Спиновые явления в полупроводниках. Курс лекций

М.М. Глазов

10 декабря 2018 г.

Оглавление

Оглавление **1**

Список основных обозначений **4**

Введение **6**

0 Кинетическое уравнение **8**

1 Эффекты обменного взаимодействия **13**
1.1 Обменное взаимодействие между электронами 13
1.2 Разбавленные магнитные полупроводники 18

2 Взаимодействие спина с магнитным полем **22**
2.1 Фактор Ланде электрона в кристалле и роль спин-орбитальной связи 22
2.2 Немного о g-факторе в гетероструктурах 26
2.3 Спиновые биения в магнитном поле 27

3 Оптическая ориентация электронных спинов **30**
3.1 Взаимодействие поляризованного света с носителями заряда в полупроводниках 30
3.1.1 Напоминание о поляризации света 30
3.1.2 Междузонные переходы под действием циркулярно поляризованного света 33
3.2 Оптическая ориентация и поляризованная люминесценция 35
3.3 Эффект Ханле 37

4 Спиновые расщепления электронных зон **39**
4.1 Феноменологический анализ 39

4.1.1 Примеры и упрощенный симметрийный анализ . . . 41
4.2 Микроскопические механизмы 42
4.2.1 Вклад Рашбы: объемный полупроводник во внешнем поле 43
4.3 Спиновые расщепления в структурах с квантовыми ямами и квантовыми проволоками 45

5 Спиновая релаксация в полупроводниках 48
5.1 Качественное описание 48
5.2 Описание спиновой релаксации в рамках кинетического уравнения 50
5.3 Пример: квантовая яма со спиновым расщеплением Рашбы 52
5.4 Влияние магнитного поля на спиновую релаксацию 53
5.5 Другие механизмы спиновой релаксации свободных носителей заряда 55

6 Электронный парамагнитный резонанс 57
6.1 Качественное описание 57
6.2 Классическая теория магнитного резонанса 59
6.3 Электрический дипольный спиновый резонанс 61
6.4 Оптически детектируемый магнитный резонанс 64

7 Метод “накачка – зондирование” 65
7.1 Феноменологическое описание 65
7.1.1 Объемный полупроводник 65
7.1.2 Детектирование спиновой поляризации в квантовых ямах и квантовых точках 67
7.2 Экспериментальный метод “накачка – зондирование” 69
7.3 Управление одиночным спином электрона в квантовой точке 70

8 Спектроскопия спиновых шумов 74
8.1 Спиновый шум и фарадеевское вращение 74
8.2 Элементы теории флуктуаций 75
8.3 Флуктуационно-диссипационная теорема 77
8.4 Информация в спектрах спинового шума 78

9 Спиновые токи 80
9.1 Электрические и спиновые токи 80

9.2 Спиновый эффект Холла 83
9.3 Эффект Мотта и микроскопическая природа спинового эффекта Холла 84
9.4 Наблюдение спинового тока: накопление спина на краях образца 86

10 Спин и электрический ток **88**
10.1 Аномальный эффект Холла 88
10.2 Гигантское магнитосопротивление 90
10.3 Ориентация спинов электрическим током 93

11 Ядерные спины в полупроводниках **95**
11.1 Сверхтонкое взаимодействие электронных и ядерных спинов 95
11.2 Дефазировка спинов локализованных электронов 97
11.3 Эффект Оверхаузера (динамическая поляризация ядер) . . 99

Вопросы и задачи для самостоятельной работы **103**

Список литературы **107**

Список основных обозначений

β_{ij}	компоненты псевдотензора, описывающего линейные по волновому вектору вклады в эффективный гамильтониан
$\boldsymbol{\Omega}$	угловая частота прецессии спина
$\boldsymbol{\Omega_k}$	эффективная частота спиновой прецессии, связанная со спин-орбитальным взаимодействием
$\boldsymbol{\sigma}$	псевдовектор, составленный из матриц Паули
$\boldsymbol{A}$	векторный потенциал электромагнитного поля
$\boldsymbol{B}$	магнитная индукция
$\boldsymbol{D}$	индукция электрического поля в среде
$\boldsymbol{E}$	напряженность электрического поля
$\boldsymbol{e}$	единичный вектор поляризации света
$\boldsymbol{G}$	темп генерации электронного спина
$\boldsymbol{H}$	напряженность магнитного поля
$\boldsymbol{M}$	намагниченность
$\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$	квазиимпульс электрона
$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$	радиус-вектор электрона
$\boldsymbol{\Omega}_N$	частота спиновой прецессии электрона в поле статической ядерной флуктуации
χ	спиновая часть волновой функции
$\Delta\mathcal{E}_e$	зеемановское расщепление электронных спиновых подуровней
$\Delta\mathcal{E}_n$	зеемановское расщепление ядерных спиновых подуровней
γ_{ijkl}	компоненты псевдотензора, описывающего кубические по волновому вектору вклады в эффективный гамильтониан
$\hat{\Gamma}$	тензор обратных времен спиновой релаксации
$\hbar$	постоянная Планка
μ	химический потенциал электронного газа
μ_B	магнетон Бора

$\mu_{ij}(\omega)$	тензор спиновой восприимчивости
ω_C	циклотронная частота
ψ	волновая функция
σ_{ij}	тензор проводимости электронов
τ_r	время рекомбинации
τ_s	время спиновой релаксации
ε_{ij}	компоненты тензора диэлектрической проницаемости
$\varkappa$	статическая диэлектрическая проницаемость
A, B, ξ	параметры, характеризующие подмешивание состояний валентной зоны к зоне проводимости, уравнения (4.10), (4.15)
c	скорость света в вакууме
D	коэффициент диффузии электронов
e	заряд электрона
E_p	дисперсия электрона
$f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$	функция распределения электронов
G	темп генерации электронов
g	фактор Ландé электрона в полупроводнике
$g_0 = 2$	фактор Ландé свободного электрона
$G_{\alpha;ij}$	псевдотензор спиновой (спин-холловской) проводимости электронов
J_i^α	компоненты псевдотензора спинового тока
k_B	постоянная Больцмана
m	эффективная масса
m_0	масса свободного электрона
P_l, P_l'	параметры Стокса, описывающие линейную поляризацию света
P_{circ}	степень циркулярной поляризации света
p_{cv}	междузонный матричный элемент оператора импульса
S	полный спин системы (пары) электронов
S_z	проекция полного спина на ось z
s_z	проекция спина на ось z
T	температура
t	время
T_s	время жизни спина

Введение

В курсе “Спиновые явления в полупроводниках” речь пойдет о проявлении внутренней степени свободы электрона – его спина в различных физических явлениях, наблюдаемых в полупроводниках.

Рис. 1: Круг явлений, изучаемых в полупроводниковой спинтронике.

Выбор тематик курса

1. обменное взаимодействие между электронами,
2. взаимодействие спинов с магнитным полем,
3. оптическая ориентация электронных спинов и связанные с ней явления,

4. спиновые расщепления электронных зон,
5. спиновая релаксация в полупроводниках,
6. магнитный резонанс,
7. метод накачка-зондирование и спектроскопия спиновых шумов,
8. спиновые токи,
9. ядерные спины в полупроводниках

является, по сути, вопросом моего вкуса. Оказывается, что именно в полупроводниках спин – внутренняя степень свободы электрона – проявляется очень ярко. Схематически изучаемые в полупроводниковой спинтронике явления приведены на рис. 1.

При изучении курса рекомендуется иметь под рукой книгу А.И. Ансельма, *Введение в теорию полупроводников* [1], а также найти сборник под редакцией Б.П. Захарчени и Ф. Мейера, *Оптическая ориентация* [2]. Могут быть полезны и более современные книги: *Spin physics in Semiconductors* под редакцией М.И. Дьяконова [3] и *Electron & Nuclear Spin Dynamics in Semiconductor Nanostructures* автора этого курса [4].

Лекция 0

Кинетическое уравнение

Данная лекция призвана восполнить один пробел в образовании: я расскажу о кинетическом уравнении. Хотя, на первый взгляд, это и не связано напрямую со спиновыми явлениями, метод кинетического уравнения оказывается очень полезным для изучения динамики спинов.

Итак, забудем пока про спин и рассмотрим ансамбль электронов. Будем характеризовать этот ансамбль функцией распределения $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$, которая зависит от времени t, координаты $\boldsymbol{r}$ и импульса $\boldsymbol{p}$. Соответственно, физический смысл функции $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ – плотность частиц в фазовом пространстве, т.е. число частиц dN в элементе фазового пространства $d\Gamma = d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{p}/(2\pi\hbar)^d$ ($d = 1, 2$ или 3 – размерность системы)

$$dN = 2f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})d\Gamma.$$

Описание ансамбля с помощью такой функции распределения является квазиклассическим (иначе невозможно говорить об одновременной координатной и импульсной зависимости функции f). Важно отметить, что множитель 2 в этой формуле возник из-за суммирования по спиновым состояниям электрона.

В условиях термодинамического равновесия в однородной системе функция $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) \equiv f_0(\boldsymbol{p})$, причем $f_0(\boldsymbol{p})$ есть распределение Ферми-Дирака

$$f_0(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_{\boldsymbol{p}} - \mu}{k_B T}\right)}, \tag{0.1}$$

где $E_{\boldsymbol{p}}$ – закон дисперсии электронов, μ – химический потенциал, а $k_B T$ – температура, выраженная в энергетических единицах. Зависимость хи-

мического потенциала от температуры определяется условием постоянства числа частиц в системе

$$N = 2\int d\Gamma f_0(\boldsymbol{p}) = 2\frac{V_d}{(2\pi\hbar)^d}\int d\boldsymbol{p} f_0(\boldsymbol{p}) = 2\sum_{\boldsymbol{p}} f_0(\boldsymbol{p}). \tag{0.2}$$

Здесь V_d – нормировочный объем d-мерной системы, и мы воспользовались удобным обозначением[1]

$$\sum_{\boldsymbol{p}} \ldots = \frac{V_d}{(2\pi\hbar)^d}\int d\boldsymbol{p}\ldots \tag{0.3}$$

В неравновесных условиях функция распределения, естественно, отличается от ферми-дираковской. Предположим, что электроны не взаимодействуют друг с другом, с примесями и фононами. Тогда единственной причиной изменения числа электронов в данном элементе фазового пространства является изменение импульса частицы [под действием внешних сил $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t)$] или координаты электрона (за счет движения с некоторой скоростью $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} = \partial E_{\boldsymbol{p}}/\partial \boldsymbol{p}$). Частицы перераспределяются между элементами фазового пространства, однако полное их число не меняется. Поэтому можно написать

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = 0. \tag{0.4}$$

Уравнение (0.4) – теорема Лиувилля о сохранении объема в фазовом пространстве. Она доказывалась в курсе *теоретической механики.*

Процессы столкновений частиц между собой, а также с примесями и другими частицами или квазичастицами (например, с фононами) приводят к тому, что электроны переходят из одного элемента фазового пространства в другой случайным образом (столкновения, как правило, описывают с помощью *вероятностей* переходов, определяемых квантовомеханически). При этом, уравнение (0.4) уже не выполяется. Запишем

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = \mathrm{St}\{f\}, \tag{0.5}$$

[1] *Вопрос на эрудицию:* откуда берется множитель $(2\pi\hbar)^{-d}$ в фазовом объеме и в формуле для $\sum_{\boldsymbol{p}}$?

где $\mathrm{St}\{f\}$ – некоторый оператор, действующий на функцию распределения, который определяет скорость изменения функции f за счет столкновений. Этот оператор называют *интегралом столкновений*, а само уравнение (0.5) – *кинетическим уравнением* или *уравнением Больцмана*. Отметим, что интеграл столкновений должен сохранять полное число частиц

$$\sum_{\boldsymbol{p}} \mathrm{St}\{f\} = 0.$$

Фактически, оператор $\mathrm{St}\{f\}$ описывает процессы релаксации системы из неравновесного состояния к состоянию термодинамического равновесия. Вид интеграла столкновений определяется процессами рассеяния в системе. В качестве примера рассмотрим рассеяние электронов на примесях или фононах и введем величину $W_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}}$, описывающую число переходов в единицу времени электрона из (квантовомеханического) состояния с импульсом $\boldsymbol{p}$ в состояние с импульсом $\boldsymbol{p}'$.[2] Ясно, что при столкновениях функция распределения $f(\boldsymbol{p})$ изменяется по двум причинам: электроны из состояний $\boldsymbol{p}' \neq \boldsymbol{p}$ за счет столкновений с примесями приходят в состояние $\boldsymbol{p}$ (процессы прихода), а также электроны из состояния $\boldsymbol{p}$ после рассеяния могут оказаться в состоянии $\boldsymbol{p}'$. Интеграл столкновений описывает баланс этих процессов, в простейшем случае он имеет следующую форму

$$\mathrm{St}\{f\} = \sum_{\boldsymbol{p}'} \left\{ W_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} f(\boldsymbol{p}')[1 - f(\boldsymbol{p})] - W_{\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}} f(\boldsymbol{p})[1 - f(\boldsymbol{p}')] \right\}. \tag{0.6}$$

Вообще говоря, вывод интеграла столкновений представляет собой сложную квантовомеханическую задачу.

Отметим, что равновесная функция распределения (0.1) должна удовлетворять кинетическому уравнению (при $\boldsymbol{F} \equiv 0$). Это означает, что интеграл столкновений обнуляется на функции Ферми-Дирака. *Проверьте это.* Зачастую интеграл столкновений представляют в следующем виде

$$\mathrm{St}\{f\} = -\frac{\delta f(\boldsymbol{p})}{\tau(E_{\boldsymbol{p}})}, \tag{0.7}$$

где $\delta f(\boldsymbol{p})$ – отклонение функции распределения от равновесной, а $\tau(E_{\boldsymbol{p}})$ – феноменологическое время релаксации. Указанное приближение для

[2] Определите вероятность W квантовомеханически из золотого правила Ферми для примесей концентрации n_i, описываемых короткодействующим потенциалом $U(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) = U_0 \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$, где $\boldsymbol{r}_i$ – координата примеси.

интеграла столкновений называют *приближением времени релаксации* или τ-*приближением*. Отметим, что главным критерием применимости кинетического уравнения является следующее неравенство

$$\overline{E_{\boldsymbol{p}}\tau(E_{\boldsymbol{p}})}/\hbar \gg 1, \tag{0.8}$$

где черта сверху обозначает усреднение по ансамблю электронов.

Для примера найдем из кинетического уравнения проводимость электронного газа. Пусть электроны описываются параболическим законом дисперсии $E_{\boldsymbol{p}} = p^2/2m$, а внешняя сила является пространственно однородной и имеет вид $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{E}$ – напряженность электрического поля, $e = -|e|$ – заряд электрона. Отклик электронов на внешнее поле будем искать методом последовательных приближений[3]

$$e\boldsymbol{E}\frac{\partial f_0(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}} = -\frac{\delta f(\boldsymbol{p})}{\tau}. \tag{0.9}$$

Для простоты мы приняли, что τ не зависит от энергии электрона. Поскольку равновесная функция распределения электронов есть функция энергии, то

$$\frac{\partial f_0(\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} f_0',$$

где штрих обозначает дифференцирование по энергии, $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}/m$. Из (0.9) имеем

$$\delta f(\boldsymbol{p}) = -e\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}} f_0'\tau.$$

Плотность электрического тока по определению (второе равенство написано для $d = 3$)

$$\boldsymbol{j} = \frac{2}{V_d}\sum_{\boldsymbol{p}} e\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{p}}\delta f(\boldsymbol{p}) = -2e^2\tau\boldsymbol{E}\int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3}\frac{p^2}{3m^2}f_0'. \tag{0.10}$$

Отсюда проводимость электронов есть

$$\sigma = -\frac{e^2\tau}{3m^2\pi^2\hbar^3}\int dp p^4 f_0'.$$

Этот ответ удобно представить в следующем виде

$$\sigma = \frac{e^2 n\tau}{m}, \tag{0.11}$$

[3] *Задание:* проанализируйте ответ и установите критерий малости поля.

где $n = 2V_d^{-1}\sum_{\boldsymbol{p}} f_0(\boldsymbol{p}) = N/V_d$ – концентрация электронов. *Получите аналогичный ответ для "двумерных" электронов.*

Сделаем несколько замечаний:

- Вероятности $W_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}$ можно связать с (классическим) сечением рассеяния электронов на примесях или фононах. Это наводит на мысль о том, что интеграл столкновений можно получить классически из следующих соображений. Запишем силу $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, действующую на электрон, через потенциал электрона в поле примесей, а затем попробуем решить кинетическое уравнение "итерируя" по полевому члену. Оказывается, что во втором порядке по этому члену получается интеграл столкновений в виде (0.6).

- Иногда на первый взгляд неясно, нужно ли некоторый физический процесс, например, взаимодействие с высокочастотным электромагнитным полем, включить в интеграл столкновений или в полевое слагаемое кинетического уравнения. Существует простой критерий: введем ω – характерную частоту, соответствующую данному процессу. Если выполнено условие $\hbar\omega \ll \bar{E}$, где $\bar{E}$ – характерная энергия электронов (k_BT или μ), то процесс следует учесть в виде полевого слагаемого. Если же $\hbar\omega \gtrsim \bar{E}$, то данный процесс вносит вклад в интеграл столкновений.

- Вопрос о том, как включить спин в описание с помощью функции распределения, будет рассмотрен далее. В ряде задач достаточно считать, что функция распределения зависит еще от квантового числа s_z - проекции спина на данную ось: $f = f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, s_z)$. Такое описание является неполным. Полное описание можно выполнить с помощью спиновой матрицы плотности. Зачастую это описание эквивалентно тому, что вводится $\boldsymbol{s}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ – средний спин электрона в элементе фазового пространства. Такая функция $\boldsymbol{s}$ удовлетворяет уравнению подобному (0.5).

Подробнее про кинетическое уравнение можно почитать в томе 10 курса Ландау и Лифшица (*Физическая кинетика*) [5] и в книге Ансельма (*Введение в теорию полупроводников*) [1], главы VIII и IX.

Лекция 1

Эффекты обменного взаимодействия

На данной лекции мы попробуем навести порядок с обозначениями и терминами, а также поговорим о тех физических ситуациях, где спиновые эффекты могут быть очень существенными. Мы обсудим обменное взаимодействие между электронами и разбавленные магнитные полупроводники.

1.1 Обменное взаимодействие между электронами

Как хорошо известно, электрон обладает спином (внутренним магнитным моментом, дополнительной степенью свободы) $s = 1/2$. Здесь и далее множитель $\hbar$ в определении спина опускаем, связь спина электрона и его магнитного момента обсуждается ниже в разделе 1.2. Состояние одного электрона можно характеризовать переменными $\boldsymbol{r}$ (радиус-вектор электрона) и s_z (проекцией спина на данную ось). Волновую функцию электрона можно записать как

$$\Psi_1 = \psi(\boldsymbol{r}, s_z), \quad s_z = \pm 1/2,$$

или представить в виде двухкомпонентного столбца

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \psi(\boldsymbol{r}, 1/2) \\ \psi(\boldsymbol{r}, -1/2) \end{bmatrix}.$$

Еще удобно ввести базисные спиноры $|\uparrow\rangle = |1/2\rangle = [1,0]^{\mathrm{T}}$, $|\downarrow\rangle = |-1/2\rangle = [0,1]^{\mathrm{T}}$ и разложить волновую функцию по базису

$$\Psi_1 = \psi(\boldsymbol{r}, 1/2)|\uparrow\rangle + \psi(\boldsymbol{r}, -1/2)|\downarrow\rangle.$$

Обсудим теперь "стандартную" задачу из учебника о двух электронах. Перейдем к двум электронам. Согласно общим принципам квантовой механики волновая функция пары фермионов (частиц с полуцелым спином) $\Psi_2 = \psi(\boldsymbol{r}_1, s_z^{(1)}, \boldsymbol{r}_2, s_z^{(2)})$ антисимметрична относительно перестановки частиц:

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, s_z^{(1)}, \boldsymbol{r}_2, s_z^{(2)}) = -\psi(\boldsymbol{r}_2, s_z^{(2)}, \boldsymbol{r}_1, s_z^{(1)}). \tag{1.1}$$

Сделаем два упрощающих предположения:

1. Рассмотрим электроны, локализованные, например, на донорах в объемном полупроводнике или в квантовых точках, и предположим, что кулоновское взаимодействие между этими электронами мало. Таким образом, кулоновское взаимодействие мы будем учитывать по теории возмущений, считая его слабым по сравнению с тем потенциалом, в котором локализован электрон.[1]

2. Пренебрежем спин-орбитальным взаимодействием.

Таким образом двухчастичную волновую функцию можно записать в виде

$$\Psi_2 = \psi(\boldsymbol{r}_1, s_z^{(1)}, \boldsymbol{r}_2, s_z^{(2)}) = \mathcal{N}\left[\psi_1(\boldsymbol{r}_1)\psi_2(\boldsymbol{r}_2) \pm \psi_1(\boldsymbol{r}_2)\psi_2(\boldsymbol{r}_1)\right]\chi_{s_z^{(1)}, s_z^{(2)}}. \tag{1.2}$$

Здесь введены следующие обозначения: $\mathcal{N}$ – нормировочная постоянная, $\psi_1(\boldsymbol{r})$, $\psi_2(\boldsymbol{r})$ – орбитальные волновые функции, описывающие локализацию электронов, см. рис. 1.1, $\chi_{s_z^{(1)}, s_z^{(2)}}$ – спиновая часть. Отметим, что разделение орбитальных и спиновых степеней свободы допустимо из-за нашего предположения 2 об отсутствии спин-орбитального взаимодействия, а слабость кулоновского взаимодействия (предположение 1) позволяет разделить орбитальное движение первого и второго электрона.

[1] Для электронов, локализованных на донорах, это приближение не работает. *Вопрос:* почему?

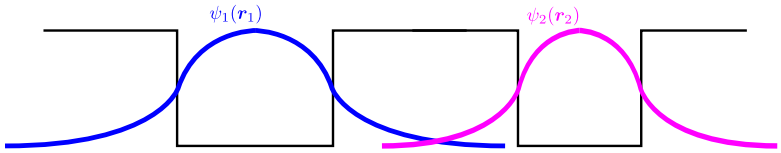

Рис. 1.1: Схематическая иллюстрация орбитальных волновых функций $\psi_1(\boldsymbol{r}_1)$ и $\psi_2(\boldsymbol{r}_2)$ локализованных электронов.

Возможные варианты для спиновой части волновой функции таковы

$$\chi_{s_z^{(1)},s_z^{(2)}} = \begin{cases} |\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2, & S=1, \quad S_z=1 \\ |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2, & S=1, \quad S_z=-1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2), & S=1, \quad S_z=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2), & S=0, \quad S_z=0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Три верхних из перечисленных спиновых функций симметричны по отношению перестановки электронов, поэтому они должны умножаться на антисимметричную координатную функцию, нижняя функция – антисимметричная, поэтому в полную функцию пары электронов она входит вместе с симметричной орбитальной функцией.

Мы установили вид спиноров лишь из соображений симметрии по отношению к перестановке частиц и отсутствия спин-орбитальной связи. Этот же результат можно получить из общих правил сложения (спиновых) моментов. Действительно, полный спин пары электронов S (заглавными буквами обозначаем суммарный спин) может быть либо 0 (его проекция на данную ось z – $S_z = 0$), либо 1 (три варианта проекции $S_z = -1, 0, 1$).[2] Вид спиноров устанавливается из правил сложения моментов (*проделайте это для того, чтобы вспомнить про коэффициенты Клебша-Гордана*). Таким образом, двухчастичная функция может быть представлена как

$$\Psi_t = \mathcal{N}\left[\psi_1(\boldsymbol{r}_1)\psi_2(\boldsymbol{r}_2) - \psi_1(\boldsymbol{r}_2)\psi_2(\boldsymbol{r}_1)\right]|S=1, S_z\rangle, \tag{1.4a}$$

$$\Psi_s = \mathcal{N}\left[\psi_1(\boldsymbol{r}_1)\psi_2(\boldsymbol{r}_2) + \psi_1(\boldsymbol{r}_2)\psi_2(\boldsymbol{r}_1)\right]|S=0, 0\rangle. \tag{1.4b}$$

Три состояния, описываемые функций типа (1.4a) (с $S_z = -1, 0, 1$), называются триплетными, а состояние (1.4b) – синглетным. Поскольку эти

[2] *Вопрос:* почему полный спин и его проекция на заданную ось являются “хорошими” квантовыми числами?

состояния относятся к разному полному моменту, то, из общих соображений, синглет и триплет могут быть расщеплены, как это проиллюстрировано на рис. 1.2. На первый взгляд кажется, что расщепление возникает только при учете спин-орбитальной связи, однако это не так.

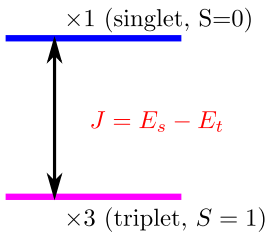

Рис. 1.2: Спиновые уровни пары электронов.

Учтем в первом порядке теории возмущений кулоновское взаимодействие между электронами

$$V_c(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \frac{e^2}{\varkappa|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}.$$

Здесь $\varkappa$ – статическая диэлектрическая проницаемость. Легко проверить, что все недиагональные компоненты кулоновского взаимодействия в базисе (1.4) обнуляются, а диагональные имеют вид

$$E_t = \langle S = 1, S_z|V_c|S = 1, S_z\rangle = E_d - E_x, \tag{1.5a}$$

$$E_s = \langle S = 0, 0|V_c|S = 0, 0\rangle = E_d + E_x, \tag{1.5b}$$

где[3]

$$E_d = 2\mathcal{N}^2\frac{e^2}{\varkappa}\int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 \frac{\psi_1^2(\boldsymbol{r}_1)\psi_2^2(\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}, \tag{1.6}$$

и

$$E_x = 2\mathcal{N}^2\frac{e^2}{\varkappa}\int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 \frac{\psi_1(\boldsymbol{r}_1)\psi_2(\boldsymbol{r}_2)\psi_1(\boldsymbol{r}_2)\psi_2(\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}, \tag{1.7}$$

Величина E_d – энергия "прямого" (в англоязычной литературе *direct*) кулоновского взаимодействия (видно, что это взаимодействие типа плотность заряда – плотность заряда), а E_x – обменное взаимодействие (*exchange*). Вклад E_x связан именно с антисимметричностью волновой функ-

[3]Волновые функции считаются вещественными.

ции. Если расстояние между центрами локализации электронов d, а радиус локализации $a \ll d$, то очень грубые оценки для этих величин таковы: $E_d \sim e^2/(\varkappa d)$, $E_x \sim \mathrm{e}^{-2d/a} E_d$. Соответственно, расщепление между синглетом и триплетом составляет

$$J = E_s - E_t = 2E_x.$$

Важно отметить, что это расщепление не связано со спин-орбитальным взаимодействием, поэтому оно не мало (в квантовых точках может быть $\gtrsim 1$ мэВ).[4]

Вопрос о знаке J – очень тонкий. Случай $J > 0$ (триплет ниже по энергии, как получилось у нас) называют *ферромагнитным* взаимодействием, а $J < 0$ – *антиферромагнитным*.

Хотя обменное взаимодействие электронов есть результат их кулоновского отталкивания (и требования к антисимметрии волновой функции), зачастую при изучении спиновых эффектов удобно ввести гамильтониан "обменного взаимодействия", действующий в пространстве спиновых состояний. Введем оператор спина электрона $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$, где $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ – (псевдо) вектор, составленный из матриц Паули. Можно убедиться, что в наших обозначениях гамильтониан обменного взаимодействия записывается как[5]

$$\mathcal{H}_x = -J\boldsymbol{s}^{(1)} \cdot \boldsymbol{s}^{(2)}. \tag{1.8}$$

Учет спин-орбитальной связи может видоизменить гамильтониан взаимодействия спинов. Взаимодействие, описываемое формулой (1.8), называется гейзенберговским, взаимодействие типа $s_z^{(1)} s_z^{(2)}$ – изинговским, а типа $s_x^{(1)} s_y^{(2)} + s_y^{(1)} s_x^{(2)}$ – XY-обменом. Физические явления, обусловленные обменным взаимодействием, как правило, "сильные" (например, ферромагнетизм). Такие явления широко используются в приборах, к примеру, в компасе.

Следующий сюжет этой лекции прямо вытекает из вышеизложенного. Мы рассмотрим полупроводниковые системы, где сильно обменное взаимодействие между электронами.

---

[4]Магнитное (диполь-дипольное) взаимодействие между электронными спинами в полупроводниках пренебрежимо мало.

[5]Для проверки удобно воспользоваться соотношением $S^2 = (\boldsymbol{s}^{(1)} + \boldsymbol{s}^{(2)})^2$.

