01;06;09 Эквивалентные джозефсоновские переходы

© Т.Л. Бояджиев,¹ Е.Г. Семерджиева,² Ю.М. Шукринов^{1,3}

 ¹Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Московская область, Россия
 ²Пловдивский университет, 4000 Пловдив, Болгария
 ³Физико-технический институт, 734063 Душанбе, Таджикистан e-mail: shukrinv@thsun1.jinr.ru

(Поступило в Редакцию 27 декабря 2006 г. В окончательной редакции 2 апреля 2007 г.)

С помощью численного эксперимента построены зависимости "критический ток-магнитное поле" для длинного джозефсоновского перехода с шунтовой и резистивной микронеоднородностями и проведено сопоставление с критической кривой перехода с экспоненциально изменяющейся шириной. Продемонстрирована возможность замены распределенной неоднородности локальной неоднородностью на одном из концов перехода, что с технологической точки зрения может иметь определенные преимущества. Показано также, что критические кривые переходов с экспоненциально изменяющейся шириной, а также с неоднородностями на концах не содержат участки, обусловленные смешанными флюксон-антифлюксонными распределениями магнитного потока. Возможно, что факт объясняет отмеченное в работах ряда авторов улучшение спектра СВЧ-осцилляций.

PACS: 05.70.Ln, 05.70.Jk, 64.

Введение

Одним из интересных как с теоретической, так и с точки зрения приложений направлений в физике длинных джозефсоновских переходов (ДП), развиваемым интенсивно в последние годы, является исследование влияния токов, обусловленных внешним полем или геометрией на движение вихрей в переходах. Такие токи возникают, например, в ДП с переменной в плоскости барьерного слоя шириной [1–7]. Однонаправленное движение флюксонов, вызванное дополнительным "геометрическим" током, обладает определенными преимуществами при создании осцилляторов, основанных на движении флюксонов [1,3,8,9]. В частности [1,3], экспоненциальное изменение ширины перехода обеспечивает лучшее согласование импеданса с выходной нагрузкой и позволяет избежать хаотических режимов, присущих прямоугольным переходам.

В настоящей работе при помощи численного эксперимента выстраиваются и сравниваются зависимости "критический ток-магнитное поле" для длинных ДП с экспоненциально изменяющейся шириной (*EJJ*) и прямоугольных ДП с резистивной неоднородностью (*RJJ*) на правом либо шунтовой (*SJJ*) — на левом конце. В *RJJ*-переходах с неоднородностью, расположенной в окрестности центра, смешанные флюксонантифлюксонные распределения могут быть устойчивыми за счет пиннинга на неоднородности. Такой пиннинг приводит к нарушению монотонности убывания экстремумов критической кривой с увеличением внешнего магнитного поля, что наблюдалось экспериментально, например в [10,11], для ДП с решеткой неоднородностей в барьерном слое. Однако в *EJJ*-переходах смешанные распределения оказываются всегда неустойчивыми, а экстремумы критической кривой убывают равномерно, что видно из результатов как численного, так и физического экспериментов. По-видимому, отсутствие вклада в критические кривые смешанных распределений в *EJJ*-переходах объясняет улучшенный спектр излучения [1,3] таких ДП в сравнении с прямоугольными. Результаты работы [12] показывают, что критические кривые прямоугольных переходов с резистивной неоднородностью на конце обладают аналогичными свойствами.

1. Математическая модель

Рассмотрим длинный ДП с экспоненциально изменяющейся шириной [3] (рис. 1). Здесь L есть длина перехода, W_0 — ширина перехода в точке x = 0. Будем предполагать, что размеры электродов $L_0 \ll \lambda_J$ и $L_L \ll \lambda_J$, где λ_J — джозефсоновская глубина проникновения. При этом выполняется условие $L_0W_0 = L_LW_l$, обеспечивающее одинаковую инжекцию тока через торцы контакта.

В дальнейшем будем считать, что все используемые величины стандартным образом приведены к безразмерному виду [3] (общий случай рассмотрен в [2]). В частности, длина нормирована на λ_J , магнитный поток через контакт — на $\Phi_0/2\pi$, где Φ_0 — квант магнитного потока [13], а ток — на максимальный критический ток перехода.

