функции распределения. Действительно, разложим

$$f(k, \varphi_{\mathbf{k}}) = \bar{f}_k + \sum_{n \neq 0} f_n(k) e^{in\varphi_{\mathbf{k}}}. \quad (56)$$

Изотропная часть функции распределения $\bar{f}_k$ при упругом рассеянии не релаксирует:

$$\text{St}[\bar{f}_k] = 0. \quad (57)$$

Анизотропные поправки релаксируют за характерные времена:

$$\text{St}[f_n(k) e^{in\varphi_{\mathbf{k}}}] = -\frac{f_n(k) e^{in\varphi_{\mathbf{k}}}}{\tau_n}, \quad (58)$$

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}'} \mathcal{K}(k, \theta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}) \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) (1 - \cos n\theta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}) = \sum_{\mathbf{k}'} W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} (1 - \cos n\theta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}). \quad (59)$$

Если коррелятор рассеяния зависит от углов, то времена релаксации гармоник функции распределения различны и отличаются от улодного времени

$$\frac{1}{\tau_0} = \sum_{\mathbf{k}'} W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}. \quad (60)$$

В дальнейшем нам встретятся времена τ_0 , τ_1 и τ_2 , а время релаксации третьей гармоники τ_3 встречается в задачах спинтроники.

Отметим, что в трехмерном случае вместо фурье-гармоник разложение производится по полиномам Лежандра.

Для 2D случая с изотропным законом дисперсии в выражении для темпов релаксации можно провести интегрирование по k' :

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{2\pi}{\hbar} \langle \mathcal{K}(k, \theta) (1 - \cos n\theta) \rangle_\theta g_{2D}. \quad (61)$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по углу рассеяния, а g_{2D} – двумерная плотность состояний (на 1 спин):

$$g_{2D} = \sum_{k'} \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) = \int_0^\infty dk' \frac{k'}{2\pi} \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) = \frac{k}{2\pi \hbar v_k}. \quad (62)$$

При параболическом законе дисперсии $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / (2m)$ плотность состояний не зависит от энергии:

$$g_{2D} = \frac{m}{2\pi \hbar^2}. \quad (63)$$

Отсюда следует, что зависимость времён релаксации от энергии электрона обусловлена коррелятором потенциала рассеяния.

Вычислим времена релаксации для актуальных механизмов рассеяния двумерных электронов.

III.1. Точечные дефекты и экранированные примеси

Фурье-образ коррелятора потенциала рассеяния случайно расположенными примесями есть $\mathcal{K}(q) = N_i |V_0(q)|^2$, см. (46). Если радиус действия потенциала примеси d много меньше длины волны электрона, $kd \ll 1$, то он является короткодействующим:

$$V_0(\boldsymbol{\rho}) = V_0 \delta(\boldsymbol{\rho}) \quad (64)$$

(размерность V_0 есть энергия $\times L^2$). Фурье-образ не зависит от переданного импульса, а, значит, ни от энергии электрона, ни от угла рассеяния: $V_0(k, \theta) = V_0$. Поэтому времена релаксации всех гармоник равны уходящему:

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{2\pi}{\hbar} N_i |V_0|^2 g_{2D} \equiv \frac{1}{\tau}. \quad (65)$$

III.2. Кулоновские примеси

Если экранирование неэффективно, то потенциал примеси является кулоновским:

$$V_0(\boldsymbol{\rho}) = \frac{e^2}{\epsilon\rho}, \quad (66)$$

где ϵ – низкочастотная диэлектрическая проницаемость. Фурье образ в 2D случае:

$$V_0(\mathbf{q}) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon q} = \frac{\pi e^2}{\epsilon k \sin(\theta/2)}, \quad |V_0(k, \theta)|^2 = \left(\frac{\pi e^2}{\epsilon}\right)^2 \frac{\hbar^2}{m\varepsilon_k(1 - \cos \theta)}. \quad (67)$$

Отсюда следует, что уходящее время τ_0 расходится, а времена релаксации гармоник линейно зависят от энергии:

$$\frac{1}{\tau_1(\varepsilon_k)} = \frac{2\pi}{\hbar} N_i \left(\frac{\pi e^2 \hbar}{\epsilon}\right)^2 \frac{g_{2D}}{m\varepsilon_k}, \quad \frac{1}{\tau_2(\varepsilon_k)} = \frac{1}{\tau_1(\varepsilon_k)} \left\langle \frac{1 - \cos 2\theta}{1 - \cos \theta} \right\rangle_\theta = \frac{2}{\tau_1(\varepsilon_k)}, \quad \frac{1}{\tau_3(\varepsilon_k)} = \frac{3}{\tau_1(\varepsilon_k)}. \quad (68)$$

III.3. Системы с линейным спектром

В графене и на поверхности 3D топологических изоляторов носителями заряда являются дираковские фермионы. Они описываются 2D гамильтонианом Вейля:

$$\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) = \hbar v_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} = \hbar v_0 \begin{pmatrix} 0 & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & 0 \end{pmatrix} = \hbar v_0 k \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi_k} \\ e^{i\varphi_k} & 0 \end{pmatrix}, \quad (69)$$

где v_0 – параметр материала. Матрицы Паули могут обозначать истинно спиновые операторы как в топологических изоляторах или псевдоспиновые – как в графене. Энергетический спектр в зонах с положительными и отрицательными энергиями изотропен и линейен: $\varepsilon_c = -\varepsilon_v = \varepsilon_k = \hbar v_0 k$, а волновые функции двухкомпонентны. В зоне проводимости:

$$\Psi_{c\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}} \chi_{c\mathbf{k}}, \quad \mathcal{H}_0(\mathbf{k}) \chi_{c\mathbf{k}} = \varepsilon_k \chi_{c\mathbf{k}}, \quad \chi_{c\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi_k} \end{pmatrix}. \quad (70)$$

В результате матричный элемент рассеяния отличается от фурье-образа рассеивающего потенциала. Например, для зоны проводимости:

$$\langle \mathbf{k}' | V_0(\boldsymbol{\rho}) | \mathbf{k} \rangle = V_0(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \langle \chi_{c\mathbf{k}'} | \chi_{c\mathbf{k}} \rangle = V_0(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \frac{1 + e^{-i\theta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}}}{2}, \quad (71)$$

где $\theta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}'} - \varphi_{\mathbf{k}}$. Дополнительный множитель, равный перекрытию блоховских амплитуд, которые существенно зависят от волнового вектора, приводит к важному явлению: запрету рассеяния назад. Действительно, при $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ направления связаны соотношением $\varphi_{\mathbf{k}'} = \pi + \varphi_{\mathbf{k}}$, в результате $\theta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \pi$, и $\langle -\mathbf{k} | V_0(\boldsymbol{\rho}) | \mathbf{k} \rangle = 0$ для любого потенциала рассеяния.

Времена релаксации отличаются от случая параболической дисперсии. Во-первых, плотность состояний линейно зависит от энергии:

$$g(\varepsilon_k) = \frac{k}{2\pi\hbar v_0} = \frac{\varepsilon_k}{2\pi\hbar^2 v_0^2}. \quad (72)$$

Во-вторых, дополнительный множитель $\langle \chi_{c\mathbf{k}'} | \chi_{c\mathbf{k}} \rangle$ также модифицирует зависимость времён релаксации от энергии. Квадрат матричного элемента:

$$|\langle \mathbf{k}' | V_0(\boldsymbol{\rho}) | \mathbf{k} \rangle|^2 = |V_0(\mathbf{k}' - \mathbf{k})|^2 \frac{1 + \cos \theta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}}{2}. \quad (73)$$

Отсюда получаем, что даже для короткодействующего рассеяния, когда V_0 – постоянная, времена релаксации обратно пропорциональны энергии электрона:

$$\frac{1}{\tau_0(\varepsilon_k)} = \frac{2\pi}{\hbar} N_i |V_0|^2 g(\varepsilon_k) \times \frac{1}{2} \propto \varepsilon_k, \quad (74)$$

$$\frac{1}{\tau_1(\varepsilon_k)} = \frac{1}{\tau_0(\varepsilon_k)} \langle (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) \rangle_\theta = \frac{1}{2\tau_0(\varepsilon_k)}, \quad (75)$$

$$\frac{1}{\tau_{n \geq 2}(\varepsilon_k)} = \frac{1}{\tau_0(\varepsilon_k)} \langle (1 + \cos \theta)(1 - \cos n\theta) \rangle_\theta = \frac{1}{\tau_0(\varepsilon_k)}. \quad (76)$$

То есть 1-я гармоника функции распределения релаксирует на короткодействующих примесях в два раза дольше, чем все остальные гармоники.

Рассеяние на кулоновских примесях: уходящее время расходится, а времена релаксации гармоник прямо пропорциональны энергии электрона:

$$\frac{1}{\tau_n(\varepsilon_k)} = \frac{2\pi}{\hbar} N_i \left(\frac{\pi e^2}{\epsilon} \right)^2 \frac{g(\varepsilon_k)}{k^2} \left\langle \frac{1 - \cos n\theta}{\sin^2(\theta/2)} \frac{1 + \cos \theta}{2} \right\rangle_\theta \propto \frac{1}{\varepsilon_k}. \quad (77)$$

Вычисление даёт:

$$\frac{1}{\tau_1(\varepsilon_k)} = \frac{N_i}{\hbar \varepsilon_k} \left(\frac{\pi e^2}{\epsilon} \right)^2, \quad \tau_2 = \tau_1/3, \quad \tau_3 = \tau_1/5. \quad (78)$$

IV. Проводимость электронного газа

Рассчитаем проводимость 2D системы с помощью кинетического уравнения. Будем считать электрическое поле $\mathbf{E}$ слабым, однородным и постоянным во времени. Доминирующим будем считать упругое рассеяние на примесях. Кинетическое уравнение имеет в этих условиях следующий вид:

$$e\mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = \text{St}_{\text{imp}}[f_{\mathbf{p}}]. \quad (79)$$

Здесь введён импульс электронов $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$.

Уравнение решается итерациями по $\mathbf{E}$. В отсутствие поля решением является равновесное распределение Ферми-Дирака $f_0(\varepsilon_p)$. Действительно, рассеяние на примесях не меняет изотропного распределения: $\text{St}_{\text{imp}}[f_0] = 0$. Для нахождения поправки $f_{\mathbf{p}}^{(1)}$, линейной по полю, подставляем в левую часть (в полевое слагаемое) f_0 :

$$e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_p f'_0(\varepsilon_p) = \text{St}_{\text{imp}}[f_{\mathbf{p}}^{(1)}]. \quad (80)$$

Левая часть содержит только первую фурье-гармонику угла $\varphi_{\mathbf{p}}$, поэтому и поправка $f_{\mathbf{p}}^{(1)}$ имеет такую же угловую зависимость. Это означает, что

$$\text{St}_{\text{imp}}[f_{\mathbf{p}}^{(1)}] = -\frac{f_{\mathbf{p}}^{(1)}}{\tau_1}. \quad (81)$$

Отсюда получаем:

$$f_{\mathbf{p}}^{(1)} = e\tau_1(\varepsilon_p)\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_p[-f'_0(\varepsilon_p)]. \quad (82)$$

Плотность электрического тока:

$$\mathbf{j} = e \sum_{\nu \mathbf{p}} \mathbf{v}_p e\tau_1(\varepsilon_p)\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_p[-f'_0(\varepsilon_p)] = \mathbf{E} e^2 \sum_{\nu \mathbf{p}} \frac{v_p^2}{2} \tau_1(\varepsilon_p)[-f'_0(\varepsilon_p)] \equiv \sigma \mathbf{E}. \quad (83)$$

Здесь использована изотропия двумерной системы. При низкой температуре $T \ll \varepsilon_F$ электронный газ вырожден, и

$$-f'_0(\varepsilon_p) \approx \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_F). \quad (84)$$

Отсюда получаем соотношение Эйнштейна:

$$\sigma = e^2 g_{\text{tot}}(\varepsilon_F) D(\varepsilon_F), \quad (85)$$

где введён коэффициент диффузии $D(\varepsilon_p) = v_p^2 \tau_1 / 2$, а полная плотность состояний $g_{\text{tot}}(\varepsilon_p) = \sum_{\nu} g(\varepsilon_p)$.

Проводимость также можно связать с концентрацией:

$$N = \sum_{\nu \mathbf{p}} f_0(\varepsilon_p). \quad (86)$$

Из того, что f_0 зависит от разности $\varepsilon_p - \varepsilon_F$ следует, что $-f'_0(\varepsilon_p) = \partial f_0 / \partial \varepsilon_F$. Поэтому:

$$\sum_{\nu \mathbf{p}} [-f'_0(\varepsilon_p)] = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_F}, \quad (87)$$

и проводимость

$$\sigma = e^2 \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_F} \frac{v_F^2 \tau_{\text{tr}}}{2}. \quad (88)$$

Здесь мы ввели транспортное время – время релаксации 1-й гармоники функции распределения при энергии Ферми: $\tau_{\text{tr}} = \tau_1(\varepsilon_F)$.

При параболической дисперсии $\varepsilon_F = m v_F^2 / 2$ концентрация $N = g_{2D} \varepsilon_F$ линейна по ε_F . Поэтому

$$\sigma = \frac{N e^2 \tau_{\text{tr}}}{m}. \quad (89)$$

При линейной дисперсии $\varepsilon_F = v_0 p_F$

$$N = \sum_{\nu} \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon_p) d\varepsilon_p \propto \varepsilon_F^2, \quad (90)$$

и проводимость

$$\sigma = \frac{N e^2 \tau_{\text{tr}} v_0^2}{\varepsilon_F}. \quad (91)$$

Видно, что в обоих случаях проводимость зависит от энергии Ферми как $\sigma \propto \varepsilon_F \tau_{\text{tr}}(\varepsilon_F)$.

При произвольной температуре верна формула Друдэ (88), где в случае параболической дисперсии транспортное время есть

$$\tau_{\text{tr}} = \frac{\langle \varepsilon_p \tau_1(\varepsilon_p) \rangle}{\langle \varepsilon_p \rangle}, \quad \langle \Phi(\varepsilon_p) \rangle = \int_0^{\infty} d\varepsilon_p \Phi(\varepsilon_p) [-f'_0(\varepsilon_p)]. \quad (92)$$

Видно, что проводимость зависит от времени рассеяния τ_{tr} нечётным образом. Это согласуется с требованиями, налагаемыми инверсией времени: электрический ток – диссипативная величина, а вызывающее его электрическое поле – нет. Поэтому проводимость σ , которая их связывает, должна содержать нечётное количество диссипативных величин, таких как времена релаксации.

Видно, что проводимость определяется временем релаксации 1-й гармоники функции распределения. Влияют ли на проводимость межчастичные столкновения? Они сохраняют полный импульс электронов. В системах с параболической дисперсией это автоматически означает, что они не влияют и на полную скорость электронов, то есть на ток. В случае же линейной дисперсии сохранение импульса не означает сохранения скорости, запрет нарушается, и межчастичные столкновения вносят вклад в проводимость. Это важно при не слишком низких но и не слишком высоких температурах.

IV.1. Проводимость на конечной частоте: вывод из кин. уравнения

Рассмотрим переменное электрическое поле

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + c.c. \quad (93)$$

Ясно, что такое поле вызывает электрический ток, также осциллирующий на частоте ω . Поскольку проводимость – функция линейного отклика, оба слагаемых в $\mathbf{E}(t)$ будут вызывать независимые токи. Поэтому мы рассмотрим только первое слагаемое и будем искать поправку к равновесному распределению в виде

$$f_{\mathbf{p}}(t) = f_{\mathbf{p}}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (94)$$

Тогда кинетическое уравнение примет вид

$$-i\omega f_{\mathbf{p}}(\omega) + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} f'_0(\varepsilon_p) = \text{St}_{\text{imp}}[f_{\mathbf{p}}(\omega)] = -\frac{f_{\mathbf{p}}(\omega)}{\tau_1}. \quad (95)$$

Это уравнение сводится к случаю нулевой частоты, если произвести замену

$$\frac{1}{\tau_1} \rightarrow \frac{1}{\tau_1} - i\omega \equiv \frac{1}{\tau_{1\omega}}, \quad \tau_{1\omega} = \frac{\tau_1}{1 - i\omega\tau_1}. \quad (96)$$

Отсюда сразу следует, что

$$\sigma(\omega) = e^2 \sum_{\nu\mathbf{p}} \frac{v_p^2}{2} \frac{\tau_1(\varepsilon_p)}{1 - i\omega\tau_1(\varepsilon_p)} [-f'_0(\varepsilon_p)]. \quad (97)$$

В случае вырожденного электронного газа

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma(0)}{1 - i\omega\tau_{\text{tr}}}. \quad (98)$$

Энергия, поступающая в единицу времени в электронную систему,

$$Q = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle_t = 2|\mathbf{E}_0|^2 \text{Re}[\sigma(\omega)], \quad (99)$$

где мы использовали свойство $\sigma(-\omega) = \sigma^*(\omega)$. Отсюда следует, что поглощаемая мощность линейна по концентрации электронов N и имеет частотную зависимость

$$Q \propto \frac{\tau_{\text{tr}}}{1 + (\omega\tau_{\text{tr}})^2}. \quad (100)$$

На высоких частотах $Q \propto 1/(\omega^2\tau_{\text{tr}})$, то есть поглощение пропорционально вероятности рассеяния импульса электронов. Это значит, что если нет рассеяния, то нет и поглощения энергии.

IV.2. Проводимость на конечной частоте: вывод из кв.-мех. рассмотрения не прямых оптических переходов

Рассмотрим ту же задачу при высоких частотах $\omega \sim \varepsilon_F/\hbar \gg 1/\tau_{\text{tr}}$. При этом применим подход поглощения света свободными носителями. Мы исследуем, как стыкуются эти два метода – кинетическое уравнение и оптика.