1.2 Разбавленные магнитные полупроводники

В англоязычной литературе *diluted magnetic semiconductors*, у нас также используется термин *полумагнитные полупроводники*.

Речь пойдет о полупроводниках, легированных "магнитными" примесями (т.е. примесями с нечетным числом электронов на внешних оболочках). Например, CdTe:Mn – твердый раствор $\mathrm{Cd}_{1-x}\mathrm{Mn}_x\mathrm{Te}$, где $x \ll 1$ (обычно $x \simeq 1\%$). Mn "отдает" два электрона на химические связи и на внешней оболочке остается 5 "неспаренных" электронов ($3d^5 4s^2 \to 3d^5$).[6] Эти 5 внешних электронов локализованы вблизи иона Mn^{2+} на масштабах порядка 1 Å, поэтому их можно рассматривать как эффективный спин $I = 5/2$.

Прежде, чем перейти к дальнейшей дискуссии, введем следующие обозначения. Рассмотрим свободный электрон со спином $\boldsymbol{s}$. Его магнитный момент $\boldsymbol{\mu} = 2\mu_e \boldsymbol{s} = -2\mu_B \boldsymbol{s}$, где $\mu_B = |e|\hbar/(2m_0 c) \approx 0.9 \times 10^{-20}$ эрг/Гс, m_0 – масса свободного электрона, $\hbar$, c – мировые постоянные.

Энергия взаимодействия магнитного момента с полем $\boldsymbol{B}$ записывается как $-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{B} = 2\mu_B \boldsymbol{s}\boldsymbol{B} = g_0 \mu_B \boldsymbol{s}\boldsymbol{B}$, где $g_0 = 2$ – g-фактор свободного электрона. Однако, в кристаллах $g \neq 2$, кроме того, связь между $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{B}$ может не сводиться к скалярному произведению (причины этого мы обсудим на следующей лекции, сейчас анизотропией взаимодействия спина и поля мы пренебрежем). Окончательно, гамильтониан взаимодействия электрона со внешним полем представим в виде

$$\mathcal{H}_B = \frac{1}{2} g \mu_B \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{B} \quad \left(\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\right). \tag{1.9}$$

Пусть поле направлено по оси z. Тогда в нижнем по энергии состоянии (если $g > 0$) $s_z = -1/2$, а магнитный момент электрона выстроен по полю. Расщепление между спиновыми подуровнями составляет $g\mu_B B$. В общем случае с учетом кристаллической анизотропии

$$\mathcal{H}_B = \frac{1}{2} \mu_B g_{ij} \sigma_i B_j,$$

где g_{ij} – тензор g-факторов.

[6] Эти рассуждения очень наивны.

В разбавленных магнитных полупроводниках имеется две спиновые системы: электронов проводимости и магнитных ионов. Эти подсистемы взаимодействуют, гамильтониан их обменного взаимодействия можно записать в виде

$$\mathcal{H}_{e-Mn} = -\alpha \sum_i (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{I}_i)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i), \tag{1.10}$$

где α – некоторая константа, i нумерует магнитные ионы, $\boldsymbol{R}_i$ – их положения, $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор электрона, δ-функция отражает то обстоятельство, что для "обменного" взаимодействия требуется перекрытие волновых функций электрона проводимости и электронов на Mn^{2+}.[7] Взаимодействием электронов проводимости друг с другом можно, как правило, пренебречь, считая их концентрацию малой. Отметим, что магнитные ионы также взаимодействуют друг с другом. При достаточно большой их концентрации возможен даже переход подсистемы ионов в магнитоупорядоченное (ферро- или антиферромагнитное) состояние. Таких эффектов здесь мы изучать не будем.

Кратко обсудим константу α. Её расчету посвящено множество работ, для этого используются разнообразные тонкие методы теории твердых тел. В частном случае CdTe:Mn $\alpha > 0$, что соответствует в нашей терминологии ферромагнитному взаимодействию. По порядку величины ее можно оценить как 1 эВ·Å^3 (размерность очевидна, а величина должна быть порядка "атомной").

Перейдем теперь к вопросу о расщеплении электронных подуровней в магнитном поле. Для начала рассмотрим систему магнитных ионов. Известно, что g-фактор марганца близок к $g_0 = 2$, а сами ионы слабо взаимодействуют друг с другом, поэтому (средний) спин Mn можно представить в виде

$$\langle I_z \rangle = -IB_I\left(\frac{g_0\mu_B IB}{k_B T_{\mathrm{Mn}}}\right). \tag{1.11}$$

Здесь $I = 5/2$, T_{Mn} – температура магнитной системы (иногда она отличается от температуры электронов и решетки), $B_I(x)$ – функция Бриллюэна,

$$B_I(x) = \left(\sum_{m=-I}^{I} m \exp\left(xm/I\right)\right) / \left(I \sum_{m=-I}^{I} \exp\left(xm/I\right)\right),$$

[7] *Вопрос:* почему именно $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i)$, а не конструкция как в формуле (1.7)?

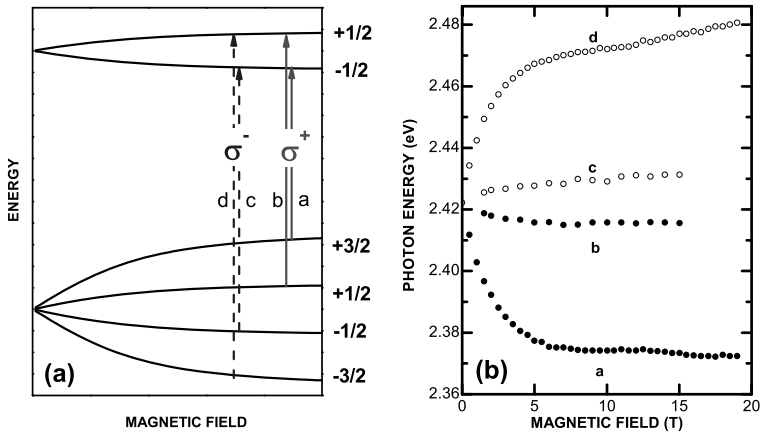

Рис. 1.3: (a) Схема междузонных переходов в присутствии магнитного поля (геометрия Фарадея, поле вдоль луча света). Состояния валентной зоны обозначены в дырочном представлении (компонента спина электрона в валентной зоне имеет противоположный знак). (b) Измеренные энергии междузонных переходов в образце $Zn_{0.95}Mn_{0.05}Te$ в зависимости от магнитного поля. Воспроизведено из гл. 13 “Diluted Magnetic Semiconductors: Basic Physics and Optical Properties”, J. Cibert and D. Scalbert книги *Spin physics in semiconductors* под ред. М.И. Дьяконова [3].

описывает статистику заполнения подуровней иона Mn. [8] Отметим, что с учетом связи спина и магнитного момента, магнитный момент одиночного иона марганца можно представить в виде

$$M_z = -g_0\mu_B\langle I_z\rangle = g_0\mu_B I B_I\left(\frac{g_0\mu_B IB}{k_B T_{\mathrm{Mn}}}\right). \tag{1.12}$$

Спин электрона согласно (1.9) и (1.10) находится в эффективном поле, равном сумме внешнего поля и “обменного” поля, действующего со стороны Mn. Расщепление электронных уровней записывается в виде

$$\Delta\mathcal{E}_e = \langle\uparrow|\mathcal{H}_B+\mathcal{H}_{e-Mn}|\uparrow\rangle-\langle\downarrow|\mathcal{H}_B+\mathcal{H}_{e-Mn}|\downarrow\rangle = g\mu_B B-\alpha n_{\mathrm{Mn}}\langle I_z\rangle, \tag{1.13}$$

где n_{Mn} – объемная концентрация ионов марганца. В малых магнитных полях $\Delta\mathcal{E}_e \approx g_{\mathrm{eff}}\mu_B B$, причем, как правило, эффективный g-фактор

[8] *Получите для этой функции аналитическое выражение и асимптотики в пределах низкой и высокой температур.*

$|g_{\text{eff}}| \gg |g|$. В больших магнитных полях вклад, связанный с намагничиванием Mn насыщается. Это проиллюстрировано экспериментальными данными, приведенными на рис. 1.3(b). Панель (a) этого рисунка демонстрирует схему оптических междузонных переходов, которые используются для детектирования зеемановского расщепления электронных и дырочных уровней.

Подробнее про разбавленные магнитные полупроводники можно прочитать в обзоре T. Jungwirth, J. Sinova, J. Mašek, J. Kučera, and A. H. MacDonald, *Theory of ferromagnetic (III,Mn)V semiconductors*, Rev. Mod. Phys. **78**, 809 (2006) [6] и в обзоре T. Dietl and H. Ohno, *Dilute ferromagnetic semiconductors: Physics and spintronic structures*, Rev. Mod. Phys. **86**, 187 (2014) [7]. Магнитный момент электрона и его знак обсуждается в томе 3 курса Ландау и Лифшица [8].

Лекция 2

Взаимодействие спина с магнитным полем

На прошлой лекции мы рассматривали ситуации, когда обменное взаимодействие между электронами может быть существенно. Мы разобрали случай разбавленного магнитного полупроводника и обсудили гигантский эффект Зеемана. На этой лекции мы сделаем шаг в сторону обычных (немагнитных) полупроводников и обсудим круг задач, связанных со взаимодействием электронного спина и магнитного поля. Речь пойдет о перенормировке g-фактора в полупроводниках, обусловленной спин-орбитальным взаимодействием, и о спиновых биениях.

2.1 Фактор Ланде электрона в кристалле и роль спин-орбитальной связи

В общем случае гамильтониан взаимодействия спина электрона с магнитным полем записывают в виде

$$\mathcal{H}_B = \frac{1}{2}\mu_B \sum_{\alpha\beta} \sigma_\alpha g_{\alpha\beta} B_\beta. \tag{2.1}$$

Здесь $\mu_B = |e|\hbar/(2m_0c)$ – магнетон Бора, σ_α – матрицы Паули, $g_{\alpha\beta}$ – тензор g-факторов электрона (факторов Ланде́),[1] греческие индексы α, β нумеруют декартовы координаты x, y, z. Мы будем рассматривать

[1] *Почему тензор, а не псевдотензор?*

прямозонные полупроводники с решеткой цинковой обманки (например, GaAs) и изучать эффект Зеемана в зоне проводимости Γ_6. Такие системы имеют кубическую симметрию, поэтому тензор g-факторов сводится к скаляру

$$g_{\alpha\beta} = g\delta_{\alpha\beta}.$$

Для свободного электрона в вакууме $g_0 = 2$. В полупроводниках (как будет показано ниже) величина g-фактора может существенно отличаться от g_0 по тем же причинам, по которым эффективная масса электрона отличается от массы свободного электрона. Для расчета g-фактора воспользуемся $\boldsymbol{kp}$-теорией возмущений. В рамках второго порядка этого метода получаем эффективный гамильтониан

$$\mathcal{H}_{ss'}(\boldsymbol{K}) = \frac{\hbar^2 K^2}{2m_0}\delta_{ss'} + \frac{1}{2}g_0\mu_B\boldsymbol{\sigma}_{ss'}\boldsymbol{B} + \sum_{n\neq c}\frac{H_{sn}H_{ns'}}{E_c - E_n}, \tag{2.2}$$

где мы явно выделили спиновые индексы, c обозначает (орбитальные) состояния в зоне проводимости, n нумерует все остальные зоны (с учетом спина). Величина

$$\boldsymbol{K} = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{e}{c\hbar}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}),$$

где $\boldsymbol{A}$ – векторный потенциал внешнего магнитного поля, а

$$H_{sn} = \frac{\hbar}{m_0}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{p}_{cs,n},$$

$\boldsymbol{p}_{cs,n}$ – междузонные матричные элементы импульса. Уравнение (2.2) хорошо известно из курса физики низкоразмерных систем.

В уравнении (2.2) принципиально важным оказывается порядок сомножителей в последнем слагаемом. Действительно, в присутствии внешнего магнитного поля компоненты обобщенного волнового вектора K_α, K_β не коммутируют:

$$K_\alpha K_\beta - K_\beta K_\alpha = \frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma, \tag{2.3}$$

где $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – абсолютно антисимметричный псевдотензор третьего ранга (символ Леви-Чивиты).[2] Выделим в уравнении (2.2) линейные по $\boldsymbol{B}$ вклады и получим гамильтониан, описывающий эффект Зеемана в рамках

[2] *Задача:* докажите это, например, явно вычислив коммутатор для калибровки поля, где $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}]$.

Таблица 2.1: Матричные элементы оператора импульса $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}_{cs,vm}$ в единицах $p_{cv}/\sqrt{2}$, $e_\pm = e_x \pm \mathrm{i}e_y$.

	$\Gamma_8, 3/2$	$\Gamma_8, 1/2$	$\Gamma_8, -1/2$	$\Gamma_8, -3/2$	$\Gamma_7, 1/2$	$\Gamma_7, -1/2$
$\Gamma_6, 1/2$	$-e_+$	$2e_z/\sqrt{3}$	$e_-/\sqrt{3}$	0	$-e_z/\sqrt{3}$	$-2e_-/\sqrt{3}$
$\Gamma_6, -1/2$	0	$-e_+/\sqrt{3}$	$2e_z/\sqrt{3}$	e_-	$-2e_+/\sqrt{3}$	$e_z/\sqrt{3}$

kp-теории возмущений:

$$\mathcal{H}_{B,ss'} = \frac{1}{2}g_0\mu_B\boldsymbol{\sigma}_{ss'}\boldsymbol{B} - \frac{\mathrm{i}\mu_B}{m_0}\sum_{n\neq c}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{p^\alpha_{cs,n}p^\beta_{n,cs'}}{E_c - E_n}B_\gamma. \tag{2.4}$$

В этом выражении и в формулах ниже суммирование по дважды повторяющимся греческим индексам опущено. Отметим, что конструкцию $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha_{cs,n}p^\beta_{n,cs'}B_\gamma$ можно представить в виде $[\boldsymbol{p}_{cs,n}\times\boldsymbol{p}_{n,cs'}]\boldsymbol{B}$. Ко второму члену в выражении (2.4) можно придти и другим образом, вычислив "диагональный" матричный элемент оператора $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{B}$ (где $\boldsymbol{L} = \hbar^{-1}[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]$ – оператор углового момента) на блоховских функциях данной зоны и воспользовавшись соотношением полноты базиса и связью между матричными элементами оператора координаты $\boldsymbol{r}$ и импульса $\boldsymbol{p} = m_0 d\boldsymbol{r}/dt$.

Поскольку, как мы уже отмечали раньше, g-фактор электронов в зоне проводимости изотропен, то магнитное поле удобно направить по оси z, и формулу (2.4) можно переписать для электронов в виде

$$g = g_0 + \frac{1}{m_0}\sum_{n\neq c}\frac{|p^+_{c1/2,n}|^2 - |p^-_{c1/2,n}|^2}{E_c - E_n}, \tag{2.5}$$

где $p^\pm_{cs,n} = \langle c\Gamma_6, s|p_x \pm \mathrm{i}p_y|n\rangle$.

Мы будем использовать простейшую модель, учитывая только зону проводимости (состояния, относящиеся к представлению Γ_6 группы T_d) и валентную зону (Γ_8 и Γ_7), см. рис. 2.1. Воспользуемся таблицей 2.1 матричных элементов оператора импульса для расчета g-фактора электрона в полупроводнике типа GaAs. Удобно вычислять $\mathcal{H}_{1/2,1/2}$ в поле $\boldsymbol{B}\parallel z$. Для $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p}$-вклада получаем

$$\delta\mathcal{H}_{1/2,1/2} = \left(\frac{\hbar}{m_0}\right)^2 \sum_{n=|\Gamma_8,\pm3/2\rangle,|\Gamma_8,\pm1/2\rangle,|\Gamma_7,\pm1/2\rangle}\frac{(\boldsymbol{Kp})_{1/2n}(\boldsymbol{Kp})_{n1/2}}{E_c - E_n}.$$

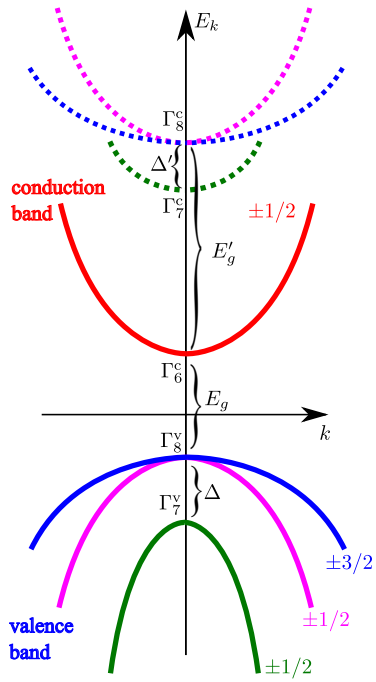

Рис. 2.1: Схема зон в объемном GaAs.

При суммировании достаточно оставить вклады $\propto K_x, K_y$, они приходят от состояний $|\Gamma_8, 3/2\rangle$, $|\Gamma_8, -1/2\rangle$ и $|\Gamma_7, -1/2\rangle$:

$$\delta\mathcal{H}_{1/2,1/2} = \left(\frac{\hbar}{m_0}\right)^2 |p_{cv}|^2 \left\{ \frac{1}{E_g}\left[\frac{K_+K_-}{2} + \frac{K_-K_+}{6}\right] + \frac{1}{E_g+\Delta}\frac{K_-K_+}{3} \right\}.$$

Заметим, что линейный по магнитному полю вклад в произведение K_+K_-, где $K_\pm = K_x \pm \mathrm{i}K_y$ равен $eB_z/\hbar c$, а вклад K_-K_+ сводится к $-eB_z/\hbar c$. В результате получаем

$$g = g_0 - \frac{4}{3}\frac{|p_{cv}|^2}{m_0}\frac{\Delta}{E_g(E_g+\Delta)} + \Delta g. \tag{2.6}$$

Здесь E_g – ширина запрещенной зоны, Δ – спин-орбитальное расщепление валентной зоны, Δg – вклад далеких зон. Выражение (2.6) (а зачастую и (2.4)) называется формулой Лоры Рот (Laura M. Roth, Benjamin Lax, and Solomon Zwerdling, *Theory of optical magneto-absorption effects in semiconductors*, Phys. Rev. **114**, 90 (1959) [9]).

Если вовсе пренебречь далекими зонами, то оценка по формуле (2.6) для GaAs дает $g = -0.32$ (экспериментальное значение $g = -0.44$). В InSb имеем $g \approx -50$. Такие существенные перенормировки g-фактора по сравнению с вакуумом говорят о параметрически сильном спин-орбитальном взаимодействии в полупроводниках. Действительно, как видно из формулы (2.6), безразмерным параметром, определяющим перенормировку, является Δ/E_g, который в полупроводниках порядка 1.

2.2 Немного о g-факторе в гетероструктурах

Рассмотрим структуру с квантовой ямой, пусть A – материал ямы, B – материал барьера, z – ось роста, рис. 2.2. Для (грубой) оценки g-фактора в такой структуре введем вероятности нахождения электрона в материале A и B:

$$\Theta_A = \int_A |\psi(z)|^2 \mathrm{d}z, \quad \Theta_B = \int_B |\psi(z)|^2 \mathrm{d}z, \quad \Theta_A + \Theta_B = 1,$$

$\psi(z)$ – огибающая волновой функции электрона вдоль оси роста. Тогда эффективный g-фактор принимает вид

$$g_{\text{eff}} = g_A \Theta_A + g_B \Theta_B. \tag{2.7}$$

Особенно интересная ситуация может возникать в системах, где g_A и g_B разного знака (яма GaAs, барьер AlAs). Тогда в зависимости от ширины ямы g-фактор электрона может менять знак из-за перераспределения электронной плотности между материалами ямы и барьеров.

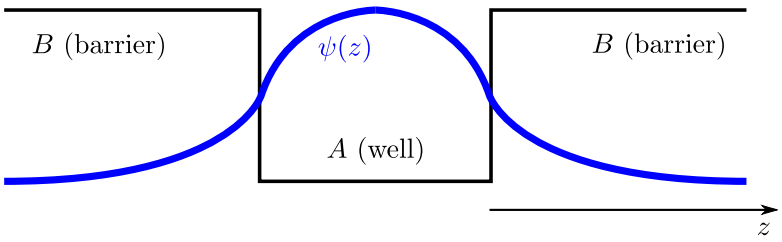

Рис. 2.2: Квантовая яма и барьеры, z – ось роста.

Уравнение (2.7), однако, не содержит всю информацию о g-факторе. Действительно, в одноосной системе $g_{zz} \neq g_{xx}, g_{yy}$, а компоненты тензора

g-факторов в плоскости могут тоже отличаться.[3] Для последовательного анализа этого требуется использовать общую формулу (2.4) и суммировать по размерно-квантованным состояниям. Это было выполнено в работе Е. Л. Ивченко, А. А. Киселев, *Электронный g-фактор в квантовых ямах и сверхрешетках*, ФТП **26**, 1471 (1992) [10].

2.3 Спиновые биения в магнитном поле

До сих пор мы изучали спектр энергий носителей заряда. На следующей лекции мы разберем механизмы возникновения неравновесного спина в полупроводниках, а пока изучим то, как себя ведет электронный спин в магнитном поле.

Сначала изложим простейший квантовомеханический подход: пусть магнитное поле направлено по оси x, а следить мы будем за z компонентой спина. Тогда удобен базис $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ состояний с проекцией спина $\pm 1/2$ на ось z. Взаимодействие спина с магнитным полем описывается гамильтонианом:

$$\mathcal{H}_B = \frac{1}{2} g\mu_B(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}) = \frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\Omega}) = \frac{\hbar\Omega}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Здесь мы ввели величину $\boldsymbol{\Omega} = g\mu_B\boldsymbol{B}/\hbar$, ее физический смысл обсудим чуть позже.

Собственные состояния этого гамильтониана, очевидно,

$$|x\rangle = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad E_x = \frac{\hbar\Omega}{2}, \tag{2.9a}$$

$$|\bar{x}\rangle = \frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad E_{\bar{x}} = -\frac{\hbar\Omega}{2}. \tag{2.9b}$$

Произвольную волновую функцию можно разложить по базису собственных состояний $|x\rangle$ и $|\bar{x}\rangle$, в результате получаем

$$\Psi(t) = C_x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\Omega t}{2}}|x\rangle + C_{\bar{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\Omega t}{2}}|\bar{x}\rangle.$$

[3] *Какая точечная симметрия должна быть для этого? Можно ли это реализовать в ямах, выращенных вдоль оси* [001]*?*

Здесь комплексные константы C_x, $C_{\bar{x}}$, связанные соотношением $|C_x|^2 + |C_{\bar{x}}|^2 = 1$, определяются начальными условиями. Квантовомеханическое среднее значение z компоненты спина

$$S_z = \frac{1}{2}\langle\Psi(t)|\sigma_z|\Psi(t)\rangle = \mathrm{Re}\{C_x^* C_{\bar{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\} = S_z(0)\cos(\Omega t + \varphi). \tag{2.10}$$

Временная зависимость, описываемая уравнением (2.10), соответствует спиновым биениям (или осцилляциям) с частотой Ω. Амплитуда $S_z(0)$ и фаза биений φ определяется соотношением между коэффициентами C_x и $C_{\bar{x}}$, т.е. начальными условиями.

Удобно зачастую действовать иначе. Воспользуемся методом Гейзенберга, и перенесем зависимость от времени с волновых функций на операторы. Это позволит получить уравнение, допускающее очевидную классическую интерпретацию. Итак, введем оператор спина

$$\hat{\boldsymbol{s}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}.$$

Гейзенберговское уравнение "движения" для $\hat{\boldsymbol{s}}$ имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{s}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\mathcal{H}_B, \hat{\boldsymbol{s}}] = \frac{\mathrm{i}}{4}[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\Omega}), \boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\Omega}\times\hat{\boldsymbol{s}}. \tag{2.11}$$

Это уравнение – операторное, однако оно – линейное уравнение относительно $\hat{\boldsymbol{s}}$. Поэтому его можно легко усреднить[4] и получить уравнение, описывающее средние значения компонент спина $\boldsymbol{S} = \langle\hat{\boldsymbol{s}}\rangle$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{S}. \tag{2.12}$$

Это уравнение описывает классическую прецессию электронного спина во внешнем магнитном поле, $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$ – угловая частота прецессии. Такая прецессия проиллюстрирована на рисунке 2.3.

Наконец, есть еще один подход. В реальных системах мы имеем дело, как правило, с ансамблем электронов (например, порядка 10^{17} см$^{-3}$ в объемном GaAs). Такой ансамбль следует описывать статистически – с помощью *спиновой матрицы плотности*. Пусть $\boldsymbol{k}$ – набор всех квантовых чисел, описывающих электрон (кроме спина), например, волновой вектор, номер зоны. Спиновая матрица плотности записывается как

$$\rho_{\boldsymbol{k}} = f_{\boldsymbol{k}}\hat{I} + \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} f_{\boldsymbol{k}} + S_{\boldsymbol{k},z} & S_{\boldsymbol{k},x} - \mathrm{i}S_{\boldsymbol{k},y} \\ S_{\boldsymbol{k},x} + \mathrm{i}S_{\boldsymbol{k},y} & f_{\boldsymbol{k}} - S_{\boldsymbol{k},z} \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

[4] *По какому состоянию проводится усреднение?*

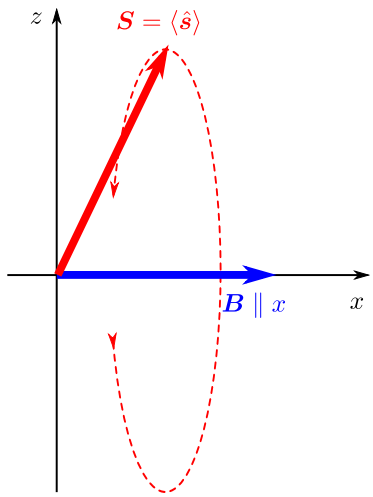

Рис. 2.3: Иллюстрация прецессии спина, синяя стрелка – магнитное поле, красная – средний псевдовектор спина.

Здесь $\hat{I}$ – единичная матрица. Диагональная часть спиновой матрицы плотности – обычная функция распределения электронов (усредненная по спину), $f_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\{\rho_{\boldsymbol{k}}\}$. Формально, $f_{\boldsymbol{k}}$ – средняя заселенность двух спиновых состояний. Величина $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\{\rho_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\sigma}\}$ – средний вектор спина электрона в состоянии $\boldsymbol{k}$. Матрица плотности удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \rho_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} = [\mathcal{H}_B, \rho_{\boldsymbol{k}}]. \tag{2.14}$$

Задание на дом: докажите, что уравнение на $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}}$, полученное в рамках метода матрицы плотности, совпадет с формулой (2.12).

Лекция 3

Оптическая ориентация электронных спинов

Предыдущая лекция была посвящена g-фактору электрона и спиновым биениям в магнитном поле. Ясно, что для наблюдения спиновых биений необходимо создавать в системе неравновесный спин. Замечательным свойством полупроводников является то, что электроны можно ориентировать по спину не только магнитным полем, но и электрическим. На этой лекции мы обсудим создание неравновесной спиновой поляризации высокочастотным электромагнитным полем – светом, а также проявление спиновой поляризации электронов в люминесценции полупроводников. Также будет обсуждаться эффект Ханле – один из наиболее распространенных способов наблюдения спиновой динамики.

3.1 Взаимодействие поляризованного света с носителями заряда в полупроводниках

3.1.1 Напоминание о поляризации света

Для начала поговорим о поляризации света, поскольку этот вопрос сопровождается путаницей даже в классических учебниках. Для определенности рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z. Электрическое поле волны запишем в комплексном виде:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_x(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{o}_x + E_y(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{o}_y, \tag{3.1}$$

где

$$E_x(\boldsymbol{r},t) = E_{x,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t} + \text{c.c.}, \quad E_y(\boldsymbol{r},t) = E_{y,0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t} + \text{c.c.},$$

где $E_{x,0}$, $E_{y,0}$ – комплексные амплитуды. Здесь и далее “с.с.” обозначает комплексное сопряжение (complex conjugate). Общая формула (3.1) нам понадобится чуть позже, а сейчас перейдем к частному случаю циркулярно поляризованного света.

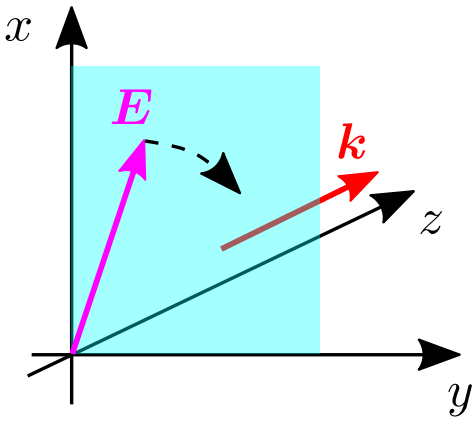

Рис. 3.1: Иллюстрация направления вращения электрического поля в волне, поляризованной по правому кругу.