В безразмерных переменных краевая задача для статического магнитного потока $\varphi(x), x \in [0, L]$ в таком ДП в случае линейной (in-line) геометрии записывается в виде

$$-\varphi_{xx} + \sigma(\varphi_x - h_e) + \sin \varphi = 0, \qquad (1.1 a)$$

$$\varphi_x(0) = h_e - \varkappa_l L_{\gamma}, \quad \varphi_x(L) = h_e + \varkappa_r L \gamma.$$
 (1.1b)



Рис. 1. Схема джозефсоновского перехода с экспоненциально изменяющейся шириной.

Нижним индексом здесь и в дальнейшем обозначено дифференцирование по независимой переменной x. Через σ , $0 \le \sigma \ll 1$ обозначен коэффициент, характеризующий экспоненциальное изменение ширины [3], h_e есть внешнее магнитное поле в плоскости барьерного слоя, а \varkappa_l и \varkappa_r — доли внешнего тока j через левый (l)и правый (r) концы, причем $\varkappa_l + \varkappa_r = 1$. В общем случае вывод уравнения (1.1 а) приведен, например, в работе [2].

Рассмотрим семейство преобразований пространственной координаты

$$x = u(\xi) = \frac{1}{\sigma} \ln(1 + a\xi),$$
 (1.2)

зависящего от действительного параметра a > 0. Здесь новая переменная $\xi \in [0, l]$, связь между параметрами l и L дается обратным преобразованием

$$l = (e^{\sigma L} - 1)/a.$$

В новой независимой переменной ξ краевая задача (1.1) принимает самосопряженный вид

$$-\varphi_{\xi\xi} + j_C(\xi)\sin\varphi + g(\xi) = 0,$$
 (1.3 a)

$$\begin{split} \varphi_{\xi}(0) &= \sqrt{j_m} \left[h_e - \varkappa_l L \gamma \right], \\ \varphi_{\xi}(l) &= \frac{\sqrt{j_m}}{1 + \sigma l} \left[h_e + \varkappa_r L \gamma \right]. \end{split} \tag{1.3b}$$

Здесь функция

$$j_C(\xi) \equiv u_{\xi}^2(\xi) = j_m (1 + a\xi)^{-2},$$

а параметр

$$j_m = (a/\sigma)^2$$

С формальной точки зрения уравнение (1.3 b) описывает распределения магнитного потока в одномерном ДП с переменной амплитудой $j_C(\xi)$ джозефсоновского тока при наличии дополнительного распределения тока

$$g(\xi) = -j_m \sigma h_e / (1 + a\xi)^{-2}$$

Физически переменную амплитуду можно отождествить с переменной толщиной барьерного слоя вдоль перехода. При этом максимальному значению тока j_m при $\xi = 0$ отвечает минимальная толщина барьерного слоя. Соответственно на правой границе $\xi = l$ ток минимален, а толщина барьера максимальна. В зависимости от значения тока j_m , т.е. соотношения между параметром преобразования a и параметром σ , распределенную вдоль ДП неоднородность можно интерпретировать либо как резистивную, либо как шунтовую или как их комбинацию. Точнее, при $0 < j_m \leq 1 \ (a \leq \sigma)$ неоднородность является резистором. В случае $j_m \ge e^{2\sigma L}$ график амплитуды лежит выше горизонтальной прямой $j_C = 1$, что соответствует распределенной шунтовой неоднородности. В промежуточном случае $1 < j_m < e^{2\sigma L}$ неоднородность следует рассматривать как комбинацию обоих видов распределенных неоднородностей — шунтовой, с максимальной амплитудой джозефсоновского тока на левом конце перехода, и резистивной, с минимальной амплитудой джозефсоновского тока на правом конце. При этом амплитуда тока Джозефсона $j_C(\xi_1) = 1$ в единственной точке

$$\xi_1 = (a - \sigma)/(a\sigma).$$

Хорошо известно, что резистивная неоднородность притягивает флюксоны к правому концу, что наблюдается экспериментально [3] и подтверждается при численном моделировании [3,6,7]. Шунтовая неоднородность, в свою очередь, выталкивает флюксоны с левого конца перехода направо.

