01

Эволюция случайно-модулированного бризера в нелинейной среде

© Ф.Х. Абдуллаев, А.А. Абдумаликов

Физико-технический институт АН Узбекистана,
700084 Ташкент, Узбекистан

(Поступило в Редакцию 13 апреля 1999 г.)

Исследуется эволюция случайно-модулированного бризера в нелинейной среде, описываемой уравнением sine-Gordon. Рассмотрен случай мультипликативного шума в начальном волновом поле. С помощью метода обратной задачи рассеяния и метода куммулянтов найдена функция распределения вероятностей для амплитуды и скорости бризера. Найдено, что функция распределения имеет негауссовскую форму. Вычислены средние и наиболее вероятные амплитуды и скорости бризера.

Введение

Исследование эволюции случайных полей в нелинейных диспергирующих средах является одной из фундаментальных проблем теории нелинейных волн [1–3]. Особенный интерес представляет исследование распространения случайно-модулированных солитонов и солитонных систем в средах, описываемых интегрируемыми или почти интегрируемыми нелинейными волновыми уравнениями. Такого рода проблемы появляются при изучении распространения оптических солитонов в волокнах с усилителями [4], оптических импульсов в резонансных средах [5], генерации солитонов в нематических жидких кристаллах [6], влияния квантовых шумов на динамику флаксонов в длинных джозефсоновских переходах. Прогресс в исследовании этих проблем связан с возможностью применения для их решения метода обратной задачи рассеяния в теории солитонов [7]. На основе этого подхода было исследовано распространение случайно-модулированного солитона в нелинейном уравнении Шредингера [4, 8–10], случайно-модулированного солитона Кортевега-де-Вриза в [8], случайно-модулированных темных солитонов в [11]. Во всех этих работах полученная функция распределения солитонов имела гауссовскую форму. Недавно для случая солитонов нелинейного уравнения Шредингера и sine-Gordon было показано, что второго порядка эффекты по шуму приводят к негауссовской функции распределения для параметров генерируемых одиночных солитонов [7,12]. Поэтому представляет интерес исследовать эту проблему для случая эволюции случайно модулированных солитонных систем. Имеется много примеров связанных систем солитонов. Примерами могут служить двухсолитонные системы (бризеры) нелинейного уравнения Шредингера и уравнения sine-Gordon. Особенный интерес представляет исследование эволюции случайно-модулированного бризера уравнения sine-Gordon. Он является связанным состоянием кинка и антикинка с конечной энергией связи, что отличает его, например, от бризера нелинейного уравнения Шредингера, где энергия связи равна нулю. Наличие энергетического параметра и параметра частоты внутренних колебаний бризера приводит к ряду интересных эффектов при взаимодействии бризера с шумом. Один из них — распад бризера при взаимодействии с шумом. Бризеры представляют собой важный компонент при изучении статистической механики солитонных систем и неравновесных процессов, связанных с солитонами. Их учет важен для понимания шумов в распределенных системах. В качестве примера отметим, что бризеры дают вклад в шум в длинных джозефсоновских переходах [13]. Влияние квантовых флуктуаций на кинки и бризеры важно для понимания флуктуационных процессов в длинных джозефсоновских переходах.

Настоящая работа посвящена исследованию эволюции изначально случайно-модулированного бризера в уравнении sine-Gordon.

Формулы метода обратной задачи для изменений параметров бризера

Рассмотрим проблему эволюции случайно-модулированного начального бризерного состояния в уравнении sine-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = 0. \qquad (1)$$

Начальное условие выберем в виде

$$u(x, t = 0) = u_b(x), \quad u_t(x, t = 0) = u_b(x)(1+\varepsilon(x)), \qquad (2)$$

где $\varepsilon(x)$ является гауссовской функцией со свойствами

$$\langle \varepsilon(x) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon(x)\varepsilon(y) \rangle = B(x - y; l). \qquad (3)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по всем реализациям случайной функции $\varepsilon(x)$. Функция $B(x)$ является корреляционной функцией шума, l — корреляционная длина. Интенсивность шума предполагается малой, $B \ll 1$. С такой моделью мы имеем дело при исследовании возбуждения солитонов в жидких кристаллах [6] и учете квантовых эффектов в длинных джозефсоновских переходах [13].

Приведем ниже информацию по методу обратной задачи для бризера, которая нам понадобится в дальнейшем.