Рассмотрим волну, поляризованную по *правому* кругу: если смотреть в направлении распространения волны, то поле (при фиксированной координате) вращается по часовой стрелке, см. рис. 3.1. Такой свет называется *право циркулярно поляризованным* или σ^+. В нашем случае, когда волна идет вдоль оси z, это означает, что компоненты поля $E_x(t)$ и $E_y(t)$ сдвинуты по фазе следующим образом:

$$E_x(t) = E_0\cos\omega t = \frac{E_0}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}), \quad E_y(t) = E_0\sin\omega t = \frac{E_0}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}). \tag{3.2}$$

Легко убедиться, что

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\frac{\boldsymbol{o}_x + \mathrm{i}\boldsymbol{o}_y}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t} + \text{c.c.}.$$

Таким образом, можно ввести орт правой циркулярной поляризации

$$\boldsymbol{o}_+ = -\frac{\boldsymbol{o}_x + \mathrm{i}\boldsymbol{o}_y}{\sqrt{2}}. \tag{3.3}$$

Это состояние отвечает проекции момента на ось z (ось распространения) равной $m_z = +1$. Общий знак минус в этой формуле выбран так, чтобы орт соответствовал каноническому базису. Аналогичным образом введем орт левой циркулярной поляризации

$$\boldsymbol{o}_- = \frac{\boldsymbol{o}_x - \mathrm{i}\boldsymbol{o}_y}{\sqrt{2}}. \tag{3.4}$$

У этого состояния проекция момента на ось z равна $m_z = -1$.

В общем виде поле можно представить как

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_{x,0}\boldsymbol{o}_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t} + E_{y,0}\boldsymbol{o}_y \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t} + \text{c.c} = \tag{3.5}$$

$$E_{\sigma^+}\boldsymbol{o}_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t} + E_{\sigma^-}\boldsymbol{o}_- \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t} + \text{c.c.}$$

Сравнивая среднее и правое выражения в (3.5) имеем следующие формулы преобразования компонент поля:

$$E_x = \frac{-E_{\sigma^+} + E_{\sigma^-}}{\sqrt{2}}, \quad E_y = -\mathrm{i}\frac{E_{\sigma^+} + E_{\sigma^-}}{\sqrt{2}}. \tag{3.6a}$$

$$E_{\sigma^+} = -\frac{E_x - \mathrm{i}E_y}{\sqrt{2}}, \quad E_{\sigma^-} = \frac{E_x + \mathrm{i}E_y}{\sqrt{2}}. \tag{3.6b}$$

Обратите внимание на противоположные (по отношению к определению ортов) знаки.

Удобно ввести единичный вектор поляризации света $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{E}_0/|E_0|$. Тогда степень циркулярной поляризации записывается в виде

$$P_{\text{circ}}\frac{\boldsymbol{k}}{|k|} = \mathrm{i}[\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}^*], \quad P_{\text{circ}} = \mathrm{i}(e_x e_y^* - e_y e_x^*). \tag{3.7}$$

Последнее равенство верно для волны, распространяющейся в положительном направлении оси z. Для σ^+-поляризованного света, распространяющегося вдоль оси z, имеем $e_y = \mathrm{i}e_x$ и $P_{\text{circ}} = 1$.

Частично поляризованный свет удобно описывать поляризационной матрицей плотности (подобно тому, как мы описывали ансамбль поляризованных по спину электронов), которая (в базисе линейно поляризованных волн) имеет вид

$$\rho^{lin} = \begin{pmatrix} |e_x|^2 & e_x e_y^* \\ e_x^* e_y & |e_y|^2 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

В базисе циркулярно поляризованных волн матрицу плотности можно представить как

$$\rho^{circ} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + P_{\text{circ}} & P_l - \mathrm{i}P_l' \\ P_l + \mathrm{i}P_l' & 1 - P_{\text{circ}} \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

где мы ввели степень линейной поляризации $P_l = |e_x|^2 - |e_y|^2$ в осях (x, y), а также степень линейной поляризации в осях (x', y'), повернутых относительно (x, y) на 45°, $P_l' = e_x e_y^* + e_x^* e_y$. Величины P_l, P_l' и P_{circ} называют параметрами Стокса. Параметры Стокса полностью определяют поляризацию электромагнитной волны.

3.1.2 Междузонные переходы под действием циркулярно поляризованного света

Наша задача состоит в том, чтобы связать средний спин фотовозбужденных электронов $\boldsymbol{S}$ с циркулярной поляризацией падающего излучения. В общем случае такую связь (считая, что интенсивность света I достаточно мала) можно записать в виде

$$\boldsymbol{S} = \hat{R} P_{\text{circ}} \frac{\boldsymbol{k}}{|k|} I = \hat{R}\mathrm{i}[\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}^*] I.$$

Так как величина $P_{\text{circ}} \frac{\boldsymbol{k}}{|k|}$ – псевдовектор, а спин тоже является псевдовектором, то связь осуществляется с помощью тензора второго ранга. В объемных кубических полупроводниках он сводится к скаляру.

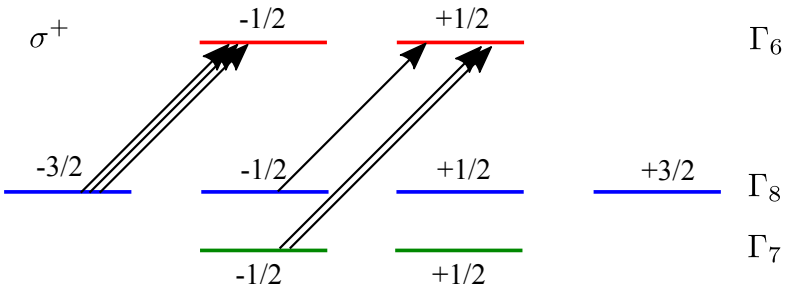

Рис. 3.2: Иллюстрация правил отбора при междузонных переходах в объемном GaAs. Количество стрелок показывает относительную интенсивность переходов, индуцированных σ^+ излучением. Схема зон показана на рис. 2.1.

Рассмотрим переходы между двукратно вырожденными состояниями зоны проводимости $|\Gamma_6, \pm 1/2\rangle$ и валентной зоны $|\Gamma_8, \pm 3/2\rangle$, $|\Gamma_8, \pm 1/2\rangle$

и $|\Gamma_7, \pm 1/2\rangle$ под действием поляризованного света. Ясно, что проекция момента фотона на ось распространения света передается электронной системе, поэтому под действием, например, σ^+ света возможны переходы из состояний $|\Gamma_8, -3/2\rangle$ в $|\Gamma_6, -1/2\rangle$, из $|\Gamma_8, -1/2\rangle$ в $|\Gamma_6, 1/2\rangle$, а также $|\Gamma_7, -1/2\rangle$ в $|\Gamma_6, 1/2\rangle$, см. схему на рис. 3.2. Для того, чтобы получить относительные скорости переходов, представим оператор взаимодействия со светом в виде[1]

$$\hat{V} = -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{d}, \tag{3.10}$$

где $\boldsymbol{d}$ – оператор дипольного момента перехода. Ненулевой матричный элемент оператора $\boldsymbol{d}$ можно представить в виде (фазы блоховских амплитуд $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ выбраны согласовано)

$$d_{cv} = \langle S\,|d_x|\,\mathcal{X}\rangle = \langle S\,|d_y|\,\mathcal{Y}\rangle = \langle S|d_z|\mathcal{Z}\rangle. \tag{3.11}$$

Волновые функции валентной зоны представим в виде разложения по базисным с помощью коэффициентов Клебша-Гордана:

$$C^{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}_{1,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 1, \quad C^{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}_{1,-1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = 1, \tag{3.12}$$

$$C^{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}_{1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad C^{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}_{1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$C^{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}_{1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad C^{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}_{1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$C^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad C^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{1,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$C^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad C^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_{1,0;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Для расчета скоростей переходов воспользуемся тем, что все состояния валентной зоны заселены одинаково. Тогда для переходов на краю поглощения (зона Γ_7 не работает!) и σ^+ света важны коэффициенты $C^{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}_{1,-1;\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$

[1] *Покажите, что подход с использованием векторного потенциала приведет к тому же самому ответу.*

и $C^{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}_{1,-1;\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. Квадрат их отношения равен 1/3, поэтому степень поляризации фотоэлектронов будет

$$P_s = \frac{N_{1/2} - N_{-1/2}}{N_{1/2} + N_{-1/2}} = \frac{-2/3}{4/3} = -\frac{1}{2}. \tag{3.13}$$

Таким образом, спин фотоэлектронов направлен противоположно направлению распространения света, а степень поляризации электронов составляет 50%. Отметим, что переходы из состояний Γ_7 идут с относительной скоростью 2/3 и заселяют состояние с проекцией спина электрона $+1/2$, поэтому, если $\Delta = 0$, то электроны рождаются неполяризованными, рис. 3.2. Это связано с тем, что спин-орбитальное взаимодействие не играет никакой роли, и переходы между зонами идут с сохранением спина. Похожая ситуация наблюдается и при $\hbar\omega > E_g + \Delta$.[2] Расчет спиновой ориентации фотовозбуждаемых электронов при произвольной энергии кванта приведен в статье М. И. Дьяконов, В. И. Перель, *О спиновой ориентации электронов при межзонном поглощении света в полупроводниках*, ЖЭТФ **60**, 1954 (1971) [11].

Отметим, что в квантовых ямах дырки с проекциями момента $\pm 3/2$ и $\pm 1/2$ на ось роста расщеплены, это позволяет достичь степени поляризации 100% у фоторожденных электронов.

3.2 Оптическая ориентация и поляризованная люминесценция

Процесс, рассмотренный выше, заключается в генерации электронов и дырок с определенными проекциями спина. Дальше вступают в игру кинетические явления: процессы потери спина (выравнивания заселенностей спиновых состояний – *спиновая релаксация*), а также процессы рекомбинации носителей.

Как правило в объемном полупроводнике дырки за короткое время (порядка пикосекунд) теряют память о первоначальном направлении спина. Это связано с тем, что спин-орбитальная связь в валентной зоне сильная, направление спина жестко связано с направлением импульса, который теряется, фактически, за одно столкновение. Тогда дырки можно считать неполяризованными.

[2] Последнее утверждение не вполне верно. *Вопрос:* почему?

Если спиновая релаксация электрона медленная по сравнению с процессом рекомбинации ($\tau_s \gg \tau_r$), то за время жизни фотоэлектрона его спин не теряется, а степень циркулярной поляризации фотолюминесценции составляет $P_{\text{cir}}^{lum} = 1/4$.[3]

В общем случае динамика спина $\boldsymbol{S}$ и числа электронов N описывается системой кинетических уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{dt} + \frac{\boldsymbol{S}}{\tau_s} + \frac{\boldsymbol{S}}{\tau_r} = \boldsymbol{G}, \tag{3.14}$$

и

$$\frac{dN}{dt} + \frac{N}{\tau_r} = G. \tag{3.15}$$

Здесь G – темп генерации электронов, а $\boldsymbol{G}$ – темп генерации электронного спина. Если речь идет о переходах из зоны Γ_8, то

$$\boldsymbol{G} = -\frac{G}{4}\mathrm{i}[\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{e}^*].$$

Отметим, что модель рекомбинации у нас упрощена, фактически, мы рассматриваем динамику неосновных носителей заряда, предполагая, что в полупроводнике есть собственные дырки (за счет легирования). Введем полное время жизни спина

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_r}, \tag{3.16}$$

поэтому $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{G}T_s$, $N = G\tau_r$, и степень поляризации электронов

$$P = \frac{2S_z}{N} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\tau_r/\tau_s}, \quad P_{\text{circ}}^{lum} = -\frac{1}{2}P. \tag{3.17}$$

Если структура изначально легирована (например, n-типа), а число фотоэлектронов мало, то дырки рекомбинируют, в основном, с неполяризованными носителями, при этом в зоне проводимости остаются поляризованные электроны.

[3] *Вопрос:* почему?

3.3 Эффект Ханле

Наиболее эффективным экспериментальным методом изучения динамики спинов является исследование зависимости поляризации люминесценции от магнитного поля, направленного перпендикулярно лучу накачки (геометрия Фойгта – Voigt).

Во внешнем поле кинетическое уравнение для спина (3.14) принимает вид [ср. с (2.12)]

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{dt} + \frac{\boldsymbol{S}}{T_s} + \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{G}, \tag{3.18}$$

где $\boldsymbol{\Omega} = g\mu_B \boldsymbol{B}/\hbar$ – частота прецессии спина во внешнем поле, T_s – время жизни спина, введенное в (3.16). Если $\boldsymbol{\Omega} \perp \boldsymbol{G} \parallel z$, то для z-компоненты спина получаем

$$S_z(B) = \frac{G_z T_s}{1 + \Omega^2 T_s^2} = \frac{S_z(B=0)}{1 + \Omega^2 T_s^2}. \tag{3.19}$$

Эта зависимость приведена на рис. 3.3. Если g-фактор известен, то формула (3.19) позволяет определить время жизни спина T_s, а знание степени поляризации в нулевом поле – найти отношение τ_0/T_s, что открывает возможность измерения времен спиновой релаксации.

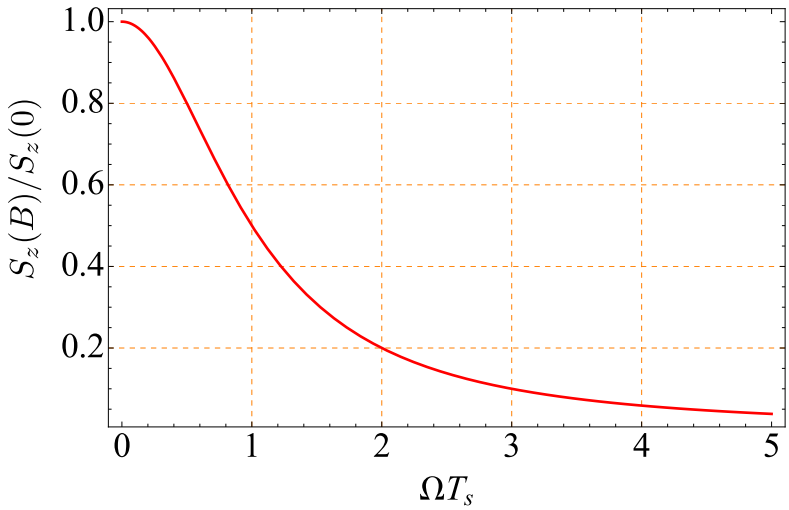

Рис. 3.3: Зависимость среднего значения z-компоненты спина электронов от поперечного магнитного поля, рассчитанная по формуле (3.19).

Оценка: В магнитном поле $B = 1$ Т для $g = -0.44$ имеем частоту

спиновой прецессии

$$\Omega = \frac{|g|\mu_B B}{\hbar} = \frac{0.44 \times 0.9 \times 10^{-20}\text{эрг/Гс} \times 10^4\text{Гс}}{10^{-27}\text{эрг с}} \approx 0.4 \times 10^{11}\ \text{с}^{-1},$$

и период прецессии

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 0.15\ \text{нс} = 150\ \text{пс}.$$

Лекция 4

Спиновые расщепления электронных зон

Ранее мы изучили процессы ориентации электронных спинов при поглощении циркулярно поляризованного света. Мы также рассмотрели эффект Ханле и установили, что по подавлению поляризации люминесценции в магнитном поле можно судить о времени спиновой релаксации электронов. Прежде, чем переходить собственно к теории процессов спиновой релаксации, нужно понять, как спин-орбитальная связь проявляется при движении электрона в кристалле. Как мы увидим в этой лекции, спин-орбитальное взаимодействие может существенно изменить закон дисперсии электронов и приводит к возникновению эффективного магнитного поля, жестко связанного с волновым вектором носителя заряда и действующего на спин электрона.

4.1 Феноменологический анализ

Рассмотрим ограничения, налагаемые симметрией кристалла, на закон дисперсии электрона проводимости, $E_s(\boldsymbol{k})$. Здесь $\boldsymbol{k}$ – волновой вектор (квазиимпульс), s – спиновый индекс. Мы изучаем немагнитные системы, поэтому имеет место инвариантность к инверсии времени $t \to -t$. При таком преобразовании, очевидно, $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$ (направление движения меняется на противоположное), $\boldsymbol{s} \to -\boldsymbol{s}$ (спин – аналог вращения, его направление также меняется на противоположное). Таким образом, закон

дисперсии удовлетворяет требованию:

$$E_s(\boldsymbol{k}) = E_{-s}(-\boldsymbol{k}). \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что каждому уровню энергии соответствует по крайней мере два состояния, это явление называется крамерсовым вырождением спектра. Формула (4.1) верна без магнитного поля. Если рассматриваемая система центросимметрична, то $\boldsymbol{k}$ и $-\boldsymbol{k}$ связаны операцией пространственной инверсии, эта операция не затрагивает спин. Поэтому

$$E_s(\boldsymbol{k}) = E_{-s}(-\boldsymbol{k}) = E_{-s}(\boldsymbol{k}) \quad \text{(пространственная инверсия)}, \tag{4.2}$$

и спектр вырожден по спину. Таким образом, спиновое вырождение электронных зон может сниматься лишь в *нецентросимметричных* средах.

Воспользуемся методом инвариантов, чтобы сконструировать эффективный гамильтониан электрона с учетом спин-орбитальной связи в нецентросимметричной системе. Такой гамильтониан есть матрица 2×2, действующая в базисе двух спиновых состояний с $s = \pm 1/2$, компоненты которой зависят от степеней волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Произвольную матрицу 2×2 можно представить в виде разложения по базисным матрицам – единичной и матрицам Паули $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Требование инвариантности к инверсии времени заключается в том, что матрицы σ не могут входить с четными степенями компонент волнового вектора $\boldsymbol{k}$ (члены типа $\sigma_i k_j^{2n}$, где n – целое, $i, j = x, y, z$, запрещены). Поэтому спин-зависимые вклады могут содержать лишь нечетные степени волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Ограничившись зоной проводимости s-типа (как, например, в GaAs) и удерживая лишь низшие степени $\boldsymbol{k}$ можно записать:

$$\mathcal{H} = \beta_{ij}\sigma_i k_j + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \gamma_{ijkl}\sigma_i k_j k_k k_l. \tag{4.3}$$

Члены более высокого порядка по $\boldsymbol{k}$ допустимы, но мы ими интересоваться не будем. Здесь и далее сумму по повторяющимся индексам опускаем. Гамильтониан (4.3) можно переписать в эквивалентном виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{so} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k}}), \tag{4.4}$$

где $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k}}$ некоторый псевдовектор, составленный из компонент волнового вектора $\boldsymbol{k}$, взятых в нечетных степенях. Псевдовектор $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k}}$, физический смысл которого – частота спиновой прецессии, обусловленной спин-орбитальной связью, можно записать как

$$\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k},i} = \frac{2}{\hbar}\beta_{ij}k_j + \frac{2}{\hbar}\gamma_{ijkl}k_j k_k k_l. \tag{4.5}$$

Таблица 4.1: Неприводимые представления точечной группы T_{d}. Используются кубические оси $x \parallel [100], y \parallel [010], z \parallel [001]$.

Представления (общие)	Название в Γ точке	Базисные функции
A_1 (скаляр)	Γ_1	1; $x^2+y^2+z^2$; xyz $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$
A_2 (псевдоскаляр)	Γ_2	$x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$ $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})$
E	Γ_{12}	$\sqrt{3}(x^2-y^2), 2z^2-x^2-y^2$
F_1 (псевдовектор)	Γ_{25}	$x(y^2-z^2), y(z^2-x^2), z(x^2-y^2)$ (J_x, J_y, J_z); $\mathbf{A}\times\mathbf{C}$
F_2 (вектор)	Γ_{15}	(x, y, z); (yz, zx, xy) (A_x, A_y, A_z)

Конкретный вид псевдотензоров β, γ определяется точечной симметрией рассматриваемой системы.

4.1.1 Примеры и упрощенный симметрийный анализ

- Кубические кристаллы типа Si, Ge. Точечная группа O_{h}, есть центр инверсии, $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k}} \equiv 0$.

- Полупроводники с решеткой цинковой обманки (типа GaAs). Точечная группа T_{d}. Центр инверсии отсутствует, но нет и гиротропии,[1] поэтому члены в эффективном гамильтониане, линейные по $\boldsymbol{k}$, запрещены, $\beta_{ij} \equiv 0$. Однако, комбинации $k_x(k_y^2-k_z^2)$, и т.п. преобразуются как компоненты псевдовектора (представление F_1, см. таблицу 4.1), поэтому допустим спин-зависимый вклад

$$\mathcal{H}_{so} = \gamma[\sigma_x k_x(k_y^2-k_z^2) + \sigma_y k_y(k_z^2-k_x^2) + \sigma_z k_z(k_x^2-k_y^2)]. \qquad (4.6)$$

  Этот вклад был предложен Г. Дрессельхаузом (1955) и носит его имя [G. Dresselhaus, *Spin-orbit coupling effects in zinc blende structures*, Phys. Rev. **100**, 580 (1955)] [12].

[1] *Вопросы:* Что это такое? Какое отношение имеет оптическая активность к линейным по $\boldsymbol{k}$ слагаемым?

- Структуры, симметрия которых оставляет инвариантным вектор $\boldsymbol{n}$ (вюрцитные CdS, GaN, точечная группа C_{6v}). В этом случае в гамильтониане допустимы линейные по $\boldsymbol{k}$ члены

$$\mathcal{H}_{so} = \beta[\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k}] \cdot \boldsymbol{n}. \tag{4.7}$$

  Вклад такого типа был предложен Э.И. Рашбой (1960) [Э. И. Рашба, В. И. Шека, *Симметрия энергетических зон в кристаллах типа вюрцита. II Симметрия зон учетом спин-орбитального взаимодействия*, ФТТ (сборник статей II), 162 (1959); Э. И. Рашба, *Свойства полупроводников с петлей экстремумов. I. Циклотронный и комбинационный резонанс в магнитном поле, перпендикулярном плоскости петли*, ФТТ **2**, 1224 (1960)] [13, 14].

4.2 Микроскопические механизмы

Спин-орбитальная связь в зоне проводимости возникает за счет $\boldsymbol{kp}$-смешивания с другими зонами, главным образом – с валентной. В рамках нашей "стандартной" модели, где учитываются лишь зона проводимости Γ_6 и валентные зоны Γ_8, Γ_7, не учитывается нецентросимметричность материала. Вклад Дрессельхауза в эффективный гамильтониан можно получить в рамках расширенной модели Кейна, в которой учитывается возбужденная зона проводимости. Такие зоны имеют симметрию как у вершины валентной зоны Γ_8, Γ_7, см. рис. 2.1, орбитальные функции удобно обозначать как $\mathcal{X}'$, $\mathcal{Y}'$ и $\mathcal{Z}'$. В рамках расширенной модели Кейна учитываются следующие матричные элементы оператора импульса

$$P = \mathrm{i}\frac{\hbar}{m_0}\langle\mathcal{S}|p_z|\mathcal{Z}\rangle, \quad P' = \mathrm{i}\frac{\hbar}{m_0}\langle\mathcal{S}|p_z|\mathcal{Z}'\rangle, \quad Q = \mathrm{i}\frac{\hbar}{m_0}\langle\mathcal{X}|p_y|\mathcal{Z}'\rangle. \tag{4.8}$$

Именно матричный элемент P' отвечает за снятие центра инверсии.[2] Помимо этого, ненулевым оказывается матричный элемент Δ^- спин-орбитального взаимодействия между валентной зоной и высокой зоной проводимости.

Оценку константы Дрессельхауза можно получить из соображений размерности. Для волновых векторов $k \sim 1/a$ (a – постоянная решетки) слагаемое Дрессельхауза должно по порядку величины соответствовать

[2] *Вопрос:* почему?

"атомной" энергии (E_g или Δ). Поэтому $\gamma \sim$ eV·Å^3 (в GaAs $\gamma \sim 20$ eVÅ^3). Подробная теория эффекта Дрессельхауза в объемных полупроводниках развита в обзоре Г. Е. Пикус, В. А. Марущак, А. Н. Титков, *Спиновое расщепление зон и спиновая релаксация носителей в кубических кристаллах A_3B_5*, ФТТ **22**, 185 (1988) [15].

4.2.1 Вклад Рашбы: объемный полупроводник во внешнем поле

Рассмотрим объемный полупроводник во внешнем электрическом поле $\boldsymbol{E}$. Наличие поля также снимает центр пространственной инверсии и допускает вклад Рашбы в эффективный гамильтониан (4.7), причем $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{E}/|E|$. Этот вклад мы получим в рамках модели Кейна.

Напомним, что волновую функцию электрона в зоне проводимости можно записать в виде

$$\Psi_{\boldsymbol{k},s} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{kr}}[\mathcal{S} + \mathrm{i}\boldsymbol{R}(A\boldsymbol{k} - \mathrm{i}B[\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k}])]|\chi_s\rangle. \tag{4.9}$$

Эта формула верна в низшем порядке по $\boldsymbol{k}$, здесь $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\boldsymbol{r})$ – блоховская амплитуда дна зоны проводимости, $\boldsymbol{R} = (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ – вектор, составленный из блоховских амплитуд вершины валентной зоны,

$$A = P\frac{3E_g + 2\Delta}{3E_g(E_g + \Delta)}, \quad B = -P\frac{\Delta}{3E_g(E_g + \Delta)}. \tag{4.10}$$

Нормировочный объем в (4.9) и далее опущен. Внешнее поле учитывается по теории возмущений, оператор возмущения

$$\mathcal{V} = -e\boldsymbol{Er} = -eE_z z,$$

(пусть $\boldsymbol{E} \parallel z$). Воспользуемся следующим приемом: в плоскости (xy) движение электрона свободное, а волновая функция движения вдоль оси z записывается в виде $\varphi(z)$.[3] Введем оператор $\hat{\boldsymbol{k}} = (k_x, k_y, -\mathrm{i}\partial/\partial z)$. Тогда уравнение (4.9) можно переписать как

$$\Psi_{\boldsymbol{k},s} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k\rho}}[\mathcal{S} + \mathrm{i}\boldsymbol{R}(A\hat{\boldsymbol{k}} - \mathrm{i}B[\boldsymbol{\sigma} \times \hat{\boldsymbol{k}}])]\varphi(z)|\chi_s\rangle, \ \ \boldsymbol{k} = (k_x, k_y), \ \boldsymbol{\rho} = (x, y). \tag{4.11}$$

[3] Такое приближение соответствует тому, что к системе наряду с внешним полем приложен плавный потенциал, обеспечивающий локализацию электрона.

Вклад в эффективный гамильтониан электрона, индуцированный внешним полем, можно записать в виде матрицы 2×2 по спиновым индексам s, s':

$$\mathcal{H}_{\mathrm{eff},ss'} = \langle \Psi_{\boldsymbol{k},s}| - eE_z z|\Psi_{\boldsymbol{k},s'}\rangle.$$

В матричном виде (мы сохранили в последнем равенстве только спин-зависимую часть)

$$\mathcal{H}_{\mathrm{eff}} = -eE_z\times$$
$$\int \mathrm{d}z \left\{\left[\mathcal{S} + \mathrm{i}\boldsymbol{R}(A\hat{\boldsymbol{k}} - \mathrm{i}B[\boldsymbol{\sigma}\times\hat{\boldsymbol{k}}])\right]\varphi(z)\right\}^{\dagger} z \left\{\left[\mathcal{S} + \mathrm{i}\boldsymbol{R}(A\hat{\boldsymbol{k}} - \mathrm{i}B[\boldsymbol{\sigma}\times\hat{\boldsymbol{k}}])\right]\varphi(z)\right\}$$
$$= -2eE_z(2AB + B^2)[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{k}]_z \int \mathrm{d}z z\varphi(z)\mathrm{i}\hat{k}_z\varphi(z). \quad (4.12)$$

Последний переход удобно проверить, воспользовавшись следующими соотношениями:

$$-\mathrm{i}k_i\varphi(z)B[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{k}]_i\varphi(z) \to$$
$$-\mathrm{i}[k_z\varphi(z)]^{\dagger}[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{k}]_z\varphi(z) - \mathrm{i}[[\boldsymbol{k}\varphi(z)]^{\dagger}\times\boldsymbol{\sigma}]_z k_z\varphi(z) \quad (4.13)$$

$$AB[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{k}]_z\varphi'(z)\varphi(z) - AB[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\sigma}]_z\varphi'(z)\varphi(z) = 2AB[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{k}]_z\varphi'(z)\varphi(z),$$

и

$$[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}][\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{b}] = \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}].$$

Заметим, что

$$\int \mathrm{d}z z\varphi(z)\mathrm{i}\hat{k}_z\varphi(z) = \int \mathrm{d}z z\varphi(z)\varphi'(z) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}z z[\varphi^2(z)]' = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}z\varphi^2(z) = -\frac{1}{2}.$$

Поэтому гамильтониан Рашбы принимает вид

$$\mathcal{H}_{\mathrm{eff}} = \xi e[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{k}]\boldsymbol{E}, \quad (4.14)$$

где

$$\xi = 2AB + B^2 = -\frac{P^2}{3}\frac{\Delta(2E_g+\Delta)}{E_g^2(E_g+\Delta)^2}. \quad (4.15)$$

Оценки: $\xi \approx 5$ Å^2 в GaAs, 500 Å^2 в InSb.