В качестве примера на рис. 2 демонстрируются графики амплитуды $j_C(\xi)$ для ДП, эквивалентных *ЕЈЈ*-переходу длиной L = 10 и $\sigma = 0.07$. Кривая I построена для $a = \sigma = 0.07$ и соответствует переходу



Рис. 2. Распределение амплитуды джозефсоновского тока для двух переходов, эквивалентных *EJJ*. Кривая 1 с параметром преобразования a = 0.07 соответствует *RJJ*, кривая 2 с a = 0.1 соответствует комбинации *SJJ* и *RJJ*.

Журнал технической физики, 2008, том 78, вып. 1

с распределенной резистивной неоднородностью при $\xi > 0$; при этом длина перехода $l_1 \approx 14.48$. Кривая 2 (a = 0.1) соответствует эквивалентному переходу, в барьерном слое которого расположены как шунтовая (при $\xi \in [0, \xi_1], \xi_1 \approx 4.29$), так и резистивная ($\xi \in [\xi_1, l]$) распределенные неоднородности. Такой переход имеет длину $l_2 \approx 11.83$.

Рассмотрим возможность замены неоднородности, распределенной по всей длине перехода, неоднородностями, локализованными в окрестностях концов ДП. Для частного случая $j_m = 1$ такая задача рассматривалась в работе [12], где было показано, что наличие точечной или прямоугольной резистивной неоднородности шириной $\Delta < L$ на правом конце прямоугольного ДП качественно не меняет критические кривые вида "ток-магнитное поле" по сравнению со случаем EJJмодели. Покажем, что аналогичные выводы можно сделать и для SJJ-перехода с одной неоднородностью на левом конце. Простейшая модель микронеоднородности в виде узкой прямоугольной ямы/выступа в барьерном слое характеризуется тремя параметрами: шириной Δ , центром $\xi \in [\Delta/2, L - \Delta/2]$ и долей тока Джозефсона κ через неоднородность. Наличие неоднородности приводит к локальному изменению тока Джозефсона, что описывается следующим выражением для амплитуды:

$$j_C(x) = \begin{cases} 1 + \kappa, & x \in \Delta, \\ 1, & x \notin \Delta. \end{cases}$$

Неоднородность является шунтовой при значениях $\kappa > 0$. Выбор $\kappa = 0$ означает, что толщина барьерного слоя перехода постоянна, а амплитуда $j_C(x) = 1$ при $x \in [0, L]$ (однородный переход). При $\kappa \in [-1, 0]$ неоднородность является микрорезистором [14]. Соответствующая краевая задача для статического магнитного потока $\varphi(x)$ в случае in-line геометрии записывается в виде

$$-\varphi_{xx} + j_C(x)\sin\varphi = 0, \qquad (1.4 a)$$

$$\varphi_x(0) = h_e - \varkappa_l L \gamma, \quad \varphi_x(l) = h_e + \varkappa_r L \gamma.$$
 (1.4 b)

При численном моделировании зависимости критического тока от магнитного поля переходы из сверхпроводящего в резистивный режим математически интерпретируются как бифуркации магнитного потока в переходе при изменении параметров [14]. В рамках линейной теории устойчивости каждому решению $\varphi(x)$ краевой задачи (1.4) ставится в соответствии регулярная задача Штурма–Лиувилля (ЗШтЛ)

$$-\psi_{xx} + q(x)\psi = \lambda\psi, \qquad (1.5\,\mathrm{a})$$

$$\psi_x(0) = 0, \quad \psi_x(l) = 0,$$
 (1.5 b)

$$\int_{0}^{L} \psi^{2}(x) dx - 1 = 0 \qquad (1.5 c)$$

с потенциалом

$$q(x) = j_C(x) \cos \varphi(x),$$

зависящим от конкретного решения. Минимальное собственное значение (СЗ) ЗШтЛ позволяет судить об устойчивости или неустойчивости распределения $\varphi(x)$ (см. подробней [6,12,14–18]). Отметим, что задача (1.5) имеет дискретный невырожденный ограниченный снизу спектр { λ_n }, $n = 0, 1, \ldots, \lambda_0 \ge -1$.