Поглощение на свободных носителях является внутризонным: начальное и конечное состояния лежат в зоне проводимости. Но, поскольку оптические переходы прямые, при взаимодействии электрона со светом невозможно удовлетворить законам сохранения энергии и импульса. Поэтому переход идёт в два этапа, и поглощение тем больше, чем сильнее рассеяние. Виртуальное (промежуточное) состояние совпадает либо с начальным, либо с конечным, так как энергия фотона много меньше энергетических расстояний до других зон.

Взаимодействие свободных носителей с фотонами описывается возмущением

$$\mathcal{H}_{e\text{-}phot}(\mathbf{p}) = -\frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} = -\frac{e}{i\omega}\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}, \quad (101)$$

где использовано $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}/c = (i\omega/c)\mathbf{A}$.

Второй порядок теории возмущений:

$$M_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \frac{V_{\mathbf{p}'\mathbf{k}}U_{\mathbf{k}\mathbf{p}}}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_v} + \frac{U_{\mathbf{p}'\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}\mathbf{p}}}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_v}. \quad (102)$$

В нашем случае $V_{\mathbf{p}'\mathbf{k}} = V(\mathbf{p}' - \mathbf{k})$ – матричный элемент рассеяния, $U_{\mathbf{p}'\mathbf{k}} = \mathcal{H}_{e-photon}(\mathbf{p}')\delta_{\mathbf{p}'\mathbf{k}}$ – матричный элемент взаимодействия со светом. Энергия системы в исходном состоянии $\mathcal{E}_i = \varepsilon_p + \hbar\omega$. В первом слагаемом, когда сначала поглощается фотон, в промежуточном (виртуальном) состоянии $\mathcal{E}_v = \varepsilon_p$, а во втором слагаемом, когда сначала происходит рассеяние, энергия промежуточного состояния системы $\mathcal{E}_v = \varepsilon_{p'} + \hbar\omega$. Поэтому

$$M_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = -\frac{e}{i\omega} V(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \mathbf{E}_0 \cdot \left(\frac{\mathbf{v}_{\mathbf{p}'}}{\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}} + \frac{\mathbf{v}_{\mathbf{p}}}{\hbar\omega} \right). \quad (103)$$

Вероятность поглощения фотона:

$$W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2 \delta(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_p - \hbar\omega) [f_0(\varepsilon_p) - f_0(\varepsilon_{p'})]. \quad (104)$$

С учётом закона сохранения энергии знаменатели в $M_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$ отличаются знаком. Поэтому

$$W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \frac{2\pi}{\hbar} |V(\mathbf{p}' - \mathbf{p})|^2 \left(\frac{e}{\omega} \right)^2 |\mathbf{E}_0|^2 \frac{(v_{\mathbf{p},x} - v_{\mathbf{p}',x})^2}{(\hbar\omega)^2} \delta(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_p - \hbar\omega) [f_0(\varepsilon_p) - f_0(\varepsilon_p + \hbar\omega)]. \quad (105)$$

Углы отсчитываются от направления $\mathbf{E}_0$.

Поглощаемая мощность

$$Q = \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \nu} \hbar\omega W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}. \quad (106)$$

Подстановка выражения для вероятности и усреднения по беспорядку даёт:

$$Q = |\mathbf{E}_0|^2 \left(\frac{e}{\omega} \right)^2 \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \nu} \frac{f_0(\varepsilon_p) - f_0(\varepsilon_p + \hbar\omega)}{\hbar\omega} (v_{\mathbf{p},x} - v_{\mathbf{p}',x})^2 \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{K}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_p - \hbar\omega). \quad (107)$$

Рассмотрим случай энергий фотона много меньших средней энергии электронов: $\hbar\omega \ll \varepsilon_p$. Тогда $(v_{\mathbf{p},x} - v_{\mathbf{p}',x})^2 \approx v_p^2 (\cos^2 \varphi_{\mathbf{p}} + \cos^2 \varphi_{\mathbf{p}'} - 2 \cos \varphi_{\mathbf{p}} \cos \varphi_{\mathbf{p}'}),$

$$Q = |\mathbf{E}_0|^2 \left(\frac{e}{\omega} \right)^2 \sum_{\mathbf{p}, \nu} v_p^2 [-f'_0(\varepsilon_p)] \sum_{\mathbf{p}'} \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{K}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) (1 - \cos \theta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}) \delta(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_p). \quad (108)$$

сумма по $\mathbf{p}'$ даст обратное время рассеяния $1/\tau_1$:

$$Q = |\mathbf{E}_0|^2 \left(\frac{e}{\omega} \right)^2 \sum_{\mathbf{p}, \nu} \frac{v_p^2}{\tau_1(\varepsilon_p)} [-f'_0(\varepsilon_p)]. \quad (109)$$

Сравнивая с выражением для проводимости (97), окончательно получаем

$$Q = 2|\mathbf{E}_0|^2 \text{Re}[\sigma(\omega)], \quad (110)$$

где последнее равенство написано с учётом того, что $\omega \gg 1/\tau_1$.

Мы показали, что кинетическое уравнение при высоких частотах даёт тот же ответ, что и квантово-механическое рассмотрение не прямых оптических переходов.

V. Циклотронный резонанс. Классический эффект Холла

Рассмотрим электронный газ, помещённый во внешнее магнитное поле $\mathbf{B} \parallel z$. Его проводимость существенно зависит от поля, причём по-разному в разных диапазонах. Сначала рассмотрим классический диапазон, когда магнитное поле воздействует на электроны силой Лоренца. Она входит в кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial t} + e\mathbf{E}_{\parallel} \cdot \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{e}{c}(\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = \text{St}_{\text{imp}}[f_{\mathbf{p}}]. \quad (111)$$

V.1. Изотропная дисперсия

Рассмотрим сначала электроны с изотропной дисперсией. Слагаемое с магнитным полем имеет в этом случае вид:

$$(\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = -B_z \frac{v}{p} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\mathbf{p}}}, \quad (112)$$

то есть оно не изменяет номер фурье-гармоники. Поэтому электрическое и магнитное поле индуцируют также только первые фурье-гармоники, и уравнение для линейной по $\mathbf{E}$ поправки f_1 имеет вид

$$\frac{f_1}{\tau_{1\omega}} + e\mathbf{E}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} f'_0 - \frac{eB_z v}{c} \frac{\partial f_1}{p \partial \varphi_{\mathbf{p}}} = 0. \quad (113)$$

С учётом того, что $\mathbf{E}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} = v_p(e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} E_- + e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} E_+)/2$, решение имеет вид:

$$f_1 = f_+ e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} + f_- e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}}, \quad (114)$$

где $f_{\pm}$ удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{1}{\tau_{1\omega}} \mp i\omega_c \right) f_{\pm} = e(-f'_0) \frac{E_{\mp}}{2} v_p. \quad (115)$$

Здесь предполагается, что $eB_z > 0$, и введена циклотронная частота

$$\omega_c = \frac{|eB_z| v_p}{c} \equiv \frac{|eB_z|}{m_c c}, \quad m_c(\varepsilon_p) = \frac{p}{v_p}. \quad (116)$$

Плотность тока:

$$j_x + ij_y = e \sum_{\nu, \mathbf{p}} (v_x + iv_y) f_- e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}} = \frac{E_+}{2} e^2 \sum_{\nu, \mathbf{p}} v_p^2 (-f'_0) \frac{\tau_1}{1 - i(\omega - \omega_c)\tau_1}. \quad (117)$$

Для вырожденной статистики получаем:

$$j_x + ij_y = (E_x + iE_y) \frac{\sigma_0}{1 - i(\omega - \omega_c)\tau_{\text{tr}}} \equiv \sigma(\omega, \omega_c)(E_x + iE_y), \quad (118)$$

где σ_0 – проводимость при $\omega = \omega_c = 0$.

Мы получили, что при σ^- поляризации ($E_+ \neq 0$) ток резонансно усиливается при условии $\omega = \omega_c$. При противоположной σ^+ поляризации имеем

$$j_x - ij_y = (E_x - iE_y) \frac{\sigma_0}{1 - i(\omega + \omega_c)\tau_{\text{tr}}} = \sigma(\omega, -\omega_c)(E_x - iE_y), \quad (119)$$

и резонанса нет (излучение распространяется в направлении $+z$). При инверсии направления магнитного поля активной становится противоположная круговая поляризация.

Поглощённая мощность:

$$Q = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle_t = \frac{1}{2} \langle j_+(E^*)_+ + j_-(E^*)_- \rangle_t = \\ |\mathbf{E}_0|^2 \text{Re} \{ [\sigma(\omega, \omega_c) + \sigma(\omega, -\omega_c)] + P_{\text{circ}} [\sigma(\omega, -\omega_c) - \sigma(\omega, \omega_c)] \}. \quad (120)$$

Видно, что при круговой поляризации будет резонанс поглощения при одном из направлений поля. При линейной поляризации ($P_{\text{circ}} = 0$) резонанс есть при любом направлении поля, но величина поглощённой мощности в 2 раза меньше, чем при активной круговой поляризации.

При параболической дисперсии резонанс имеет место при $\omega = |eB_z|/(mc)$. При непараболической изотропной дисперсии положение резонанса зависит от концентрации из-за зависимости $m_c(\varepsilon_F)$. Например, в графене дисперсия линейна, $\varepsilon_p = v_0 p$, и эффективная масса $m_c(\varepsilon_F) = p_F/v_0$. А поскольку концентрация есть $N = p_F^2/(\pi\hbar^2)$, циклотронная частота

$$\omega_c = \frac{|eB_z|}{\hbar c} \frac{v_0}{\sqrt{\pi N}}, \quad B_{\text{CR}} \propto \sqrt{N}, \quad N_{\text{CR}} \propto B^2. \quad (121)$$

При невырожденной статистике положение резонанса меняется с температурой.

V.2. Циклотронный резонанс в системах с анизотропной массой

Рассмотрим двумерную систему с анизотропной массой. В главных осях имеются два значения m_x, m_y :

$$\varepsilon_p = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y}, \quad v_{x,y} = \frac{p_{x,y}}{m_{x,y}}. \quad (122)$$

Концентрация связана с энергией Ферми соотношением

$$N = \frac{\sqrt{m_x m_y}}{\pi \hbar^2} \varepsilon_F. \quad (123)$$

Интеграл столкновений кинетического уравнения, вообще говоря, не сводится к τ -приближению. Но если анизотропия невелика, то так можно сделать:

$$-i\omega f_1 + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_p f'_0 + \frac{eB_z}{c} \left(v_y \frac{\partial}{\partial p_x} - v_x \frac{\partial}{\partial p_y} \right) f_1 = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (124)$$

Вычисление, аналогичное анизотропному случаю, даёт:

$$j_x - \frac{eB_z}{m_x c} \tau_\omega j_y = \frac{Ne^2 \tau_\omega}{m_x} E_x, \quad (125)$$

$$j_y + \frac{eB_z}{m_y c} \tau_\omega j_x = \frac{Ne^2 \tau_\omega}{m_y} E_y. \quad (126)$$

Решая эти уравнения, легко найти проводимость. Положение резонанса находится из нулей определителя:

$$\frac{1}{\tau_\omega^2} + \frac{(eB_z/c)^2}{m_x m_y} = 0, \quad \omega = \pm \frac{|eB_z|}{\sqrt{m_x m_y} c} - \frac{i}{\tau}. \quad (127)$$

Циклотронная частота определяется средним геометрическим масс. Этот ответ можно получить и рассматривая движение электрона в магнитном поле, то есть игнорируя внешнее электрическое поле и рассеяние.

Вывод в 3D случае абсолютно аналогичен. Если, как в Si и Ge, поверхности постоянной энергии – эллипсоиды вращения, характеризующиеся массами: $\varepsilon_{\mathbf{p}} = p_z^2/(2m_{\parallel}) + p_{\perp}^2/(2m_{\perp})$, то циклотронная частота есть

$$\omega_c = \frac{|eB|}{c} \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{m_{\perp}^2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_{\parallel} m_{\perp}}}, \quad (128)$$

где θ – угол между направлением магнитного поля и осью z . Ориентируя поле вдоль различных направлений, например, вдоль осей [001] и [111] в Si, из положения резонанса определяют массы.

V.3. Циклотронная масса при произвольном законе дисперсии

Движение по классической циклотронной орбите описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}. \quad (129)$$

Умножив это уравнение скалярно на $\mathbf{v}_p = \partial \varepsilon_p / \partial \mathbf{p}$, получим

$$\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} = \frac{d\varepsilon_p}{dt} = 0. \quad (130)$$

То есть носитель движется в импульсном пространстве по траектории $\varepsilon_p = \text{const}$.

Если эта траектория замкнута, то период обращения по ней

$$T_c = \oint dt = \oint \frac{dl_p}{eB_z v_p / c} = \frac{c}{eB_z} \oint \frac{dl_p}{v_p}, \quad (131)$$

где интегрирование идёт вдоль траектории. С другой стороны, рассмотрим площадь S , ограниченную траекторией:

$$S = \int dp_x dp_y = \oint dl_p \int dp_\perp = \int d\varepsilon_p \oint \frac{dl_p}{v_p}. \quad (132)$$

Здесь $p_\perp$ – величина компоненты импульса, перпендикулярного траектории. Сравнивая эти выражения, получаем:

$$T_c = \frac{c}{eB_z} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}, \quad \omega_c \equiv \frac{2\pi}{T_c} = \frac{eB_z}{m_c c}, \quad (133)$$

то есть циклотронная масса есть

$$m_c = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}. \quad (134)$$

В случае изотропной дисперсии $S = \pi p^2$, и $m_c = p dp / d\varepsilon = p/v$.

V.4. Квантовый циклотронный резонанс

Выше мы рассмотрели циклотронное движение классически. Такой подход верен, когда поля не слишком сильные, при $\hbar\omega_c \ll \varepsilon_F$. В сильных полях и при низких температурах электроны занимают уровни Ландау с номерами $n = 0, 1, 2, \dots$, и нужно их рассматривать исходя из квантовой теории.

Взаимодействие со светом описывается с высокой точностью дипольным приближением, а у дипольного момента есть матричные элементы только между соседними уровнями Ландау. Поэтому циклотронный резонанс в этой ситуации происходит с поглощением фотона при переходе электрона $n \rightarrow n + 1$, причём $E_n < \varepsilon_F < E_{n+1}$. Закон сохранения энергии требует:

$$E_{n+1} - E_n = \hbar\omega. \quad (135)$$

Если спектр изотропный параболический, то отличий от классического условия нет: условие резонанса есть $\omega = \omega_c = |eB|/mc$. С ростом поля на всех уровнях растёт плотность состояний (она равна $\nu = 1/(2\pi l_B^2) = eB/(2\pi\hbar c)$ на 1 спин, то есть линейно растёт с полем). Номер верхнего заполненного уровня есть $n_{\max} = N/\nu \propto B$. Поэтому его энергия с полем не меняется:

$$E_{n_{\max}} \approx \hbar\omega_c n_{\max} = \varepsilon_F. \quad (136)$$

А поскольку расстояние между уровнями Ландау растёт, уровни с большими номерами “выходят” из-под уровня Ферми.

Условие циклотронного резонанса сильно видоизменяется при непараболическом спектре. Рассмотрим для определённости графен с линейной дисперсией. Эффективный гамильтониан

$$\mathcal{H} = v_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} = v_0 \begin{pmatrix} 0 & p_- \\ p_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{n>0} = \begin{pmatrix} A\phi_{n-1} \\ C\phi_n \end{pmatrix}, \quad E_n = \pm \frac{\hbar v_0}{l_B} \sqrt{2n}. \quad (137)$$

Условие резонанса:

$$\omega = \frac{v_0 \sqrt{2}}{l_B} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}). \quad (138)$$

При больших энергиях $E_n \approx \varepsilon_F \gg \hbar\omega$ имеем:

$$\omega \approx \frac{v_0}{\sqrt{2n} l_B} = \frac{eB}{c} \frac{v_0^2}{E_n}, \quad (139)$$

то есть циклотронная масса $m_c = \varepsilon_F/v_0^2$ в соответствии с классическим рассмотрением.

Энергия верхнего заполненного уровня не меняется с полем, как и при параболической дисперсии:

$$E_{n_{\max}} = \frac{\hbar v_0}{l_B} \sqrt{2n_{\max}} = \frac{\hbar v_0}{l_B} \sqrt{4\pi l_B^2 N} = \varepsilon_F \quad (140)$$

(здесь опять для простоты считалось, что нет ни спинowego, ни долинного вырождения). Уровни Ландау тоже выходят из-под уровня Ферми, но медленнее, чем при параболической дисперсии.

Отметим, что при более сложном энергетическом спектре, например, когда дисперсия $\varepsilon(p)$ насыщается (имеет верхнюю границу), происходит скачкообразное понижение уровня Ферми с ростом магнитного поля.

V.5. Классический эффект Холла

Из полученных формул при нулевой частоте имеем ($eB_z > 0$):

$$j_x + ij_y = \frac{e^2 v_F^2 \tau_{tr}/2}{1 + i\omega_c \tau_{tr}} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_F} (E_x + iE_y), \quad \text{т.е.} \quad \sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau_{tr})^2}, \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \omega_c \tau_{tr} \sigma_{xx}. \quad (141)$$

Видно, что диагональная проводимость имеет, как и в нулевом поле, нечётное количество диссипативных постоянных. В σ_{xy} , напротив, чётное их количество. Это различие объясняется тем, что в ней есть ещё множитель B_z , который нечётен по отношению к операции инверсии времени.

Вводя тензор сопротивлений $\mathbf{E} = \hat{\rho} \mathbf{j}$ с компонентами

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad \rho_{xy} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad (142)$$

получаем

$$\rho_{xx} = \frac{1}{\sigma_0}, \quad \rho_{yx} = \frac{\omega_c \tau_{tr}}{\sigma_0} = \frac{B_z}{Nec}. \quad (143)$$

То есть классического магнитосопротивления в вырожденном газе нет, а холловское сопротивление линейно зависит от поля.