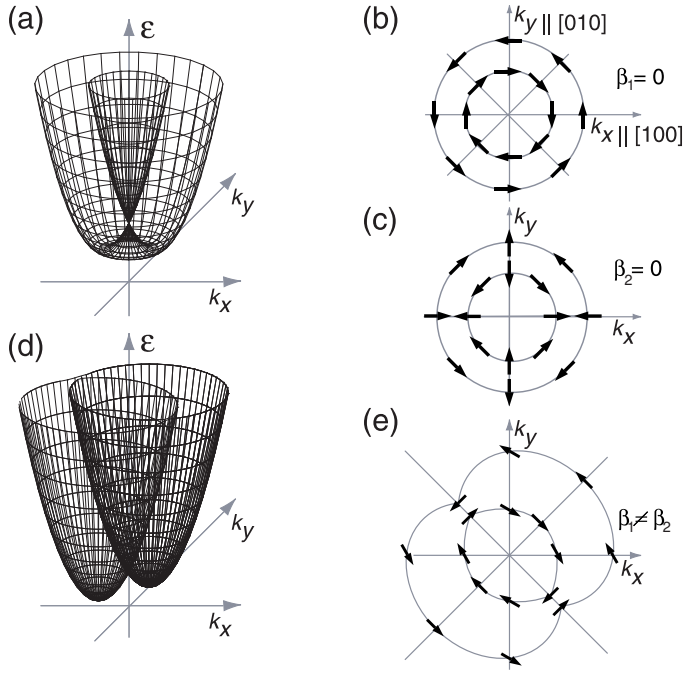

Рис. 4.1: Схематическая иллюстрация энергетического спектра в квантовой яме с решеткой цинковой обманки, выращенной вдоль оси $z \parallel [001]$. (a) спектр в случае только одного вклада в спиновое расщепление $\beta_1 \cdot \beta_2 = 0$, (b) ориентация спина в собственных состояниях в случае спинового расщепления Рашбы (c) в случае расщепления Дрессельхауза, (d) спектр в случае равных вкладов в спиновое расщепление $\beta_1 = \beta_2$, (e) ориентация спина при ненулевых β_1, β_2. Воспроизведено из [16].

4.3 Спиновые расщепления в структурах с квантовыми ямами и квантовыми проволоками

Проанализируем причины снятия спинового вырождения в квантовых ямах.

- Квантовые ямы, сделанные из нецентросимметричного материала – объемная инверсионная асимметрия, bulk inversion asymmetry (BIA). Пример: квантовая яма, выращенная из GaAs вдоль оси $z||[001]$. Пусть $\varphi(z)$ – огибающая волновой функции вдоль оси z.

Усредним уравнение (4.6) по движению электрона вдоль оси z:

$$\mathcal{H}_D = \beta_1(\sigma_y k_y - \sigma_x k_x), \tag{4.16}$$

где $\beta_1 = \gamma\langle k_z^2\rangle$, а $\langle k_z^2\rangle = \int \mathrm{d}z\varphi(z)\hat{k}_z^2\varphi(z)$ – квантовомеханическое среднее z компоненты волнового вектора.

- Квантовые ямы с асимметричным гетеропотенциалом, имеется вклад Рашбы:

$$\mathcal{H}_R = \beta_2(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x). \tag{4.17}$$

  Такая система обладает структурной инверсионной асимметрией (structure inversion asymmetry, SIA). Отметим, что основной вклад в β_2 вносят разрывы зонных параметров (P, Δ) на интерфейсах ямы.

- Интерфейсная инверсионная асимметрия (interface inversion asymmetry, IIA). Зависимость интерфейсного вклада от оператора спина и волнового вектора такая же, как и у гамильтониана Дрессельхауза (4.16).

Отметим, что вклады SIA и IIA возможны и в квантовых ямах на основе центросимметричных полупроводников. Слагаемое SIA не зависит от выбора кристаллографических осей, а вклады BIA и IIA меняют свой вид в различных системах координат.[4] Энергетический спектр и ориентация спина в собственных состояниях приведены на рисунке 4.1. С деталями теории спиновых расщеплений в квантовых ямах можно ознакомиться в книге R. Winkler, *Spin-Orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems* [17].

Оценка вклада Дрессельхауза: квантовая яма шириной 100 Å, $k_\parallel = 10^6$ cm^{-1}.

$$\gamma\langle k_z^2\rangle \approx \gamma\frac{\pi^2}{a^2} \approx 20\text{eVÅ}^3\frac{\pi^2}{(100\text{Å})^2} = 2\times 10^{-2}\ \text{eVÅ}.$$

$$\gamma\langle k_z^2\rangle k_\parallel \approx 2\times 10^{-2}\ \text{eVÅ}\times 10^{-2}\ \text{Å}^{-1} = 0.2\ \text{meV}.$$

[4] *Задача:* Какой вид слагаемое Дрессельхауза примет в квантовой яме из GaAs, выращенной вдоль оси [111]? Точечная симметрия ямы C_{3v}.

В структурах с квантовыми проволоками ситуация еще проще: линейные по $\boldsymbol{k}$ члены в эффективном гамильтониане, если допустимы по симметрии, имеют следующий вид

$$\mathcal{H}_1 = \beta\sigma_\lambda k_z, \tag{4.18}$$

где z – ось роста проволоки, β – константа, а σ_λ – комбинация матриц Паули, соответствующая какой-то фиксированной оси в пространстве λ. Соответственно, вектор эффективного магнитного поля направлен вдоль этой же оси: $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k}} = (2\beta/\hbar)\boldsymbol{e}_\lambda$, где $\boldsymbol{e}_\lambda$ – единичный вектор вдоль оси λ.

Лекция 5

Спиновая релаксация в полупроводниках

На прошлой лекции мы обсуждали спиновые расщепления и получили, что в нецентросимметричных системах спиновое вырождение электронных состояний снято: $E_s(\boldsymbol{k}) \neq E_{-s}(\boldsymbol{k})$. Это расщепление можно представить как эффективное магнитное поле, действующее на электронный спин

$$\mathcal{H}_{so} = \frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \tag{5.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k}}$ – эффективная частота прецессии спина, $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k}} = -\boldsymbol{\Omega}_{-\boldsymbol{k}}$. Таким образом, если электрон движется, то его спин "чувствует" некоторое магнитное поле, величина и направление которого жестко связаны с его волновым вектором. Наиболее ярким эффектом этого поля является спиновая релаксация неравновесного спина по механизму Дьяконова-Переля.

5.1 Качественное описание

Рассмотрим электрон в кристалле, пусть $\bar{E} = \hbar^2\bar{k}^2/2m$ – характерная энергия электрона ($\bar{k} = k_F$ – фермиевский волновой вектор или k_T – тепловой волновой вектор). При движении электрон рассеивается на дефектах: примесях, фононах и т.п. Введем время τ – время свободного пробега (время между актами рассеяния). За время τ направление импульса данного электрона становится случайным. Пусть для простоты

рассеяние упругое или квазиупругое. Будем считать, что

$$\frac{\bar{E}\tau}{\hbar} \gg 1,$$

т.е. уширение электронных уровней за счет рассеяния мало. Это соответствует делокализованным электронам, которые лишь изредка сталкиваются с дефектами, ср. с критерием применимости кинетического уравнения (0.8).

Важно отметить, что спиновая динамика характеризуется двумя безразмерными параметрами:

$$\frac{\hbar\Omega}{\bar{E}},$$

и

$$\Omega\tau,$$

где Ω – характерная частота спиновой прецессии. Первый параметр $\hbar\Omega/\bar{E}$ по своему физическому смыслу квантовый. В типичных структурах на основе GaAs

$$\hbar\Omega \ll 1 \text{ meV, а } \bar{E} \sim 5 \ldots 10 \text{ meV}.$$

Здесь и далее считаем $\hbar\Omega/\bar{E} \ll 1$, поэтому влиянием спина на орбитальное движение электрона можно пренебречь.

В то же время параметр $\delta\varphi = \Omega\tau$ может быть как больше, так и меньше единицы (в зависимости от силы спин-орбитальной связи, качества структуры и температуры). Этот параметр – классический, он характеризует угол поворота спина между последовательными столкновениями. Рассмотрим режим *частых столкновений*:

$$\delta\varphi = \Omega\tau \ll 1. \tag{5.2}$$

В каждом акте рассеяния волновой вектор электрона $\boldsymbol{k}$ меняется случайным образом, поэтому направление $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k}}$ также меняется случайно. Таким образом, спин совершает случайные блуждания по сфере, см. рис. 5.1.

Оценим, на какой типичный угол повернется спин электрона за N столкновений. Средний квадрат такого угла можно записать в виде[1]

$$\Phi^2 = (\delta\varphi)^2 N. \tag{5.3}$$

[1] *Почему “складываются” квадраты углов поворота спина, а не сами углы?*

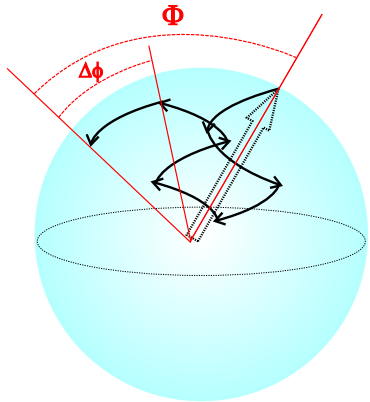

Рис. 5.1: Спиновая релаксация в механизме Дьяконова-Переля: спин совершает случайные блуждания и релаксирует.

Начальное направление спина будет потеряно, если $\Phi^2 \sim 1$. Это произойдет за время спиновой релаксации τ_s. Число столкновений будет $N = \tau_s/\tau$, иными словами

$$1 \sim (\Omega\tau)^2 \frac{\tau_s}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\tau_s} \sim \Omega^2 \tau. \tag{5.4}$$

Этот результат принадлежит М.И. Дьяконову и В.И. Перелю [М. И. Дьяконов, В. И. Перель. *Спиновая релаксация электронов проводимости в полупроводниках без центра инверсии*, ФТТ **13**, 3581 (1972)] [18].

Важным следствием этого результата является то, что чем чище структура, т.е. чем больше τ, тем меньше τ_s, т.е. тем быстрее идет спиновая релаксация. Поэтому в механизме Дьяконова-Переля спиновая релаксация замедляется за счет столкновений.

5.2 Описание спиновой релаксации в рамках кинетического уравнения

Опишем релаксацию спина в механизме Дьяконова-Переля в рамках кинетической теории. Как обсуждалось на лекции 2, динамика спина ансамбля электронов описывается в рамках спиновой матрицы плотности $\rho_{\boldsymbol{k}} = f_{\boldsymbol{k}} I + \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}}$ – функция распределения спина электронов. В

отсутствие процессов рассеяния функция $\boldsymbol{S_k}$ описывается уравнением

$$\frac{\partial \boldsymbol{S_k}}{\partial t} + \boldsymbol{S_k} \times \boldsymbol{\Omega_k} = 0.$$

Здесь частота прецессии спина $\boldsymbol{\Omega_k}$ дается формулой (4.5). Это уравнение описывает прецессию спина, обусловленную спиновым расщеплением электронных зон. Как нам известно из нулевой лекции, процессы рассеяния можно описать, добавив в правую часть уравнения интеграл столкновений:

$$\frac{\partial \boldsymbol{S_k}}{\partial t} + \boldsymbol{S_k} \times \boldsymbol{\Omega_k} = \mathrm{St}\{\boldsymbol{S}\}. \tag{5.5}$$

В простейшем случае упругих процессов

$$\mathrm{St}\{\boldsymbol{S}\} = \sum_{\boldsymbol{k}'} [W_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \boldsymbol{S_{k'}} - W_{\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}} \boldsymbol{S_k}] = -\frac{\delta \boldsymbol{S_k}}{\tau}.$$

Здесь мы воспользовались приближением времени релаксации, а $\delta \boldsymbol{S_k} = \boldsymbol{S_k} - \bar{\boldsymbol{S}}_k$, черта сверху обозначает усреднение по углам вектора $\boldsymbol{k}$.

Уравнение (5.5) с интегралом столкновений в приближении времени релаксации является линейным интегро-дифференциальным уравнением.[2] Его решать удобно методом последовательных приближений, считая, что углы поворота спина между последовательными столкновениями малы, т.е. пользуясь малым параметром $\Omega\tau \ll 1$. Представим решение в виде

$$\boldsymbol{S_k} = \bar{\boldsymbol{S}}_k + \delta \boldsymbol{s_k},$$

причем $\overline{\delta \boldsymbol{s_k}} = 0$. Из (5.5) следует, что

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{S}}_k}{\partial t} + \overline{\delta \boldsymbol{s_k} \times \boldsymbol{\Omega_k}} = 0, \tag{5.6}$$

а также (в низшем порядке по Ω):

$$\bar{\boldsymbol{S}}_k \times \boldsymbol{\Omega_k} = -\frac{\delta \boldsymbol{s_k}}{\tau}. \tag{5.7}$$

Член с $\partial \delta \boldsymbol{s_k}/\partial t$ имеет дополнительную малость $\Omega\tau$. Дальнейшее решение кинетического уравнения – дело техники: $\delta \boldsymbol{s_k} = -\tau \bar{\boldsymbol{S}}_k \times \boldsymbol{\Omega_k}$, и

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} + \tau \overline{[\boldsymbol{\Omega_k} \times [\bar{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{\Omega_k}]]} = 0,$$

[2] *Вопрос:* почему “интегро”?

и раскрывая двойное векторное произведение получаем

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{k}}}{\partial t} + \hat{\Gamma}\bar{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{k}} = 0, \tag{5.8}$$

где компоненты тензора обратных времен спиновой релаксации $\hat{\Gamma}$ имеют вид

$$\Gamma_{ij} = \left(\overline{\Omega_k^2}\delta_{ij} - \overline{\Omega_{\boldsymbol{k},i}\Omega_{\boldsymbol{k},j}}\right)\tau. \tag{5.9}$$

Уравнение (5.8) демонстрирует, что спин релаксирует по экспоненциальному закону, а общая формула (5.9) соответствует простой оценке (5.4).

5.3 Пример: квантовая яма со спиновым расщеплением Рашбы

Компоненты вектора $\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k}}$ имеют вид [ср. с (4.17)]

$$\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{k}} = \alpha_R(k_y, -k_x, 0). \tag{5.10}$$

Компоненты тензора обратных времен спиновой релаксации записываются в виде

$$\Gamma_{zz} = \alpha_R^2 k^2\tau, \quad \Gamma_{xx} = \alpha_R^2\overline{k_x^2}\tau = \frac{\alpha_R^2 k^2\tau}{2}, \quad \Gamma_{yy} = \alpha_R^2\overline{k_y^2}\tau = \frac{\alpha_R^2 k^2\tau}{2}. \tag{5.11}$$

Ответ для линейного по $\boldsymbol{k}$ слагаемого Дрессельхауза имеет аналогичный вид. Этот результат был получен в работе М.И. Дьяконова и В.Ю. Качоровского, *Спиновая релаксация двумерных электронов в нецентросимметричных полупроводниках*, ФТП **20**, 178 (1986) [19]. Для интерпретации анизотропии спиновой релаксации – зависимости скорости релаксации спина от его направления – следует заметить, что компонента эффективного магнитного поля, направленная вдоль $\boldsymbol{S}$ не приводит к прецессии спина и его релаксации. Общая теория анизотропной спиновой релксации в структурах с квантовыми ямами разработана в [N.S. Averkiev, L.E. Golub, *Giant spin relaxation anisotropy in zinc-blende heterostructures*, Phys. Rev. B **60**, 15582 (1999)] [20].

Оценка: $\tau \sim 1$ ps, $\hbar\Omega \sim 0.1$ meV, т.е. $\Omega \sim 0.1$ ps^{-1}. Скорость спиновой релаксации

$$\frac{1}{\tau_s} \sim 10^{-2}\ \text{ps}^{-1}.$$

Характерные времена спиновой релаксации в механизме Дьяконова-Переля составляют от десятков пикосекунд до наносекунд.

Отметим, что в структурах с квантовыми ямами при достаточно высокой подвижности носителей тока и низких температурах условие $\Omega\tau \ll 1$ может нарушаться. В таком случае спиновая динамика уже не описывается экспоненциальным законом, а реализуются спиновые биения, частота которых определяется характерной величиной Ω, а время затухания – временем рассеяния электронов. Изменение внешних параметров, например, увеличение температуры, приводит к ускорению процессов рассеяния и, соответственно, к переходу в режим частых столкновений. Экспериментальные зависимости спиновой поляризации от времени, измеренные на структуре с квантовой ямой, приведены на рис. 5.2.

5.4 Влияние магнитного поля на спиновую релаксацию

В механизме Дьяконова-Переля магнитное поле двояко влияет на спиновую релаксацию. Пусть поле направлено вдоль оси z, и мы следим за z-компонентой спина. Тогда, во-первых, за счет эффекта Лармора ось прецессии спина прижимается к направлению внешнего магнитного поля, при этом характерный угол поворота спина между двумя столкновениями приобретает (в случае $\Omega_L\tau \gg 1$, где Ω_L – частота ларморовской прецессии спина во внешнем поле) дополнительную малость:

$$(\delta\varphi)^2 \sim \frac{(\Omega\tau)^2}{(\Omega_L\tau)^2} = \left(\frac{\Omega}{\Omega_L}\right)^2.$$

Это означает, что при $\Omega_L\tau \gg 1$ для скорости спиновой релаксации имеем

$$\frac{1}{\tau_s} \sim \frac{\Omega^2}{\Omega_L^2\tau}. \tag{5.12}$$

Поэтому спиновая релаксация подавляется за счет эффекта Лармора.

Во-вторых, магнитное поле за счет циклотронного движения электронов по орбите приводит к периодическому изменению волнового вектора $\boldsymbol{k}$ электрона. Если спиновое расщепление линейно по волновому вектору,

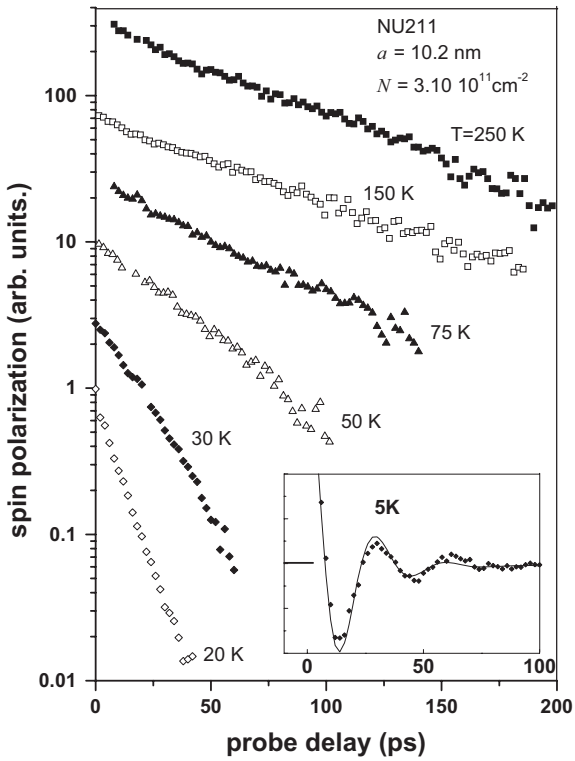

Рис. 5.2: Зависимость степени поляризации электронного газа в образце с квантовой ямой от времени при различных температурах, измеренная методом “накачка–зондирование” (см. лекцию 7). При температуре 20 K и выше спин спадает экспоненциально, время релаксации резко возрастает с увеличением температуры. При $T = 5$ K наблюдаются осцилляции (см. вставку). Из [21].

то это приводит к перенормировке времени рассеяния τ согласно[3]

$$\tau \to \frac{\tau}{1 + \omega_C^2 \tau^2},$$

где $\omega_C = eB/mc$ – циклотронная частота. Тогда

$$\frac{1}{\tau_s} \sim \frac{\Omega^2 \tau}{1 + \omega_C^2 \tau^2}. \tag{5.13}$$

Этот результат можно получить и не анализируя траектории электрона, а перейдя во вращающуюся (с частотой ω_C) систему отсчета. В такой

[3]Этот эффект аналогичен подавлению диффузии электронов в магнитном поле.

системе отсчета нет циклотронного движения, однако возникает эффективное магнитное поле, направленное вдоль внешнего, эффект которого описывается формулой (5.12) с $\Omega_L \to \omega_C$.

Поскольку в типичных условиях $\omega_C \gg \Omega_L$,[4] циклотронный эффект, как правило, доминирует. В структурах с квантовыми ямами циклотронный и ларморовский вклады можно разделить, исследуя зависимость τ_s от угла между магнитным полем и нормалью к структуре: циклотронный эффект определяется только нормальной компонентой магнитного поля, в то время как ларморовский (без учета анизотропии g-фактора) – полным полем.[5]

Эти эффекты были предсказаны в [Е.Л. Ивченко, *Спиновая релаксация свободных носителей в полупроводниках без центра инверсии в продольном магнитном поле*, ФТТ **15**, 1566 (1973)] [22].

5.5 Другие механизмы спиновой релаксации свободных носителей заряда

1. Механизм Эллиота-Яфета [предложен Эллиотом (1954 г.) [23] и Яфетом (1963 г.) [24]]. В этом механизме учитываются процессы рассеяния с переворотом спина, см. рис. 5.3. В отличие от механизма Дьяконова-Переля здесь

$$\tau_s \sim C\tau,$$

где $C \gg 1$ – некоторая константа, зависящая от силы спин-орбитальной связи. Этот механизм может проявляться в узкозонных полупроводниках и металлах.

2. Механизм Бира-Аронова-Пикуса (1975 г.) [25]. Этот механизм важен в условиях оптической ориентации и большой мощности накачки: спин электронов теряется за счет обменного взаимодействия с неполяризованными дырками. Также механизм Бира-Аронова-Пикуса важен для экситонов.

[4] *Почему?*

[5] *Вопрос:* Какой из эффектов более важен в геометри Фойгта: замедление спиновой релаксации в механизме Дьяконова-Переля (5.12) или эффект Ханле (3.19)?

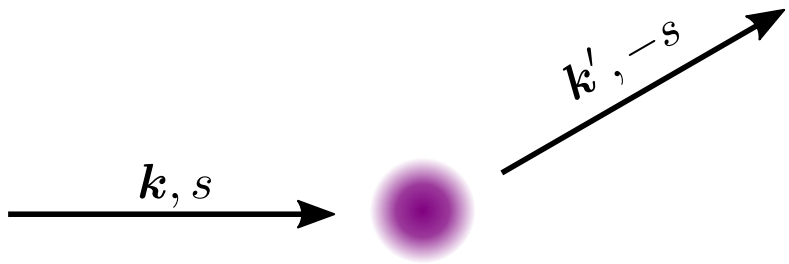

Рис. 5.3: Иллюстрация рассеяния электрона на примеси с переворотом спина.

3. В магнитных системах релаксация неравновесного электронного спина может осуществляться за счет обменного взаимодействия между свободным электроном и электроном, локализованным на парамагнитном центре.

Для локализованных электронов механизмы потери спина совершенно иные – свободное движение электронов подавлено, и роль спин-орбитального взаимодействия значительно ослабевает. Спиновая релаксация локализованных электронов будет кратко обсуждаться в последней лекции.

Лекция 6

Электронный парамагнитный резонанс

В предыдущий раз шла речь о процессах спиновой релаксации в полупроводниках. Мы обсудили основной механизм потери неравновесного спина – механизм Дьяконова-Переля, особенностью которого является обратная пропорциональность $\tau_s \propto 1/\tau$ (τ – время рассеяния), а также кратко обсудили другие механизмы спиновой релаксации. Естественным образом возникает вопрос о том, как спиновую релаксацию можно исследовать экспериментально. Мы уже обсуждали эффект Ханле и поляризованную люминесценцию, а теперь поговорим о классической методике – электронном парамагнитном (спиновом) резонансе.

6.1 Качественное описание

Рассмотрим электронный спин в постоянном магнитном поле $\boldsymbol{B}_0 \parallel z$. Собственные спиновые состояния электрона $|\pm 1/2\rangle$ соответствуют заданным проекциям спина на ось z, энергетическое расщепление между ними $\Delta E = g\mu_B B_0$, см. рис. 6.1(а).

Пусть на систему падает вдоль оси z электромагнитное поле с частотой ω, близкой к $\Delta E/\hbar$. Магнитное поле в этой волне можно записать как

$$\tilde{\boldsymbol{B}}(t) = \boldsymbol{B}_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \text{c.c.}, \tag{6.1}$$

где вектор $\boldsymbol{B}_1 \perp z$. Взаимодействие спина с этим полем описывается

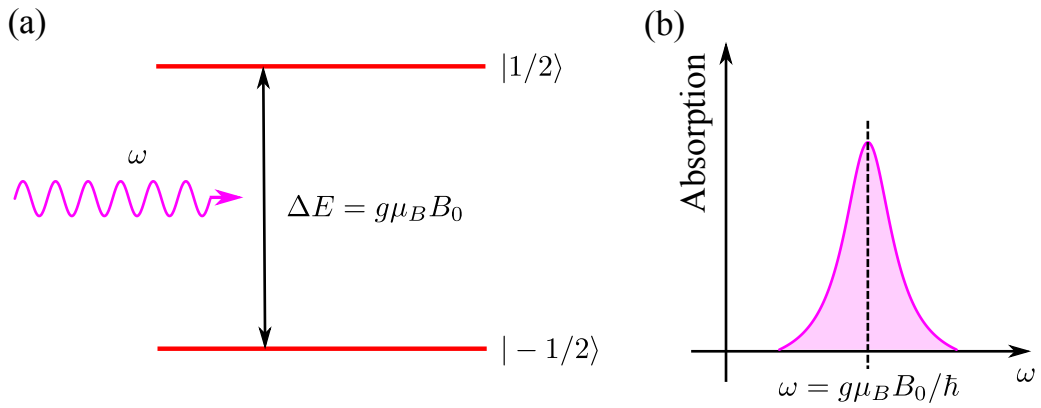

Рис. 6.1: (a) Схема уровней, расщепленных магнитным полем $\boldsymbol{B}_0$. (b) Спектр поглощения переменного поля $\tilde{\boldsymbol{B}}(t)$.

гамильтонианом

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\mu_B g \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}}(t). \tag{6.2}$$

Легко проверить, что этот гамильтониан $\mathcal{H}_1$ смешивает собственные состояния $|\pm 1/2\rangle$. Очевидно, что при выполнении условия $\omega = \Delta E/\hbar$ возникает резонансное поглощение электромагнитного поля, рис. 6.1(b). Это явление носит название электронного парамагнитного резонанса (или спинового резонанса, electron spin resonance). Экспериментально этот эффект наблюдался Евгением Константиновичем Завойским в 1944 г. Теория резонанса была разработана Феликсом Блохом в 1946 году.[1]

Ясно, что по частоте резонанса можно с высокой точностью определить g-фактор электронов, а ширина линии резонанса связана с уширением спиновых подуровней, т.е. по ширине линии можно судить о времени спиновой релаксации.

[1] Аналогичное явление для ядерных спинов наблюдал Исидор Раби в 1938 году при исследовании молекул, а в 1946 г. Феликс Блох и Эдвин Парселл обобщили методику для жидкостей и твердых тел.

6.2 Классическая теория магнитного резонанса

Динамику спинов во внешнем магнитном поле будем описывать в рамках кинетического уравнения

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{S} + \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{S} - \frac{S_z - S_0}{T_1}\boldsymbol{e}_z - \frac{S_x\boldsymbol{e}_x + S_y\boldsymbol{e}_y}{T_2}. \tag{6.3}$$

Здесь $\boldsymbol{S} = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}}$ в обозначениях предыдущей лекции, а также введены следующие новые величины:

$$\boldsymbol{\Omega}_0 = \frac{g\mu_B \boldsymbol{B}_0}{\hbar} \parallel z, \quad \boldsymbol{\Omega}_1 \equiv \boldsymbol{\Omega}_1(t) = \frac{g\mu_B \tilde{\boldsymbol{B}}(t)}{\hbar} \parallel (xy),$$

S_0 – равновесный (наведенный $\boldsymbol{B}_0$) спин, направленный по оси z, а также времена продольной $T_1 = T_{zz}$ и поперечной $T_2 = T_{xx} = T_{yy}$ спиновой релаксации.[2] Уравнение (6.3) также называют уравнением Блоха.