Так как решения краевой задачи (1.4) зависят главным образом от параметров h_e и γ , то собственные значения и собственные функции (1.5) также зависят от этих параметров. Пусть $\lambda_0(h_e, \gamma)$ — минимальное собственное значение, соответствующее некоторому распределению $\varphi(x)$. Точка с координатами h_e и γ на плоскости (h_e, γ) называется точкой бифуркации $\varphi(x)$ [14], если выполнено условие

$$\lambda_0(h_e, \gamma) = 0. \tag{1.6}$$

Геометрическое место точек бифуркаций конкретного вихря представляет собой бифуркационную кривую этого вихря. Критическая кривая перехода "в целом" строится как огибающая бифуркационных кривых, соответствующих различным решениям краевой задачи (1.4). Иными словами, критическая кривая состоит из кусков бифуркационных кривых, соответствующих различным распределениям с наибольшим при заданном поле h_{e} критическим током у. Для численного моделирования зависимости (1.6) используется метод, предложенный в работе [15]: при заданном λ и поле h_e (или токе γ) система (1.4), (1.5) решается как нелинейная задача на собственные значения со спектральным параметром у (соответственно h_e). Этот метод отыскания точек бифуркации статических решений применялся для решения широкого класса проблем нелинейной физики [18].

2. Численное моделирование

Сравним результаты численных экспериментов по построению критических кривых для модели ДП в in-line геометрии с экспоненциально меняющейся шириной и моделей прямоугольных ДП с неоднородностями на концах при L = 7, $\Delta = 0.7$, $\varkappa_l = 1$ и $\varkappa_r = 0$. Отметим, что наша цель заключается "только" в доказательстве качественного соответствия критических кривых в трех моделях.

На рис. З показано распределение внутреннего магнитного поля $\varphi_x(x)$ для однофлюксонного вихря Φ^1 вдоль перехода при $h_e = 1.4$ для трех in-line моделей ДП (*EJJ*, *RJJ* и *SJJ*) при $\lambda_0 = 10^{-4}$, т.е. перед разрушением флюксона внешним током γ . Соответствующие распределения джозефсоновского тока

$$j_C(x)\sin\varphi(x)$$

в ДП представлены на рис. 4.

Отметим качественное совпадение обеих указанных зависимостей. Существенные количественные отличия кривых имеют место преимущественно в окрестности концов, где амплитуда джозефсоновского тока в *RJJ*-

Журнал технической физики, 2008, том 78, вып. 1



Рис. 3. Распределение внутреннего магнитного поля $\varphi_x(x)$ вдоль перехода для основного флюксона Φ^1 при $h_e = 1.4$ для трех in-line моделей ДП (I - EJJ, $\sigma = 0.07$; 2 - RJJ, $\kappa = -0.5$; 3 - SJJ, $\kappa = 0.5$) при $\lambda_0 = 10^{-4}$.



Рис. 4. Распределение джозефсоновского тока $j_C(x) \sin \varphi(x)$, соответствующее распределению внутреннего магнитного поля $\varphi_x(x)$, представленному на рис. 3.

и *SJJ*-моделях резко меняется. Найденные в численном эксперименте при $h_e = 1.4$ значения критических токов распределений $\gamma_{\rm cr}(EJJ) \approx 0.126$, $\gamma_{\rm cr}(RJJ) \approx 0.121$, $\gamma_{\rm cr}(SJJ) \approx 0.134$ достаточно близки.