При невырожденной статистике магнитосопротивление обусловлено зависимостью $\tau_1(\varepsilon_p)$:

$$\sigma_{xx} = \frac{Ne^2}{m} \left\langle \frac{\tau_1}{1 + (\omega_c \tau_1)^2} \right\rangle, \quad \sigma_{xy} = \frac{Ne^2}{m} \omega_c \left\langle \frac{\tau_1^2}{1 + (\omega_c \tau_1)^2} \right\rangle. \quad (144)$$

Здесь было удобно ввести

$$\langle \Phi \rangle = \frac{\sum_{\nu, \mathbf{p}} \Phi(\varepsilon_p) \varepsilon_p (-f'_0)}{\sum_{\nu, \mathbf{p}} \varepsilon_p (-f'_0)}, \quad \tau_{tr} = \langle \tau_1 \rangle. \quad (145)$$

При малых $\omega_c \tau_{tr}$ отсюда получается:

$$\rho_{xx} \approx \frac{1}{\sigma_0} \left(1 + \omega_c^2 \frac{\langle \tau_1^3 \rangle \langle \tau_1 \rangle - \langle \tau_1^2 \rangle^2}{\langle \tau_1 \rangle^2} \right), \quad \rho_{yx} = \frac{B_z}{Nec} \frac{\langle \tau_1^2 \rangle}{\langle \tau_1 \rangle^2}. \quad (146)$$

VI. Явления, обусловленные градиентом температуры

VI.1. Кинетические коэффициенты и соотношения Онзагера

Градиент температуры приводит к диффузии частиц из более нагретых областей в менее нагретые. При этом возникает поток тепла $\mathbf{q}$, а если частицы заряжены – ещё и электрический ток. Поэтому при наличии как электрического поля $\mathbf{E}$, так и градиента температуры (предполагающихся небольшими), имеем:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \beta \nabla T, \quad (147a)$$

$$\mathbf{q} = \gamma \mathbf{E} - \zeta \nabla T. \quad (147b)$$

Здесь среда считается изотропной или кубической. Кинетические коэффициенты σ и ζ – соответственно проводимость и теплопроводность, β – термоэлектрический коэффициент, а γ характеризует поток тепла, возникающий в электрическом поле.

Между коэффициентами β и γ существует линейная связь, следующая из симметрии к обращению времени – принцип симметрии кинетических коэффициентов Онзагера. Общая формулировка этого принципа такова. Пусть к системе приложены обобщённые силы X_i , вызывающие протекание обобщённых токов J_i , являющихся термодинамически-сопряжёнными к ним, то есть входящими в скорость изменения энтропии системы следующим образом:

$$\dot{S} = - \sum_i J_i X_i. \quad (148)$$

Соответственно, мощность, вкачиваемая в систему, есть $Q = T\dot{S}$. Обобщённые токи связаны с силами линейными соотношениями с помощью кинетических коэффициентов:

$$J_i = - \sum_k a_{ik} X_k. \quad (149)$$

Принцип Онзагера гласит: тензор кинетических коэффициентов симметричен

$$a_{ik} = a_{ki}. \quad (150)$$

Применим этот принцип к термоэлектрическим явлениям (147). Для этого учтём, что в рассматриваемом случае энергия поступает в систему в силу двух причин: из-за

теплового потока $\mathbf{q}$ и за счёт работы электрического поля – джоулевого тепла. Поэтому скорость изменения энтропии Q/T запишется в виде

$$\dot{S} = \int dV \frac{-\operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}}{T} = \int dV \left[\mathbf{q} \cdot \nabla(1/T) + \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}}{T} \right]. \quad (151)$$

Здесь было произведено интегрирование по частям.

Для применения принципа Онзагера отождествим с обобщёнными токами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{j}$. Тогда обобщёнными силами будут $-\nabla(1/T) = (\nabla T)/T^2$ и $-\mathbf{E}/T$. Отсюда получаем:

$$-\beta T^2 = \gamma T, \quad \text{т.е.} \quad \gamma = -\beta T. \quad (152)$$

Следовательно, достаточно рассчитать только один из двух термоэлектрических коэффициентов. В следующем разделе будет произведён расчёт β .

VI.2. Термоэлектрический коэффициент

При наличии градиента температуры, образующегося на расстояниях больше длины свободного пробега носителей, в каждой точке $\mathbf{r}$ устанавливается квазиравновесное распределение, характеризуемое функцией $f_0(T(\mathbf{r}))$. В линейном по ∇T режиме имеем:

$$\nabla f_0(T(\mathbf{r})) = \nabla T \frac{\partial f_0}{\partial T}. \quad (153)$$

Тогда кинетическое уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \nabla T \frac{\partial f_0}{\partial T} = \operatorname{St}[f_{\mathbf{p}}]. \quad (154)$$

Поскольку $f_0 = f_0(\frac{\varepsilon_p - \varepsilon_F}{T})$,

$$\frac{\partial f_0}{\partial T} = -\frac{\varepsilon_p - \varepsilon_F}{T} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_p}, \quad (155)$$

и это кинетическое уравнение отличается от такового в электрическом поле лишь заменой

$$e\mathbf{E} \rightarrow -\frac{\varepsilon_p - \varepsilon_F}{T} \nabla T. \quad (156)$$

Поэтому из соотношения

$$\sigma = e^2 \int_0^\infty d\varepsilon_p g_{\text{tot}}(\varepsilon_p) \frac{v_p^2 \tau_1(\varepsilon_p)}{d} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_p} \right) \equiv \int_0^\infty d\varepsilon_p \sigma(\varepsilon_p) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_p} \right), \quad (157)$$

где $d = 3, 2, 1$ – размерность пространства, получаем выражение для β :

$$\beta = -\frac{1}{e} \int_0^\infty d\varepsilon_p \sigma(\varepsilon_p) \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_F}{T} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_p} \right). \quad (158)$$

При вырожденной статистике, когда $T \ll \varepsilon_F$, вклад в β обусловлен носителями вблизи поверхности Ферми, поскольку $-f'_0(\varepsilon_p) \approx \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_F)$. Из наличия множителя $(\varepsilon_p - \varepsilon_F)$ следует, что квазичастицы, имеющие энергию выше и ниже энергии Ферми, вносят противоположные по знаку вклады в термоэлектрический ток. В терминологии ферми-жидкости это означает, что есть вклады в ток от электронов и дырок, и они противоположны по знаку. Отличие от нуля термоэлектрического тока обусловлено различием свойств электронов и дырок, то есть зависимостью от энергии множителя $\sigma(\varepsilon_p)$.

Для вычисления интегралов типа (158) при вырожденной статистике рассмотрим интеграл вида

$$\int_0^\infty d\varepsilon [-f'_0(\varepsilon)] \varphi(\varepsilon) \quad (159)$$

с произвольной функцией $\varphi(\varepsilon)$, не имеющей особенностей при $\varepsilon = \varepsilon_F$. Поскольку $f'_0(\varepsilon)$ имеет острый пик вблизи $\varepsilon = \varepsilon_F$, разложим $\varphi(\varepsilon)$ в ряд Тэйлора вблизи этой точки:

$$\varphi(\varepsilon) \approx \varphi(\varepsilon_F) + (\varepsilon - \varepsilon_F) \varphi'(\varepsilon_F) + \frac{(\varepsilon - \varepsilon_F)^2}{2} \varphi''(\varepsilon_F). \quad (160)$$

Переходя к новой переменной $\epsilon = \varepsilon - \varepsilon_F$, получаем

$$\int_0^\infty d\varepsilon [-f'_0(\varepsilon)] \varphi(\varepsilon) \approx \int_{-\varepsilon_F}^\infty d\epsilon [-f'_0(\epsilon)] \left[\varphi(\varepsilon_F) + \epsilon \varphi'(\varepsilon_F) + \frac{\epsilon^2}{2} \varphi''(\varepsilon_F) \right]. \quad (161)$$

Нижний предел может быть заменён на $-\infty$. Тогда из чётности функции $-f'_0(\epsilon) = \frac{1}{4T \cosh^2(\epsilon/2T)}$ следует, что вклад с $\varphi'(\varepsilon_F)$ исчезает, а два других вклада определяются интегралами

$$\int_{-\infty}^\infty d\epsilon [-f'_0(\epsilon)] = 1, \quad \int_{-\infty}^\infty d\epsilon [-f'_0(\epsilon)] \epsilon^2 = T^2 \frac{\pi^2}{3}, \quad (162)$$

так что

$$\int_0^\infty d\varepsilon [-f'_0(\varepsilon)] \varphi(\varepsilon) \approx \varphi(\varepsilon_F) + T^2 \frac{\pi^2}{6} \varphi''(\varepsilon_F). \quad (163)$$

Применим этот результат к выражению (158). В нём $\varphi = -\frac{1}{eT}(\varepsilon - \varepsilon_F)\sigma(\varepsilon)$, поэтому $\varphi''(\varepsilon_F) = -\frac{2\sigma'(\varepsilon_F)}{eT}$, и термоэлектрический коэффициент имеет вид (формула Мотта)

$$\beta = -\frac{1}{e}T\frac{\pi^2}{3}\sigma'(\varepsilon_F). \quad (164)$$

Из формулы Мотта видно, что электроны и дырки существенно сокращают вклады друг друга, в результате чего $|e\beta| \sim \frac{T}{\varepsilon_F}\sigma \ll \sigma$. Эта малость компенсируется в условиях резкой зависимости проводимости от энергии Ферми, например, в квантующем магнитном поле.

VI.3. Электронная теплопроводность. Закон Видемана-Франца

Рассчитаем поток тепла, обусловленный градиентом температуры. Изменение тепла в малой области связано с изменением энергии электронов $\mathcal{E}$ и их количества N :

$$dW = d\mathcal{E} - \mu dN. \quad (165)$$

Поэтому поток тепла есть разность потоков – энергии и числа частиц, умноженного на $\mu = \varepsilon_F$:

$$\mathbf{q} = \sum_{\nu, \mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}}(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_F)f_{\mathbf{p}}. \quad (166)$$

Здесь $f_{\mathbf{p}}$ – линейная по ∇T часть функции распределения (подстановка $f_{\mathbf{p}} = f_0$ даёт, как и должно быть, нулевой поток тепла из-за чётности по отношению к замене $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$). Из кинетического уравнения (154) получаем

$$f_{\mathbf{p}} = -\tau_1 \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \nabla T \frac{\partial f_0}{\partial T}, \quad (167)$$

откуда следует

$$\mathbf{q} = -\sum_{\nu, \mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \nabla T)(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_F)\tau_1 \frac{\partial f_0}{\partial T}. \quad (168)$$

Усреднение по направлениям вектора $\mathbf{p}$ даёт

$$\langle \mathbf{v}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \nabla T) \rangle = \nabla T \frac{v_{\mathbf{p}}^2}{d}. \quad (169)$$

В результате для теплопроводности ζ , определяемой как $\mathbf{q} = -\zeta \nabla T$, см. (147), получаем:

$$\zeta = \sum_{\nu, \mathbf{p}} \frac{v_{\mathbf{p}}^2 \tau_1}{d} (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_F) \frac{\partial f_0}{\partial T} = \int_0^\infty d\varepsilon_p g_{\text{tot}} \frac{v_p^2 \tau_1}{d} (\varepsilon_p - \varepsilon_F) \frac{\partial f_0}{\partial T} = \frac{1}{e^2} \int_0^\infty d\varepsilon_p \sigma(\varepsilon_p) (\varepsilon_p - \varepsilon_F) \frac{\partial f_0}{\partial T}. \quad (170)$$

Интеграл отличается от интеграла для термоэлектрического коэффициента лишь дополнительным множителем $(\varepsilon_p - \varepsilon_F)$. Подставляя производную от f_0 по температуре, получаем

$$\zeta = \frac{1}{e^2} \int_0^\infty d\varepsilon_p \sigma(\varepsilon_p) \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_F)^2}{T} [-f'_0(\varepsilon_p)] = \frac{1}{e^2 T} \int_{-\infty}^\infty d\epsilon \sigma(\epsilon + \varepsilon_F) \epsilon^2 [-f'_0(\epsilon)], \quad (171)$$

где мы опять перешли к интегрированию по энергии квазичастиц $\epsilon \equiv \varepsilon_p - \varepsilon_F$. Интеграл с производной фермиевской функции вычисляется с помощью (163):

$$\zeta = \frac{\sigma}{e^2} T \frac{\pi^2}{3}. \quad (172)$$

Здесь $\sigma = \sigma(\varepsilon_F)$ – проводимость.

Мы получили, что при заданной температуре теплопроводность пропорциональна проводимости для любого металла – закон Видемана-Франца. Отношение $L = \zeta/(\sigma T)$

$$L = \frac{\zeta}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3e^2} \quad (173)$$

называется числом Лоренца.

VI.4. Эффекты Зеебека, Пельтье и Томсона

В эксперименте чаще удобно фиксировать не электрическое поле внутри металла, а электрический ток. Тогда, решая систему уравнений (147) относительно $\mathbf{E}$, получим

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} + S \nabla T, \quad (174a)$$

$$\mathbf{q} = \Pi \mathbf{j} - \kappa \nabla T. \quad (174b)$$

Здесь $\rho = 1/\sigma$ – сопротивление, $S = -\beta/\sigma$ – коэффициент Зеебека, $\Pi = ST$ – коэффициент Пельтье, а $\kappa = \zeta + T\beta^2/\sigma \approx \zeta$ – теплопроводность. Второе слагаемое имеет малость $T\beta^2/(\sigma\zeta) \sim (T/\varepsilon_F)^2 \ll 1$, поэтому различать κ и ζ в металлах не имеет смысла.

Из уравнений (174) следует, что при приложении к образцу разности температур ΔT в нём возникнет электрическое поле $\mathbf{E} = S \nabla T$ и, соответственно, термо-э.д.с. $U_{\text{Th}} = -S \Delta T$ – эффект Зеебека. Коэффициент Зеебека имеет вид

$$S = -\frac{\beta}{\sigma} = \frac{1}{e} \frac{\pi^2 T}{3} \frac{d\sigma/d\varepsilon_F}{\sigma}. \quad (175)$$

– пропорционален абсолютной температуре и логарифмической производной проводимости по энергии Ферми.

Если через контакт двух проводников пропускается электрический ток, то при одинаковых температурах проводников в каждом из них возникает поток тепла $\mathbf{q} = \Pi \mathbf{j}$. Коэффициенты Пельтье $\Pi_{1,2} = TS_{1,2}$ у проводников различны, поэтому на контакте выделяется тепло

$$q = (\Pi_1 - \Pi_2)j_n \quad (176)$$

– эффект Пельтье. Знак эффекта, то есть будет на контакте поглощаться или выделяться тепло, зависит от направления тока.

Наконец, рассмотрим неравномерно нагретый проводник, через который пропускается электрический ток. Выделяемая мощность есть

$$Q = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \text{div} \mathbf{q} = \rho j^2 + \text{div}(\kappa \nabla T) + \left(S - \frac{d\Pi}{dT} \right) \mathbf{j} \cdot \nabla T. \quad (177)$$

Первое слагаемое – джоулево тепло, второе обусловлено теплопроводностью, а третье – линейное по току – связано с совместным действием тока и градиента температуры. Выделение этого добавочного тепла, меняющего знак в зависимости от направления тока, называется эффектом Томсона. Выражение для него имеет вид $Q_T = -\mu_T \mathbf{j} \cdot \nabla T$, где μ_T – коэффициент Томсона:

$$\mu_T = \frac{d\Pi}{dT} - S = T \frac{dS}{dT}. \quad (178)$$

Видно, что все три эффекта описываются одним коэффициентом.

VI.5. Термомагнитные явления: эффекты Ледюка-Риги, Эттингсгаузена и Нернста-Эттингсгаузена

При наличии внешнего магнитного поля $\mathbf{B}$ кинетические коэффициенты начинают зависеть от B , если параметр $\omega_c \tau_{tr}$ становится заметным – мы это видели на примере проводимости. Кроме того, появляются новые эффекты с коэффициентами, зависящими от $\mathbf{B}$ нечётным образом. В слабом поле в первом порядке по $\mathbf{B}$ возникают вклады в электрическое поле и поток тепла, пропорциональные $\mathbf{B} \times \mathbf{j}$ и $\mathbf{B} \times \nabla T$. Векторное произведение возникло потому, что $\mathbf{B}$ – псевдовектор (не меняется при отражениях).

В изотропном случае других линейных по $\mathbf{B}$ вкладов нет, и мы получаем вместо (174):

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} + R \mathbf{B} \times \mathbf{j} + S \nabla T + N \mathbf{B} \times \nabla T, \quad (179a)$$

$$\mathbf{q} = \Pi \mathbf{j} + A \mathbf{B} \times \mathbf{j} - \kappa \nabla T + L \mathbf{B} \times \nabla T. \quad (179b)$$

Из принципа Онзагера следует, что $A = NT$.

Новые вклады описывают целый ряд эффектов. Ясно, что R – постоянная Холла. Аналогично, вклады, описываемые постоянными N , A и L , описывают появление поперечных компонент (развороту) поля или потока тепла на угол $\sim \omega_c \tau_{tr}$. Возникновение электрического поля поперёк градиента температуры – эффект Нернста-Эттингсгаузена. Появление градиента температуры поперёк электрического тока (в отсутствие потока тепла):

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{A}{\kappa} B_z j_x \quad (180)$$

– эффект Эттингсгаузена. Эти эффекты обратны друг другу. Наконец, поперечный градиент температуры при наличии продольного

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{L}{\kappa} B_z \frac{\partial T}{\partial x} \quad (181)$$

– эффект Ледюка-Риги.

VII. Квадратичные по электрическому полю вклады в функцию распределения

Мы получили, что в электрическом поле электронное распределение приобретает линейную по полю поправку, которая определяет электрический ток. А какое устанавливается распределение электронов при учёте нелинейных по полю вкладов?