Система уравнений (6.3) состоит из трех уравнений первого порядка с коэффициентами, зависящими от времени. Для ее решения удобно воспользоваться следующим приемом. Будем считать, что падающая волна [т.е. переменное поле $\tilde{\boldsymbol{B}}(t)$] циркулярно поляризована. Тогда вектор $\boldsymbol{B}_1$ вращается с частотой ω вокруг оси $\boldsymbol{z}$. Введем вектор $\boldsymbol{\omega} = \pm\omega\boldsymbol{e}_z$, описывающий вращение (разные знаки соответствуют противоположным циркулярным поляризациям). Во вращающейся системе отсчета

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times,$$

при этом уравнения (6.3) приобретают вид

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{S}}}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{\Omega}_0 - \boldsymbol{\omega}) \times \tilde{\boldsymbol{S}} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_1 \times \tilde{\boldsymbol{S}} - \frac{S_z - S_0}{T_1}\boldsymbol{e}_z - \frac{\tilde{S}_x\tilde{\boldsymbol{e}}_x + \tilde{S}_y\tilde{\boldsymbol{e}}_y}{T_2}. \tag{6.4}$$

Волнистыми линиями мы обозначаем компоненты, относящиеся ко вращающейся системе координат (z-компоненты полей и спина не меняются при переходе во вращающуюся систему). Отметим, что $\tilde{\Omega}_1$ уже не зависит от времени, а направлен вдоль некоторой фиксированной оси. Для

[2] *Почему при исследовании резонанса разумно считать, что $T_1 \neq T_2$, т.е. не ограничиваться изотропным приближением?*

определенности считаем, что вектор $\tilde{\Omega}_1$ направлен в этой системе вдоль оси $\tilde{x}$.

Преимущество перехода во вращающуюся систему отсчета состоит в том, что магнитные поля в ней перестают зависеть от времени. Введем $\Delta\omega = \Omega_0 - \omega$ – отстройку от резонанса. Тогда векторное уравнение (6.4) можно переписать в покомпонентном виде:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{S}_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\tilde{S}_x}{T_2} - \Delta\omega\tilde{S}_y, \tag{6.5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{S}_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{\tilde{S}_y}{T_2} + \Delta\omega\tilde{S}_x - \tilde{\Omega}_1\tilde{S}_z, \tag{6.5b}$$

$$\frac{\mathrm{d}S_z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\tilde{S}_z - S_0}{T_1} + \tilde{\Omega}_1\tilde{S}_y. \tag{6.5c}$$

Будем считать, что переменное поле мало, тогда в первом приближении можно пренебречь изменением S_z по сравнению с его равновесным значением $S_z = S_0$. В этом случае интерес представляют лишь два уравнения (6.5a) и (6.5b), решение которых в стационарном состоянии $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t \to 0)$ записывается в виде

$$\tilde{S}_x + \mathrm{i}\tilde{S}_y = -\mathrm{i}\frac{\tilde{\Omega}_1 T_2}{1 - \mathrm{i}\Delta\omega T_2} S_0, \tag{6.6}$$

или

$$\tilde{S}_x = \frac{\Delta\omega\Omega_1 T_2^2}{1 + (\Delta\omega T_2)^2} S_0, \quad \tilde{S}_y = -\frac{\tilde{\Omega}_1 T_2}{1 + (\Delta\omega T_2)^2} S_0. \tag{6.7}$$

Компоненты $\tilde{S}_x$, $\tilde{S}_y$ можно связать с поглощаемой в единицу времени мощностью излучения. Действительно, во втором порядке по переменному полю $\tilde{\Omega}_1$, как видно из (6.5c), возникает изменение z-компоненты спина, т.е. разности заселенности верхнего и нижнего зеемановских подуровней $|\pm 1/2\rangle$. Скорость изменения S_z равна $\tilde{\Omega}_1 S_y$, поэтому поглощаемая в единицу времени энергия пропорциональна

$$P \propto \hbar\omega S_0 \frac{\tilde{\Omega}_1^2 T_2}{1 + (\Delta\omega T_2)^2}. \tag{6.8}$$

Такая зависимость поглощаемой мощности от частоты переменного поля представлена на рис. 6.1.[3] Выражение в правой части формулы (6.6)

[3] *Почему резонанс пропадает при $S_0 \to 0$?*

можно связать с динамической спиновой восприимчивостью, величиной, характеризующей отклик электронов на переменное магнитное поле. Подробнее об этом речь пойдет на лекции 8, посвященной спектроскопии спиновых флуктуаций.

Из уравнений (6.7) следует, что ширина резонанса определяется параметром $1/T_2$, условие наблюдения $\Omega_0 T_2 \gg 1$. Детальный анализ уравнений Блоха и их решений приведен, например, в главе III книги А. Абрагама "Ядерный магнетизм", М. 1963 [26] или в пар. 8 главы 2 книги Ч. Сликтера "Основы теории магнитного резонанса", М. 1981 [27].

Важно отметить, что в неоднородных системах (например, в ансамбле квантовых точек, электронов, локализованных на донорах и т.п.) имеет место разброс g-факторов, Δg, а следовательно и разброс частот прецессии $\delta\Omega_0 \sim \Delta g \mu_B B_0/\hbar$. Форма линии резонанса может отличаться от лоренцевой (в пределе, когда неоднородное уширение доминирует, это – гауссиан), грубая оценка ширины резонанса:

$$\frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{T_2} + \delta\Omega_0.$$

6.3 Электрический дипольный спиновый резонанс

Выше мы рассмотрели возбуждение магнитного резонанса переменным магнитным полем. На квантовомеханическом языке это соответствует магнитодипольным переходам. В системах со спин-орбитальной связью магнитный резонанс может возбуждаться переменным электрическим полем, т.е. за счет электрических дипольных переходов. Убедимся в этом, рассмотрев структуру с асимметричной квантовой ямой, где в эффективном гамильтониане присутствует линейное по $\boldsymbol{k}$ слагаемое, связанное со структурной инверсионной асимметрией [формула (4.17)]:

$$\mathcal{H}_R = \alpha_R(\sigma_x k_y - \sigma_y k_x). \tag{6.9}$$

Во внешнем поле волновой вектор $\boldsymbol{k}$ следует заменить на $\boldsymbol{k} - \frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{A}$ – векторный потенциал падающего электромагнитного поля. В калибровке $\varphi \equiv 0$ имеем

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\boldsymbol{A}.$$

В результате из (6.9) получаем следующую формулу, описывающую возмущение системы переменным полем:

$$\mathcal{H}_1' = \frac{\mathrm{i}e\alpha_R}{\hbar\omega}(\sigma_x E_y - \sigma_y E_x) + \text{c.c.}. \tag{6.10}$$

Из (6.10) следует, что электрическое поле вызывает переходы между состояниями $|-1/2\rangle$ и $|+1/2\rangle$, т.е. приводит к спиновому резонансу. Этот эффект был предложен Э.И. Рашбой в 1960 г. [14], оценки показывают, что он в типичных полупроводниковых структурах заметно сильнее, чем спиновый резонанс, обусловленный магнитным полем.

Последовательная теория данного явления развивается в рамках квантовомеханического подхода, в котором в магнитном поле $\boldsymbol{B}_0 \parallel z$ волновая функция электрона раскладывается по базису волновых функций $\Phi_{n,k_y}(\boldsymbol{r})|\uparrow\rangle$, $\Phi_{n,k_y}(\boldsymbol{r})|\downarrow\rangle$, где $\Phi_{n,k_y}(\boldsymbol{r})$ – орбитальные функции уровней Ландау, n – номер уровня, k_y – компонента волнового вектора (используется калибровка Ландау).[4] Можно ввести операторы повышения и понижения уровня, связанные с компонентами волнового вектора как

$$k_x - \mathrm{i}k_y = \frac{\sqrt{2}}{l_B}a^\dagger, \quad k_x + \mathrm{i}k_y = \frac{\sqrt{2}}{l_B}a, \tag{6.11}$$

где $l_B = \sqrt{\hbar c/|eB_0|}$ – магнитная длина ($B_{0,z} > 0$). Тогда гамильтониан электрона с учетом (6.9) и (6.11) принимает вид

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_C(a^\dagger a + 1/2) + \frac{1}{2}g\mu_B B_0 & \mathrm{i}\alpha_R\sqrt{2}l_B^{-1}a^\dagger \\ -\mathrm{i}\alpha_R\sqrt{2}l_B^{-1}a & \hbar\omega_C(a^\dagger a + 1/2) - \frac{1}{2}g\mu_B B_0 \end{pmatrix}, \tag{6.12}$$

где $\hbar\omega_C = \hbar|eB_0|/mc$. Несложно проверить, что столбец

$$\begin{pmatrix} C_n\Phi_n(\boldsymbol{r}) \\ D_n\Phi_{n-1}(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

является собственным вектором матрицы (6.12), причем

$$\begin{pmatrix} \hbar\omega_C(n + 1/2) + \frac{1}{2}g\mu_B B_0 & \mathrm{i}\alpha_R\sqrt{2}l_B^{-1}\sqrt{n} \\ -\mathrm{i}\alpha_R\sqrt{2}l_B^{-1}\sqrt{n} & \hbar\omega_C(n - 1/2) - \frac{1}{2}g\mu_B B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix} = \mathcal{E}_n \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

[4] Если магнитное поле $\boldsymbol{B}_0$ лежит в плоскости квантовой ямы, то достаточно учесть возмущение в виде (6.10), так как орбитальный эффект поля мал.

где $\mathcal{E}_n$ – энергия состояния. Решая уравнение (6.14) можно определить спектр и волновые функции системы. В частности, для собственных энергий имеем

$$\mathcal{E}_n = \hbar\omega_C \left[1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{g\mu_B B}{\hbar\omega_C}\right)^2 + \frac{8\alpha_R^2}{l_B^2 \hbar\omega_C} n} \right]. \tag{6.15}$$

Расчет вероятностей перехода в дипольном приближении сводится к вычислению на функциях (6.13) матричных элементов возмущения

$$-\frac{e}{c}\frac{\hbar(k_x A_x + k_y A_y)}{m}\hat{I} - \frac{e\alpha_R}{c\hbar}(\sigma_x A_y - \sigma_y A_x), \tag{6.16}$$

где $\hat{I}$ – единичная матрица, а компоненты k_x, k_y выражаются согласно (6.11) через операторы $a, a^\dagger$.

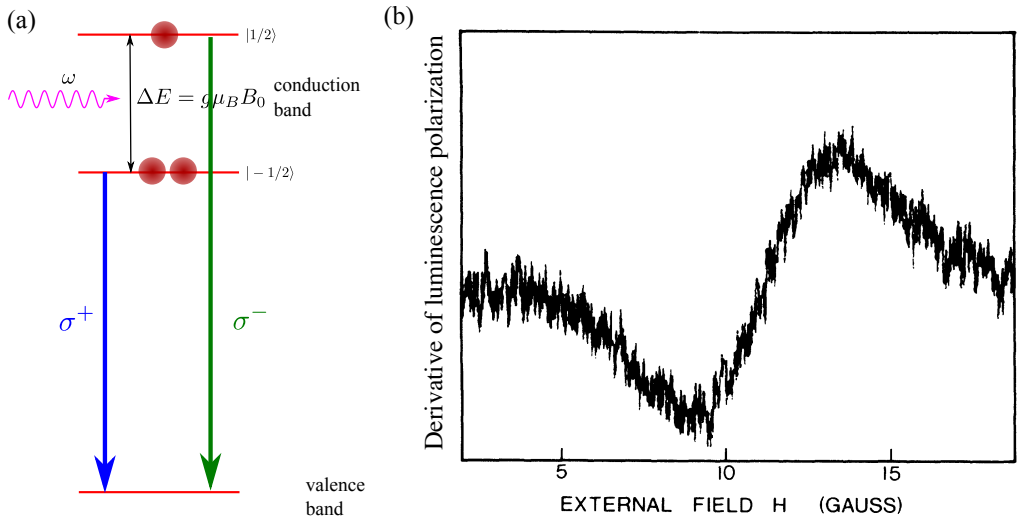

Рис. 6.2: (a) Схема оптически детектируемого магнитного резонанса. (b) Спектр оптически детектируемого магнитного резонанса в GaSb p-типа из [28]. В эксперименте применялась модуляционная методика, поэтому спектр резонанса имеет вид производной от лоренциана.

6.4 Оптически детектируемый магнитный резонанс

В заключение скажем несколько слов об оптически детектируемом магнитном резонансе (optically detected magnetic resonance – ODMR). В этой методике детектируется не поглощение микроволн, а поглощение света оптического диапазона или междузонная люминесценция. Как мы знаем из лекции 3, правила отбора при междузонных переходах в полупроводниках типа GaAs таковы, что электроны с проекцией спина $+1/2$ рекомбинируют, испуская преимущественно σ^--поляризованный свет, а электроны с проекцией спина $-1/2$ рекомбинируют, испуская преимущественно σ^+-поляризованный свет. Переменное электромагнитное поле, как мы показали выше, меняет заселенности спиновых подуровней зоны проводимости, рис. 6.2(a), поэтому степень поляризации люминесценции меняется под действием радиочастотного поля, рис. 6.2(b). Таким образом, парамагнитный резонанс детектируется не на радиочастоте, а на оптической частоте, которая значительно выше. Это позволяет резко повысить чувствительность методики парамагнитного резонанса. Метод оптического детектирования магнитного резонанса был впервые применен к полупроводникам в работе C. Hermann, G. Lampel, *Measurement of the g-factor of conduction electrons by optical detection of spin resonance in p-type semiconductors*, Phys. Rev. Lett. **27**, 373 (1971) [28].

Лекция 7

Метод “накачка – зондирование”

Выше мы обсуждали методики исследования спиновой динамики в полупроводниках, основанные на поляризованной люминесценции и на применении электронного парамагнитного резонанса. Особый интерес и важность в последние годы приобрели методы, позволяющие отслеживать динамику спинов с временным разрешением, при этом не разрушая, или практически не разрушая, спиновую поляризацию в системе. На этой лекции пойдет речь о методе “накачка – зондирование”.

7.1 Феноменологическое описание

7.1.1 Объемный полупроводник

Рассмотрим, как изменяются оптические свойства полупроводника при наличии в нем спиновой поляризации носителей заряда $\boldsymbol{S}$. Отклик системы на внешнее поле характеризуется диэлектрической проницаемостью $\hat{\varepsilon}$, которая связывает компоненты электрического поля $\boldsymbol{E}$ и индукции поля $\boldsymbol{D}$ в среде. Удобно связывать фурье-компоненты полей, тогда $\hat{\varepsilon} \equiv \hat{\varepsilon}(\omega, \boldsymbol{q})$, в дальнейшем зависимостью от волнового вектора $\boldsymbol{q}$ пренебрегается.[1]

При наличии спиновой поляризации

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{S}) = \varepsilon^0_{ij}(\omega) + g_{ijk}(\omega) S_k. \tag{7.1}$$

[1] *Почему?*

Здесь g_{ijk} – псевдотензор третьего ранга, членами, содержащими более высокие степени S_k, пренебрегаем. Имеет место принцип Онзагера, который следует из симметрии к обращению хода времени,

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{S}) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\boldsymbol{S}).$$

В кубическом кристалле (так же, как и в изотропной среде) тензор ε^0_{ij} сводится к единичному, а псевдотензор g_{ijk} – к символу Леви-Чивиты, тогда материальное соотношение $\boldsymbol{D} = \hat{\varepsilon}(\omega, \boldsymbol{S})\boldsymbol{E}$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon^0(\omega)\boldsymbol{E} + \mathrm{i}g(\omega)[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{S}], \tag{7.2}$$

где $g(\omega)$ – некоторая (скалярная) функция частоты, определяемая свойствами материала, в непоглощающих средах $g(\omega)$ – вещественная функция.

Найдем собственные моды электромагнитного поля в намагниченной среде. Для определенности выберем следующую геометрию: пусть волна распространяется вдоль оси z, пусть и спиновая поляризация также направлена по z: $\boldsymbol{S} = (0, 0, S_z)$. Тогда

$$D_x = \varepsilon^0 E_x + \mathrm{i}gS_z E_y, \quad D_y = \varepsilon^0 E_y - \mathrm{i}gS_z E_x,$$

или

$$D_{\sigma^+} = -\frac{D_x - \mathrm{i}D_y}{\sqrt{2}} = (\varepsilon^0 - gS_z)E_{\sigma^+}, \quad D_{\sigma^-} = \frac{D_x + \mathrm{i}D_y}{\sqrt{2}} = (\varepsilon^0 + gS_z)E_{\sigma^-}, \tag{7.3}$$

т.е. собственные волны в среде – циркулярно поляризованы, ср. с формулами (3.6) лекции 3. Соответствующие показатели преломления

$$n_\pm = \sqrt{\varepsilon^0 \mp gS_z} \approx n \mp \frac{gS_z}{2n}, \tag{7.4}$$

где $n = \sqrt{\varepsilon^0}$ – показатель преломления в отсутствие спиновой поляризации. Различие в показателях преломления для циркулярно поляризованных волн приводит к циркулярному двулучепреломлению. В частности, пусть на среду падает линейно поляризованный луч (он называется зондирующим или пробным, probe), в котором $\boldsymbol{E} \parallel x$. Внутри намагниченной среды циркулярные компоненты распространяются с разными

скоростями, поэтому после прохождения среды плоскость его поляризации повернется на угол (считаем, что n и g – вещественные)

$$\vartheta_F = L\frac{\omega g}{2cn}S_z, \tag{7.5}$$

где L – толщина образца. Это – спиновый эффект Фарадея. Можно сказать, что наличие спиновой поляризации в среде приводит к ее оптической активности.

В общем случае в системе есть поглощение, $\operatorname{Im}\varepsilon^0$, $\operatorname{Im} g \neq 0$, и прошедший зондирующий луч приобретает эллиптичность (ненулевую циркулярную поляризацию), так как одна из циркулярных компонент будет поглощаться сильнее, чем другая. Эллиптичность прошедшего зондирующего луча также пропорциональна S_z. Аналогичные эффекты имеют место и в геометрии на отражение: поворот плоскости поляризации отраженного зондирующего луча называют спиновым эффектом Керра. В низкоразмерных системах сущность эффекта не меняется, но для его описания вместо тензора $\hat{\varepsilon}$ следует использовать, например, в структурах с квантовыми ямами, коэффициенты пропускания и отражения, так как характерные толщины квантовых ям много меньше длины волны света, см. ниже.

Линейную связь (7.5) между поворотом плоскости поляризации зондирующего луча и спином в системе можно использовать для исследования спиновой динамики.

7.1.2 Детектирование спиновой поляризации в квантовых ямах и квантовых точках

Как мы увидели на примере объемной системы, поляризация электронов по спину приводит к оптической активности среды: эффективность взаимодействия право и лево циркулярно поляризованных электромагнитных волн с такой системой оказывается различной. Отклик структур с квантовыми ямами или планарными массивами квантовых точек на электромагнитное излучение удобно характеризовать частотно и поляризационно зависимым коэффициентом отражения света $r_\pm(\omega)$ (знаки $\pm$ соответствуют $\sigma^\pm$ циркулярным поляризациям). Нас будут интересовать массивы квантовых точек, содержащих одиночные электроны, и квантовые ямы с электронным газом низкой плотности ($na_B^2 \ll 1$, где n – двумерная концентрация электронов, a_B – боровский радиус). В

таких структурах могут формироваться экситоны (связанные кулоновским взаимодействием электрон-дырочные пары) и трионы (трехчастичные комплексы из двух электронов в синглетном спиновом состоянии[2] и неспаренной дырки). Вблизи экситонного или трионного резонанса $r_\pm(\omega)$ имеет вид

$$r_\pm(\omega) = \frac{\mathrm{i}\Gamma_{0,\pm}}{\omega_{0,\pm} - \omega - \mathrm{i}(\Gamma_{0,\pm} + \Gamma_\pm)}. \tag{7.6}$$

Здесь ω – частота зондирующего луча, ω_0 – резонансная частота экситона или триона, Γ_0 – его радиационное, а Γ – нерадиационное затухание. Отличие параметров резонанса для право и лево циркулярно поляризованного излучения связано со спиновой поляризацией носителей заряда:

$$(\Gamma_{0,+} - \Gamma_{0,-}), (\Gamma_+ - \Gamma_-), (\omega_{0,+} - \omega_{0,-}) \propto S_z,$$

и именно благодаря этому отличию формируются спиновые сигналы фарадеевского и керровского вращения, а также наведенной эллиптичности в структурах с квантовыми ямами и точками.

Приведем примеры микроскопических механизмов формирования спинового отклика.

- Для резонансного возбуждения *триона* светом σ^+ (σ^-) поляризации требуется наличие в системе электрона с $s_z = +1/2$ ($s_z = -1/2$, соответственно), чтобы пара фотоэлектрон+резидентный электрон обладала нулевым спином. Поэтому радиационное затухание триона $\Gamma_{0,\pm}$ (оно определяется силой осциллятора триона) пропорционально $n_\pm$ – концентрации электронов с $s_z = \pm 1/2$.

- Фотовозбужденный *экситон* при наличии резидентных электронов может захватить спин-поляризованный электрон и образовать синглетный трион. Это означает, что нерадиационное затухание экситонов $\Gamma_\pm \propto n_\pm$.

Перейдем к описанию конкретных экспериментальных методов.

[2] *Вопрос:* почему синглетный трион (с “антипараллельными” спинами электронов) стабилен, а триплетный (с “параллельными” спинами) скорее не стабилен.

7.2 Экспериментальный метод “накачка – зондирование”

Суть метода “накачка – зондирование” проиллюстрирована на рис. 7.1 и состоит в следующем: на образец падает короткий достаточно мощный циркулярно поляризованный импульс накачки, поглощение которого вызывает ориентацию по спину носителей заряда. Согласно правилам отбора это приводит к ненулевому среднему спину в системе, $S_z \neq 0$. С некоторой задержкой на образец приходит значительно более слабый линейно поляризованный импульс. Наличие в образце неравновесной спиновой поляризации приводит к тому, что система становится оптически активной: плоскость поляризации зондирующего импульса поворачивается в геометрии на прохождение (магнитооптический или спиновый эффект Фарадея), а также в геометрии на отражение (спиновый эффект Керра). Кроме этого, прошедший через образец и отраженный от него зондирующий импульс приобретают частичную циркулярную поляризацию – эллиптичность. Угол поворота плоскости поляризации, а также наведенная эллиптичность пропорциональны спиновой поляризации в системе в данный момент времени. Если к образцу приложено магнитное поле в геометрии Фойгта (в плоскости, поперечной направлению распространения лучей зондирования и накачки), то спины электронов прецессируют вокруг внешнего поля, поэтому наведенная эллиптичность, углы фарадеевского и керровского вращения осциллируют как функции задержки между импульсами накачки и зондирования, отражая спиновую прецессию. Использовать линейно поляризованный зондирующий луч для анализа спиновой поляризации электронов по спиновому эффекту Фарадея предложили А.Г. Аронов и Е.Л. Ивченко в 1973 году [29].

В экспериментах накачка – зондирование обычно имеют место следующие соотношения между параметрами (ω_{P} – несущая частота импульсов накачки/зондирования, обычно она вблизи $E_g/\hbar$, где E_g – ширина запрещенной зоны, в некоторых экспериментах частоты лазеров накачки и зондирования перестраивают независимо; $\tau_p \sim 1$ ps – длительность импульсов)

$$\frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{P}}} \ll \tau_p \ll \tau_s, \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Здесь τ_s – время спиновой релаксации, а Ω – частота спиновой прецессии во внешнем поле. Как правило, наблюдаемый в методе накачка-

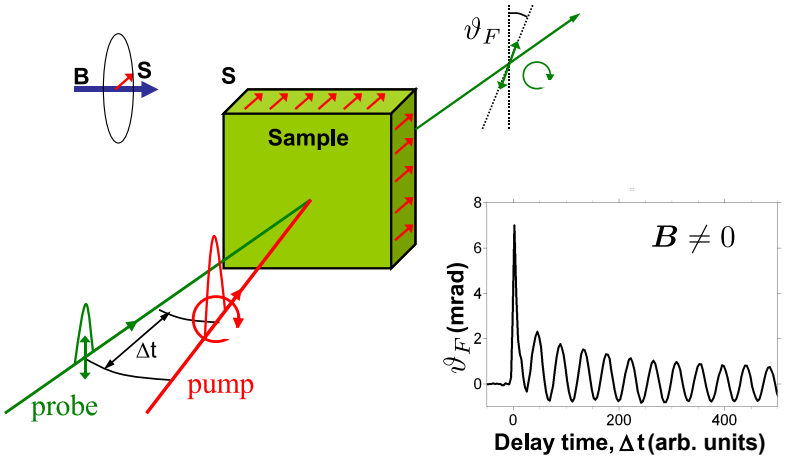

Рис. 7.1: Иллюстрация метода накачка – зондирования. Pump и probe обозначают циркулярно поляризованный импульс накачки и линейно поляризованный импульс зондирования, соответственно. На вставке показан типичный сигнал фарадеевского вращения как функция времени задержки между импульсами накачки и зондирования Δt. Из [30].

зондирование сигнал фарадеевского/керровского вращения или эллиптичности имеет вид

$$\vartheta_F(\Delta t) \propto \cos(\Omega \Delta t) e^{-\Delta t/\tau_s}, \tag{7.7}$$

где Δt – задержка между импульсом зондирования и накачки. Таким образом, метод накачка – зондирование позволяет непосредственно из эксперимента извлекать данные по спиновой динамике: частоты прецессии спинов, времена затухания и т.п. Обзор состояния исследований в этой области приведен в М.М. Глазов, *Когерентная спиновая динамика электронов и экситонов в наноструктурах (обзор)*, ФТТ 54, 3 (2012) [30].

7.3 Управление одиночным спином электрона в квантовой точке

В методе “накачка – зондирование” используются короткие оптические импульсы. Интересно проанализировать динамику спина одиночного электрона (локализованного, например, в квантовой точке) под действием циркулярно поляризованного импульса света.