На рис. 5 демонстрируются бифуркационные кривые вида (1.6), соответствующие устойчивым однофлюксонным решениям Φ^1 краевых задач (1.1) и (1.4). Сплошная кривая соответствует Φ^1 -распределениям в *EJJ*-модели ДП с коэффициентом формы $\sigma = 0.03$, пунктирная — *SJJ*-модели с прямоугольной шунтовой неоднородностью слева ($\kappa = 0.5$, $\xi = 0.35$), а штрихпунктирная — *RJJ*-модели с прямоугольным микрорезистором справа ($\kappa = -0.5$, $\xi = 6.65$). Наблюдается качественное совпадение трех бифуркационных кривых. Каждая бифуркационная кривая ограждает некоторую замкнутую фигуру на плоскости (h_e , γ), причем точки $h_e = h_{\min}$ и $h_e = h_{\max}$ представляют собой нижнее и верхнее критическое магнитные поля для рассматриваемого вихря. Из-за наличия дополнительного "геометрического" тока $\sigma[\varphi_x(x) - h_e]$ в *ЕЈЈ*-модели, а также тока $\kappa \sin \varphi$ в моделях с неоднородностями критические значения внешнего тока γ , соответствующие указанным значениям h_e , отличны от нуля. Это означает, что левее (правее) двух точек $\gamma_{\rm cr}(\Phi^1) = 0$ флюксон Φ^1 имеет ток "рождения" γ_b и ток "уничтожения" $\gamma_{\rm cr}$. Например, при $h_e = 0.6$ для *ЕЈЈ*-модели ($\sigma = 0.03$) имеем $\gamma_b \approx 0.026$ и $\gamma_{\rm cr} \approx 0.082$, а при $h_e = 2.31$ — соответственно $\gamma_b \approx -0.006$ и $\gamma_{\rm cr} \approx -0.011$.

Аналогичный эффект наблюдается и для "высших" вихрей вида Φ^n при n > 1 во всех трех моделях.

На рис. 6 сравниваются полученные численным путем критические зависимости "критический ток—магнитное поле" для рассмотренных выше *EJJ*- и *SJJ*-переходов. Критические кривые для этих двух моделей качественно совпадают.



Рис. 5. Бифуркационные кривые однофлюксонного состояния Φ^1 . 1 - EJJ-модель ДП с коэффициентом формы $\sigma = 0.03, 2 - SJJ$ -модель с прямоугольной шунтовой неоднородностью ($\Delta = 0.7, \kappa = 0.5$), а 3 - RJJ-модель с прямоугольным микрорезистором ($\Delta = 0.7, \kappa = -0.5$).



Рис. 6. Критическая зависимость "критический ток-магнитное поле". 1 - EJJ-модель ДП с $\sigma = 0.07$, 2 - SJJ-модель с прямоугольной шунтовой неоднородностью ($\Delta = 0.7$, $\kappa = 0.1$).

Журнал технической физики, 2008, том 78, вып. 1



Рис. 7. Критическая зависимость "критический ток-магнитное поле" для ДП с резистивной неоднородностью в центре перехода.



Рис. 8. Φ^1 -, Φ^2 - и $\Phi^1 \Phi^{-1}$ -распределения в ДП с резистивной неоднородностью в центре перехода.

Численный эксперимент показывает (см. рис. 7), что в переходах с резистивной неоднородностью в окрестности центра L/2 за счет пиннинга на неоднородности устойчивыми становятся смешанные распределения магнитного потока $\varphi(x)$ в переходе, "составленные" из вихрей противоположной полярности. Конкретный пример распределения вида $\Phi^1 \Phi^{-1}$ (флюксон слева, антифлюксон справа) демонстрируется при $h_e = 2.2$, $\xi = 3.5$ и $\kappa = -1$ на рис. 8 (сплошная кривая). Там же для сравнения показаны чистые Φ^1 -распределение (пунктир) и Φ^2 -распределение (штрихпунктир).

В отличие от этого случая в переходах с неоднородностью в окрестности концов даже при достаточно больших значениях h_e (численно проверялись решения вплоть до $h_e = 10$) нет устойчивых смешанных флюксонантифлюксонных вихрей, дающих вклад в критическую кривую. Поэтому критические кривые перехода "в целом" составлены только из кусков бифуркационных кривых для мейсснеровского (M) распределения и чистых *n*-флюксонных вихрей Φ^n , n = 1, 2, ... Максимумы критических кривых убывают монотонно с возрастанием поля h_e (в переходах с внутренней неоднородностью максимумы критических кривых убывают немонотонным образом из-за стабилизирующего влияния неоднородности на смешанные флюксон-антифлюксонные пары вихрей [18]). По-видимому, отсутствие устойчивых смешанных распределений в *EJJ* объясняет улучшенный спектр излучения таких ДП в сравнении с прямоугольными ДП [3]. Результаты настоящей работы показывают, что модели прямоугольных переходов с неоднородностями в окрестности концов обладают аналогичным свойством.