VII.1. Разогрев электронов

Типичной является следующая иерархия времён:

$$\tau_{\text{tr}} \ll \tau_{ee} \ll \tau_{e-ph}. \quad (182)$$

То есть при выводе из равновесия в первую очередь распределение изотропизуется, а затем вступают в игру межчастичные процессы. После вывода системы из равновесия они за характерное время τ_{ee} устанавливают распределение

$$f_{\mathbf{p}} = \left[\exp \left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu_e}{T_e} \right) + 1 \right]^{-1}. \quad (183)$$

Действительно, такое распределение унуляет интеграл межчастичных столкновений. Однако параметры T_e и μ_e межчастичным взаимодействием не устанавливаются. Они определяются законами сохранения энергии и числа частиц. Внешнее электрическое поле не меняет числа частиц в зоне проводимости (пока мы не рассмотрели межзонные переходы). Тогда связь между химическим потенциалом и температурой даётся постоянством концентрации. При параболической дисперсии:

$$N = \sum_{\nu, \mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} = \frac{m}{\pi \hbar^2} T_e \ln (e^{\mu_e/T_e} + 1) = g_{\text{tot}} \mu_e + O(e^{-\mu_e/T_e}). \quad (184)$$

Отсюда следует, что $\mu_e = \varepsilon_F$, то есть с ростом температуры энергия Ферми не меняется до тех пор, пока газ остаётся вырожденным.

В единицу времени электронный газ в электрическом поле получает энергию $Q = 2|\mathbf{E}_0|^2 \text{Re}[\sigma(\omega)]$. Эта энергия расходуется на увеличение температуры. Баланс энергии устанавливается за счёт её передачи фононам. Энергия, переданная в единицу времени от электронов фононной системе, есть

$$Q = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} [f_{\mathbf{k}}(1 - f_{\mathbf{k}'})\hbar\Omega_{\mathbf{q}}W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^+(\mathbf{q}) - f_{\mathbf{k}'}(1 - f_{\mathbf{k}})\hbar\Omega_{\mathbf{q}}W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^-(\mathbf{q})]. \quad (185)$$

Здесь $W^\pm$ – вероятности испускания и поглощения фонона, суммирование по фононным ветвям подразумевается. Поскольку функция распределения – равновесная функция с температурой $T_e > T$, считая изменение температуры малым имеем

$$f_{\mathbf{k}} \approx f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}}) + (T_e - T) \frac{\partial f_0}{\partial T}. \quad (186)$$

Линеаризуя интеграл столкновений с фононами по поправке $f_{\mathbf{k}} - f_0(\varepsilon_{\mathbf{k}}) \propto (T_e - T)$, получаем баланс энергии в следующем виде:

$$2|\mathbf{E}_0|^2 \text{Re}[\sigma(\omega)] = N \frac{T_e - T}{\tau_T}. \quad (187)$$

Здесь введено время релаксации электронной температуры. В случае вырожденной статистики отсюда получаем

$$T_e - T = 2|\mathbf{E}_0|^2 \tau_T \frac{e^2 \tau_{\text{tr}} / m}{1 + (\omega \tau_{\text{tr}})^2}. \quad (188)$$

Для линейной дисперсии роль массы играет $m = \varepsilon_F / v_0^2$.

Иногда баланс энергии пишут, вводя среднюю энергию одного электрона $\bar{\varepsilon}$ и время релаксации энергии:

$$Q = N \frac{\bar{\varepsilon}(T_e) - \bar{\varepsilon}(T)}{\tau_\varepsilon}. \quad (189)$$

При бoльцмановской статистике $\bar{\varepsilon} = T$, и разницы нет: $\tau_\varepsilon = \tau_T$. В вырожденном газе

$$\bar{\varepsilon}(T) = \frac{\varepsilon_F}{2} + \frac{\pi^2}{6} \frac{T^2}{\varepsilon_F}, \quad (190)$$

откуда получаем

$$\frac{1}{\tau_T} = \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{\varepsilon_F} \frac{1}{\tau_\varepsilon}. \quad (191)$$

При $T \rightarrow 0$ время релаксации температуры τ_T остаётся конечным, а τ_ε стремится к нулю.

VII.2. Выстраивание электронных импульсов

Электрическое поле во втором порядке приводит и к анизотропным поправкам к функции распределения электронов. Для их нахождения подставим в полевое слагаемое кинетического уравнения

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial t} + e \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = \text{St}_{\text{imp}}[f_{\mathbf{p}}] \quad (192)$$

линейную по $\mathbf{E}$ поправку $f_1 = e\tau_{1\omega}(-f'_0)\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_p$. Квадратичные по E поправки делятся на два типа: осциллирующие на удвоенной частоте $e^{\pm 2i\omega t}$ и независящие от времени. Осциллирующие поправки могут дать сигнал второй оптической гармоники. Мы изучим постоянный во времени вклад. Он описывается произведениями типа $E_\alpha E_\beta^*$ (далее мы опускаем индекс “0”, обозначающий комплексную амплитуду поля):

$$-e^2 E_\alpha E_\beta^* \frac{\partial}{\partial p_\beta} (\tau_{1\omega} f'_0 v_\alpha) + c.c. = \text{St}_{\text{imp}}[\delta f_p]. \quad (193)$$

Производная вычисляется так:

$$\frac{\partial}{\partial p_\beta} (\tau_{1\omega} f'_0 v_\alpha) = (\tau_{1\omega} f'_0)' v_\alpha v_\beta + \tau_{1\omega} f'_0 \frac{\partial v_\alpha}{\partial p_\beta}. \quad (194)$$

Рассмотрим систему с изотропной параболической дисперсией $\varepsilon_p = p^2/(2m)$. Тогда полевое слагаемое есть

$$-e^2 E_\alpha E_\beta^* \left\{ (\tau_{1\omega} f'_0)' \left(v_\alpha v_\beta - \frac{v_p^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{m} [\varepsilon_p (\tau_{1\omega} f'_0)' + \tau_{1\omega} f'_0] \right\} + c.c. \quad (195)$$

Второе слагаемое $-\frac{e^2}{m}|E|^2(\varepsilon_p \tau_{1\omega} f'_0)'$ изотропно и релаксирует за время τ_{ee} , которое много длиннее, чем τ_{tr} . Первое – анизотропное – слагаемое содержит вторые фурье-гармоники $e^{\pm 2i\varphi_p}$. Поэтому генерируется поправка $\delta f \equiv f_2$. Она релаксирует за время τ_2 . Билинейную комбинацию амплитуд электрического поля удобно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$E_\alpha E_\beta^* = \frac{E_\alpha E_\beta^* + E_\alpha^* E_\beta}{2} + \frac{E_\alpha E_\beta^* - E_\alpha^* E_\beta}{2}. \quad (196)$$

Здесь второе слагаемое отлично от нуля только при эллиптической поляризации электрического поля. После суммирования по $\alpha, \beta = x, y$ оно уходит:

$$-e^2 (\tau_{1\omega} f'_0)' \left[\left(v_x^2 - \frac{v_p^2}{2} \right) |E_x|^2 + \left(v_y^2 - \frac{v_p^2}{2} \right) |E_y|^2 + 2v_x v_y \frac{E_x E_y^* + E_y^* E_x}{2} \right] + c.c. = -\frac{f_2}{\tau_2}. \quad (197)$$

Вводя угловую координату импульса φ_p , получаем:

$$f_2 = 2\tau_2 \frac{e^2}{m} \left(\frac{\tau_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} f'_0 \right)' \varepsilon_p \left[\cos 2\varphi_p \frac{|E_x|^2 - |E_y|^2}{2} + \sin 2\varphi_p \frac{E_x E_y^* + E_y^* E_x}{2} \right]. \quad (198)$$

Вводя угол α между направлением линейной поляризации и осью x , окончательно получим:

$$f_2 = 2|\mathbf{E}|^2 \tau_2 \frac{e^2}{m} \left(\frac{\tau_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} f'_0 \right)' \varepsilon_p \cos(2\varphi_p - 2\alpha). \quad (199)$$

Видно, что поправка описывает увеличение количества электронов с импульсами по направлению линейной поляризации и уменьшение в перпендикулярном направлении, см. Рис. 2. Такое явление называется *выстраиванием импульсов*.

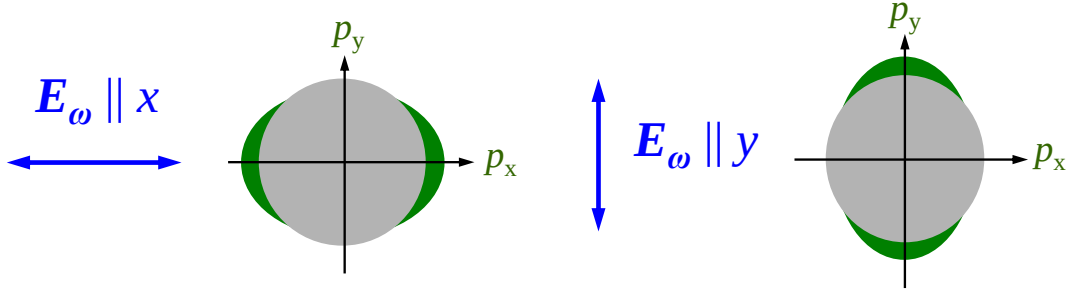


Рис. 2. Выстраивание импульсов под воздействием переменного линейно-поляризованного электрического поля. Распределение носителей, показанное зелёным, “вытягивается” вдоль направления линейной поляризации.

При линейной дисперсии $\varepsilon_p = v_0 p$ скорость электрона с импульсом $\mathbf{p}$ есть

$$\mathbf{v}_p = v_0 \frac{\mathbf{p}}{p} = v_0 \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}. \quad (200)$$

Видно, что в этом случае $\partial v_x / \partial p_y \neq 0$, что несколько усложняет вычисление степени выстраивания импульсов в графене. Но качественно всё происходит так же, как и при параболической дисперсии.

VIII. Фотогальванический эффект

Во втором порядке по полю может возникать постоянный электрический ток. Это явление называется фотогальваническим эффектом. Мы уже близки к тому, чтобы получить фотогальванический ток (фототок) микроскопически, но сначала проведём симметричный анализ, чтобы установить, какие вклады вообще можно было бы ожидать.

VIII.1. Симметричный анализ

Постоянная во времени плотность электрического тока $\mathbf{j}$, квадратичная по переменному электрическому полю, связана с билинейными комбинациями амплитуд тензором 3-го ранга:

$$j_\alpha = \chi_{\alpha\beta\gamma} E_\beta E_\gamma^*. \quad (201)$$

Из этого соотношения видно, что фотогальванические эффекты имеют место только в системах без центра пространственной инверсии. Действительно, если инверсия есть, то при её действии левая часть – компонента вектора – меняет знак, а правая часть – произведение двух компонент вектора – сохраняется. Это значит, что в центросимметричных системах $\hat{\chi} = 0$. Если центра инверсии нет, то фототок разрешён.

Рассмотрим для примера двумерные системы симметрии C_{3v} . К ним относятся квантовые ямы, выращенные вдоль кристаллографического направления $[111]$, гетероструктуры на основе GaN, дихалькогениды переходных металлов (MoS_2 , WS_2 , MoSe_2 , WSe_2) и 3D топологические изоляторы, на поверхности которых есть 2D носители с линейной дисперсией. В такой симметрии фототок разрешён в электрическом поле, лежащем в плоскости. В точечной группе C_{3v} есть три представления: одномерные A_1 , A_2 и двумерное E . По ним преобразуются следующие компоненты плотности тока и произведений амплитуд поля:

$$A_1 : |\mathbf{E}|^2 = E_x^2 + E_y^2 \quad A_2 : E_x E_y^* - E_x^* E_y, \quad E : (j_x, j_y), (|E_x|^2 - |E_y|^2, -E_x E_y^* - E_x^* E_y). \quad (202)$$

Здесь одна из трёх плоскостей отражения выбрана как (zx) . Видно, что фототок $j_{x,y}$ возникает только при линейной поляризации. Обе его компоненты преобразуются по одному и тому же представлению, поэтому у тензора $\hat{\chi}$ есть одна линейно-независимая

компонента, описывающая фототок в такой геометрии (при $E_z = 0$):

$$j_x = \chi(E_x^2 - E_y^2), \quad j_y = -2\chi E_x E_y. \quad (203)$$

Если α – угол между направлением линейной поляризации и осью x , то отсюда получается

$$j_x = \chi|\mathbf{E}|^2 \cos 2\alpha, \quad j_y = -\chi|\mathbf{E}|^2 \sin 2\alpha. \quad (204)$$

Эти равенства можно переписать в едином виде, наглядно отражающем тригональность системы:

$$j_x + ij_y = \chi(E_x - iE_y)^2 = \chi|\mathbf{E}|^2 e^{-2i\alpha}. \quad (205)$$

Действительно, левая и правая части отличаются проекцией момента на ось z на тройку, то есть эквивалентны при операциях симметрии группы C_{3v} .

VIII.2. Расчёт из кинетического уравнения

Микроскопически величину χ можно получить из кинетического уравнения:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial t} + e\mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = \text{St}[f_{\mathbf{p}}]. \quad (206)$$

Казалось бы, нужно найти из него квадратичную по полю поправку $f \propto |\mathbf{E}|^2$, а затем рассчитать плотность тока:

$$\mathbf{j} = e \sum_{\nu, \mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}). \quad (207)$$

Но необходимо где-то учесть отсутствие центра инверсии (C_{3v} симметрию системы), иначе фототок будет нулём. Действительно, на прошлой лекции мы получили квадратичные по полю поправки, но они были чётными по импульсам, и при суммировании дали бы ноль. Единственное место, где может содержаться асимметрия, – это интеграл столкновений.

При выводе интеграла столкновений мы обсуждали, что в борновском приближении вероятность рассеяния удовлетворяет принципу детального равновесия: $W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$. Это не позволяет получить фототок.

Если же выйти за рамки борновского приближения, то появляется асимметричная часть $W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a = -W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^a$ [см. (47)]:

$$W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a = \frac{(2\pi)^2}{\hbar} N_i \sum_{\mathbf{p}''} \text{Im}\{V_0(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')V_0(\mathbf{p}'' - \mathbf{p})V_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\} \delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'})\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}''}). \quad (208)$$

Она отражает нецентросимметричность системы и приведёт к фототоку. Самый простой вклад получается так: на прошлой лекции мы нашли стационарную квадратичную по полю анизотропную поправку к функции распределения f_2 , описывающую выстраивание импульсов. При этом в интеграле столкновений учитывалась только симметричная часть, на которой и вычислялись времена релаксации. Учтём теперь асимметричную часть:

$$\sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a [f_2(\mathbf{p}) + f_2(\mathbf{p}')] + \frac{\delta f_{\mathbf{p}}}{\tau_1} = 0. \quad (209)$$

Здесь $\delta f_{\mathbf{p}}$ – поправка, которая приведёт к стационарному току.

Первое слагаемое в квадратных скобках вклада не даст, поскольку умножается на $\sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a$, а такая сумма равна нулю. Это следует из Оптической теоремы, которая утверждает, что полное сечение рассеяния есть, с точностью до множителя, амплитуда рассеяния вперёд:

$$\sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = -\frac{2}{\hbar} T_{\mathbf{p}\mathbf{p}}, \quad (210)$$

где T – матрица рассеяния. Далее, из инверсии времени следует, что $T_{\mathbf{p}\mathbf{p}} = T_{-\mathbf{p}-\mathbf{p}}$, откуда

$$\sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}',-\mathbf{p}} \equiv \sum_{\mathbf{p}'} W_{-\mathbf{p}',-\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad (211)$$

где последнее равенство также получено из инверсии времени. Применяя это соотношение к асимметричной части $W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a = -W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^a$, получаем, что такая сумма равна нулю.

Тогда $\delta f_{\mathbf{p}}$ определяется только приходным слагаемым, и можно увидеть её нечётность по $\mathbf{p}$:

$$\delta f_{\mathbf{p}} = (-\tau_1) \sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a f_2(\mathbf{p}'), \quad \delta f_{-\mathbf{p}} = (-\tau_1) \sum_{\mathbf{p}'} W_{-\mathbf{p}'-\mathbf{p}}^a f_2(\mathbf{p}') = (-\tau_1) \sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^a f_2(\mathbf{p}') = -\delta f_{\mathbf{p}}. \quad (212)$$

Здесь предпоследнее равенство получено из инверсии времени, а также использована чётность функции $f_2(\mathbf{p})$.

Подставляя $\delta f_{\mathbf{p}}$ в выражение для плотности тока, получим:

$$\mathbf{j} = e \sum_{\mathbf{p},\nu} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} (-\tau_1) \sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a f_2(\mathbf{p}'). \quad (213)$$

Подставляя f_2 в виде (199), получаем

$$\mathbf{j} = e \sum_{\mathbf{p},\nu} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} (-\tau_1) \sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a 2|\mathbf{E}|^2 \tau_2 \frac{e^2}{m} \left(\frac{\tau_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} f'_0 \right)' \varepsilon_{\mathbf{p}} \cos(2\varphi_{\mathbf{p}'} - 2\alpha). \quad (214)$$

Для компоненты j_x :

$$j_x = -2|\mathbf{E}|^2 \frac{e^3}{m} \sum_{\mathbf{p}, \nu} v_p \tau_1 \tau_2 \varepsilon_p \left(\frac{\tau_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} f'_0 \right)' \cos \varphi_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a \cos(2\varphi_{\mathbf{p}'} - 2\alpha). \quad (215)$$

Поскольку отражение в плоскости (zx) сохраняет $W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a$, а $\sin 2\varphi_{\mathbf{p}'}$ меняет знак, поляризационная зависимость получается правильной: $j_x = \chi |\mathbf{E}|^2 \cos 2\alpha$, где вклад в χ имеет вид

$$\chi = -2 \frac{e^3}{m} \sum_{\mathbf{p}, \nu} v_p \tau_2 \varepsilon_p \left(\frac{\tau_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} f'_0 \right)' \Xi, \quad \Xi = \tau_1 \sum_{\mathbf{p}'} \langle W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a \cos 2\varphi_{\mathbf{p}'} \cos \varphi_{\mathbf{p}} \rangle_{\varphi_{\mathbf{p}}}. \quad (216)$$

Безразмерный параметр Ξ описывает степень асимметрии рассеяния. Интегрируя по ε_p по частям и считая статистику вырожденной, получаем:

$$\chi = -\frac{2e^3 \tau_{\text{tr}}}{\pi \hbar^2 (1 + \omega^2 \tau_{\text{tr}}^2)} \frac{d(\Xi \varepsilon_F v_F \tau_2)}{d\varepsilon_F}. \quad (217)$$

Здесь Ξ и τ_2 берутся при $\varepsilon_p = \varepsilon_F$.