Состояния квантовой точки описываем четырехкомпонентной волновой функцией

$$\Psi = \left[\psi_{1/2}, \psi_{-1/2}, \psi_{3/2}, \psi_{-3/2}\right] \ , \tag{7.8}$$

где нижние индексы $\pm 1/2$ относятся к спиновым состояниям резидентного электрона, а индексы $\pm 3/2$ – к состояниям фотовозбужденного триона. Квантовомеханические средние компонент спина электрона

$$S_z = \left(|\psi_{1/2}|^2 - |\psi_{-1/2}|^2\right)/2, \quad S_x = \mathrm{Re}(\psi_{1/2}\psi^*_{-1/2}), \quad S_y = -\,\mathrm{Im}(\psi_{1/2}\psi^*_{-1/2}). \tag{7.9}$$

Поскольку σ^+ поляризованный импульс света вызывает переход из состояния квантовой точки, соответствующего резидентному электрону с проекцией спина $s_z = +1/2$, в трион с проекцией спина дырки $+3/2$, а σ^- поляризованный импульс связывает состояния $-1/2$ и $-3/2$, то для описания взаимодействия импульса накачки заданной циркулярной поляризации с электроном в точке достаточно ограничиться лишь парой состояний: $[\psi_{1/2}, \psi_{3/2}]$ или $[\psi_{-1/2}, \psi_{-3/2}]$, т.е. двухуровневой моделью. Уравнения, описывающие динамику волновой функции квантовой точки под действием оптического импульса, поляризованного по правому кругу (σ^+), можно представить в виде

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\psi}_{3/2} = \hbar\omega_0\psi_{3/2} + V_+(t)\psi_{1/2}\ , \quad \mathrm{i}\hbar\dot{\psi}_{1/2} = V^*_+(t)\psi_{3/2}\ . \tag{7.10}$$

Здесь $\dot{\psi} \equiv \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$,

$$V_+(t) = -\int \mathsf{d}(\boldsymbol{r})E_{\sigma^+}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{7.11}$$

– оператор возмущения, $\mathsf{d}(\boldsymbol{r})$ – плотность дипольного момента. Для σ^+ накачки $\psi_{-1/2}(t) = \mathrm{const}$, а систему (7.10) можно переписать в виде одного уравнения:

$$\ddot{\psi}_{1/2} - \left(\mathrm{i}\omega' + \frac{\dot{f}(t)}{f(t)}\right)\dot{\psi}_{1/2} + f^2(t)\psi_{1/2} = 0\ . \tag{7.12}$$

Здесь $\omega' = \omega_{\mathrm{P}} - \omega_0$ – расстройка между несущей частотой накачки и резонансной частотой триона, а $f(t)$ – плавная огибающая импульса накачки, определенная согласно

$$f(t) = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{P}}t}}{\hbar}\int \mathsf{d}(\boldsymbol{r})E_{\sigma_+}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}^3r \ = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\mathrm{P}}t}}{\hbar}V_+(t).$$

Из уравнения (7.12) следует, что значения функции $\psi_{1/2}(-\infty)$, т.е. до прихода очередного импульса накачки, и $\psi_{1/2}(\infty)$ (после прихода импульса) связаны линейно. В общем случае эту связь можно записать как

$$\psi_{1/2}(\infty) = Q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\psi_{1/2}(-\infty)\ , \tag{7.13}$$

где вещественный коэффициент Q удовлетворяет условию $0 \leqslant Q \leqslant 1$, а фаза Φ может быть выбрана в интервале от $-\pi$ до π. Эти параметры определяются формой импульса, его длительностью и отстройкой от резонансной частоты. Воспользовавшись уравнениями (7.9) и (7.13), свяжем значения спина электрона до прихода импульса накачки, $\boldsymbol{S}^- = (S_x^-, S_y^-, S_z^-)$, и сразу после прихода импульса накачки, $\boldsymbol{S}^+ = (S_x^+, S_y^+, S_z^+)$:

$$S_z^+ = \frac{Q^2-1}{4} + \frac{Q^2+1}{2}S_z^-\ , \tag{7.14a}$$

$$S_x^+ = Q\cos\Phi S_x^- + Q\sin\Phi S_y^-\ , \tag{7.14b}$$

$$S_y^+ = Q\cos\Phi S_y^- - Q\sin\Phi S_x^-\ . \tag{7.14c}$$

Система уравнений (7.14) описывает ориентацию и преобразование спина электрона в квантовой точке коротким оптическим импульсом. Уравнение (7.14a) описывает генерацию спина, а уравнения (7.14b), (7.14c) – поворот спина в плоскости (xy) под действием циркулярно поляризованного луча. Преобразование электронного спина под действием импульса накачки, поляризованного по левому кругу σ^-, описывается аналогичными уравнениями.[3]

Рассмотрим импульс, несущая частота которого находится в резонансе с оптическим переходом:

$$\psi_{1/2}(t) = \psi_{1/2}(-\infty)\cos\left[\int_{-\infty}^{t} f(t')\mathrm{d}t'\right], \tag{7.15}$$

поэтому величины Q и Φ в уравнении (7.13) равны

$$\Phi \equiv 0, \quad Q = \cos(\Theta/2), \tag{7.16}$$

где

$$\Theta = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\mathrm{d}t' \tag{7.17}$$

[3] *Какими?*

– эффективная площадь импульса. Из (7.14) и (7.16) следует, что спин электрона, возбуждаемый одиночным импульсом, периодически зависит от площади импульса Θ, т.е. от амплитуды поля в нем. Зависимость спина электрона от мощности импульса также имеет осциллирующее поведение, типичное для двухуровневых систем (эффект Раби) [8]: достаточно мощный импульс может не только перевести систему из основного состояния в возбужденное, но и вернуть ее обратно в основное состояние.

Лекция 8

Спектроскопия спиновых шумов

На прошлой лекции речь шла о двухимпульсном методе "накачка – зондирование", в котором первый импульс создавал спиновую поляризацию носителей заряда в полупроводнике, а второй – линейно поляризованный – использовался для ее считывания. На этой лекции мы поговорим о спиновых флуктуациях, которые можно наблюдать без накачки. Как будет показано, спектр и интенсивность спиновых флуктуаций содержат важные параметры динамики спинов.

8.1 Спиновый шум и фарадеевское вращение

Можно ожидать, что без импульса накачки плоскость поляризации пробного луча поворачиваться не будет. Это так только "в среднем". На самом деле, угол фарадеевского вращения линейно поляризованного луча флуктуирует вблизи нулевого среднего значения [см. рис. 8.1]:

$$\langle \vartheta_F \rangle = 0, \quad \langle \vartheta_F^2 \rangle \neq 0,$$

скобки обозначают усреднение по времени. Эти флуктуации связаны с тем, что в ансамбле электронов возникают флуктуации спина $\langle \delta S_z^2 \rangle \neq 0$ даже в отсутствие средней спиновой поляризации $\langle S_z \rangle = 0$. Такие флуктуации называют также спиновым шумом (spin noise). Грубо говоря, среди N электронов может быть флуктуация $\sim \sqrt{N}$ спин-поляризованных носителей. Наличие в момент времени t случайной флуктуации z-компоненты спина, δS_z, приводит к флуктуационному повороту плоскости

поляризации пробного луча,

$$\delta\vartheta_F(t) \propto \delta S_z(t). \tag{8.1}$$

Отметим, что с точки зрения распространения света через образец спиновые флуктуации, как правило, можно рассматривать как статические.[1]

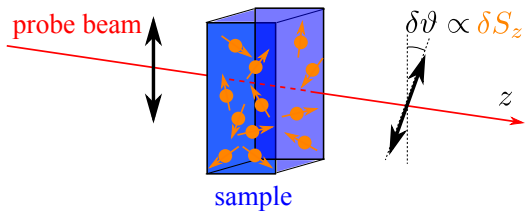

Рис. 8.1: Схематическая иллюстрация детектирования спиновых флуктуаций: z – ось распространения линейно поляризованного зондирующего луча, двойные стрелки показывают ориентацию плоскости линейной поляризации света до и после прохождения образца.

Естественно, возникает вопрос о том, какой информацией обладают спиновые флуктуации. Для ответа на него обратимся к теории флуктуаций.

8.2 Элементы теории флуктуаций

Спиновые флуктуации носят квантово-статистический характер. Например, для одного неполяризованного электрона ($\langle \boldsymbol{S} \rangle = 0$) пользуясь определением оператора спина можно получить:[2]

$$\langle \delta S_x^2 \rangle = \langle \delta S_y^2 \rangle = \langle \delta S_z^2 \rangle = S(S+1)/3 = 1/4.$$

Обычно спиновый шум характеризуют временной корреляционной функцией

$$\langle \delta S_z(t+\tau)\delta S_z(t) \rangle \tag{8.2}$$

Усреднение в (8.2) подразумевает следующее: рассматривается произведение компонент спина в разные моменты времени $t+\tau$ и t, которое

[1] *Почему?*

[2] *Задача:* Рассчитать среднеквадратичные флуктуации компонент спина одиночного электрона в магнитном поле $\boldsymbol{B} \parallel z$. Считать, что зеемановское расщепление может быть сопоставимо с температурой.

усредняется по t при фиксированной разности времени τ. Если рассматривается один спин, то при $\tau = 0$ имеем

$$\langle \delta S_z(t) \delta S_z(t) \rangle = \langle \delta S_z^2 \rangle = \frac{1}{4}. \tag{8.3}$$

Для ансамбля из N независимых электронов среднеквадратичная флуктуация полного спина в N раз больше.

Динамику спиновых флуктуаций можно определить из следующих соображений. Флуктуация $\delta \boldsymbol{S}$ эволюционирует со временем также, как если бы она была создана за счет действия внешних сил (это утверждение носит общий характер и называется гипотезой Онзагера). Тогда ясно, что спиновые флуктуации должны "исчезать" за время спиновой релаксации τ_s, а если к системе приложено магнитное поле $\boldsymbol{B} \perp z$, то они прецессируют с частой $\Omega = g\mu_B B/\hbar$. Таким образом, для флуктуации спина имеем

$$\frac{d\delta \boldsymbol{S}}{dt} + \delta \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{\delta \boldsymbol{S}}{\tau_s} = \boldsymbol{\xi}(t). \tag{8.4}$$

Левая часть уравнения нам знакома по уравнению Блоха, ср. с (5.5). Правая часть уравнения $\boldsymbol{\xi}(t)$ – случайная сила, называемая также силой Ланжевена. Ланжевеновская сила вводится формальным образом, чтобы "поддерживать" среднеквадратичные флуктуации (8.3). Средние значения случайных сил равны нулю, $\langle \xi(t) \rangle = 0$, для корреляционной функции в пределе слабого магнитного поля ($|g\mu_B B|/k_B T \ll 1$) можно получить

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \frac{1}{2\tau_s} \delta_{ij} \delta(t - t'). \tag{8.5}$$

Обычно вводят фурье-компоненты флуктуирующего спина согласно

$$\delta \boldsymbol{S}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta \boldsymbol{S}(t) e^{\mathrm{i}\omega t} dt, \quad \delta \boldsymbol{S}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta \boldsymbol{S}_\omega e^{-\mathrm{i}\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

аналогичным образом определяются и фурье-спектры корреляторов спина

$$(\delta S_i \delta S_j)_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta S_i(t+\tau) \delta S_j(t) \rangle e^{\mathrm{i}\omega\tau} d\tau. \tag{8.6}$$

Отметим, что

$$\langle \delta \xi_i(\omega) \delta \xi_j^*(\omega')) = \frac{\pi}{\tau_s} \delta_{ij} \delta(\omega - \omega'). \tag{8.7}$$

Приведем решение (8.4) для случая, когда $\mathbf{\Omega} \perp z$. Рассмотрим для простоты коррелятор $\langle \delta S_z(t) \delta S_z(t') \rangle$:[3]

$$\langle S_z(t+\tau) S_z(t) \rangle = \frac{1}{4} \cos \Omega\tau \ \mathrm{e}^{-|\tau|/\tau_s}. \tag{8.8}$$

В частотном представлении получаем спектр мощности спиновых флуктуаций (spin noise spectrum):

$$(S_z^2)_\omega = \frac{\tau_s}{4} \left[\frac{1}{1+(\omega+\Omega)^2\tau_s^2} + \frac{1}{1+(\omega-\Omega)^2\tau_s^2} \right]. \tag{8.9}$$

Вблизи $\omega = \pm\Omega$ он описывается функцией Лоренца с шириной, определяемой τ_s.

В равновесных условиях спектр спиновых флуктуаций (8.9) можно выразить через спиновую восприимчивость системы [ср. с формулой (6.6) главы 6]. Такая связь является очень глубокой, она носит название *флуктуационно-диссипационной теоремы*. Таким образом, магнитный резонанс можно изучать только в рамках оптики без какого-либо возбуждения системы, пользуясь методикой спектроскопии спиновых шумов. Мы не будем приводить общее доказательство флуктуационно-диссипационной теоремы (см., например, параграфы 118, 123 и 124 тома 5 курса Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [31]), но проиллюстрируем вывод этой теоремы для спиновых флуктуаций без магнитного поля.

8.3 Флуктуационно-диссипационная теорема

Определим "обобщенную силу", действующую на спин, в виде $\boldsymbol{f} = -g\mu_B \boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{B}$ – внешнее магнитное поле. Тогда гамильтониан взаимодействия спина с полем принимает вид

$$\frac{1}{2} g\mu_B (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}) = -\hat{\boldsymbol{s}} \cdot \boldsymbol{f}.$$

Введем тензор спиновой восприимчивости $\mu_{ij}(\omega)$ согласно

$$S_{i,\omega} = \mu_{ij}(\omega) f_j.$$

[3] *Вопрос:* почему в корреляторе $\mathrm{e}^{-|\tau|/\tau_s}$ содержит $|\tau|$, а не τ?

Тензор $\mu_{ij}(\omega)$ описывает отклик спина на внешнее поле, осциллирующее на частоте ω: $\boldsymbol{f}\exp(-\mathrm{i}\omega t)+$c.c.. Флуктуационно-диссипационная теорема гласит, что

$$(\delta S_i \delta S_j)_\omega = \frac{\mathrm{i}k_B T}{\omega}\left[\mu^*_{ij}(\omega) - \mu_{ji}(\omega)\right]. \tag{8.10}$$

В (8.10) считается, что $k_B T \gg \hbar\omega$.

Действительно, найдем отклик спина на переменное поле $\boldsymbol{B} \parallel z$, воспользовавшись уравнением Блоха (5.5), где положим $T_1 = T_2 = \tau_s$, $\boldsymbol{\Omega}_1 = 0$ и $S_0(\Omega_0) = f_z/(4k_B T)$. Тогда для $S_{z,\omega}$ имеем

$$S_{z,\omega} = \frac{f_1}{4k_B T\tau_s}\frac{\tau_s}{1-\mathrm{i}\omega\tau_s}, \quad \mu_{zz}(\omega) = \frac{1}{4k_B T}\frac{1}{1-\mathrm{i}\omega\tau_s}. \tag{8.11}$$

Сравнение (8.9) (при $\Omega = 0$) и (8.11) подтверждает справедливость (8.10).

8.4 Информация в спектрах спинового шума

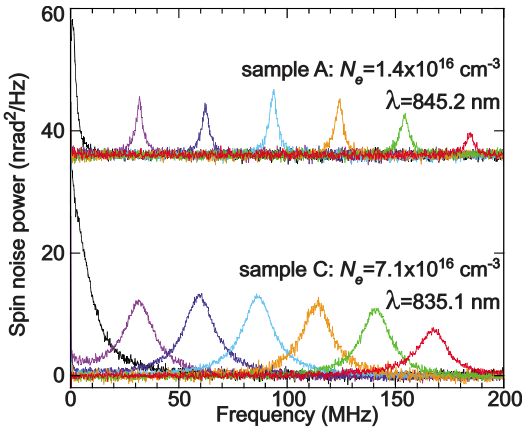

Рис. 8.2: Спектры спиновых флуктуаций электронов в объемном GaAs (приведены данные по двум образцам с разными концентрациями электронов N_e) в магнитных полях $B_x = 0$, 50, 100, 150, 200, 250, 300 Гс (от “черного” до “красного” спектра). Из [32].

Сопоставление выражения (8.8) с формулой (7.7) показывает, что исследование спинового коррелятора (например, путем измерения коррелятора углов фарадеевского вращения для коротких линейно поляризованных импульсов света) дает информацию о спиновой динамике даже без накачки.

В экспериментах, как правило, используется монохроматический зондирующий луч и измеряется спектр мощности шумов фарадеевского вращения, который линейно связан со спектром мощности спиновых шумов (8.9). Измерение спинового шума также позволяет установить времена спиновой релаксации и частоты спиновой прецессии электронов, находящихся в равновесных или близких к равновесным условиях. Экспериментально измеренные спектры спиновых флуктуаций в объемном полупроводнике представлены на рис. 8.2.

Метод спектроскопии спиновых шумов был предложен и реализован Е.Б. Александровым и В.С. Запасским в 1981 году [33], обзор современных достижений приведен в J. Hübner, F. Berski, R. Dahbashi, and M. Oestreich, *The rise of spin noise spectroscopy in semiconductors: From acoustic to GHz frequencies*, physica status solidi (b) **251**, 1824-1838 (2014) [34].

Лекция 9

Спиновые токи

Помимо исследований динамики и флуктуаций спина как таковых, спинтроника изучает явления на стыке спиновой динамики и электронного транспорта. Поэтому перейдем к обсуждению весьма интересного и активно исследуемого явления: спинового тока.

9.1 Электрические и спиновые токи

Напомним, что электрический ток есть направленное движение зарядов. В рамках кинетического подхода ток выражается через функцию распределения электронов $f_{\boldsymbol{k}}$ как

$$\boldsymbol{j} = 2e \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}} f_{\boldsymbol{k}}, \tag{9.1}$$

где $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}} = \hbar^{-1} \partial E_{\boldsymbol{k}} / \partial \boldsymbol{k}$ – скорость электрона в состоянии $\boldsymbol{k}$, $E_{\boldsymbol{k}}$ – дисперсия электрона, множитель 2 учитывает спин, $e = -|e|$. Выражение (9.1) можно переписать через спиновую матрицу плотности $\rho_{\boldsymbol{k}} = f_{\boldsymbol{k}} I + \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ как

$$\boldsymbol{j} = 2e \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}} f_{\boldsymbol{k}} = e \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{Sp}\{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}} \rho_{\boldsymbol{k}}\}. \tag{9.2}$$

До сих пор речь шла о носителях заряда одного типа – электронах. В системах, где есть и электроны и дырки, возможны две ситуации: электроны и дырки двигаются с одинаковыми средними скоростями, рис. 9.1(a),

$$\langle \boldsymbol{v}^{(e)} \rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}^{(e)} f_{\boldsymbol{k}}^{(e)} = \langle \boldsymbol{v}^{(h)} \rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}^{(h)} f_{\boldsymbol{k}}^{(h)},$$

тогда полный электрический ток отсутствует (но направленное движение квазичастиц имеется). Иная возможность – электроны и дырки двигаются с разными, в частности, с противоположными средними скоростями, рис. 9.1(b), тогда

$$\langle \boldsymbol{v}^{(e)} \rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}^{(e)} f_{\boldsymbol{k}}^{(e)} = -\langle \boldsymbol{v}^{(h)} \rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}^{(h)} f_{\boldsymbol{k}}^{(h)},$$

и в системе течет электрический ток

$$\boldsymbol{j}^{tot} = \boldsymbol{j}^{(e)} + \boldsymbol{j}^{(h)} = 2e \sum_{\boldsymbol{k}} v_{\boldsymbol{k}}^{(e)} f_{\boldsymbol{k}}^{(e)} - 2e \sum_{\boldsymbol{k}} v_{\boldsymbol{k}}^{(h)} f_{\boldsymbol{k}}^{(h)} \neq 0. \tag{9.3}$$

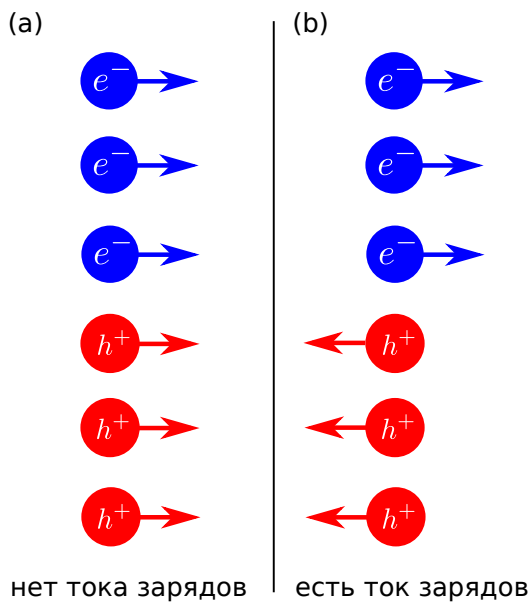

Рис. 9.1: Иллюстрация направленного движения электронов (e^-) и дырок (h^+) в полупроводнике.

Теперь мы включим в рассмотрение спин. Для простоты ограничимся зарядами одного знака. Тогда возможны, например, такие варианты, рис. 9.2:

1. Электроны поляризованы по спину $\langle \boldsymbol{s} \rangle \neq 0$ и течет электрический ток $\boldsymbol{j} \neq 0$. В таком случае имеется как перенос заряда, так и спина, см. рис. 9.2(a). Такая ситуация характерна для ферромагнетиков.

2. Электроны неполяризованы, $\langle \boldsymbol{s} \rangle = 0$, есть их направленное движение, рис. 9.2(b). В этом случае течет электрический ток, а переноса спина нет. Обычно именно такую постановку имеют в виду при рассмотрении транспортных эффектов.

3. Электроны со спином "вверх" двигаются в одну сторону, а со спином "вниз" – в противоположную. В этой ситуации переноса заряда нет, но перенос спина имеется, рис. 9.2(c). Такое распределение электронов называется чисто спиновым током (pure spin current в англоязычной литературе).

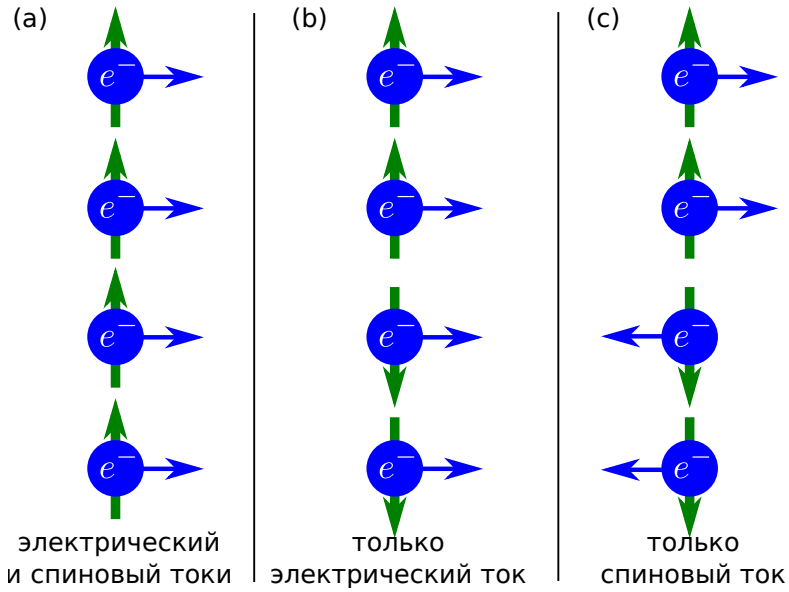

Рис. 9.2: Иллюстрация электрического тока спин-поляризованных (a) и неполяризованных по спину электронов (b), а также чисто спинового тока (c). Синие стрелки показывают направление скорости, зеленые – спина.

Введем плотность потока спина как количество спинов заданной ориентации, пересекающих площадку единичной площади в единицу времени. Соответственно, можно определить ток (поток) компоненты спина α как

$$J_i^\alpha = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2} v_{\boldsymbol{k},i} f_{\boldsymbol{k}}^\alpha - \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2} v_{\boldsymbol{k},i} f_{\boldsymbol{k}}^{\bar{\alpha}} = \sum_{\boldsymbol{k}} v_{\boldsymbol{k},i} s_{\boldsymbol{k},\alpha}. \tag{9.4}$$

Эту же формулу можно переписать через матрицу плотности как[1] [ср. с (9.2)]

$$J_i^\alpha = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2} v_{\boldsymbol{k},i} f_{\boldsymbol{k}}^\alpha - \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{2} v_{\boldsymbol{k},i} f_{\boldsymbol{k}}^{\bar{\alpha}} = \sum_{\boldsymbol{k}} v_{\boldsymbol{k},i} s_{\boldsymbol{k},\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{Sp}\{v_{\boldsymbol{k},i} \sigma_\alpha \rho_{\boldsymbol{k}}\}. \quad (9.5)$$

Вопрос: как это выражение изменится в системах со спиновым расщеплением спектра, например, при наличии в гамильтониане линейных по $\boldsymbol{k}$ членов?

9.2 Спиновый эффект Холла

Как мы обсуждали на нулевой лекции, электрический ток может возникать в виде отклика на электрическое поле $\boldsymbol{E}$: $j_i = \sigma_{ij} E_j$, где σ_{ij} – компоненты тензора проводимости. Проанализируем возможность возникновения спинового тока в виде отклика на электрическое поле:

$$J_i^\alpha = G_{\alpha;ij} E_j. \quad (9.6)$$

Рассмотрим выражение (9.6) с точки зрения симметрии. Спиновый ток есть псевдотензор второго ранга, $\boldsymbol{E}$ – вектор. Связь между ними должна осуществляться псевдотензором третьего ранга, который имеется в любой среде. Например, в изотропной системе $G_{\alpha;ij}$ пропорционален символу Леви-Чивиты:

$$J_i^\alpha = G \epsilon_{\alpha;ij} E_j. \quad (9.7)$$

В геометрии $\boldsymbol{E} \parallel z$ спиновый ток распространяется в направлении, поперечном полю: есть две ненулевые компоненты тока $J_y^x = -J_x^y$. Поскольку спиновый ток распространяется в направлении, перпендикулярном полю, то, по аналогии с обычным эффектом Холла, возникновение спинового тока как отклик на внешнее поле называют *спиновым эффектом Холла.*[2]

[1] Учитывая, что $s_{\boldsymbol{k},\alpha} = \frac{1}{2} \mathrm{Sp}\{\sigma_\alpha \rho_{\boldsymbol{k}}\}$.

[2] Отметим, что при инверсии времени компоненты спинового тока (в отличие от компонент электрического тока) не меняют знака. Поэтому компоненты $G_{\alpha;ij}$ могут не содержать вовсе (или содержать четные степени) диссипативных констант.

9.3 Эффект Мотта и микроскопическая природа спинового эффекта Холла

Очевидно, что причина возникновения спинового тока – спин-орбитальное взаимодействие. Рассмотрим механизм спинового эффекта Холла в полупроводниках, связанный с рассеянием электрона на примесях. Пусть $V(\boldsymbol{r})$ – потенциал примеси, а волновая функция электрона в зоне проводимости записана в рамках модели Кейна [ср. с формулой (4.9) лекции 4]

$$\Psi_{\boldsymbol{k},s} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}}{\sqrt{\mathcal{V}}}[S + \mathrm{i}\boldsymbol{R}(A\boldsymbol{k} - \mathrm{i}B[\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{k}])]|\chi_s\rangle. \tag{9.8}$$

Здесь $\mathcal{V}$ – нормировочный объем, все остальные обозначения были введены на лекции 4.

Рассмотрим матричные элементы рассеяния электрона на примеси:

$$[V_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}}]_{s's} = \langle\Psi_{\boldsymbol{p}s'}|V(\boldsymbol{r})|\Psi_{\boldsymbol{k}s}\rangle. \tag{9.9}$$

Эти матричные элементы можно представить в виде матрицы 2×2, которая в первом порядке по $\xi = (2AB + B^2)$ принимает вид [ср. с (4.14)]

$$\hat{V}_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{k}} = V_{\boldsymbol{q}}\left\{1 + (2AB + B^2)\mathrm{i}[\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{p}]\boldsymbol{k}\right\} = V_{\boldsymbol{q}}\left\{1 + \mathrm{i}\xi[\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{k}]\boldsymbol{\sigma}\right\}. \tag{9.10}$$

Здесь $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{k}$ – переданный волновой вектор, $V_{\boldsymbol{q}} = \mathcal{V}^{-1}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}V(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}$.

Казалось бы, выражение (9.10) описывает требуемый эффект – в зависимости от знака произведения $[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{k}]\boldsymbol{\sigma}$ матричные элементы $\hat{V}_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{k}}$ отличаются. Однако, квадрат модуля матричного элемента не содержит "интерференционного" вклада (т.к. спин-зависимый член имеет мнимость) и линейный по ξ вклад пропадает. Зависимость сечения рассеяния электрона на примеси от спина возникает в следующем за борновским приближением (при расчете вероятности рассеяния в третьем порядке теории возмущений):

$$W = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\hat{V}_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{k}} + \sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{\hat{V}_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{k}'}\hat{V}_{\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}}}{E_k - E_{k'} + \mathrm{i}0}\right|^2 \delta(E_k - E_p). \tag{9.11}$$

Энергетический знаменатель $1/(E_k - E_{k'} + \mathrm{i}0) = v.p.(E_k - E_{k'})^{-1} - \mathrm{i}\pi\delta(E_k - E_{k'})$, и член с δ-функцией тот, что нам нужен. В результате сечение

рассеяния для электронов, поляризованных по z ($\sigma_z = +1$) и против z ($\sigma_z = -1$), принимает вид

$$W(\sigma_z) = W^0_{\boldsymbol{pk}} + W'_{\boldsymbol{pk}}[\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{k}]_z \sigma_z. \tag{9.12}$$

Здесь $W_{\boldsymbol{pk}}$, $W'_{\boldsymbol{pk}}$ – вещественные функции, причем такие, что $W > 0$. Таким образом, сечение рассеяния электрона на примеси действительно зависит от направления спина, начального и конечного волнового вектора. Этот эффект предложил Невил Мотт в 1929 г. для свободных (релятивистских) электронов [35], а в 1971 г. соответствующий расчет был выполнен для электронов в полупроводниках В.Н. Абакумовым и И.Н. Яссиевич [36].