Как известно, метод обратной задачи связывает с нелинейным эволюционным уравнением линейную спектральную задачу. В случае уравнения sine-Gordon — это 2×2 спектральная проблема [14]

$$L\psi = \lambda\psi. \tag{4}$$

Все обозначения совпадают с данными из кники Новикова; $\psi = (\psi_1, \psi_2)$; $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ — коэффициенты Йоста. Бризеру, согласно схеме метода обратной задачи, соответствует пара симметричных нулей коэффициента Йоста $a(\lambda)$ в плоскости спектрального параметра λ: $\lambda_1 = \mu + i\nu$, $\lambda_2 = -\mu + i\nu$. Бризерное решение имеет вид

$$u_b = 4 \operatorname{arctg}\left\{(\operatorname{tg}(\gamma)) \sin\left(\frac{\psi(t) - xv}{\sqrt{1-v^2}} \cos(\gamma)\right)\right.$$
$$\left. \times \operatorname{sech}\left(\frac{x - \xi(t)}{\sqrt{1-v^2}} \sin(\gamma)\right)\right\}. \tag{5}$$

Здесь $\xi(t) = \xi_0 + vt$, фаза бризера есть

$$\psi(t) = t - \psi_0 \frac{\sqrt{1-v^2}}{\cos(\gamma)}.$$

Амплитуда бризера есть $\gamma = \operatorname{arctg}(\nu/\mu)$. Для параметров μ, ν справедливы соотношения

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \cos(\gamma), \quad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \sin(\gamma). \tag{6}$$

Коэффициенты Йоста равны

$$a(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}{(\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_2^*)},$$
$$a'(\lambda_1) = \frac{\mu}{2i\nu\lambda_1}, \quad a'(\lambda_2) = \frac{\mu}{2i\nu\lambda_2}. \tag{7}$$

Решение задачи в общем случае представляет собой сложную математическую проблему. Здесь мы ограничимся рассмотрением предельного случая, когда анализ можно провести до конца. Это предел малоамплитудного бризера. Он соответствует условию, когда $\nu \ll \mu$, $\nu \ll |\lambda_1|$. Решение, описывающее малоамплитудный бризер, имеет вид

$$u \approx 4\gamma \sin\left(\left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right) \frac{t - xv}{\sqrt{1-v^2}} - \psi_0\right) \operatorname{sech}\left(\gamma \frac{(x - \xi(t))}{\sqrt{1-v^2}}\right). \tag{8}$$

Для малоамплитудного бризера функции Йоста равны

$$\psi_1 = \frac{(\lambda^2 - |\lambda_1|^2 + i\lambda\nu) \operatorname{ch}(z) + 2i\lambda\nu \operatorname{sh}(z)}{(\lambda - \lambda_1^*)(\lambda + \lambda_1) \operatorname{ch}(z)} \exp(ikr),$$
$$\psi_2 = \frac{2\nu(\lambda \cos(\varphi) - i\eta \sin(\varphi))}{(\lambda - \lambda_1^*)(\lambda + \lambda_1) \operatorname{ch}(z)} \exp(ikr), \tag{9}$$

где параметры k, z, φ выражаются посредством

$$k(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4\lambda}\right), \quad z = \nu\left(1 + \frac{1}{4|\lambda_1|^2}\right)x - \frac{\ln|c|}{2\nu},$$

$$\varphi = \mu\left(1 - \frac{1}{4|\lambda_1|^2}\right)x + \arg c,$$
$$c_1 = c, \quad c_2 = c_1^* = c^*, \quad c_n = \frac{b_n}{a'(\lambda_n)}.$$

Для вычисления статистических характеристик параметров бризеров нам необходимо знать вариационные производные данных рассеяния. Через них определяются поправки к данным рассеяния

$$\Delta\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\lambda}{\delta u_t} \Delta u_t dx. \tag{10}$$

Имеем для вариационной производной первого порядка к спектральному параметру

$$\frac{\delta\lambda_1}{\delta u_t} = -\frac{i\nu\eta}{4\lambda_1 \operatorname{ch}^2(z)} \operatorname{ch}(z + i\varphi).$$