Мы получили частотную зависимость фототока: он квадратично спадает с частотой, причём основная зависимость при $\omega \sim 1/\tau_{\text{tr}}$. При временах релаксации порядка пикосекунд соответствующие частоты лежат в терагерцовом диапазоне.

Количество “диссипативных” сомножителей в χ – нечётное (τ_{tr} , Ξ и τ_2), как и должно быть в плотности электрического тока.

Причина возникновения фототока – это асимметричное рассеяние. Его можно проиллюстрировать рассеянием на треугольнике, см. Рис. 1.

VIII.3. Циркулярный фототок

Есть и второй вклад в фототок. Он получается если сначала учесть асимметрию рассеяния, а уже потом сделать вторую итерацию по электрическому полю. То есть ищется линейная по полю поправка $\tilde{f}_1$:

$$-i\omega \tilde{f}_1(\mathbf{p}) = \text{St}_{\text{imp}}[\tilde{f}_1(\mathbf{p})] - \sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a f_1(\mathbf{p}'). \quad (218)$$

Здесь $f_1 = e\tau_{1\omega}(-f'_0)\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Фототок даст поправка $\tilde{\delta f}$:

$$e\mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \mathbf{p}} + c.c. = -\frac{\tilde{\delta f}}{\tau_1}. \quad (219)$$

Отсюда второй вклад в фототок:

$$\delta j_\alpha = e \sum_{\nu, \mathbf{p}} v_\alpha (-\tau_1) e E_\beta^* \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial p_\beta} + c.c. \quad (220)$$

Удобно проинтегрировать по частям:

$$\delta j_\alpha = e^2 E_\beta^* \sum_{\nu, \mathbf{p}} \tilde{f}_1 \frac{\partial (v_\alpha \tau_1)}{\partial p_\beta} + c.c. \quad (221)$$

Видно, что при параболической дисперсии и короткодействующем рассеянии этот вклад отсутствует, т.к. производная превращается в числа, а $\tilde{f}_1$ – анизотропна. В других случаях этот вклад сравним с первым и также определяется степенью асимметрии рассеяния Ξ .

Замечательно, что этот вклад в фототок зависит от степени круговой поляризации электрического поля. Действительно, так как $\partial \tau_1 / \partial p_\beta = \tau'_1 v_\beta$,

$$\delta j_\alpha = e^2 E_\beta^* \sum_{\nu, \mathbf{p}} \tilde{f}_1 \tau'_1 \left(v_\alpha v_\beta - \frac{v^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \right) + c.c. \quad (222)$$

Здесь явно выделена анизотропная часть. Отсюда следует, что в ток от $\tilde{f}_1$ войдёт 2-я фурье-гармоника. Поэтому из (218) имеем:

$$\tilde{f}_1 = -\tau_{2\omega} \sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a f_1(\mathbf{p}'). \quad (223)$$

Отсюда получаем для вклада в ток:

$$\delta j_\alpha = e^3 E_\gamma E_\beta^* \sum_{\nu, \mathbf{p}} f'_0 \tau_{1\omega} \tau'_1 \tau_{2\omega} \sum_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a \left(v_\alpha v_\beta - \frac{v^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \right) v_\gamma(\mathbf{p}') + c.c. \quad (224)$$

Поскольку для электромагнитной волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{q}$,

$$i\mathbf{E} \times \mathbf{E}^* = P_{\text{circ}} |E|^2 \frac{\mathbf{q}}{q}, \quad (225)$$

и в нашем случае компоненты поля, тока и скоростей лежат в плоскости (xy) , имеем:

$$i(E_\gamma E_\beta^* - E_\beta^* E_\gamma) = \epsilon_{\gamma\beta z} P_{\text{circ}} |E|^2. \quad (226)$$

Введём величину

$$\Xi_{\alpha\beta\gamma} = \tau_{\text{tr}} \sum_{\mathbf{p}'} \left\langle W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a \frac{\left(v_\alpha v_\beta - \frac{v^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \right) v_\gamma(\mathbf{p}')}{v^3} \right\rangle_{\varphi_{\mathbf{p}}}. \quad (227)$$

Тогда фототок, зависящий от степени циркулярной поляризации волны, $\mathbf{j}^{\text{circ}}$,

$$j_{\alpha}^{\text{circ}} = P_{\text{circ}} |E|^2 e^3 \sum_{\nu, \mathbf{p}} f_0' \tau_1' \frac{\text{Im}(\tau_1 \omega \tau_2 \omega)}{\tau_{\text{tr}}} v_p^3 (\Xi_{\alpha y x} - \Xi_{\alpha x y}). \quad (228)$$

Поскольку

$$\Xi_{xyx} - \Xi_{xyy} = -\frac{1}{2} \tau_{\text{tr}} \sum_{\mathbf{p}'} \langle W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a \sin(\varphi_{\mathbf{p}'} - 2\varphi_{\mathbf{p}}) \rangle_{\varphi_{\mathbf{p}}} \equiv -\frac{\Xi_s}{2}, \quad (229)$$

$$\Xi_{yyx} - \Xi_{yyy} = -\frac{1}{2} \tau_{\text{tr}} \sum_{\mathbf{p}'} \langle W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a \cos(\varphi_{\mathbf{p}'} - 2\varphi_{\mathbf{p}}) \rangle_{\varphi_{\mathbf{p}}} \equiv -\frac{\Xi_c}{2}, \quad (230)$$

получаем для вырожденной статистики:

$$j_{x,y}^{\text{circ}} = P_{\text{circ}} |E|^2 \Xi_{s,c} \frac{(ev_F)^3 m}{2\pi \hbar^2} \frac{d\tau_{\text{tr}}}{d\varepsilon_F} \frac{\omega \tau_2 (\tau_{\text{tr}} + \tau_2)}{(1 + \omega^2 \tau_{\text{tr}}^2)(1 + \omega^2 \tau_2^2)}. \quad (231)$$

Из полученного выражения следует, что циркулярный фототок линейно растёт с частотой при $\omega \tau_{\text{tr}} \ll 1$ и спадает как $1/\omega^3$ при $\omega \tau_{\text{tr}} \gg 1$. Его направление определяется величинами $\Xi_{s,c}$. Например, для симметрии C_s единственная плоскость отражения, обозначим её за (zx) , задаёт чётность $W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a$ по $\varphi_{\mathbf{p}}$ и $\varphi_{\mathbf{p}'}$. Отсюда $\Xi_s = 0$, и циркулярный фототок течёт перпендикулярно плоскости отражения. Это согласуется с соображениями симметрии: j_y и $P_{\text{circ}} |E|^2 = i(E_x E_y^* - E_x^* E_y)$ преобразуются по одному представлению (A^-), а j_x и $|E_{x,y,z}|^2$ – по другому (A^+).

При симметрии C_{3v} циркулярного фотогальванического эффекта при нормальном падении излучения нет. Действительно, при повороте вокруг тригональной оси z на 120° $W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^a$ при такой симметрии не меняется, а $\exp[i(\varphi_{\mathbf{p}'} - 2\varphi_{\mathbf{p}})]$ – меняется. Значит, $\Xi_s = \Xi_c = 0$. В системах такой симметрии, а также в C_{2v} и D_{2d} точечных группах, описывающих симметрию обычных (001) гетероструктур, циркулярный фототок возникает при наклонном падении, когда отлична от нуля компонента поля E_z . Микроскопически нужно учесть влияние E_z на рассеяние.

Подсчитаем количество диссипативных постоянных. Буквы τ и Ξ вошли чётное число раз. Дополнительным множителем, меняющим знак при инверсии времени, является степень круговой поляризации излучения P_{circ} . Отсюда ясно, что “линейный” и “циркулярный” фототоки всегда имеют различное количество диссипативных кинетических параметров.

IX. Эффект фотонного увлечения

В средах с центром пространственной инверсии также возможна генерация фототоков. Для этого нужно учесть наличие у электромагнитной волны волнового вектора $\mathbf{q}$, то есть пространственную дисперсию:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + c.c. \quad (232)$$

Импульс фотона может передаваться носителям заряда, что приводит к их направленному движению, то есть току.

При оптических частотах, вызывающих межзонные переходы, поляризационно-независимый фототок увлечения получается наглядным образом. А здесь мы считаем фототок увлечения при классических частотах.

IX.1. Феноменология

Феноменологически плотность тока увлечения связана с двумя компонентами электрического поля и одной компонентой волнового вектора фотона:

$$j_\alpha = T_{\alpha\beta\mu\nu} q_\beta E_\mu E_\nu^*. \quad (233)$$

Рассмотрим проводящую двумерную систему наиболее высокой симметрии – однородную плёнку, параллельную плоскости (xy) . Её точечная группа симметрии – $D_{\infty h}$, и в ней допустимы фототоки, описываемые четырьмя линейно-независимыми постоянными:

$$\mathbf{j}_\parallel = \mathbf{q}_\parallel (T_1 |\mathbf{E}|^2 + T_2 |E_z|^2) + T_3 i(E_x E_y^* - E_x^* E_y) \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{q} + T_4 [\mathbf{E}_\parallel^* (\mathbf{q}_\parallel \cdot \mathbf{E}_\parallel) + c.c.] \quad (234)$$

Действительно, ток в плоскости может быть направлен вдоль векторов $\mathbf{q}_\parallel$ или $\mathbf{E}_\parallel$ или вдоль псевдовектора $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{q}$, но этот вклад нужно ещё умножить на псевдоскаляр $\kappa_z |\mathbf{E}|^2 = i(\mathbf{E} \times \mathbf{E}^*)_z$.

Все четыре вклада имеют один порядок величины, но различную зависимость от угла падения и поляризации излучения, а также разное направление по отношению к плоскости падения. Видно, что ток, чувствительный к линейной поляризации, течёт в плоскости падения ($T_{1,2}$ вклады), а пропорциональный циркулярной поляризации –

перпендикулярно плоскости падения. Эти токи соответственно называются линейным и циркулярным фототоками увлечения. Ещё один линейный фототок увлечения (описываемый постоянной T_4) имеет компоненты как в плоскости падения, так и перпендикулярно ей.

Поскольку $q_{\parallel} = (\omega/c) \sin \theta$, $|E_z|^2 = |\mathbf{E}|^2 \sin^2 \theta$, $\kappa_z = P_{\text{circ}} \sin \theta$, эти вклады различаются и по зависимости от угла падения света θ . В отличие от фотогальванического тока, фототок увлечения линеен по $\mathbf{q}$, поэтому обнуляется при проходе света по одному и тому же пути в противоположных направлениях. Поэтому эти два эффекта, которые часто имеют один порядок величины, могут быть разделены в эксперименте с зеркалом.

IX.2. Расчёт фототока увлечения

Фототок определяется, как обычно, из кинетического уравнения. Новым будет являться зависимость поля от координат, что приведёт и к зависимости от $\mathbf{r}$ у функции распределения:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} + e \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = \text{St}_{\text{imp}}[f_{\mathbf{p}}]. \quad (235)$$

Мы учли, что 2D носители имеют компоненты импульса и скорости только в плоскости плёнки.

Для нахождения фототока увлечения необходимо трижды проитерировать кинетическое уравнение: дважды по амплитуде поля и один раз по $\mathbf{q}$. Первая итерация идёт только по $\mathbf{E}$, что даёт как обычно

$$f_1(\mathbf{r}) = -e\tau_{1\omega} f'_0 \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{E}_{\parallel} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}. \quad (236)$$

Дальше нужно обязательно учесть пространственную производную. Иначе, если снова учесть электрическое поле $\mathbf{E}^* e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$, поправка не будет зависеть от $\mathbf{r}$, и зависимость от $\mathbf{q}$ исчезнет. Поэтому на втором этапе находим $\tilde{f}_1 \propto e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$:

$$-i\omega \tilde{f}_1 + i\mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} f_1 = \text{St}_{\text{imp}}[\tilde{f}_1]. \quad (237)$$

Произведение $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} f_1$ содержит 2-ю фурье-гармонику и изотропную часть. Они описывают динамическое выстраивание импульсов и колебания электронной плотности на частоте ω . Поэтому в $\tilde{f}_1$ есть два вклада – соответственно пропорциональные $\tau_{2\omega}$ и $1/(-i\omega + 1/\tau_{\varepsilon})$, где τ_{ε} – время релаксации нулевой гармоники неравновесной функции

распределения, имеет порядок времени релаксации энергии. Далее будем считать τ_ε более длинным, чем $\tau_{1,2}$ и $1/\omega$. Тогда получим:

$$\tilde{f}_1 = ie\tau_{1\omega}f'_0 \left\{ \tau_{2\omega} \left[(\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{E}_\parallel)(\mathbf{q}_\parallel \cdot \mathbf{v}_p) - (\mathbf{q}_\parallel \cdot \mathbf{E}_\parallel) \frac{v_p^2}{2} \right] + \frac{1}{-i\omega} (\mathbf{q}_\parallel \cdot \mathbf{E}_\parallel) \frac{v_p^2}{2} \right\}. \quad (238)$$

Подставляя теперь $\tilde{f}_1$ в полевое слагаемое стационарного и независящего от координат кинетического уравнения, находим поправку f_2 , которая даст ток:

$$f_2 = -e\tau_1 \mathbf{E}_\parallel^*(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \mathbf{p}} + c.c. \quad (239)$$

Для вычисления тока опять удобно проинтегрировать по частям:

$$\mathbf{j} = e \sum_{\nu, \mathbf{p}} \mathbf{v}_p f_2 = e^2 E_\beta^* \sum_{\nu, \mathbf{p}} \frac{\partial (\tau_1 \mathbf{v}_p)}{\partial p_\beta} \tilde{f}_1 + c.c. \quad (240)$$

Для упрощения выкладок предположим, что дисперсия параболическая, и τ не зависит от энергии. Тогда вклад в ток внесёт только изотропное слагаемое в $\tilde{f}_1$:

$$\mathbf{j} = e^3 \tau \tau_\omega \mathbf{E}_\parallel^* \frac{\mathbf{q}_\parallel \cdot \mathbf{E}_\parallel}{2m\omega} \sum_{\nu, \mathbf{p}} (-f'_0) v_p^2 + c.c. = \frac{e^3 \tau}{m^2 \omega} g_{\text{tot}} \varepsilon_F \tau_\omega \mathbf{E}_\parallel^* (\mathbf{q}_\parallel \cdot \mathbf{E}_\parallel) + c.c. = \frac{N e^3 \tau}{m^2 \omega} \tau_\omega \mathbf{E}_\parallel^* (\mathbf{q}_\parallel \cdot \mathbf{E}_\parallel) + c.c. \quad (241)$$

Здесь учтено, что концентрация $N = g_{\text{tot}} \varepsilon_F$.

В указанных предположениях этот вклад может быть получен совсем просто. Неоднородное электрическое поле вызывает неоднородное осциллирующее во времени изменение электронной концентрации

$$\delta N = \delta N_\omega \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) + c.c. \quad (242)$$

Оно определяется из уравнения непрерывности

$$-i\omega \delta N_\omega + \nabla \cdot \mathbf{j}_\omega = 0, \quad (243)$$

где переменный ток $\mathbf{j}_\omega = \sigma(\omega) \mathbf{E}_\parallel$. Отсюда следует

$$\delta N_\omega = (\mathbf{q}_\parallel \cdot \mathbf{E}_\parallel) \frac{\sigma(\omega)}{\omega} = (\mathbf{q}_\parallel \cdot \mathbf{E}_\parallel) \frac{N e^2 \tau_\omega}{m\omega}. \quad (244)$$

Постоянный ток возникает в результате выпрямления:

$$\mathbf{j} = \frac{e^2 \tau}{m} \langle \delta N(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}_\parallel(\mathbf{r}, t) \rangle_t = \frac{e^2 \tau}{m} \delta N_\omega \mathbf{E}_\parallel^* + c.c. = \frac{N e^3 \tau}{m^2 \omega} \tau_\omega \mathbf{E}_\parallel^* (\mathbf{q}_\parallel \cdot \mathbf{E}_\parallel) + c.c. \quad (245)$$

Выше мы учли конечность волнового вектора света $q = \omega/c$. Однако, тот же порядок имеет и магнитное поле световой волны $\mathbf{B}$. Действительно,

$$\text{rot} \mathbf{E} = i\mathbf{q} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\frac{\omega}{c} \mathbf{B}. \quad (246)$$

Учёт влияния магнитного поля световой волны на электроны должен, согласно этой оценке, привести к сравнимому вкладу в фототок увлечения. Для расчёта нужно принять во внимание в кинетическом уравнении силу Лоренца, действующую со стороны световой волны на электроны:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial t} + e\mathbf{E}_{\parallel} \cdot \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{e}{c}(\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = \text{St}_{\text{imp}}[f_{\mathbf{p}}]. \quad (247)$$

Это уравнение совпадает с кинетическим уравнением в скрещенных электрическом и магнитном полях (компонента $\mathbf{B}_{\parallel}$ на 2D носители не действует). Оно даёт, как известно, холловский ток:

$$\mathbf{j}^{(EB)} = \frac{Ne^3\tau^2/(m^2c)}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}_{\parallel} \times \mathbf{B}_z^* + c.c. = \frac{Ne^3\tau^2/(m^2\omega)}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}_{\parallel} \times (\mathbf{q}_{\parallel} \times \mathbf{E}_{\parallel}^*) + c.c. \quad (248)$$

То есть продольный фототок увлечения в значительной мере обусловлен высокочастотным эффектом Холла.