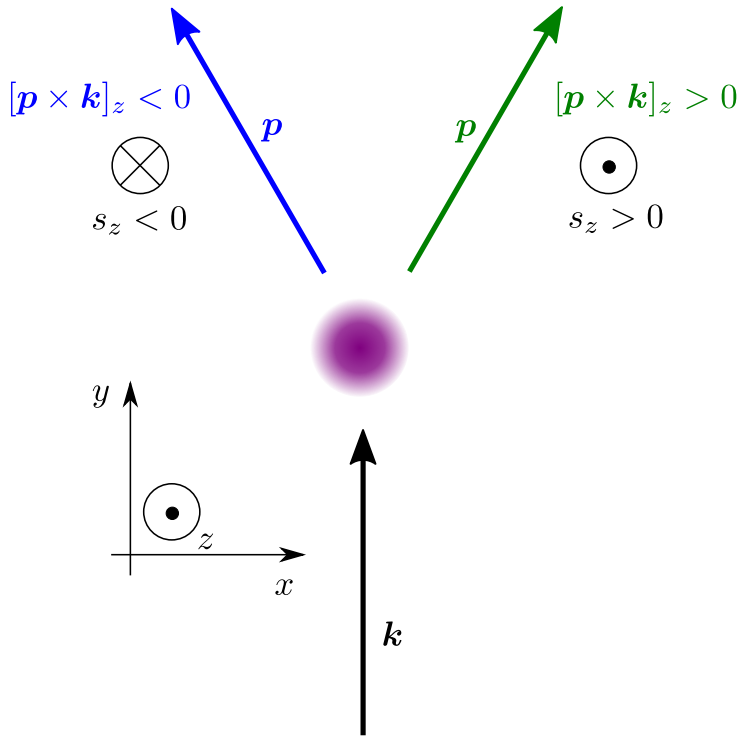

Рис. 9.3: Схема возникновения спинового тока за счет моттовского рассеяния. Синяя и зеленая стрелки показывают два возможных направления волнового вектора электрона $\boldsymbol{p}$ после рассеяния. Считается, что $W'_{\boldsymbol{pk}} > 0$.

Механизм генерации спинового тока под действием электрического поля за счет спин-зависимого рассеяния электронов на примесях был

предложен М.И. Дьяконовым и В.И. Перелем в 1971 году [37]. Схема генерации спинового тока в рамках этого механизма спинового эффекта Холла представлена на рис. 9.3. Этот эффект был переоткрыт Ж. Хиршем в 1999 г. [38].

Задача. Получите в этой модели темп генерации спинового тока в двумерной структуре, считая, что функция распределения электронов $f_{\boldsymbol{k}}$ задана в виде $f_{\boldsymbol{k}} = f^0(E_k) + A \sin \varphi_{\boldsymbol{k}} df^0/dE_k$, E_k – дисперсия электронов, $f^0(E_k)$ – равновесная функция распределения, A – константа, $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ – угол между $\boldsymbol{k}$ и осью x структуры.

Рассмотренный механизм является лишь одним из возможных, в частности, различают extrinsic (“внешние”) механизмы, которые связаны с наличием примесей и проявлением спин-орбитальной связи при взаимодействии электронов с примесями, а также intrinsic (“внутренние”) механизмы, обусловленные спин-орбитальным расщеплением спектра. Рассмотренный выше механизм, основанный на эффекте Мотта, является “внешним”.

9.4 Наблюдение спинового тока: накопление спина на краях образца

Теперь разберем вопрос о возможности наблюдения спинового тока. Ясно, что направленное движение спинов в определенном направлении должно приводить к накоплению спиновой поляризации вблизи границы образца (аналогично тому, что наличие электрического тока приводит к накоплению заряда у края образца и возникновению ЭДС в разомкнутой цепи). Более того, поскольку спины противоположных направлений переносятся в противоположные стороны, то на противоположных краях образца будет возникать спиновая поляризация противоположных знаков.

Опишем это явление. Спиновая динамика на пространственных масштабах $x \gg l$, где l – длина свободного пробега, описывается уравнением диффузии, в которое включен член, ответственный за релаксацию спина.

В стационарном режиме имеем:[3]

$$D\frac{\partial^2 S_z}{\partial x^2} = \frac{S_z}{\tau_s}, \tag{9.13}$$

где D – коэффициент диффузии, τ_s – время спиновой релаксации. Предполагается геометрия эксперимента, в которой внешнее поле приложено вдоль оси y и вызывает ток z компоненты спина вдоль оси x. Уравнение (9.13) следует дополнить граничными условиями:

$$J_x^z = GE_y - D\frac{\partial S_z}{\partial x} = 0 \quad \text{на границах.} \tag{9.14}$$

Это условие выражает баланс между "дрейфовым" током (обусловленным спиновым эффектом Холла) и диффузионным. Вблизи края образца распределение спина описывается выражением[4]

$$S_z(x) = \pm\frac{GE_yL_s}{D}e^{-|x-x_b|/L_s},$$

где $L_s = \sqrt{D\tau_s}$ – длина диффузии спина, знаки $\pm$ относятся к противоположным краям образца (x_b – координата края).

Накопление спиновой поляризации на краях образца было обнаружено в ряде экспериментальных работ по спиновому эффекту Керра [Y. K. Kato, R. C. Myers, A. C. Gossard, and D. D. Awschalom *Observation of the spin Hall effect in semiconductors*, Science **306**, 1910, (2004)] [39] в 2004 году и по поляризованной люминесценции [J. Wunderlich, B. Kaestner, J. Sinova, and T. Jungwirth, *Experimental observation of the spin-Hall effect in a two-dimensional spin-orbit coupled semiconductor system*, Phys. Rev. Lett. **94**, 47204 (2005)] [40] в 2005 году. В 2006 году спиновый ток наблюдался иным способом – в магнитном поле заселенности спиновых веток оказываются различными и спиновый ток преобразуется в электрический[5] [Sergey D. Ganichev, Vasily V. Bel'kov, Sergey A. Tarasenko, Sergey N. Danilov, Stephan Giglberger, Christoph Hoffmann, Eougenious L. Ivchenko, Dieter Weiss, Werner Wegscheider, Christian Gerl, Dieter Schuh, Joachim Stahl, Jo De Boeck, Gustaaf Borghs, and Wilhelm Prettl, *Zero-bias spin separation*, Nat. Phys **2**, 609 (2006)] [41].

[3] Нестационарное уравнение диффузии имеет вид $\partial S_z/\partial t + S_z/\tau_s = D\partial^2 S_z/\partial x^2$, в случае однородного поля дивергенция "полевого" вклада в спиновый ток равна нулю.

[4] *Получите точное решение уравнения (9.13) с условием (9.14).*

[5] Более подробно речь пойдет об этом на следующей лекции, посвященной аномальному эффекту Холла.

Лекция 10

Спин и электрический ток

Ранее мы ввели понятие спинового тока и обсудили спиновый эффект Холла. Эта лекция посвящена, главным образом, ферромагнитным системам. В них спиновая поляризация велика, поэтому "обычный" электрический ток сопровождается переносом спина, а спин-орбитальное взаимодействие оказывает существенное влияние на транспорт электронов. В конце лекции мы поговорим о связи электрического тока и спиновой поляризации в полупроводниках.

10.1 Аномальный эффект Холла

Напомним, что во внешнем магнитном поле проводимость электронов даже в изотропной среде становится нетривиальным тензором:

$$j_i = \sigma_{ij}(\boldsymbol{B})E_j.$$

Рассмотрим геометрию $\boldsymbol{E} \parallel x$, $\boldsymbol{B} \parallel z$, тогда (для вырожденных электронов)

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1+(\omega_C\tau)^2}, \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{\sigma_0\omega_C\tau}{1+(\omega_C\tau)^2}, \tag{10.1}$$

где $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ – проводимость, $e = -|e|$ – заряд электрона, $\omega_C = eB_z/mc$ – циклотронная частота. Наличие компонент тензора проводимости σ_{yx} и σ_{xy} связано с силой Лоренца

$$F_L = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}],$$

действующей на электрон. Действительно, в поле $\boldsymbol{E}$ дрейфовая скорость $\boldsymbol{v} \propto \boldsymbol{E}$, и сила Лоренца $\boldsymbol{F}_L \propto [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}]$. В этой модели холловское сопротивление

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} = \frac{1}{nec} B_z = R_H B_z, \tag{10.2}$$

где постоянная Холла $R_H = (nec)^{-1}$. Эффект Холла позволяет определить тип носителей заряда, а также их концентрацию.

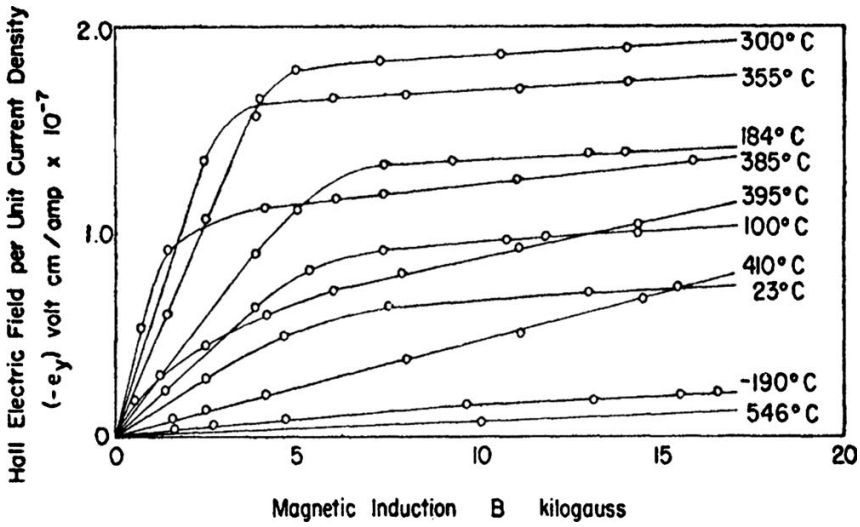

Рис. 10.1: Холловское напряжение в Ni. Из обзора N. Nagaosa, J. Sinova, Sh. Onoda, A. H. MacDonald, and N. P. Ong, *Anomalous Hall effect*, Rev. Mod. Phys. **82**, 1539 (2010) [42].

Такого рода измерения выполнялись для ферромагнетиков, рис. 10.1. Напомним, что в магнитных средах следует различать индукцию магнитного поля $\boldsymbol{B}$ (которая входит в силу Лоренца и является средним "микроскопического" поля) и напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}$, где $\boldsymbol{M}$ – намагниченность среды. Эти обозначения являются общепринятыми, хотя и неинтуитивными.[1] Оказалось, что зависимость холловского сопротивления от внешнего поля описывается зависимостью

$$\rho_{xy} = R_H B_z + R_s M_z, \tag{10.3}$$

[1]Напомним, что напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$ определяется как сила, действующая на единичный заряд, а индукция или поле смещения $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$, где $\boldsymbol{P}$ – поляризация среды.

где M_z – z компонента намагниченности, с двумя независимыми константами R_H и R_s. Это означает, что имеется вклад спиновой поляризации электронов в эффект Холла, не связанный с действием силы Лоренца.[2] Этот эффект получил название *аномального эффекта Холла.*

Можно убедиться, что моттовское (спин-зависимое) рассеяние, которое мы детально обсуждали на прошлой лекции, приводит к аномальному эффекту Холла. Действительно, если рассеяние электронов на примесях (с сохранением спина) описывается вероятностью [ср. с (9.12)]:

$$W = W^0_{\boldsymbol{pk}} + W'_{\boldsymbol{pk}}\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{p}], \tag{10.4}$$

то в среде с намагниченностью электроны будут рассеиваться "вбок". Это приведет к аномальному вкладу $\sigma^{(a)}_{xy} \propto W' M_z$. Иными словами, спиновый ток, возникающий за счет спинового эффекта Холла, приводит к возникновению электрического тока из-за дисбаланса носителей с $s_z = +1/2$ и $-1/2$. Отметим, что есть и иные механизмы аномального эффекта Холла, см. обзор [42].

10.2 Гигантское магнитосопротивление

Из формул Друде (10.1) следует, что "диагональное" сопротивление не зависит от магнитного поля:

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma^2_{xx} + \sigma^2_{yx}} = \frac{1}{\sigma_0}. \tag{10.5}$$

В полупроводниках и нормальных (неферромагнитных) металлах ρ_{xx} слабо зависит от магнитного поля – имеется магнитосопротивление (из-за особенностей механизмов рассеяния, наличия нескольких каналов проводимости, квантовых эффектов).

В слоистых ферромагнитных системах наблюдается гигантское магнитосопротивление (Fe/Cr/Fe) [Грюнберг и Ферт (1988 г.)]. В этих структурах сопротивление сильно зависит от того, как ориентирована намагниченность в соседних слоях. За эти работы в 2007 г. была присуждена Нобелевская премия, см. обзоры лауреатов: А. Ферт, Происхождение, развитие и перспективы спинтроники, УФН **178**, 1336 (2008) [43] и П.

[2] *Вопрос:* чему должно быть равно ρ_{xy} в ферромагнетике, если "работает" только сила Лоренца?

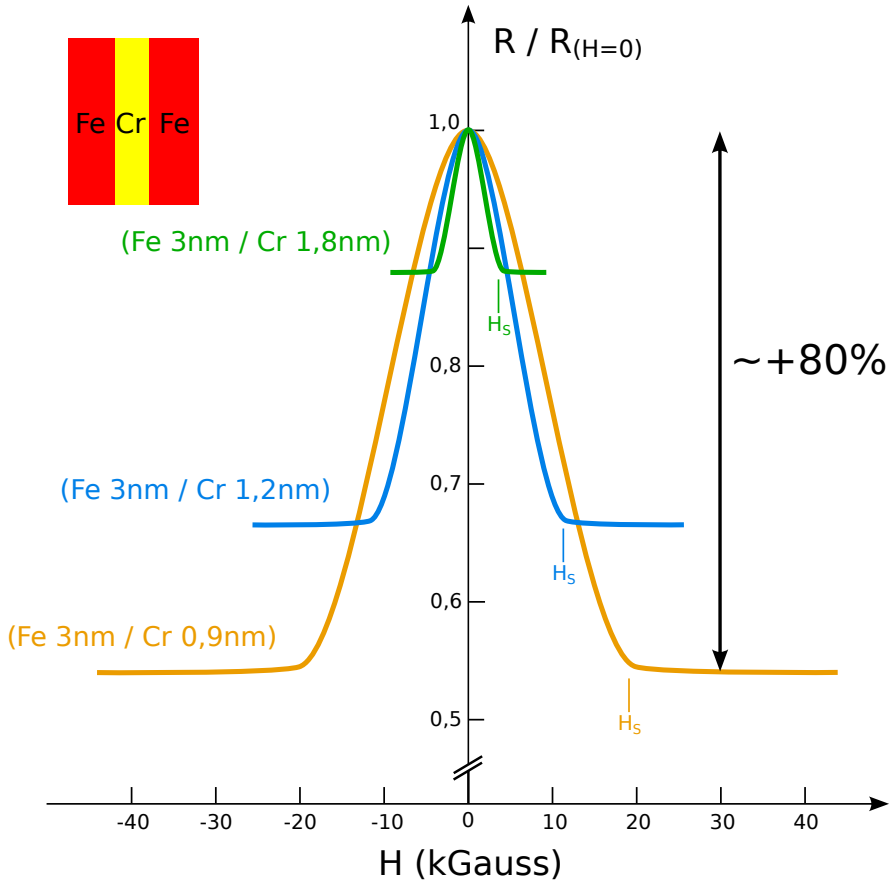

Рис. 10.2: Сигнал магнитосопротивления в сверхрешетках Fe/Cr с различной толщиной слоев. Данные группы А. Ферта, воспроизведены из en.wikipedia.org. Вставка схематично показывает структуру.

А. Грюнберг, От спиновых волн к гигантскому магнетосопротивлению и далее, УФН **178**, 1349 (2008) [44].

Для объяснения этого эффекта проанализируем зонную структуру ферромагнетиков. В рамках простейшей модели (более-менее адекватной для таких металлов как Fe, Co, Ni) энергетические зоны, сформированные из $4s$ и $3d$ орбиталей, перекрываются. Т.к. атомные $3d$ орбитали более локализованные, а $4s$ имеют заметно больший радиус, то зона из $4s$ орбиталей весьма широкая (около 15 – 20 эВ), а зона из $3d$ орбиталей относительно узкая (4 – 7 эВ). Для “маджорити” (majority) носителей (скажем, спин вверх), уровень Ферми лежит в $4s$ зоне, а для “майнори-

ти" (minority) (спин вниз), уровень Ферми попадает и в $4s$, и в $3d$ зону. Несмотря на то, что $N_\uparrow > N_\downarrow$, плотности состояний устроены иначе

$$\mathcal{D}_\uparrow(E_F) < \mathcal{D}_\downarrow(E_F).$$

Схематически энергетическая диаграмма и плотность состояний показана на рис. 10.3. Скорость рассеяния носителей на дефектах $\propto \mathcal{D}(E_F)$, поэтому электроны со спином $\uparrow$ рассеиваются менее эффективно, чем электроны $\downarrow$. В результате чего проводимость "маджорити" электронов велика по сравнению с проводимостью "майнорити" электронов. Можно сказать иначе: электрон, спин которого сонаправлен со спином "маджорити" носителей испытывает меньшее сопротивление, чем тот, спин которого сонаправлен с "майнорити" электронами.

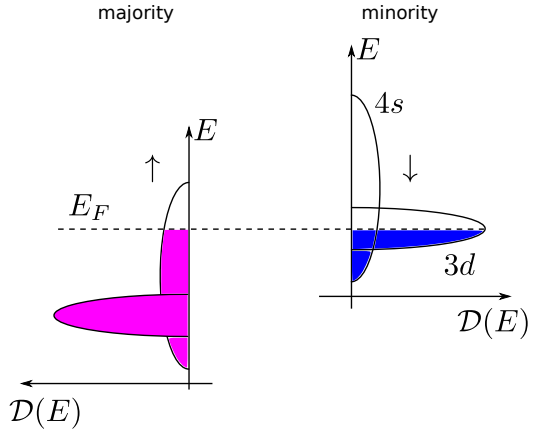

Рис. 10.3: Схема плотности состояний в модельном ферромагнетике.

Рассмотрим две ситуации: намагниченности в слоях параллельны (P) и антипараллельны (A). Электрическое сопротивление таких трехслойных структур легко описать в рамках эквивалентных электрических цепей, рис. 10.4:

$$R_{\mathrm{P}} = \frac{2R_{\uparrow\uparrow} \cdot 2R_{\uparrow\downarrow}}{2R_{\uparrow\downarrow} + 2R_{\uparrow\uparrow}} \approx 2R_{\uparrow\uparrow}. \tag{10.6a}$$

$$R_{\mathrm{A}} = \frac{R_{\uparrow\downarrow} + R_{\uparrow\uparrow}}{2} \approx \frac{R_{\uparrow\downarrow}}{2}. \tag{10.6b}$$

Таким образом $R_{\mathrm{P}} \ll R_{\mathrm{A}}$. Поскольку с ростом магнитного поля слои намагничиваются параллельно, то сопротивление слоистой структуры

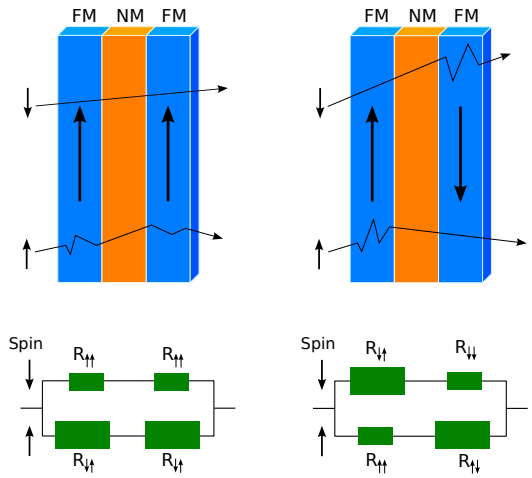

Рис. 10.4: Эквивалентные электрические схемы трехслойной структуры ферромагнетик (FM)/нормальный метал (NM)/ферромагнетик (FM). Воспроизведено из en.wikipedia.org.

падает с ростом поля. Этот эффект отвечает за гигантское магнитосопротивление. Обзор родственных эффектов можно найти, например, в J. Phys. D: Appl. Phys. **41**, 093001 (2008) [45].

10.3 Ориентация спинов электрическим током

Вернемся теперь к полупроводникам и рассмотрим еще один эффект связи электрического тока и спина в полупроводниках – ориентацию электронных спинов внешним электрическим полем (или электрическим током). Феноменология эффекта:

$$S_i = Q_{ij} E_j = Q'_{ij} j_j. \tag{10.7}$$

Это соотношение описывает связь вектора и псевдовектора, поэтому $\hat{Q}$ ($\hat{Q}'$) – псевдотензор второго ранга. Такой эффект возможен лишь в гиротропных средах. Этот эффект проявляется в тех системах, которые допускают линейные по волновому вектору члены в эффективном гамильтониане электрона, подробности см. в лекции 4:

$$\mathcal{H}_{SO} = \beta_{ij} \sigma_i k_j, \tag{10.8}$$

где введен псевдотензор β_{ij}, описывающий линейные по $\boldsymbol{k}$ члены (4.3). Оценка эффекта:

$$S_i \sim \frac{\beta_{ij} k_{\mathrm{dr},j}}{\bar{E}}, \quad \bar{E} = k_B T \text{ или } E_F. \tag{10.9}$$

Здесь k_{dr} – дрейфовый волновой вектор электронов, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{dr}} = e\boldsymbol{E}\tau_p/\hbar$, где τ_p – время релаксации импульса электронов. Несмотря на простую оценку, которую можно было бы ожидать из соображений, связанных с тем, что при дрейфе на электрон действует эффективное поле, приводящее к зеемановскому расщеплению $\beta_{ij} k_{\mathrm{dr},j}$, а спин электрона ориентируется как во внешнем статическом поле, это явление имеет неравновесный характер. В частности, численный коэффициент в (10.9) чувствителен к соотношению скоростей спиновой и энергетической релаксации электронов.

Эффект ориентации электронных спинов током в двумерных полупроводниковых системах был предложен А.Г. Ароновым и Ю.Б. Лянда-Геллером [46] и одновременно с ними В.М. Эдельштейном [47]. Детальная теория этого эффекта изложена, например, в Phys. Rev. B 84, 115303 (2011) [48], там же приведены ссылки на экспериментальные работы.

Имеет место и обратный эффект – *спин-гальванический*, заключающийся в генерации тока за счет неравновесного спина. Этот эффект был предложен Е.Л. Ивченко, Ю.Б. Лянда-Геллером и Г.Е. Пикусом (1989) [49]. Оценку для тока можно сделать, приняв во внимание следующее обстоятельство. В структурах со спин-орбитальным взаимодействием в виде (10.8) в операторе скорости есть спин-зависимый вклад $\propto (\beta_{ij}/\hbar)\sigma_i$, поэтому

$$j_j \sim e\frac{\beta_{ij}}{\hbar} S_i N f, \tag{10.10}$$

где N – концентрация электронов, S_i – компоненты среднего спина в пересчете на один электрон, f – множитель, зависящий от соотношения между временами релаксации.[3] Экспериментальное наблюдение спин-гальванического эффекта выполнено в работе S. D. Ganichev, E. L. Ivchenko, V. V. Bel'kov, S. A. Tarasenko, M. Sollinger, D. Weiss, W. Wegscheider, and W. Prettl. *Spin-galvanic effect*, Nature **417**, 153 (2002) [50].

[3]Отметим, что как и спиновая ориентация электрическим током, спин-гальванический эффект существенно неравновесный. В случае, когда электроны ориентированы статическим магнитным полем, электрический ток отсутствует. *Вопрос:* докажите это.

Лекция 11

Ядерные спины в полупроводниках

До сих пор мы говорили об электронной спиновой подсистеме в полупроводниках, металлах и ферромагнетиках. Имеются, однако, и другие спиновые подсистемы. Наиболее ярким примером являются спины ядер. Например, в материале GaAs изотопы ^{69}Ga и ^{71}Ga (их встречается примерно 60% и 40%, соответственно) имеют спины ядер 3/2, единственный стабильный изотоп мышьяка ^{75}As также обладает спином 3/2. Данная лекция посвящена ядерным спинам в полупроводниках.

11.1 Сверхтонкое взаимодействие электронных и ядерных спинов

Спин ядра $\boldsymbol{I}$ можно рассматривать как магнитный момент $\boldsymbol{\mu} = \mu_I \boldsymbol{I}/I$, где μ_I – абсолютная величина ядерного магнитного момента. Магнитное поле, создаваемое ядром, описываем векторным потенциалом

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{r}}{r^3} = \operatorname{rot} \frac{\boldsymbol{\mu}}{r}. \tag{11.1}$$

Магнитное поле $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$. При расчете взаимодействия спинов электрона и ядра нужно проявлять внимательность, т.к. и магнитное поле, и векторный потенциал расходятся при $r \to 0$ ($A \propto r^{-2}$, $B \propto r^{-3}$).

Гамильтониан взаимодействия спина электрона с магнитным полем

записывается в виде[1]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m_0}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + \frac{1}{2}g_0\mu_B\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \tag{11.2}$$

Нас интересует взаимодействие, линейное по $\boldsymbol{\mu}$ – магнитному моменту ядра, поэтому выделим возмущение в виде

$$V = -\frac{e}{2m_0c}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}) + \frac{1}{2}g_0\mu_B\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \tag{11.3}$$

Напомним, что $\boldsymbol{p}$ – оператор импульса, поэтому

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{r}}{r^3} + \frac{\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\mu}\left(\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}}{r^3} + \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}}{r^3}\right) = 2\hbar\frac{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{L}}{r^3},$$

где $\hbar\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]$ – оператор углового момента. Уравнение (11.3) переписывается в виде

$$V = 2\mu_B\frac{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{L}}{r^3} + \mu_B\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{\mu}}{r}. \tag{11.4}$$

Первый член – аналог спин-орбитального взаимодействия. Вторая часть чуть более хитрая:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{\mu}}{r} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\left[\nabla\times\left[\nabla\times\frac{\boldsymbol{\mu}}{r}\right]\right] =$$

$$[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla) - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu})\Delta]\frac{1}{r} = \left[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla) - \frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu})\Delta\right]\frac{1}{r} - \frac{2}{3}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu})\Delta\frac{1}{r}.$$

Выполняя дифференцирование, получаем:

$$\frac{3(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu})r^2}{r^5} + \frac{8\pi}{3}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\mu})\delta(\boldsymbol{r}).$$

Первый член – диполь-дипольное взаимодействие, а второй – контактное взаимодействие (взаимодействие Ферми). Окончательно получаем

$$V = \frac{2\mu_B\mu_I}{I}\boldsymbol{I}\left[\frac{\boldsymbol{L}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{s}}{r^3} + 3\frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})}{r^5} + \frac{8}{3}\boldsymbol{s}\pi\delta(\boldsymbol{r})\right]. \tag{11.5}$$

[1] *Почему в него входят m_0 – масса свободного электрона и g_0 – g-фактор свободного электрона?*

Отметим, что гамильтониан (11.5) действует на полную функцию электрона в кристалле, включая блоховскую амплитуду.

Для электронов на дне зоны проводимости блоховская амплитуда имеет s-тип, т.е. не обращается в нуль на ядре. Поэтому при рассмотрении таких эффектов достаточно ограничиться лишь контактным членом и записать гамильтониан взаимодействия как

$$\tilde{V} = Av_0(\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{s})|\Psi(\boldsymbol{R}_i)|^2, \tag{11.6}$$

где $\boldsymbol{R}_i$ – координата ядра, Ψ – плавная огибающая волновой функции электрона, v_0 – объем элементарной ячейки.[2] Характерные константы $A \sim 10^2$ μeV. Если поляризовать все ядра в GaAs по спину, то максимальное поле, которое будет действовать на спин электрона со стороны ядра $B_{N,max} \sim 5$ T. Гамильтониан (11.6) можно интерпретировать в терминах *поля Оверхаузера* (A. Overhauser) – эффективного магнитного поля, действующего на спин электронов со стороны ядер решетки, и *поля Найта* (W. Knight), действующего на ядерный спин со стороны электрона.

11.2 Дефазировка спинов локализованных электронов

Мы уже обсуждали на лекции 5 механизмы потери спина свободных электронов – они были обусловлены спин-орбитальной связью. Для локализованных электронов спин-орбитальная связь не работает (нет орбитального движения, поэтому не работают ни механизм Дьяконова-Переля, ни механизм Эллиота-Яфета).

Оказывается, что для локализованного носителя заряда (например, электрона на доноре или электрона в квантовой точке) важную роль в релаксации спина играют ядра, см. схему на левой панели рис. 11.1. Действительно, электрон испытывает действия поля ядерной флуктуации, которое составляет $1/\sqrt{N}$ от $B_{N,max}$, где N - число ядер, с которыми эффективно взаимодействует электрон. Для типичной квантовой точки $N \sim 10^5$ ядер, $\sqrt{N} \sim 3 \times 10^2$, и флуктуационное поле $B_{N,fluct} \sim 0.01$ T, что соответствует периоду прецессии спина $T \sim 1 \ldots 10$ нс.