Вторая вариационная производная спектрального параметра равна

$$\frac{\delta^2\lambda_1}{\delta u_t(x)\delta u_t(y)} = -\frac{\nu\eta}{32\lambda_1} \operatorname{sech}^2 z(x) \operatorname{sech}^2 z(y) \big[\big(\exp(z(x) - z(y))$$
$$- \exp(-i\varphi(x) + i\varphi(y))\big) \exp(ik_1(x-y))\vartheta(x-y)$$
$$- i\big[\cos((z+i\varphi)(x)) \cos((z-i\varphi)(x))$$
$$+ \cos((z+i\varphi)(y)) \cos((z-i\varphi)(y))\big]. \tag{11}$$

Поправка к коэффициенту Йоста определяется следующим выражением:

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u_t(x)} = \frac{i}{4}(\psi^{(1)}\phi^{(2)} - \psi^{(2)}\phi^{(1)}), \tag{12}$$

$$\frac{\delta^2 a}{\delta u_t(x)\delta u_t(y)} = -i\left(\frac{\eta}{8\lambda_1 \operatorname{ch}(z)}\right)^2$$
$$\times \big(\exp(z(x) - z(y)) - \exp(-i\varphi(x) + i\varphi(y))\big)$$
$$\times \exp(ik_1(x-y))\vartheta(x-y). \tag{13}$$

Отсюда могут быть найдены поправки к амплитуде бризера. Они равны

$$\delta_1\gamma = \frac{\delta\gamma}{\delta u_t(x)} \delta u_t(x),$$
$$\delta_2\gamma = \frac{\delta^2\gamma}{\delta u_t(x)\delta u_t(y)} \delta u_t(x)\delta u_t(y). \tag{14}$$

Аналогично находятся поправки первого и второго порядка к скорости бризера

$$\delta_1 v = -8\frac{\lambda_1\delta_x\lambda_1^* + \lambda_1^*\delta_x\lambda_1}{(1+4|\lambda_1|^2)^2} \delta u_t(x),$$
$$\delta_2 v = -8\left(\frac{\lambda_1\delta_{xy}\lambda_1^* + \lambda_1^*\delta_{xy}\lambda_1}{(1+4|\lambda_1|^2)^2} + v\frac{\delta_y\lambda_1\delta_x\lambda_1^* + \delta_y\lambda_1^*\delta_x\lambda_1}{(1+4|\lambda_1|^2)^2}\right.$$
$$\left. + 8\frac{\lambda_1^2\delta_x\lambda_1^*\delta_y\lambda_1^* + \lambda_1^{*2}\delta_x\lambda_1\delta_y\lambda_1}{(1+4|\lambda_1|^2)^3}\right) \delta u_t(x)\delta u_t(y). \tag{15}$$

Функция распределения параметров бризера

В этом резделе мы вычислим функцию распределения (ФР) параметров бризера. Для вычисления ФР мы применим метод куммулянтов [15]. Как следует из уравнений (13), (14), поправки к спектральному параметру λ являются нелинейными функционалами случайного процесса $\varepsilon(x)$. Тогда ФР для поправок имеет негауссовский вид. Для описания негауссовской ФР метод куммулянтов удобнее, чем метод моментов. В отличие от метода моментов достаточно вычислить первые несколько куммулянтов для того, чтобы описать негауссовскую форму ФР. Первые два куммулянта описывают гауссовскую форму ФР, третий и выше куммулянты — отклонение ФР от гауссовского вида.

Как хорошо известно, ФР случайной величины Δ представляет собой преобразование Фурье от характеристической функции χ

$$\chi(u) = \langle \exp(i\Delta u) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\Delta P(\Delta) \exp(i\Delta u). \quad (16)$$

Куммулянты определяются коэффициентами разложения в ряд логарифма характеристической функции

$$\ln \chi(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n u^n}{n!} K_n. \quad (17)$$

Для вычисления куммулянтов мы используем соотношения, выражающие K_n через моменты M_n,

$$K_1 = M_1 \approx \langle \Delta_2 \lambda \rangle + \langle \Delta_4 \lambda \rangle + O(\varepsilon^6),$$
$$K_2 = M_2 - M_1^2 \approx \langle (\Delta_1 \lambda)^2 \rangle + \langle (\Delta_2 \lambda)^2 \rangle - \langle \Delta_2 \lambda \rangle^2 + 2\langle \Delta_1 \lambda \Delta_3 \lambda \rangle + O(\varepsilon^6),$$
$$K_3 = M_3 - 3M_1 M_2 + 2M_1^3 \approx 3\langle (\Delta_1 \lambda)^2 \Delta_2 \lambda \rangle - 3\langle \Delta_2 \lambda \rangle \langle (\Delta_1 \lambda)^2 \rangle + O(\varepsilon^6). \quad (18)$$