Складывая $\mathbf{j}^{(EB)}$ и $\mathbf{j}^{(qE^2)}$, полученный учёт волнового вектора, получаем, что существенная часть сокращается, и остаётся только ток, текущий в плоскости падения:

$$\mathbf{j}^{(\text{total})} = 2\mathbf{q}_{\parallel} |E_{\parallel}|^2 \frac{Ne^3\tau^2/(m^2\omega)}{1 + (\omega\tau)^2} = \mathbf{q}_{\parallel} (|E|^2 - |E_z|^2) \frac{Ne^3\tau^2/(m^2\omega)}{1 + (\omega\tau)^2}. \quad (249)$$

Мы получили два вклада в ток (234) и установили соотношение между ними: $T_1 = -T_2$.

Для получения остальных вкладов при параболической дисперсии нужно учесть зависимость времени релаксации от энергии. Тогда, согласно (240), появится дополнительный вклад в $\mathbf{j}^{(qE^2)}$:

$$\Delta \mathbf{j}^{(qE^2)} = e^2 \sum_{\nu, \mathbf{p}} \tau_1' \mathbf{v}_{\mathbf{p}} (\mathbf{E}_{\parallel}^* \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}) \tilde{f}_1 + c.c. \quad (250)$$

Выберем плоскость падения (zx) (то есть $q_y = 0$), и рассчитаем фототок, перпендикулярный плоскости падения:

$$j_y = iq_x e^3 \sum_{\nu, \mathbf{p}} \tau_1' \tau_{1\omega} f_0' v_y (\mathbf{E}_{\parallel}^* \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}}) \left\{ \tau_{2\omega} \left[v_x (\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{E}_{\parallel}) - E_x \frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}}{m} \right] - \frac{1}{i\omega} E_x \frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}}{m} \right\} + c.c. \quad (251)$$

Оставляем комбинации скоростей с ненулевым средним:

$$j_y = iq_x e^3 \sum_{\nu, \mathbf{p}} \tau'_1 \tau_{1\omega} f'_0 \left[\tau_{2\omega} v_x^2 v_y^2 (E_x E_y^* + E_x^* E_y) - v_y^2 E_x E_y^* \frac{\varepsilon_p}{m} \left(\tau_{2\omega} + \frac{1}{i\omega} \right) \right] + c.c. \quad (252)$$

Усреднение по направлениям в 2D случае:

$$\overline{v_y^2} = \frac{v_p^2}{2} = \frac{\varepsilon_p}{m}, \quad \overline{v_x^2 v_y^2} = \frac{v_p^4}{8} = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_p}{m} \right)^2. \quad (253)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} j_y &= iq_x e^3 \sum_{\nu, \mathbf{p}} \tau'_1 \tau_{1\omega} f'_0 \left(\frac{\varepsilon_p}{m} \right)^2 \left[\tau_{2\omega} \frac{1}{2} (E_x E_y^* + E_x^* E_y) - E_x E_y^* \left(\tau_{2\omega} + \frac{1}{i\omega} \right) \right] + c.c. \\ &= \frac{1}{2} iq_x e^3 \sum_{\nu, \mathbf{p}} \tau'_1 \tau_{1\omega} f'_0 \left(\frac{\varepsilon_p}{m} \right)^2 \left[-\frac{1}{i\omega} (E_x E_y^* + E_x^* E_y) - \left(\tau_{2\omega} + \frac{1}{i\omega} \right) (E_x E_y^* - E_x^* E_y) \right] + c.c. \\ &= q_x e^3 \sum_{\nu, \mathbf{p}} \tau'_1 (-f'_0) \left(\frac{\varepsilon_p}{m} \right)^2 \left[\frac{\text{Re}(\tau_{1\omega})}{\omega} (E_x E_y^* + E_x^* E_y) + \text{Re} \left[\tau_{1\omega} \left(\tau_{2\omega} + \frac{1}{i\omega} \right) \right] i (E_x E_y^* - E_x^* E_y) \right]. \end{aligned} \quad (254)$$

Видно, что мы получили оба разрешённых симметрией в этой геометрии вклада в ток:

$$j_y = q_x [T_3 i (E_x E_y^* - E_x^* E_y) + T_4 (E_x E_y^* + E_x^* E_y)]. \quad (255)$$

Вычисляя

$$\text{Re}(\tau_{1\omega}) = \frac{\tau_1}{1 + (\omega\tau_1)^2}, \quad \text{Re} \left[\tau_{1\omega} \left(\tau_{2\omega} + \frac{1}{i\omega} \right) \right] = \frac{\tau_1}{1 + (\omega\tau_1)^2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{1 + (\omega\tau_2)^2} \quad (256)$$

и считая статистику вырожденной, получаем выражения для коэффициентов:

$$T_4 = \frac{Ne^3}{m^2\omega} \frac{\tau_{\text{tr}}}{1 + (\omega\tau_{\text{tr}})^2} \varepsilon_F \frac{d\tau_{\text{tr}}}{d\varepsilon_F}, \quad T_3 = \frac{\omega(\tau_{\text{tr}} + \tau_2)}{1 + (\omega\tau_2)^2} T_4. \quad (257)$$

Видно, что линейный фототок увлечения при малых частотах не зависит от ω , а при высоких падает как $1/\omega^2$. Циркулярный фототок линейно растёт с частотой при низких частотах и падает как $1/\omega^3$ при высоких.

При линейной дисперсии EB -вклад имеет очень похожий вид, а qE^2 -вклад становится заметнее. Во-первых, производная $\partial v_\alpha / \partial p_\beta$ отлична от нуля и при $\alpha \neq \beta$, что даёт циркулярные qE^2 -вклады, пропорциональные τ_{tr} , а не только $d\tau_{\text{tr}}/d\varepsilon_F$. Во-вторых, при линейной дисперсии времена релаксации зависят от энергии даже при короткодействующем рассеянии.

Х. Эффект Шубникова-де Гааза

До сих пор мы изучали классические транспортные явления. Квантовая механика нужна была для вычисления времён релаксации и вероятностей рассеяния. Кинетическое уравнение вообще применимо только в квазиклассике, когда координата и компоненты импульса являются коммутирующими величинами. В частности, полученные выражения для тензора сопротивления в магнитном поле верны при произвольном значении $\omega_c\tau$, но при $\omega_c, 1/\tau \ll \varepsilon_F/\hbar$.

В данной лекции мы рассмотрим явления, имеющие место в более сильных полях, когда $\hbar\omega_c \lesssim \varepsilon_F$, то есть когда под уровнем Ферми располагается конечное число уровней Ландау. Такие классически-сильные поля также называются *квантующими*. При этом кинетическое уравнение неприменимо, потому что компоненты волнового вектора в сильном магнитном поле перестают коммутировать: как известно из квантовой механики $[k_\alpha k_\beta] = ie_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma e/\hbar c$, где $\hat{e}$ – полностью антисимметричный тензор Леви-Чивита. Поэтому для получения точных выражений для проводимости системы требуется оперировать матрицей плотности или функциями Грина, что выходит за рамки данного курса. Мы не будем получать точные выражения, но рассчитаем величины, которые отражают основные черты проводимости в квантующих полях.

Сначала мы рассмотрим объёмные системы, а затем – двумерные. В трёхмерной задаче об электроне в магнитном поле $\mathbf{B} \parallel z$ состояние электрона характеризуется набором (k_z, n, k_y, s) . Здесь $s = \pm 1/2$ – проекция спина на z , а волновая функция зависит от трёх других переменных:

$$\psi_{k_z n k_y}(\mathbf{r}) = e^{ik_z z} e^{ik_y y} \phi_n\left(\frac{x - x_0}{l_B}\right), \quad x_0 = -k_y l_B^2, \quad l_B = \sqrt{\hbar c / e B}. \quad (258)$$

Энергия же зависит только от k_z , n и s – имеется набор одномерных подзон:

$$\varepsilon_{n,s}(k_z) = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) - g\mu_B s B_z. \quad (259)$$

В двумерном случае волновая функция локализована по z , и энергия зависит только от n и s , то есть спектр полностью дискретен.

Х.1. Плотность состояний в трёхмерных системах

Поведение проводимости в квантующих полях определяется плотностью состояний. Рассчитаем плотность состояний с проекцией спина s в магнитном поле:

$$g_s(\varepsilon) = \sum_{n, k_z, k_y} \delta[\varepsilon - \varepsilon_{n,s}(k_z)]. \quad (260)$$

Суммирование по k_y даёт $1/(2\pi l_B^2)$, и остаётся проинтегрировать по k_z :

$$g_s(\varepsilon) = g(\varepsilon_s) = \frac{1}{2\pi l_B^2} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \delta \left[\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - \varepsilon_s \right], \quad \varepsilon_s \equiv \varepsilon + g\mu_B s B_z. \quad (261)$$

Аргумент δ -функции обращается в ноль при $k_z = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [\varepsilon_s - \hbar\omega_c (n + \frac{1}{2})]}$, поэтому получаем:

$$g(\varepsilon_s) = \frac{1}{2\pi l_B^2} \frac{2}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{2\hbar^2}} \sum_n \frac{\Theta[\varepsilon_s - \hbar\omega_c (n + \frac{1}{2})]}{\sqrt{\varepsilon_s - \hbar\omega_c (n + \frac{1}{2})}}. \quad (262)$$

Получилась корневая плотность состояний, характерная для одномерных подзон. Она имеет вид суммы таких “корней”, повторяющихся с периодом $\Delta\varepsilon = \hbar\omega_c$.

Проводимость при нулевой температуре определяется плотностью состояний на уровне Ферми $g_{\text{tot}}(\varepsilon_F)$. Поэтому даже без точного расчёта уже можно сделать вывод о том, что проводимость будет осциллирующей функцией от $\varepsilon_F/\hbar\omega_c \propto 1/B_z$. Такие осцилляции наблюдаются при низких температурах во многих проводящих системах (металлах, полупроводниках) и называются осцилляциями Шубникова-де Гааза.

Наличие зеемановского расщепления означает магнитный момент системы $\mathbf{M}$. Из-за осцилляций плотности состояний M_z/B_z не является постоянной, а осциллирует с тем же периодом. Осцилляции намагниченности называются эффектом де Гааза-ван Альфвена. Намагниченность – не кинетическая, а термодинамическая величина, для её расчёта достаточно знать лишь равновесную функцию распределения, поэтому можно получить для M_z точное выражение с помощью методов статистической физики.

Для выяснения основных особенностей магнитоосцилляций преобразуем плотность состояний (262) к более удобной форме, где периодичность будет в явном виде. Рассмотрим значения полей, при которых уровень Ферми проходит через высокие номера уровней Ландау: $n \approx \varepsilon_F/\hbar\omega_c = 5 \dots 10$. Поскольку $n \gg 1$, можно перейти в (262) от суммирования по n к интегрированию. Тогда, вводя вместо n новую переменную

интегрирования $\hbar\omega_c n$, убеждаемся, что зависимость от ω_c пропадает, и мы получаем трёхмерную плотность состояний

$$\bar{g}(\varepsilon_s) \propto \sqrt{\varepsilon_s}. \quad (263)$$

Чтобы учесть квантование спектра, рассчитаем сумму (262) более точно. Для этого используем формулу суммирования Пуассона:¹

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dn e^{2\pi i k n} f(n) + \frac{f(0)}{2}. \quad (264)$$

Слагаемое с $k = 0$ даст плавный вклад (263), а с $k \neq 0$ – осцилляции:

$$g(\varepsilon_s) = \bar{g}(\varepsilon_s) \left\{ 1 + 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hbar\omega_c}{2\sqrt{\varepsilon_s}} \int_0^{\infty} dn e^{2\pi i k n} \frac{\Theta[\varepsilon_s - \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})]}{\sqrt{\varepsilon_s - \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})}} \right\}. \quad (265)$$

Здесь учтено, что последнее слагаемое в формуле Пуассона даёт малый вклад. Переходя к переменной $x = \hbar\omega_c(n + 1/2)/\varepsilon_s$, получаем:

$$g(\varepsilon_s) = \bar{g}(\varepsilon_s) \left\{ 1 + 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 dx \frac{\exp[2\pi i k(x\varepsilon_s/\hbar\omega_c - 1/2)]}{2\sqrt{1-x}} \right\}. \quad (266)$$

Вводя переменную $y = \sqrt{1-x}$, получаем

$$g(\varepsilon_s) = \bar{g}(\varepsilon_s) \left\{ 1 + 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i k(\varepsilon_s/\hbar\omega_c - 1/2)} \int_0^1 dy \exp(-2\pi i y^2 k \varepsilon_s/\hbar\omega_c) \right\}. \quad (267)$$

Так как $2\pi k \varepsilon_s \gg \hbar\omega_c$, аргумент экспоненты быстро осциллирует, Поэтому вклад в интеграл даётся малыми y , и можно продлить интегрирование до ∞ . А такой интеграл вычисляется:

$$\int_0^{\infty} dy \exp(-i\alpha y^2) = e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}}. \quad (268)$$

В результате плотность состояний в спиновой подзоне s имеет вид

$$\begin{aligned} g(\varepsilon_s) &= \bar{g}(\varepsilon_s) \left[1 + 2\text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} e^{2\pi i k \varepsilon_s/\hbar\omega_c} (-1)^k e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{8k\varepsilon_s}} \right] \\ &= \bar{g}(\varepsilon_s) \left[1 + \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(2\pi k \varepsilon_s/\hbar\omega_c - \pi/4)}{\sqrt{k}} \right]. \end{aligned} \quad (269)$$

¹ Формула Пуассона получается из равенства $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x}$, которое умножают на $f(x)$ и интегрируют по x от 0 до ∞ .

Плотность состояний является плавной функцией энергии, не зависящей от поля, на которую накладываются осцилляции с периодом $\varepsilon_s/\hbar\omega_c$. Амплитуда этих осцилляций имеет относительную малость $\sqrt{\hbar\omega_c/\varepsilon_s} \ll 1$. Кроме того, она спадает с ростом номера k , поэтому можно приближённо учитывать только слагаемое с $k = 1$.

Х.2. Проводимость в трёхмерных системах

В проводимость вносят вклад носители, энергии которых лежат в полоске шириной T вблизи уровня Ферми. Это учитывается следующим образом:

$$\sigma \propto \sum_{s=\pm 1/2} \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon + g\mu_B s B_z) [-f'_0(\varepsilon)]. \quad (270)$$

Обычно в полупроводниках зеемановское расщепление меньше циклотронного, а, значит, оно много меньше энергии Ферми: $g\mu_B B_z \lesssim \hbar\omega_c \ll \varepsilon_F$. Поэтому при суммировании по s его можно учитывать только в аргументе косинуса:

$$\sigma \propto \int_0^\infty d\varepsilon \bar{g}_{\text{tot}}(\varepsilon) \left[1 + \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon}} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{2\pi k\varepsilon}{\hbar\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi k g m}{2m_0}\right) \right] [-f'_0(\varepsilon)]. \quad (271)$$

Несмотря на то, что энергия Ферми превышает как циклотронную энергию, так и температуру, отношение этих двух малых энергий $T/\hbar\omega_c$ может быть произвольным. Поэтому положим $\varepsilon = \varepsilon_F$ только в плавных слагаемых:

$$\sigma \propto \bar{g}_{\text{tot}}(\varepsilon_F) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_F}} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{\pi k g m}{2m_0}\right) \int_0^\infty d\varepsilon \cos\left(\frac{2\pi k\varepsilon}{\hbar\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right) [-f'_0(\varepsilon)] \right\}, \quad (272)$$

а оставшийся интеграл вычислим более точно. Вводя переменную $\epsilon = \varepsilon - \varepsilon_F$, лежащую в интервале $(-\varepsilon_F, \infty)$, при интегрировании по ней заменяем нижний предел на $-\infty$. Тогда из чётности функции $[-f'_0(\epsilon)] = 1/[4T \cosh^2(\epsilon/2T)]$ получаем

$$\cos\left(\frac{2\pi k\varepsilon_F}{\hbar\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right) \int_{-\infty}^\infty d\epsilon \cos\left(\frac{2\pi k\epsilon}{\hbar\omega_c}\right) [-f'_0(\epsilon)] = \cos\left(\frac{2\pi k\varepsilon_F}{\hbar\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{kz}{\sinh(kz)}, \quad (273)$$

где z определяется отношением тепловой и циклотронной энергий:

$$z = \frac{2\pi^2 T}{\hbar\omega_c}. \quad (274)$$

Мы получили магнитоосцилляции проводимости в виде

$$\sigma \propto \bar{g}_{\text{tot}}(\varepsilon_F) \left[1 + \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_F}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{\pi k g m}{2m_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi k \varepsilon_F}{\hbar\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{kz}{\sinh(kz)} \right]. \quad (275)$$

Осцилляции, в отличие от плавной части сопротивления, очень чувствительны к нагреву системы. Видно, что когда $z \ll 1$, справедлив результат при нулевой температуре, а при $z \sim 1$ осцилляции сильно подавляются. Они практически экспоненциально затухают при температурах $T \sim \hbar\omega_c/10$, то есть при разогреве от 2 до 10 К амплитуда осцилляций уменьшается на порядок. Это обусловлено температурным размытием электронного энергетического распределения.

При выводе мы не принимали во внимание рассеяние электронов. Качественно роль столкновений легко оценить. Если среднее время столкновений равно τ , то неопределенность в энергии электрона порядка $\hbar/\tau$. Эта величина играет ту же роль, что и температура. Поэтому можно ожидать, что учет столкновений приводит к новому экспоненциальному множителю. Это соответствует действительности:

$$\sigma \propto \bar{\sigma} \left[1 + \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_F}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cos\left(\frac{\pi k g m}{2m_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi k \varepsilon_F}{\hbar\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{kz}{\sinh(kz)} e^{-k\pi/(\omega_c\tau)} \right]. \quad (276)$$

Отметим, что здесь τ описывает уширение уровней, поэтому оно является полным уходящим временем. Его ещё называют квантовым временем рассеяния и обозначают τ_q , чтобы отличить от транспортного времени τ_{tr} .