Если предположить, что на временах порядка T ядерная флуктуация не меняется (а это так, поскольку влияния электрона на ядро еще в

[2] *Задача:* свяжите A и значение блоховской амплитуды на ядре.

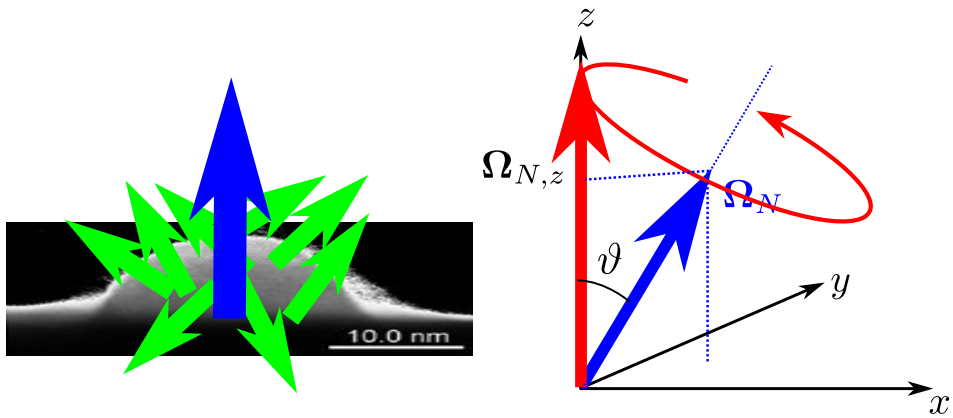

Рис. 11.1: **Левая панель.** Схематическое изображение квантовой точки с ядерными спинами (зеленые стрелки). Синяя стрелка – спин электрона, взаимодействующего с ядрами. **Правая панель.** Иллюстрация спиновой прецессии в поле статической ядерной флуктуации.

$\sqrt{N}$ раз слабее, а взаимодействия между ядрами тоже не велики), то начальная спиновая поляризация ансамбля электронов распадается за время T (каждый спин вращается вокруг своей оси). Конечное значение спина электрона составляет 1/3 от начального.

Количественное описание этого процесса приведено в работе И.А. Меркулова, Ал.Л. Эфроса и М. Розена (2002 г.) [51]. Схема прецессии спина в данной точке показана на рис. 11.1 справа. В каждой конкретной точке ядерная флуктуация статическая, спин электрона прецессирует вокруг вектора $\mathbf{\Omega}_N$. В различных точках ядерные поля случайные, их распределение описывается гауссовой функцией[3]

$$\mathcal{F}(\mathbf{\Omega}_N) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\delta_e)^3} \exp\left(-\frac{\Omega_N^2}{\delta_e^2}\right), \tag{11.7}$$

где δ_e – характерная ядерная флуктуация (в единицах частоты прецессии). Для z-компоненты среднего по ансамблю спина получаем

$$S_z(t)/S_z(0) = \int d\mathbf{\Omega}_N \mathcal{F}(\mathbf{\Omega}_N) \left[\sin^2\vartheta \cos(\Omega_N t) + \cos^2\vartheta\right] = \\ = \frac{2}{3} e^{-(t\delta_e)^2/4}[1 - (t\delta_e)^2/2] + 1/3. \tag{11.8}$$

[3] *Почему?*

Экспериментально дефазировка спинов электронов, взаимодействующих с ядрами решетки в квантовых точках, наблюдалась в работе [52]. На рисунке 11.2 представлена зависимость степени циркулярной поляризации люминесценции структуры с квантовыми точками InAs/GaAs. Спад и насыщение зависимости на уровне 1/3 от начальной качественно согласуется с моделью (11.8).

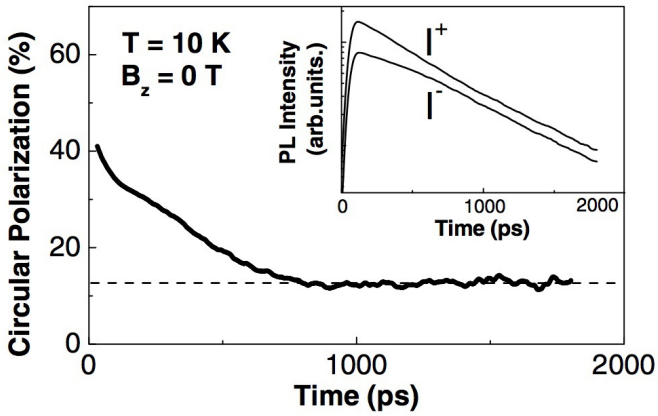

Рис. 11.2: Динамика циркулярной поляризации люминесценции квантовых точек, индуцированная циркулярно поляризованным лазерным импульсом. Вставка: интенсивность ко- и контр-поляризованных компонент люминесценции (полулогарифмический масштаб). Воспроизведено из [52].

11.3 Эффект Оверхаузера (динамическая поляризация ядер)

Во внешнем магнитном поле равновесная поляризация ядер очень мала. Это связано, в первую очередь, с тем, что зеемановское расщепление ядерных спиновых подуровней много меньше расщепления электронных состояний. Пусть $\Delta\mathcal{E}_n = g_n\mu_I IB$ – расщепление ядерных уровней, $\Delta\mathcal{E}_e = g_e\mu_B B$ – расщепление электронных спиновых подуровней, $|\Delta\mathcal{E}_n| \ll |\Delta\mathcal{E}_e|$. При любых разумных температурах T отношение $|\Delta\mathcal{E}_n|/k_BT$ крайне мало, и равновесная ядерная поляризация отсуствует.

Рассмотрим простейшую модель динамики электронной и ядерной подсистем: для простоты будем рассматривать ядра с $I = 1/2$, и пусть спины электронов и ядер переворачиваются за счет сверхтонкого взаимодействия (flip-flop процесс), описываемого недиагональными членами в гамильтониане (11.6):

$$N \Uparrow, e \downarrow \rightarrow N \Downarrow, e \uparrow .$$

В стационарном состоянии число переворотов спина ядра "снизу-вверх" и "сверху-вниз" одинаково

$$W_{1/2,-1/2} N_{1/2} n_{-1/2} = W_{-1/2,1/2} N_{-1/2} n_{1/2}, \tag{11.9}$$

где $N_{\pm 1/2}$ ($n_{\pm 1/2}$) – число ядер (электронов) с проекцией спина на заданную ось z, магнитное поле приложено вдоль этой оси. Имеет место следующее соотношение между вероятностями переходов

$$\frac{W_{1/2,-1/2}}{W_{-1/2,1/2}} = \exp\left(-\Delta\mathcal{E}_e / k_B T\right). \tag{11.10}$$

Здесь T – температура резервуара, из которого берется энергия для flip-flop процесса. Этот резервуар предполагается равновесным. Как правило, T – температура решетки. Из (11.9) имеем

$$\frac{N_{1/2}}{N_{-1/2}} = \exp\left(\Delta\mathcal{E}_e / k_B T\right) \frac{n_{1/2}}{n_{-1/2}}. \tag{11.11}$$

Если электроны равновесные, то $n_{1/2}/n_{-1/2} = \exp\left(-\Delta\mathcal{E}_e / k_B T\right)$ в соответствии с распределением Гиббса. Ядерной поляризации нет.

Теперь предположим, что электроны деполяризованы (например, оптической накачкой или переменным полем). Тогда $n_{1/2} = n_{-1/2}$, и ядра приобретают значительную *динамическую* поляризацию

$$\frac{N_{1/2}}{N_{-1/2}} = \exp\left(\frac{\Delta\mathcal{E}_e}{k_B T}\right). \tag{11.12}$$

Этот эффект получил название эффекта Оверхаузера Albert W. Overhauser, *Polarization of nuclei in metals*, Phys. Rev. **92**, 411 (1953) [53]. Теория динамической поляризации ядер в полупроводниках была развита М.И. Дьяконовым и В.И. Перелем [54].

Оценим скорость возникновения динамической ядерной поляризации за счет сверхтонкого взаимодействия с электронами. По порядку величины эта скорость сопадает со скоростью ядерной спиновой релаксации за счет случайного поля Найта, действующего со стороны электрона на ядерные спины, см. формулу (11.6):

$$\frac{1}{T_1} \sim \left(\frac{A}{\hbar N}\right)^2 F \tau_c^{(e)}. \tag{11.13}$$

Здесь $N = V/v_0$ – число ядер, взаимодействующих с электроном в объеме локализации V, F – вероятность найти электрон в квантовой точке, $\tau_c^{(e)}$ – время корреляции электронного спина. Эта формула вполне аналогична оценке (5.4) для скорости электронной спиновой релаксации в случайном магнитном поле, при этом $\sim (A/\hbar N)^2 F$ играет роль среднего квадрата частоты прецессии.[4] Это время T_1 может быть макроскопическим и принимать значения (в зависимости от условий) единиц секунд, минут, часов.[5] На рис. 11.3 представлена зависимость ядерной спиновой поляризации после накачки в зависимости от времени в образцах n-GaAs с различной концентрацией электронов. Наблюдается долгоживующая компонента ядерной спиновой поляризации с временем релаксации около 5 мин.

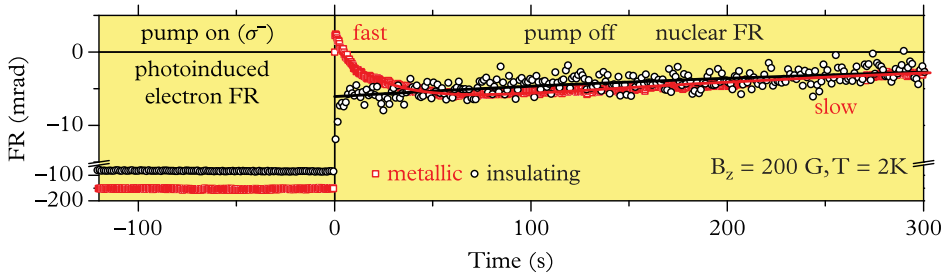

Рис. 11.3: Динамика спинов ядер в объемном GaAs n-типа, измеренная в методике накачка-зондирование. Два набора точек соответствуют образцам с разной концентрацией электронов, находящихся, соответственно, в металлическом и изолирующем режимах. Из [55].

[4] *Установите критерий применимости формулы* (11.13).

[5] *Вопрос:* Как изменится выражение (11.13) для свободных невырожденных электронов, взаимодействующих с ядрами решетки.

Зачастую отношение (11.12) представляют в виде

$$\frac{N_{1/2}}{N_{-1/2}} = \exp\left(\frac{\Delta\mathcal{E}_n}{k_B\Theta_N}\right), \tag{11.14}$$

где $\Theta_N = -T\Delta\mathcal{E}_n/\Delta\mathcal{E}_e$ – ядерная спиновая температура. В выражении (11.14) ядерная спиновая температура появилась как параметр, описывающий отношение заселенностей подуровней. Однако, это понятие имеет более глубокий физический смысл – во многих ситуациях ядерную спиновую матрицу плотности можно представить в виде

$$\propto \exp(-\mathcal{H}/k_B\Theta_N),$$

где $\mathcal{H}$ – гамильтониан, описывающий взаимодействия спинов ядер друг с другом и со внешними полями. Возможность описывать ансамбль ядер с помощью спиновой температуры связана с тем, что взаимодействия между ядрами могут быть значительно эффективнее, чем взаимодействие ядер и электронов,[6] поэтому внутри ядерной подсистемы относительно быстро устанавливается термодинамическое равновесие. Как видно, ядерная спиновая температура может быть значительно ниже температуры решетки T. Более того, в зависимости от условий возбуждения знак Θ_N может быть любым, например, если $\Delta\mathcal{E}_n/\Delta\mathcal{E}_e > 0$, или если знак отношения энергий отрицательный, но в условиях оптической ориентации электронная спиновая поляризация значительно превышает тепловую. Подробнее про концепцию ядерной спиновой температуры можно прочитать в книге “Оптическая ориентация” [2] и в томе 5 курса Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [31], §73.

В зависимости от условий эксперимента, ядерная поляризация в полупроводниках может сохраняться днями (см., например, эксперименты, выполненные Ж. Лампелем в кремнии, где поляризация ядер “жила” 200 часов без подсветки и 22 часа с подсветкой Georges Lampel, *Nuclear dynamic polarization by optical electronic saturation and optical pumping in semiconductors*, Phys. Rev. Lett., **20**, 491 (1968) [56]. Отметим, что в последние годы исследования ядерной спиновой динамики в полупроводниках приобрели особую значимость.

[6] Анализ конкретных условий применимости и общего случая выходит за рамки лекции.

Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Откуда берется множитель $(2\pi\hbar)^{-d}$ в фазовом объеме и в формуле для $\sum_{\boldsymbol{p}}$ (0.3)?

2. Определите вероятность W, входящую в интеграл столкновений кинетического уравнения (лекция 0) квантовомеханически из золотого правила Ферми для примесей концентрации n_i, описываемых короткодействующим потенциалом $U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i) = U_0\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)$, где $\boldsymbol{r}_i$ – координата примеси.

3. Докажите, что интеграл столкновений обнуляется на равновесной функции распределения (лекция 0).

4. Какой критерий малости поля в задаче о проводимости электронного газа?

5. Какой вид примет формула (0.11) для двумерного электронного газа?

6. Почему для электронов, локализованных на донорах, расположенных далеко друг от друга, при расчете обменного взаимодействия кулоновское взаимодействие нельзя рассматривать как малое возмущение (лекция 1)?

7. Получите выражения (1.3) пользуясь коэффициентами Клебша-Гордана.

8. Почему полный спин и его проекция на заданную ось являются “хорошими” квантовыми числами в задаче об их обменном взаимодействии?

9. Покажите, что собственные состояния (1.8) даются формулами (1.3).

10. Почему в (1.10) входит именно $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i)$, а не конструкция, как приведенная в формуле (1.7)?

11. Получите для функции Бриллюэна (лекция 1) аналитическое выражение и асимптотики в пределах низкой и высокой температур.

12. Почему $g_{\alpha\beta}$ в (2.1) – тензор?

13. Докажите формулу (2.3), например, явно вычислив коммутатор для калибровки поля, где $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}]$.

14. Приведите примеры точечных групп, описывающих симметрию полупроводниковых квантовых ям, где все компоненты тензора g-факторов будут различны. Можно ли это реализовать в ямах, выращенных вдоль оси [001] (лекция 2)?

15. По какому состоянию проводится усреднение в уравнении (2.11)?

16. Докажите, что уравнение на $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{k}}$, полученное в рамках метода матрицы плотности из (2.14), совпадет с формулой (2.12).

17. Покажите, что правила отбора одинаковы для операторов возмущения $-\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E}$ и $(-e/c)\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A}$, лекция 3.

18. Почему степень поляризации фотоэлектронов не обращается строго в нуль при энергии кванта $\hbar\omega > E_g + \Delta$ (лекция 3)?

19. Получите выражение, связывающее степень спиновой поляризации электронов и циркулярной поляризации краевой фотолюминесценции в объемном полупроводнике типа GaAs (лекция 3).

20. Что такое гиротропия? Как ее описать в рамках тензора диэлектрической проницаемости ε_{ij}?

21. Какой из матричных элементов P, P' или Q в (4.8) отвечает за отсутствие центра инверсии в объемном полупроводнике типа GaAs?

22. Какой вид слагаемое Дрессельхауза примет в квантовой яме из GaAs, выращенной вдоль оси [111]? Точечная симметрия ямы C_{3v}.

23. Каково соотношение между квантовым, $\hbar\Omega/\bar{E}$, и классическим, $\Omega\tau$, параметрами, характеризующими силу спин-орбитального взаимодействия для свободных электронов (лекция 5)?

24. Почему в механизме спиновой релаксации Дьяконова-Переля (лекция 5) "складываются" квадраты углов поворота спина, а не сами углы?

25. Почему кинетическое уравнение (5.5) с интегралом столкновений в τ-приближении является интегро-дифференциальным?

26. Почему, как правило, циклотронная частота движения электронов в полупроводниках в магнитном поле значительно превышает ларморовскую частоту их спиновой прецессии?

27. Какой из эффектов более важен в геометри Фойгта: замедление спиновой релаксации в механизме Дьяконова-Переля (5.12) или эффект Ханле (3.19)?

28. Почему при исследовании электронного парамагнитного резонанса разумно считать, что продольное и поперечное времена спиновой релаксации различаются ($T_1 \neq T_2$), т.е. не ограничиваться изотропным приближением?

29. Почему спиновый резонанс пропадает при $S_0 \to 0$ (лекция 6)?

30. На каких основаниях пренебрегают зависимостью компонент тензора диэлектрической проницаемости от волнового вектора света при изучении спинового эффекта Фарадея (лекция 7)?

31. Почему синглетный трион (с "антипараллельными" спинами электронов) стабилен, а триплетный (с "параллельными" спинами) – скорее не стабилен?

32. Получите уравнения, аналогичные (7.14), для σ^- поляризованного импульса накачки.

33. Почему спиновые флуктуации можно считать статическими при их детектировании лучом линейно поляризованного света, проходящего через образец, формула (8.1)?

34. Рассчитать среднеквадратичные флуктуации компонент спина одиночного электрона в магнитном поле $\boldsymbol{B} \parallel z$. Считать, что зеемановское расщепление может быть сопоставимо с температурой.

35. Почему коррелятор (8.8) $\mathrm{e}^{-|t|/\tau_s}$ содержит $|t|$, а не t?

36. Как изменится выражение (9.5) для спинового тока в системах со спиновым расщеплением спектра, например, при наличии в гамильтониане линейных по $\boldsymbol{k}$ членов?

37. Получите выражение для скорости переворотов спина электрона в механизме Эллиота-Яфета, пользуясь матричным элементом (9.10).

38. Получите в этой модели темп генерации спинового тока в двумерной структуре, считая, что функция распределения электронов $f_{\boldsymbol{k}}$ задана в виде $f_{\boldsymbol{k}} = f^0(E_k) + A \sin \varphi_{\boldsymbol{k}} df^0/dE_k$, E_k – дисперсия электронов, $f^0(E_k)$ – равновесная функция распределения, A – константа, $\varphi_{\boldsymbol{k}}$ – угол между $\boldsymbol{k}$ и осью x структуры (лекция 9).

39. Получите точное решение уравнения (9.13) с условием (9.14).

40. Чему должно быть равно ρ_{xy} в ферромагнетике, если “работает” только сила Лоренца (лекция 10)?

41. Докажите, что в случае, когда электроны ориентированы статическим магнитным полем, электрический ток отсутствует (лекция 10).

42. Почему в гамильтониан (11.2) входят m_0 – масса свободного электрона и g_0 – g-фактор свободного электрона?

43. Свяжите A в (11.6) и значение блоховской амплитуды на ядре.

44. Получите выражение (11.7) для функции распределения ядерных спиновых флуктуаций.

45. Установите критерий применимости формулы (11.13) (лекция 11).

46. Получите оценочное выражение для скорости спиновой релаксации ядер за счет сверхтонкого взаимодействия со свободными невырожденными электронами, аналогичное (11.13).

Литература

[1] *Ансельм А. И.* Введение в теорию полупроводников. — Москва. Наука, 1978.

[2] Оптическая ориентация / Под ред. Б. П. Захарченя, Ф. Майер. — Наука, Л., 1989.

[3] Spin physics in semiconductors / Ed. by M. I. Dyakonov. Springer Series in Solid-State Sciences 157. — 2nd ed. edition. — Springer International Publishing, 2017.

[4] *Glazov M.* Electron & Nuclear Spin Dynamics in Semiconductor Nanostructures. Series on Semiconductor Science and Technology. — OUP Oxford, 2018.

[5] *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. — Москва. Наука, 1979.

[6] Theory of ferromagnetic (III,Mn)V semiconductors / T. Jungwirth, J. Sinova, J. Mašek et al. // *Rev. Mod. Phys.* — 2006. — Vol. 78. — Pp. 809–864.

[7] *Dietl T., Ohno H.* Dilute ferromagnetic semiconductors: Physics and spintronic structures // *Rev. Mod. Phys.* — 2014. — Vol. 86. — Pp. 187–251.

[8] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика: нерелятивистская теория. — М. Наука, 1974.

[9] *Roth L. M., Lax B., Zwerdling S.* Theory of optical magneto-absorption effects in semiconductors // *Phys. Rev.* — 1959. — Vol. 114, no. 1. — P. 90.

[10] *Ивченко Е. Л., Киселев А. А.* Электронный g-фактор в квантовых ямах и сверхрешетках // *ФТП.* — 1992. — Т. 26. — С. 1471.

[11] *Дьяконов М. И., Перель В. И.* О спиновой ориентации электронов при межзонном поглощении света в полупроводниках // *ЖЭТФ.* — 1971. — Vol. 60. — P. 1954.

[12] *Dresselhaus G.* Spin-orbit coupling effects in zinc blende structures // *Phys. Rev.* — 1955. — Vol. 100. — P. 580.

[13] *Рашба Э. И., Шека В. И.* Симметрия энергетических зон в кристаллах типа вюрцита. ii Симметрия зон учетом спин-орбитального взаимодействия // *ФТТ (сборник статей II).* — 1959. — P. 162.

[14] *Рашба Э. И.* Свойства полупроводников с петлей экстремумов. I. Циклотронный и комбинационный резонанс в магнитном поле, перпендикулярном плоскости петли // *ФТТ.* — 1960. — Т. 2, № 6. — С. 1224.

[15] *Пикус Г. Е., Марущак В. А., Титков А. Н.* Спиновое расщепление зон и спиновая релаксация носителей в кубических кристаллах A_3B_5 // *ФТТ.* — 1988. — Т. 22. — С. 185.

[16] *Ivchenko E. L.* Optical spectroscopy of semiconductor nanostructures. — Alpha Science, Harrow UK, 2005.

[17] *Winkler R.* Spin–Orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems. — Springer, 2003.

[18] *Дьяконов М. И., Перель В. И.* Спиновая релаксация электронов проводимости в полупроводниках без центра инверсии // *ФТТ.* — 1972. — Т. 13. — С. 3581.

[19] *Дьяконов М. И., Качоровский В. Ю.* Спиновая релаксация двумерных электронов в полупроводниках без центра инверсии // *ФТП.* — 1986. — Т. 20. — С. 178.

[20] *Averkiev N. S., Golub L. E.* Giant spin relaxation anisotropy in zinc-blende heterostructures // *Phys. Rev. B.* — 1999. — Vol. 60, no. 23. — Pp. 15582–15584.

[21] Enhanced spin-relaxation time due to electron-electron scattering in semiconductor quantum wells / W. J. H. Leyland, G. H. John, R. T. Harley et al. // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75, no. 16. — P. 165309.

[22] *Ивченко Е. Л.* Спиновая релаксация свободных носителей в полупроводниках без центра инверсии в продольном магнитном поле // *ФТТ.* — 1973. — Т. 15. — С. 1566.

[23] *Elliott R. J.* Theory of the effect of spin-orbit coupling on magnetic resonance in some semiconductors // *Phys. Rev.* — 1954. — Vol. 96, no. 2. — P. 266.

[24] *Yafet Y.* g-factors and spin-lattice relaxation of conduction electrons // Solid State Physics / Ed. by F. Seitz, D. Turnbull. — Academic, New-York, 1963. — P. 2.

[25] *Бир Г. Л., Аронов А. Г., Пикус Г. Е.* Спиновая релаксация электронов при рассеянии на дырках // *ЖЭТФ.* — 1975. — Т. 69. — С. 1382.

[26] *Абрагам А.* Ядерный магнетизм. — Издательство иностранной литературы, Москва, 1963.

[27] *Сликтер Ч.* Основы теории магнитного резонанса. — М. Мир, 1982.

[28] *Hermann C., Lampel G.* Measurement of the g factor of conduction electrons by optical detection of spin resonance in p-type semiconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 1971. — Vol. 27. — Pp. 373–376.

[29] *Аронов А. Г., Ивченко Е. Л.* Дихроизм и оптическая анизотропия в среде с ориентированными спинами свободных электронов // *ФТТ.* — 1973. — Т. 15. — С. 231.

[30] *Глазов М. М.* Когерентная спиновая динамика электронов и экситонов в наноструктурах (обзор) // *ФТТ.* — 2012. — Vol. 54. — P. 3.

[31] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Часть 1. — Москва. Наука, 1976.

[32] *Crooker S. A., Cheng L., Smith D. L.* Spin noise of conduction electrons in n -type bulk GaAs // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 79, no. 3. — P. 035208.

[33] *Александров Е. Б., Запасский В. С.* Магнитный резонанс в спектре шумов фарадеевского вращения // *ЖЭТФ.* — 1981. — Т. 81. — С. 132.

[34] The rise of spin noise spectroscopy in semiconductors: From acoustic to GHz frequencies / J. Hübner, F. Berski, R. Dahbashi, M. Oestreich // *physica status solidi (b).* — 2014. — Vol. 251. — Pp. 1824–1838.

[35] *Mott N. F.* The scattering of fast electrons by atomic nuclei // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 1929. — Vol. 124, no. 794. — Pp. 425–442.

[36] *Абакумов В. Н., Яссиевич И. Н.* Аномальный эффект Холла на поляризованных электронах в полупроводниках // *ЖЭТФ.* — 1971. — Т. 61. — С. 2571.

[37] *Dyakonov M., Perel' V.* Current induced spin orientation of electrons in semiconductors // *Phys. Lett. A.* — 1971. — Vol. 35A. — P. 459.

[38] *Hirsch J. E.* Spin Hall effect // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 83. — P. 1834.

[39] Observation of the spin Hall effect in semiconductors / Y. K. Kato, R. C. Myers, A. C. Gossard, D. D. Awschalom // *Science.* — 2004. — Vol. 306. — P. 1910.

[40] Experimental observation of the spin-Hall effect in a two-dimensional spin-orbit coupled semiconductor system / J. Wunderlich, B. Kaestner, J. Sinova, T. Jungwirth // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 94. — P. 47204.

[41] Zero-bias spin separation / S. D. Ganichev, V. V. Bel/'kov, S. A. Tarasenko et al. // *Nat Phys.* — 2006. — Vol. 2, no. 9. — Pp. 609–613.

[42] Anomalous Hall effect / N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda et al. // *Rev. Mod. Phys.* — 2010. — Vol. 82, no. 2. — Pp. 1539–1592.

[43] *Ферт А.* Происхождение, развитие и перспективы спинтроники // *УФН.* — 2008. — Т. 178. — С. 1336.

[44] *Грюнберг П. А.* От спиновых волн к гигантскому магнетосопротивлению и далее // *УФН.* — 2008. — Т. 178. — С. 1349.

[45] *Thompson S. M.* The discovery, development and future of GMR: The Nobel Prize 2007 // *Journal of Physics D: Applied Physics.* — 2008. — Vol. 41, no. 9. — P. 093001.

[46] *Аронов А. Г., Лянда-Геллер Ю. Б.* Ядерный электрический резонанс и ориентация спинов носителей электрическим полем // *Письма ЖЭТФ.* — 1989. — Т. 50. — С. 398.

[47] *Edelstein V. M.* Spin polarization of conduction electrons induced by electric current in two-dimensional asymmetric electron systems // *Solid State Commun.* — 1990. — Vol. 73. — P. 233.

[48] *Golub L. E., Ivchenko E. L.* Spin orientation by electric current in (110) quantum wells // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Vol. 84. — P. 115303.

[49] *Ивченко Е. Л., Лянда-Геллер Ю. Б., Пикус Г. Е.* Фототок в структурах с квантовыми ямами при оптической ориентации носителей // *Письма ЖЭТФ.* — 1989. — Т. 50. — С. 156.

[50] Spin-galvanic effect / S. D. Ganichev, E. L. Ivchenko, V. V. Bel'kov et al. // *Nature.* — 2002. — Vol. 417. — P. 153.

[51] *Merkulov I. A., Efros A. L., Rosen M.* Electron spin relaxation by nuclei in semiconductor quantum dots // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 65. — P. 205309.

[52] Direct observation of the electron spin relaxation induced by nuclei in quantum dots / P.-F. Braun, X. Marie, L. Lombez et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 94. — P. 116601.

[53] *Overhauser A. W.* Polarization of nuclei in metals // *Phys. Rev.* — 1953. — Vol. 92, no. 2. — Pp. 411–415.

[54] *Дьяконов М. И., Перель В. И.* Оптическая ориентация в системе электронов и ядер решетки в полупроводниках. Теория // *ЖЭТФ.* — 1973. — Т. 65. — С. 362.

[55] Nondestructive measurement of nuclear magnetization by off-resonant Faraday rotation / R. Giri, S. Cronenberger, M. M. Glazov et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 111. — P. 087603.

[56] *Lampel G.* Nuclear dynamic polarization by optical electronic saturation and optical pumping in semiconductors // *Phys. Rev. Lett.* — 1968. — Vol. 20, no. 10. — Pp. 491–493.