Заключение

В заключение отметим, что результаты численных экспериментов демонстрируют возможность замены распределенной вдоль перехода неоднородности локальной неоднородностью резистивного или шунтового вида, что с технологической точки зрения может иметь определенные преимущества. Критические кривые переходов с неоднородностями на конце не содержат куски бифуркационных кривых смешанных флюксон-антифлюксонных вихрей магнитного потока, что позволяет ожидать сужения ширины линии излучения осциллятора на движущихся флюксонах для таких ДП, аналогичного тому, которое имеет место в *EJJ*.

Авторы выражают благодарность проф. И.В. Пузынину и Н.М. Плакиде за стимулирующие дискуссии и поддержку работы.

Список литературы

- Benabdallah A., Caputo J.G., and Scott A.C. // Phys. Rev.. B. 1996. Vol. 54. N 2. P. 16139–16146.
- [2] Goldobin E., Streck A., and Koelle D. // Phys. Rev. E. 2001.
 Vol. 63. N 3. P. 031 111(10).
- [3] Carapella G., Martucciello N., and Costabile G. // Phys. Rev. B. 2002. Vol. 66. N 13. P. 134 531 (7).
- [4] Sakai S., Samuelsen M.R., and Olsen O.H. // Phys. Rev. B. 1987. Vol. 36. N 1. P. 217–225.
- [5] Benabdallah A., Caputo J.G., and Scott A.C. // J. Appl. Phys. 2000. Vol. 88. N 6. P. 3527–3540.
- [6] Семерджиева Е.Г., Бояджиев Т.Л., Шукринов Ю.М. // ФНТ. 2004. Т. 30. Вып. 6. С. 610–618.
- [7] Shukrinov Yu.M., Semerdjieva E.G., and Boyadjiev T.L. // J. Low Temp. Phys. 2005. Vol. 139. N 1/2. P. 299–308.
- [8] Koshelets V.P., Dmitriev P.N., Sobolev A.S., Pankratov A.L., Khodos V.V., Vaks V.L., Baryshev A.M., Wesselius P.R., and Mygind J. // Physica C. 2001. Vol. 372–376. Part 1. P. 316– 321.
- Koshelets V.P., Shitov S.V., Shchukin A.V., Filippenko L.V., Mygind J., Ustinov A.V. // Phys. Rev. B. 1997. Vol. 56. N 9. P. 5572–5577.
- [10] Malomed B.A., Ustinov A.V. // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 67.
 N 8. P. 3791–3797.

- [11] Larsen B.H., Mygind J., Ustinov A.V. // Phys. Lett. A. 1994.
 Vol. 193. N 4. P. 359–362.
- [12] Семерджиева Е.Г., Бояджиев Т.Л., Шукринов Ю.М. // ФНТ. 2005. Т. 31. Вып. 10. С. 1110–1116.
- [13] Лихарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1986. С. 38.
- [14] Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. Вып. 4. С. 1527–1537.
- [15] Бояджиев Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В. Сообщение ОИЯИ. Дубна, 1988. Р. 11–88–409.
- [16] Caputo J.-G., Flytzanis N., Gaididei Y., Stefanakis N., Vavalis E. // Supercond. Sci. Technol. 2000. Vol. 13. P. 423– 430.
- [17] Stefanakis N., Flytzanis N. // Supercond. Sci. Technol. 2001.
 Vol. 14. P. 16–29.
- [18] Puzynin I.V., Boyadzhiev T.L., Vinitskii S.I., Zemlyanaya E.V., Puzynina T.P., and Chuluunbaatar O. // Physics of Particals & Nucley. 2007. Dubna. Vol. 38. N 1. P. 70–116.