Используя формулы (16)–(18), мы получим следующее выражение для функции распределения:

$$P(\Delta) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi K_2}} \left[1 - \frac{\alpha_3}{2} y \left(1 - \frac{y^2}{3} \right) \right] \exp\left(-\frac{y^2}{2} \right), \quad (19)$$

где $y = (\Delta - K_1)/\sqrt{K_2}$, $\alpha_3 = K_3/(K_2)^{3/2}$.

В выражении (18) все куммулянты выписаны, включая члены 4 порядка по ε, так как $K_3 \sim \varepsilon^4$. Из выражения для функции распределения (19) можно заметить, что куммулянт K_3 появляется только в отношении K_3^2/K_2^3. Совместный вклад K_2, K_3 порядка ε^2. Отсюда следует, что достаточно выписать K_3 в порядке ε^4, а K_1 и K_2 — в порядке ε^2.

Ниже мы выполним все расчеты для экспоненциальной модели функции корреляции

$$B(x-y) = B_0 \exp\left(-\frac{|x-y|}{l} \right), \quad (20)$$

где l — корреляционная длина.

Статистические характеристики флуктуации параметров бризера

В этом разделе мы изучим статистические характеристики флуктуаций параметров бризера.

а) Ф л у к т у а ц и и а м п л и т у д ы б р и з е р а. С помощью выражений для поправок к амплитуде (14) получаем следующие формулы для куммулянтов поправки к амплитуде:

$$K_1^\gamma = -\frac{8}{15} \sigma^2 \nu^2 \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right)^2 \left(1 + \frac{21}{8} \gamma^2 \right), \quad (21)$$

$$K_2^\gamma = \frac{1}{4} \sigma^2 \nu^2 \gamma \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right)^2 (1 - 6\gamma^2), \quad (22)$$

$$K_3^\gamma = \frac{3}{32} \sigma^4 \nu^4 \gamma \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right)^4. \quad (23)$$

Здесь $\sigma^2 = B_0 l$, $B_0 = \varepsilon^2$. Пик ФР $P(\Delta\gamma)$ расположен в точке K_1^γ. Средняя амплитуда находится из уравнения $\langle \Delta\gamma \rangle = K_1^\gamma$. Имеем

$$\langle \gamma \rangle = \gamma + \langle \Delta\gamma \rangle = \gamma \left(1 - \frac{8\sigma^2\nu^2}{15\gamma} \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right)^2 \left(1 + \frac{21\gamma^2}{8} \right) \right). \quad (24)$$

Из этого выражения следует, что амплитуда бризера убывает с ростом σ^2. При бо́льших γ поправка немонотонна. Наиболее вероятная амплитуда бризера равна

$$\gamma_{mp} = \gamma + (\Delta\gamma)_{mp} = \gamma + K_1^\gamma - \frac{K_3^\gamma}{2K_2^\gamma} = \gamma - \frac{\sigma^2\nu^2}{40} \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right)^2 \left(\frac{173}{6} + 101\gamma^2 \right). \quad (25)$$

Отсюда следует, что наиболее вероятная амплитуда бризера меньше, чем средняя амплитуда.

Отклонение фукнции распределения от гауссовской формы характеризуется коэффициентом асимметрии α_3^γ

$$\alpha_3^\gamma = \frac{K_3^\gamma}{(K_2^\gamma)^{3/2}} = \sigma\nu\gamma^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{4\eta^2} \right)^2 (1 - 6\gamma^2)^{-3/2}. \quad (26)$$

Оценим величину коэффициента асимметрии для различных величин параметров. Так, при $\sigma = 0.1$, $\eta = 1$, $\gamma = 0.1$, $\nu = 0.5$ имеем $\alpha_3^\gamma = 0.17$, что соответствует значительному отклонению от гауссовской функции распределения.