Иногда полученную формулу пишут в приближённом виде, вводя температуру Дингля $T_D = \hbar/(2\pi\tau_q)$:

$$\sigma_{\text{osc}}(T) \propto \cos\left(\frac{2\pi\varepsilon_F}{\hbar\omega_c} - \frac{\pi}{4}\right) \exp\left[-\frac{2\pi^2(T + T_D)}{\hbar\omega_c}\right]. \quad (277)$$

Из периода осцилляций Шубникова-де Гааза определяют концентрацию носителей, а из температурной зависимости – квантовое время рассеяния и циклотронную массу.

Х.3. Эффект в двумерных системах

Посмотрим, что изменится для двумерных систем. Поскольку спектр полностью дискретный, вместо (262) имеем

$$g(\varepsilon_s) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \sum_n \hbar\omega_c \delta\left[\varepsilon_s - \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]. \quad (278)$$

Применяя формулу Пуассона и учитывая уширение уровней за счёт рассеяния, получаем

$$g(\varepsilon_s) = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{2\pi k \varepsilon_s}{\hbar\omega_c}\right) e^{-k\pi/(\omega_c\tau_q)} \right]. \quad (279)$$

Видно, что амплитуда осцилляций имеет малость по сравнению с плавной частью только из-за рассеяния. То есть эффект магнитоосцилляций усилен по сравнению с 3D системами. Далее будем считать параметр $\exp[-\pi/(\omega_c\tau_q)] \ll 1$ и удерживать только слагаемое с $k = 1$.

Учёт температурного размытия осцилляций и суммирование по спиновым подзонам полностью аналогичны 3D случаю. Поэтому осцилляции малой амплитуды описываются величиной δ :

$$\delta = \cos\left(\frac{2\pi\varepsilon_F}{\hbar\omega_c}\right) \cos\left(\frac{\pi g m}{2m_0}\right) e^{-\pi/(\omega_c\tau_q)} \frac{z}{\sinh z}, \quad z = \frac{2\pi^2 T}{\hbar\omega_c}. \quad (280)$$

Аргумент магнитоосциллирующего множителя может быть переписан через двумерную концентрацию N :

$$\frac{2\pi\varepsilon_F}{\hbar\omega_c} = \frac{2\pi N \Phi_0}{B_z}, \quad \Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{|e|} = 2.05 \times 10^{-7} \text{ Э см}^2. \quad (281)$$

Видно, что при $N = 10^{11} \text{ см}^{-2}$ и $B \sim 1 \text{ Тл} \equiv 10^4 \text{ Э}$ осцилляции будут быстрыми: $\cos\left(2\pi \frac{2.05}{B_z/\text{Тл}}\right)$.

Точные выражения для тензора сопротивления имеют вид:

$$\rho_{xx} = \frac{m}{Ne^2\tau_{\text{tr}}} (1 - 4\delta), \quad \rho_{yx} = \frac{B_z}{Nec} \left[1 + \frac{2}{(\omega_c\tau_{\text{tr}})^2} \delta \right]. \quad (282)$$

XI. Квантовый эффект Холла

XI.1. ЦКЭХ: данные эксперимента

Целочисленный квантовый эффект Холла (ЦКЭХ), фон Клитцинг (1980), Нобелевская премия (1985), определение постоянной тонкой структуры, применения в метрологии . . .

Квант сопротивления: $h/e^2 \approx 25.8$ кОм, точность квантования 10^{-8} .

XI.2. Бесконечный образец

Имеются бесконечно узкие уровни Ландау. Поэтому продольная проводимость отлична от нуля только при дискретных значениях магнитного поля – когда какой-либо уровень Ландау проходит через уровень Ферми. То есть зависимость $\sigma_{xx}(B)$ представляет собой набор бесконечно узких пиков, между которыми она обращается в ноль.

Беспорядок приводит к уширению уровней Ландау. Предположим, что случайный потенциал $V(x, y)$ слабый и плавный – соответственно на масштабах $\hbar\omega_c$ и l_B : $|V| \ll \hbar\omega_c$, $|\nabla V| \ll \hbar\omega_c/l_B$. Тогда можно показать, что электроны двигаются по его эквипотенциалам: если x_0, y_0 – координаты центра циклотронной орбиты, а ε – энергия, отсчитанная от центра уровня Ландау, то движение описывается классическим уравнением $V(x_0, y_0) = \varepsilon$. Таким образом, случайный потенциал полностью снимает большое вырождение уровня Ландау – энергии всех $1/(2\pi l_B^2)$ электронов на единицу площади $\varepsilon(x_0, y_0)$ различны.

Электроны локализованы вокруг минимумов и максимумов случайного потенциала, вокруг которых они вращаются в противоположные стороны. И есть только одна энергия – в центре уровня Ландау, которой соответствуют делокализованные состояния. Отсюда следует, что с увеличением магнитного поля, когда на уровне Ландау стало больше посадочных мест, начинают заполняться локализованные состояния. Продольная проводимость при этом не меняет своей зависимости от поля: остаётся нулевой при всех полях, кроме дискретных значений, при которых делокализованное состояние совпадает с уровнем Ферми.

Холловская проводимость – величина недиссипативная (не имеет отношения к диссипации энергии), поэтому она определяется всеми делокализованными состояниями

под уровнем Ферми. Вклад в неё от любого полностью заполненного уровня Ландау (Landau level, LL) в чистом образце равен e^2/h . Это получается из скорости дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном полях:

$$j_y^{(\text{LL})} = e \sum_{p_y} v_y = e \sum_{p_y} c \frac{E_x}{B_z} = e c \frac{E_x}{B_z} \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{e^2}{h} E_x. \quad (283)$$

Оказывается, что этот результат сохраняется и с учётом беспорядка. Дело в том, что рассеяние между уровнями Ландау очень слабое: беспорядок уширяет плотность состояний, делая её конечной и между уровнями Ландау, но эти поправки экспоненциально малы. Поэтому всё, что делает беспорядок – это перемешивание волновых функций внутри уровней Ландау. А это не может изменить их полной проводимости, так как количество состояний на уровнях не изменяется.

Отсюда следует, что $\sigma_{xy} = [\nu]e^2/h$, где $[\nu]$ – количество уровней Ландау под уровнем Ферми. Это количество не меняется с полем, пока новый уровень Ландау не пересечёт уровень Ферми. Поэтому имеются плато, переход между которыми происходит скачком. Компоненты тензора сопротивления:

$$\rho_{xy} = \frac{1}{\sigma_{xy}} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{[\nu]}, \quad \rho_{xx} = 0. \quad (284)$$

XI.3. Конечный образец

Физическая природа квантования становится ясной, если учесть конечность образца.

Рассмотрим образец в виде полоски. В нём все состояния квантованные, волновой вектор k_y пробегает конечное число дискретных значений с шагом $2\pi/L_y$, и то же самое происходит с центрами циклотронных орбит $x_0 = -k_y l_B^2$. Энергия теперь начинает зависеть от k_y , а, значит, и от x_0 . Состояния в “объёме”, т.е. те состояния, у которых x_0 далеко от краёв, мало отличаются от состояний в бесконечном образце. Но вблизи краёв отличие существенно: их уровни энергии загибаются вверх. Квазиклассически их можно воспринимать как электроны, движущиеся по “скачущим” орбитам. Когда уровень Ферми лежит между уровнями Ландау, его пересекают $[\nu]$ одномерных подзон – ровно столько, сколько уровней Ландау находится под уровнем Ферми.

В отсутствие электрического поля краевые состояния имеют скорость, направленную по и против оси y соответственно на правом и левом краях. Направления этих

скоростей меняются на противоположные при инверсии направления магнитного поля. Поэтому имеются краевые каналы, циркулирующие по или против часовой стрелки. Они называются киральными. Ясно, что в отсутствие приложенного напряжения электрический ток не течёт – в любой резистор втекает и вытекает одинаковое число носителей в единицу времени, поэтому разность потенциалов на его концах не возникает.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда к образцу приложена разность потенциалов ΔU . Это означает, что левый и правый его края находятся в равновесии с термостатами, имеющими разные химические потенциалы eU_R и eU_L ($\Delta U = U_L - U_R$). Рассчитаем электрический ток при баллистическом распространении по одномерному каналу:

$$j_1 = e \sum_k v_k [f_0(\varepsilon_k - eU_R) - f_0(\varepsilon_k - eU_L)]. \quad (285)$$

Здесь f_0 – равновесная функция распределения, k – волновой вектор движения вдоль канала, а скорость, как обычно, $v_k = \hbar^{-1} d\varepsilon_k/dk$. Переходя к интегрированию по энергии, видим, что скорость сокращается, и получается универсальный результат:

$$j_1 = e \int \frac{dk}{2\pi} v_k [\Theta(\varepsilon_k - eU_R) - \Theta(\varepsilon_k - eU_L)] = \frac{e}{2\pi\hbar} \int_{eU_R}^{eU_L} d\varepsilon_k = \frac{e}{2\pi\hbar} e\Delta U = \frac{e^2}{h} \Delta U. \quad (286)$$

Любой одномерный канал вносит вклад в проводимость, равный e^2/h .

Количество одномерных каналов равно $[\nu]$, поэтому полный ток есть $[\nu]j_1$, а холловская проводимость $\sigma_{xy} = [\nu]e^2/h$. Высокая точность квантования связана с тем, что краевые состояния устойчивы к беспорядку. Это ясно и из квазиклассической картины (после рассеяния на примеси электрон продолжает двигаться вдоль края в ту же сторону) и из квантовой механики (рассеяние назад запрещено). Могло бы быть рассеяние на противоположный край образца, но это – очень маловероятный процесс, что и обеспечивает точность квантования.

Аргумент Лафлина: квантование холловской проводимости связано с калибровочной инвариантностью. Будем считать, что энергия Ферми лежит в щели между уровнями Ландау. Сделаем калибровочное преобразование $A_y \rightarrow A_y - 2\pi\phi/L_y$, где ϕ – постоянная, имеющая размерность магнитного потока. То есть будем считать, что магнитный поток адиабатически медленно меняется от нуля до ϕ . При этом энергетические уровни системы не могут измениться, и всё, что происходит – сдвиг волнового вектора $k \rightarrow k + (2\pi e/\hbar c)\phi/L_y$. Значит, при $\phi = \hbar c/e$ все k увеличатся на одно минимально возможное значение: $k \rightarrow k + 2\pi/L_y$. Это соответствует сдвигу центра орбиты $x_k = -kl_B^2$

на минимально возможное значение, то есть в соседнее положение. Значит, на каждом уровне Ландау ровно один электрон переходит с левого края на правый. При этом, как мы видели, возникает ток $j_1 = \frac{e^2}{h} \Delta U$.

Связь холловской проводимости с калибровочной инвариантностью позволяет записать её в виде $\frac{e^2}{h} \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ – некий двумерный интеграл по сфере, который обязан быть целым – как заряд в единицах 4π в теореме Гаусса. Такой объект – целочисленный интеграл – называется топологическим инвариантом, поскольку, как и в теореме Гаусса, он не меняется при изменении поверхности, по которой происходит интегрирование. Поэтому холловская проводимость является топологическим инвариантом.

Исследование холловской проводимости и её связь с краевыми состояниями привело к новым подходам в физике твёрдого тела. Системы оказалось удобно классифицировать по наличию или отсутствию в них краевых состояний на фоне объёмной щели. Оказывается, в некоторых системах всегда существуют такие краевые состояния, какой бы ни был беспорядок. Они существуют, если некий топологический инвариант – двумерный интеграл, имеющий целочисленные значения, – отличен от нуля. Твёрдые тела с локализованными состояниями в объёме и проводящими краевыми состояниями называются топологическими изоляторами. Их реализация возможна и без магнитного поля – всё зависит от зонной структуры.

“Премия по фундаментальной физике” (премия Мильнера – совладельца Mail.ru, превышающая нобелевскую примерно в три раза) в 2013 году была присуждена “За теоретическое предсказание и экспериментальное открытие топологических изоляторов” трём учёным. А в 2016 году – “За теоретические открытия топологических фазовых переходов и топологических фаз материи” – была дана нобелевская премия другим трём учёным.

Итак, холловская проводимость определяется краевыми каналами. По её величине можно сразу определить, сколько краевых каналов пересекают уровень Ферми, то есть сколько заполнено уровней Ландау. При этом продольная проводимость зависит от поля так же, как и в бесконечном образце: она отлична от нуля только когда уровень Ферми пересекает центр уровня Ландау – на переходе между плато. Ширина пика σ_{xx} теперь ненулевая не только из-за беспорядка, но и из-за того, что эквипотенциалей, соединяющих края образца, конечное число.

XI.4. ДКЭХ

Дробный квантовый эффект Холла (ДКЭХ): плато ρ_{xy} при дробных факторах заполнения. $1/3, 2/3, 1/5, 2/5, 3/5 \dots$ – на нижнем уровне Ландау; $4/3, 5/3, 7/5, 5/2, 12/5, 13/5, \dots$ – на верхних уровнях Ландау.

В ДКЭХ ключевую роль играет взаимодействие между электронами. Задача о взаимодействующих электронах является сложной, и из-за их большого количества в реальном образце ($\sim 10^{11}$) – сложной и для численных расчётов.

Для объяснения Лафлин предложил волновую функцию для заполнения $\nu = 1/m$, $m = 3, 5, 7 \dots$. Эта волновая функция давала энергию немного меньшую, чем приближение Хартри-Фока. Также эта функция даёт меньшую энергию, чем вигнеровский кристалл – состояние, при котором электроны выстраиваются в образце в треугольную решётку. Расчёт холловской проводимости на таком состоянии даёт $\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \frac{1}{m}$.

Нобелевская премия (1998) Лафлину и экспериментаторам Штёрмеру и Тсуи.

ХII. Слабая локализация

Магнитосопротивление, исследованное ранее, хорошо описывает экспериментальные данные в большом количестве проводников разных размерностей. Однако в очень малых полях, когда соотношение $\omega_c \tau \ll 1$ выполнено с большим запасом, при низких температурах наблюдается отрицательное магнитосопротивление: ρ_{xx} падает на несколько процентов при приложении поля $\sim 1 \dots 10$ мТл. Кинетическое уравнение, использованное нами в таких полях, что-то пропустило.

Кинетическое уравнение описывает транспортные явления с точностью до квантового параметра

$$\frac{\hbar}{\varepsilon_F \tau} \sim \frac{1}{k_F l} \ll 1. \quad (287)$$

При этом проводимость описывается формулой Друдэ $\sigma = Ne^2 \tau / m$. Поскольку концентрация $N = k_F^3 / (2\pi)$, $\hbar k_F / m = v_F$, а длина свободного пробега $l = v_F \tau$, формулу Друдэ можно переписать как

$$\sigma = \frac{e^2}{2\pi \hbar} k_F l = \frac{e^2}{h} k_F l. \quad (288)$$

Отсюда следует, что возможные поправки к результатам кинетического уравнения имеют порядок e^2/h . Вклады в проводимость такой величины измеримы, поэтому имеет смысл их обсуждать. Именно такого порядка наблюдается “клов” в сопротивлении при уменьшении магнитного поля. Более того, эти поправки имеют универсальный характер и показывают, будут ли все частицы локализованы при увеличении беспорядка или останется металлическая проводимость. Наконец, такие “квантовые” поправки аномальным образом зависят от температуры и магнитного поля, что, во-первых, позволяет их выделить на фоне классической проводимости, и, во-вторых, определять с их помощью параметры труднодоступные в других экспериментах.

Что же было пропущено в классическом подходе, который рассматривал электроны свободно движущимися между столкновениями? Рассмотрим низкую температуру, когда основной механизм рассеяния – упругий, на примесях, которые будем считать для простоты короткодействующими. Единственное, что не учитывалось – это волновая природа электрона, которая и может проявиться в виде квантовых поправок $\sim e^2/h$. То есть можно попытаться учесть, что у электрона есть фаза, как у волны.

Рассмотрим вероятность W прохождения электрона от одного контакта до другого под действием электрического поля. Электрон может это сделать различным образом:

баллистически (то есть двигаясь по прямой мимо примесей), совершив одно столкновение, два и так далее. То есть имеется бесконечно много различных путей, по которым электрон может двигаться. В квантово-механическом подходе вероятность прохождения электрона через образец вычисляется как квадрат полной амплитуды прохождения по всем путям:

$$A = \sum_i A_i, \quad W = |A|^2 = \sum_i |A_i|^2 + \sum_{i \neq j} A_i A_j^*. \quad (289)$$

То есть к классическому первому слагаемому, равному сумме вероятностей пройти по всем независимым путям, нужно добавить ещё последнее – интерференционное слагаемое. Но, казалось бы, оно должно быть очень малым. Действительно, фаза, набираемая электроном на прямом участке длины r равна $k_F r$. Поэтому если рассмотреть два пути, отличающихся хотя бы на одно рассеяние, то разница их длин будет порядка длины свободного пробега l . Тогда разница фаз имеет порядок $k_F l \gg 1$ – она огромна, и при суммировании интерференционного слагаемого по всем траекториям мы получим ноль.

Это действительно так, но не для всех траекторий. Есть отдельный класс путей, на которых интерференция существенна. Это – траектории с самопересечением. Дело в том, что их пройти можно двумя способами – проходя петлю по и против часовой стрелки. В квантовой механике это – две различных траектории, и они имеют различные амплитуды вероятности прохождения. А фаза, набираемая электроном в обоих случаях будет абсолютно одинаковой, поскольку эти два процесса связаны операцией инверсии времени – электрон проходит по “петле”, просто в двух противоположных направлениях. Действительно, фаза, набираемая на каждом прямом участке между столкновениями, есть

$$\varphi_{21} = \frac{1}{\hbar} \int_1^2 \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_{21} = \frac{1}{\hbar} (-\mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}_{12} = \varphi_{12}. \quad (290)$$

Поскольку амплитуды вероятности рассеяния назад A_1 и A_2 имеют одинаковые фазы, их вклад в вероятность возврата в два раза больше, чем рассчитанный классически:

$$W_{cl} = |A_1|^2 + |A_2|^2, \quad W_{quant} = |A_1 + A_2|^2 = 2W_{cl}. \quad (291)$$

То есть петля из примесей служит резонатором для электронных волн. Распространяясь по нему в противоположных направлениях, электронные волны интерферируют и

образуют стоячую волну. Электроны как бы “зависают”, и вероятность распространения по таким траекториям уменьшается. Электроны немного локализуются примесями, поэтому данное явление называется *слабая локализация*.