б) Ф л у к т у а ц и и с к о р о с т и б р и з е р а. Куммулянты для поправки к скорости бризера равны

$$K_1^v = \frac{8}{15} \sigma^2 \sqrt{1 - v^2} \frac{\nu^3}{\mu^3}, \quad (27)$$

$$K_2^v = \frac{16}{15} \sigma^2 \sqrt{1 - v^2} \frac{\nu^3}{\mu} \frac{1}{(1 + 4|\lambda_1|^2)^2}, \quad (28)$$

$$K_3^v = \frac{4}{75}\sigma^4(1-v^2)\frac{\nu^6}{\mu^4}\frac{1}{(1+4|\lambda_1|^2)^2} \times (1+8\mu^2+32\mu^4). \qquad (29)$$

Пик ФР скорости будет при $\langle\Delta v\rangle = K_1^v$. Тогда средняя скорость бризера равна

$$\langle v\rangle = v + \langle\Delta v\rangle = v\left(1+\frac{8\sigma^2\nu^3}{15\mu^3 v}\sqrt{1-v^2}\right). \qquad (30)$$

Поправка положительна и убывает с ростом v. При $v\to 1$ $\Delta v\to 0$. Поправка максимальна, когда начальная скорость равна нулю.

Наиболее вероятная скорость бризера определяется выражением

$$(v)_{mp} = v - \frac{\sigma^2\nu^3}{\mu^3}\sqrt{1-v^2}\left(\frac{7}{15}+8\mu^2+32\mu^4\right). \qquad (31)$$

Видно, что наиболее вероятная скорость бризера меньше, чем средняя. Коэффициент асимметрии скорости равен

$$\alpha_3^v = \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{\sigma\nu^3 2(1-v^2)^{1/4}(1+8\mu^2+32\mu^4)}{16\mu^{5/2}} \times (1+4|\lambda_1|^2). \qquad (32)$$

Асимметрия ФР бризера по скорости убывает в релятивистском пределе $v\to 1$ и растет с убыванием амплитуды.

Заключение

В данной работе мы исследовали влияние начального шума на эволюцию бризера уравнения sine-Gordon. Поскольку уравнение sine-Gordon принадлежит к классу вполне интегрируемых уравнений, то эволюция начального волнового поля приводит к формированию при больших временах бризера со случайными параметрами + поле излучения. За достаточно короткий промежуток времени бризер и поле излучения разделяются, так что статистические характеристики бризера и поля излучения можно изучать раздельно. С помощью метода обратной задачи и метода куммулянтов мы нашли функции распределения амплитуды и скорости асимптотического бризера, порождаемого из такого начального условия. Функции распределения имеют негауссовский характер. В работе вычислены коэффициенты асимметрии для амплитуды и скорости. Найдены наиболее вероятные и средние амплитуда и скорость бризера.

Данная работа частично финансировалась фондом US Civilian Research Development Foundation (Award ZM1-342).

Список литературы

[1] *Gredeskul S., Kivshar Yu.S.* // Phys. Rep. 1992. Vol. 122. P. 1–80.
[2] *Abdullaev F.Kh.* Theory of Solitons in Inhomogeneous Media. Chichester: Wiley, 1994. 200 p.
[3] *Гурбатов А., Малахов С., Саичев А.* Случайные волны в нелинейных средах без дисперсии. М.: Наука, 1988. 175 с.
[4] *Elgin J.N.* // Phys. Lett. A 1985. Vol. 110. P. 441–445.
[5] *Haus H., Gordon J.P.* // Opt. Lett. 1986. Vol. 11. P. 665–668.
[6] *Каменский В.Г.* // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 1262–1276.
[7] *Abdullaev F.Kh., Abdumalikov A.A.* // Physica D. 1998. Vol. 113. P. 115–122.
[8] *Абдуллаев Ф.Х., Дарманян С.А.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. С. 265–272.
[9] *Абдуллаев Ф.Х., Джумаев М.Р.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. С. 221–228.
[10] *Konotop V.V., Vekslerchik V.E.* // J. Phys. 1991. Vol. A24. P. 767–785.
[11] *Gredeskul S.A., Pastur L.A.* // Nonlinearity with disorder / Ed. F.Kh. Abdullaev, A.R. Bishop, S. Pnevmatikos. Heidelberg: Springer, 1991. P. 126–133.
[12] *Abdullaev F.Kh., Darmanyan S.A., Lederer F.* // Opt. Commun. 1995. Vol. 126. P. 89–94.
[13] *McLaughlin D.W., Scott A.C.* // Phys. Rev. A. 1978. Vol. 18. P. 1652–1662.
[14] *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
[15] *Малахов А.Н.* Куммулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 373 с.