Из-за таких петлевых траекторий распространение по образцу замедляется, проводимость уменьшается, а сопротивление, соответственно, увеличивается. Причиной служит волновая природа электронов, то есть относительная поправка к проводимости должна иметь порядок $\Delta\sigma/\sigma \sim -e^2/h$. Однако ещё нужно оценить относительное количество траекторий с самопересечением.

ХII.1. Оценка поправки к проводимости

Можно получить оценку для относительного вклада в проводимость. За промежуток времени dt вернуться в исходную точку смогут только те электроны, которые находятся в площади $dS = v_F \lambda_F dt$ от неё. Здесь $\lambda_F = 1/k_F$ – длина волны де Бройля электрона. А площадь, в которой может находиться электрон в момент времени t есть $S_{diff} = Dt$. Отсюда получаем:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \sim - \int_{\tau}^{L^2/D} \frac{dS}{S_{diff}} = -\frac{1}{k_F l} \ln \left(\frac{L^2}{l^2} \right). \quad (292)$$

Здесь мы обрезали интегрирование на нижнем пределе временем рассеяния τ , так как без рассеяния электрон не сможет вернуться, а на верхнем пределе – временем диффузионного достижения границ образца. Видно, что в двумерном случае поправка логарифмически усилена.

Если рассмотреть объёмный образец или проволоку, то площадь S_{diff} будет равняться, соответственно $(Dt)^{3/2}$ и $\sqrt{Dt}$, а $dS = v_F \lambda_F^2 dt$ и $dS = v_F dt$. Поэтому получим:

$$\Delta\sigma_3 \approx -\text{const} + \frac{e^2}{h} \frac{1}{L}, \quad \Delta\sigma_1 \approx -\frac{e^2}{h} L. \quad (293)$$

Различная зависимость от размера системы приводит к различному поведению систем размерности 3, 2 и 1 при нуле температур при увеличении силы беспорядка. Этот вопрос рассматривается в теории квантовых фазовых переходов, где характеристикой системы (управляющим параметром) предполагается кондактанс g – соответствующим образом обезразмеренная проводимость.

ХII.2. Сбой фазы и аномальная температурная зависимость проводимости

Мы видим, что к проводимости есть поправка, определяемая вероятностью возврата. Это позволяет трактовать её как изменение сечения рассеяния. То есть, с учётом квантовых эффектов, сечение рассеяния даже на изотропных примесях имеет пик при рассеянии точно на угол $\theta = \pi$. Ширина этого пика, то есть точность возврата, имеет порядок $1/k_F l \ll 1$, поскольку в проводимость вносят вклад только те процессы, которые приводят к рассеянию частицы в область площадью $\sim \lambda_F l$ вблизи первой примеси. Аналогичное явление имеет место и для световых волн. В экспериментах по рассеянию света на мутной среде наблюдается пик в рассеянии точно назад.

Отсюда ясно, что эта поправка к проводимости чувствительна к процессам потери когерентности. То есть если за время прохода петли у электрона изменится фаза волновой функции, то интерференции не будет, отрицательная поправка к проводимости будет меньше, проводимость будет ближе к классическому друдэвскому значению. Сбой фазы волновой функции происходит из-за процессов межэлектронного взаимодействия. Темп соответствующего процесса растёт степенным образом с температурой, обычно – линейно. Поэтому при конечной температуре вместо размера системы под логарифмом стоит длина сбоя фазы:

$$\delta\sigma(T) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \ln\left(\frac{L_\phi^2(T)}{l^2}\right) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \ln\left(\frac{\tau_\phi(T)}{\tau}\right), \quad \tau_\phi = L_\phi^2/D. \quad (294)$$

Время сбоя фазы много длиннее времени релаксации импульса: $\tau_\phi \gg \tau$. Эта формула описывает вклад в проводимость, аномально – логарифмически – зависящий от температуры.

ХII.3. Магнитосопротивление в классически слабых полях

Поскольку интерференция происходит на траекториях, связанных операцией инверсии времени, процессы или внешние параметры, “чувствительные” к инверсии времени влияют на поправку к проводимости. Такой параметр – магнитное поле. Действительно, из-за эффекта Ааронова-Бома, фазы на двух траекториях отличаются на удвоенный поток магнитного поля через петлю:

$$\varphi = \frac{1}{\hbar} \oint \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{r} = \varphi(0) - BS, \quad \Delta\varphi = 2BS. \quad (295)$$

Оценим величину поля, в котором квантовая поправка к проводимости будет подавляться. Для этого нужны поля $BL_\phi^2 \sim 1$. В реальных системах это – 10 ... 100 Gs, то есть поля очень слабые. Классическое магнитосопротивление в таких полях отсутствует, а квантовые поправки измеряются. Из подгонки теоретическими выражениями, параметрически зависящими от τ_ϕ , удаётся определять время сбоя фазы при различных температурах.

ХII.4. Влияние спиновой релаксации

Если в системе есть спин-зависимые процессы, то они существенным образом влияют на интерференционную поправку к проводимости. Время спиновой релаксации не просто перенормирует τ или τ_ϕ , а приводит к смене знака квантовой поправки.

Наиболее понятно это влияние можно проиллюстрировать на системе с линейным по $\mathbf{k}$ спин-орбитальным расщеплением спектра типа Рашбы. В этом случае спин электрона жёстко связан с направлением импульса – он тоже лежит в плоскости и перпендикулярен $\mathbf{k}$. Тогда после обхода петли, когда импульс повернулся на 180 градусов, то же самое случится и со спином. В результате фермионная волновая функция умножится на i . При обходе петли в противоположном направлении спин повернётся в другую сторону, и множитель изменится на $-i$. В результате изменится знак интерференционной поправки к проводимости: она станет положительной. Иногда об этом явлении говорят как об *антилокализации*.

Расчёт показывает, что независимые вклады в проводимость дают 4 интерференционных канала, соответствующие 4 возможным состояниям суммарного спина электрона до и после прохождения петли. При этом триплетные каналы дают отрицательный вклад, как и бесспиновые частицы, а синглетный канал – положительный:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \sim -\frac{1}{k_{Fl}} \int_{\tau}^{\tau_\phi} \frac{dt}{t} \left(\frac{3}{2} e^{-t/\tau_s} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{k_{Fl}} \left[\frac{3}{2} \ln \left(\frac{\tau_s}{\tau} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau_\phi}{\tau} \right) \right]. \quad (296)$$

Здесь предполагается, что время спиновой релаксации короче, чем фазовой. Спиновая релаксация не влияет на синглетный канал, а триплетный вклад подавляет. Видно, что второе слагаемое доминирует и отличается множителем $-1/2$ от ответа без спиновой релаксации. То есть знак поправки противоположный. Важно, что τ_s , в отличие от τ_ϕ ,

не зависит от температуры. Поэтому можно, меняя температуру, переходить от слабой антилокализации к локализации.

Магнитное поле подавляет и эту интерференцию. При антилокализации поправка положительна, поэтому магнитное поле, возвращая проводимость к классическому значению, уменьшает её. Вместо отрицательного имеет место положительное магнитосопротивление.

ХIII. Проводимость при сильной локализации

При низких температурах носители локализуются на дефектах, примесях и других несовершенствах, неизбежно присутствующих в образце. Энергии локализованных электронов лежат ниже дна зоны проводимости, а волновые функции сосредоточены в конечной области пространства: $\psi(\mathbf{r}) \sim \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/\xi)$, где $\mathbf{r}_0$ – координата центра локализации, а ξ называется длиной локализации. Координаты центров занимают случайные положения в образце.

В случае локализации на примесях, даже идентичных, примесной уровень $-E_0$ расплывается в зону из-за хаотических дальнедействующих электрических полей примесей, которые меняют энергии локализации на всех центрах. В результате все центры имеют разные энергии: два центра с одинаковой энергией находятся на бесконечном расстоянии друг от друга. Получается, что энергии ε локализованных состояний распределены квазинепрерывно, поэтому можно ввести понятие зоны локализованных состояний (в случае локализации на примесях в легированном полупроводнике – примесной зоны), в которой имеется плотность состояний $g(\varepsilon)$. Положение уровня Ферми и плотность состояний вычисляются с помощью самосогласованной процедуры. В нулевом приближении плотность состояний имеет вид колокола, центр которого ниже дна зоны проводимости на энергию E_0 , а уровень Ферми располагается немного выше центра.

При конечной температуре $T \sim E_0$ носители могут, поглотив фонон, делокализоваться и внести вклад в проводимость. Вероятность такого процесса пропорциональна бoльцмановской экспоненте, поэтому сопротивление образца в таком режиме зависит от температуры по закону Аррениуса:

$$R = R_0 \exp(E_0/T). \quad (297)$$

По температурной зависимости $\ln R$ судят о выполнении этих предсказаний.

ХIII.1. Прыжковая проводимость

При более низких температурах $T < E_0$ делокализация невозможна, и возникает перенос заряда по локализованным состояниям. Он осуществляется в результате “прыжков”, то есть туннелирования с одного центра локализации на другой. Это туннелирование не может быть резонансным, поэтому требует испускания фонона. Следовательно,

вероятность прыжка $i \rightarrow j$ имеет две малости – туннельную и температурную:

$$\frac{1}{\tau_{ji}} \propto e^{-2r_{ij}/\xi} e^{-\varepsilon_{ij}/T}, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j. \quad (298)$$

Соединим мысленно каждую пару центров локализации воображаемым сопротивлением $R_{ji} \propto \tau_{ji}$. Получится сетка случайных сопротивлений, называемая сеткой Миллера-Абрахамса. Сопротивление образца равно сопротивлению такой сетки резисторов, которые можно считать равными $R_0 \exp(2r_{ij}/\xi + \varepsilon_{ij}/T)$ с одинаковыми R_0 .²

Рассчитать сопротивление этой сетки невозможно, но точно это делать и не нужно. Решение задачи упрощается, потому что сопротивления между далеко расположенными узлами экспоненциально велики, и ток через них точно не потечёт. На этом основан принцип решения задачи: из сетки одно за другим убираются самые большие сопротивления до тех пор, пока сохраняется её односвязность. В итоге останется бесконечный кластер, по которому и осуществляется транспорт в неупорядоченной системе. Сопротивление образца будет равно самому большому сопротивлению, которое пришлось оставить. Аппарат, позволяющий таким образом рассчитывать сопротивление неупорядоченных систем, называется *теорией протекания*. Она определяет перколяционный радиус r_c – характерное расстояние между центрами локализации в кластере – при заданной концентрации центров n . Ясно, что $r_c = \alpha_d n^{-1/d}$, где $d = 2, 3$ – размерность пространства. Численные расчёты позволяют определить $\alpha_{2,3}$.

ХIII.2. Прыжки на ближайшие центры

Относительно простой случай – это режим, когда идут прыжки только на ближайшие центры. Наиболее вероятно, что исходное и конечное состояния будут по энергии вблизи максимума плотности состояний, то есть $\varepsilon_i \sim \varepsilon_j \sim E_0$. А поскольку первое из них должно быть занятым, а второе – свободным, их энергии локализации удовлетворяют неравенству $\varepsilon_i > \mu > \varepsilon_j$. Поэтому для прыжков на ближайшие соседи имеем

$$R = R_0 \exp(|\mu - E_0|/T). \quad (299)$$

² Можно показать, что $R_0 = T/(e^2 \Gamma)$, где Γ – темп переходов $i \rightarrow j$ в отсутствие внешнего поля, равный темпу обратных переходов $j \rightarrow i$.

Получается, что температурный множитель одинаков для всех пар, и сопротивление есть

$$R = R_0 \exp\left(\frac{|\mu - E_0|}{T} + \frac{2r_c}{\xi}\right) = R_0 \exp\left(\frac{|\mu - E_0|}{T} + \frac{2\alpha_d}{\xi n^{1/d}}\right). \quad (300)$$

В случае легированного полупроводника ξ – это боровский радиус: $\xi = a_B = \hbar^2 \kappa / (me^2)$, он известен из других измерений. Полученные из численного моделирования значения $\alpha_{2,3}$ хорошо согласуются с зависимостями сопротивления от концентрации при не слишком низких температурах.

Экспериментальные данные существуют для большого разброса концентраций – она варьировалась на 3 порядка величины. При этом сопротивление меняется на целых 12 порядков! И в диапазоне $T = 1 \dots 10$ К сопротивление экспоненциально зависит от $1/T$.

ХIII.3. Прыжки с переменной длиной. Закон Мотта

При $T \ll |\mu - E_0|$ уже трудно найти пару ближайших соседей из заполненного и пустого состояния. Действительно, большинство локализованных носителей имеют энергию $\approx E_0$, и, следовательно, они заняты. Поэтому транспорт будет идти по некоторой полосе вблизи энергии Ферми, и вопрос состоит в том, какова её ширина ε .

В такой полосе находится $N(\varepsilon) = g\varepsilon$ состояний на единицу объёма, где g – плотность состояний на уровне Ферми. Важное предположение: будем считать, что g не меняется на промежутке шириной ε вблизи μ . Среднее расстояние между центрами локализации $\bar{r}_{ij} \approx N^{-1/d}$, где $d = 2, 3$ – размерность пространства. И, поскольку разница энергий между ними $\sim \varepsilon$, вероятность прыжка имеет вид

$$W_{ji} \propto \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T} - \frac{2}{\xi N^{1/d}(\varepsilon)}\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T} - \frac{2}{\xi g^{1/d} \varepsilon^{1/d}}\right). \quad (301)$$

Видно, что имеется оптимальная ширина полоски: если она будет очень широкой, то не будет активации, а если слишком узкой, то придётся прыгать на очень длинное расстояние, что не выгодно. Оптимальная ширина находится из минимизации показателя экспоненты:

$$\varepsilon_{\text{opt}} \approx \left(\frac{T}{g^{1/d} \xi}\right)^{d/(d+1)}. \quad (302)$$

Отсюда следует, что полоса, в которой происходит транспорт, а с ней и длина прыжка, зависят от температуры. Это объясняет название данного режима.

Сопротивление зависит от температуры как $\exp(\varepsilon_{\text{opt}}/T)$, что даёт

$$R = R_0 \exp \left[\left(\frac{T_M}{T} \right)^{\frac{1}{d+1}} \right], \quad T_M = \frac{1}{g \xi^d}. \quad (303)$$

Величина T_M и зависимость $-\ln R \propto 1/T^{1/4}$ (или $1/T^{1/3}$ в двумерии) называются соответственно температурой и законом Мотта.

Закон Мотта наблюдается в экспериментах при низких температурах, но только в тех образцах, вблизи которых есть металлический электрод.

ХIII.4. Кулоновская щель. Закон Эфроса-Шкловского

В большинстве образцов показатель экспоненты не подчиняется закону Мотта. Принципиальная ошибка вышеизложенных рассуждений – игнорирование роли кулоновского взаимодействия. Его можно не учитывать только при сильной экранировке, в остальных же случаях оно приводит к новым результатам. Кулоновское взаимодействие существенно изменяет плотность локализованных состояний. На уровне Ферми плотность состояний g , как мы сейчас увидим, обращается в ноль.

Рассмотрим два центра, i и j , в некой полосе ε вблизи уровня Ферми. Пусть первый центр занят, а второй свободен: $E_i < \mu < E_j$ (здесь удобнее пользоваться энергиями E , а не энергиями локализации $\varepsilon = -E$). С учётом кулоновского отталкивания эти два центра не могут находиться на близком расстоянии.

Расстояние между центрами можно оценить следующим образом. При мысленном переносе электрона с i на j энергия системы меняется. Это изменение энергии должно быть положительным – иначе в равновесии электрон занимал бы уровень j , а не i . Изменение энергии при переходе $i \rightarrow j$ есть

$$E_j - E_i - \frac{e^2}{\kappa r_{ij}} > 0. \quad (304)$$

Здесь последнее слагаемое можно интерпретировать как притяжение электрона к оставленной им дырке, то есть так же, как экситонный эффект.

Определяя отсюда $\bar{r}_{ij} \approx e^2/[\kappa(\varepsilon_j - \varepsilon_i)] \approx e^2/\kappa\varepsilon$, получаем количество состояний в полоске ε

$$N_d(\varepsilon) \approx \frac{1}{\bar{r}_{ij}^d} \approx \left(\frac{\kappa\varepsilon}{e^2} \right)^d, \quad (305)$$

и плотность состояний

$$g_d(\varepsilon) = \frac{dN}{d\varepsilon} = d \left(\frac{\varkappa}{e^2} \right)^d \varepsilon^{d-1}, \quad g_d(0) = 0. \quad (306)$$

То есть существует щель в плотности состояний на уровне Ферми. Её причиной является кулоновское взаимодействие, поэтому она называется *кулоновской щелью*. Эта щель – “мягкая”: плотность состояний обращается точно в ноль только в одной точке, а вблизи энергии Ферми она растёт как ε^2 или как $|\varepsilon|$ соответственно в 3D и 2D системах.

Такое поведение плотности состояний меняет температурную зависимость сопротивления. Снова минимизируя показатель экспоненты

$$\frac{1}{\tau_{ji}} \propto \exp \left(-\frac{\varepsilon}{T} - \frac{2e^2}{\xi \varkappa \varepsilon} \right), \quad (307)$$

получим

$$\varepsilon_{\text{opt}} \approx \sqrt{T \frac{e^2}{\varkappa \xi}}, \quad (308)$$

и для сопротивления

$$R = R_0 \exp \left[\left(\frac{T_{\text{ES}}}{T} \right)^{1/2} \right], \quad T_{\text{ES}} = \frac{e^2}{\varkappa \xi}. \quad (309)$$

Величина T_{ES} и зависимость $-\ln R \propto 1/T^{1/2}$ (для обеих размерностей $d = 2, 3$) называются температурой и законом Эфроса-Шкловского. Эта зависимость наблюдается при низких температурах $0.01 \dots 4$ К в 90 % экспериментов.