

01;07

Электромагнитные солитоны в сверхрешетке с параболической минизоной

© Г.М. Шмелев, М.Б. Белоненко

Волгоградский государственный педагогический университет,
E-mail: mbelonenko@yandex.ru

Поступило в Редакцию 18 ноября 2009 г.

На основании микроскопического подхода и уравнений Максвелла показано существование аналогов солитонов — предельно коротких оптических импульсов в сверхрешетках с параболической минизоной. Обсуждаются механизмы изменения формы предельно коротких оптических импульсов. Установлено влияние температуры на параметры предельно коротких оптических импульсов.

Современные нанотехнологии позволяют создавать системы довольно сложной геометрической формы, что стимулирует интерес теоретиков к изучению таких объектов, как квантовые проволоки, кольца, цилиндры, ямы. Особенности геометрии отражаются на спектре носителей тока и, следовательно, обуславливают специфику электронных свойств подобных структур. По-видимому самый простой способ построения сверхрешетки связан с изготовлением в твердом теле регулярной системы квантовых ям, которые, будучи связанными между собой посредством туннельного эффекта, и задают закон дисперсии носителей заряда. При таком подходе можно не только задавать величину и закон дисперсии для минизоны, но и создавать сверхрешетки пониженной размерности, просто изменяя расстояние между квантовыми ямами. Отметим, что интерес к подобным структурам возрос и в связи с моделью квантового компьютера Танамото [1–4]. В качестве примера можно привести исследование распространения в сверхрешетках ультракоротких импульсов света (оптических солитонов) [5,6]. В частности, в связи с возросшим приложением электромагнитного излучения терагерцового диапазона [7,8] особый интерес представляют сверхрешетки с законом дисперсии в минизоне в виде усеченной параболы (т. е. закон дисперсии предполагается параболическим всюду вплоть до границы зоны Бриллюэна). Отметим также, что в работах [9, 10] рассматривался

закон дисперсии, составленный из „сшитых“ прямой и перевернутой парабол. Физически такой закон дисперсии будет отвечать „свободному“ движению электрона внутри минизоны вплоть до границы зоны Бриллюэна.

Суммируя вышесказанное, можно сделать вывод, что задача исследования динамики нелинейных электромагнитных волн в сверхструктурах с параболическим законом дисперсии представляется достаточно важной и актуальной.

Рассмотрим сверхрешетку в геометрии, когда электромагнитная волна распространяется перпендикулярно оси сверхрешетки, а вектор \mathbf{E} направлен вдоль ее слоев.

Тогда гамильтониан системы электронов в электромагнитном поле, с учетом калибровки $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ (c — скорость света) можно записать в виде [8,11]:

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c) a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma}, \quad (1)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{\Delta d^2}{\pi^2 \hbar^2} \frac{p^2}{2}, \quad -\frac{\pi \hbar}{d} \leq p \leq \frac{\pi \hbar}{d},$$

где p — квазиимпульс электрона в направлении оси z , Δ — удвоенная ширина минизоны, d — расстояние между квантовыми ямами в направлении оси z , $a_{p\sigma}^+$, $a_{p\sigma}$ — операторы рождения уничтожения электронов с квазиимпульсом p и спином σ .

Закон дисперсии, приведенный в (1), более удобно задать в виде ряда Фурье (как совокупность парциальных косинусоидальных минизон):

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k (1 - \cos(kp)), \quad (2)$$

$$\Delta_k = \frac{4\Delta}{\pi^4} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2},$$

где Δ_k имеет смысл ширины парциальной косинусоидальной минизоны, и произведено обезразмеривание квазиимпульса p : $p \rightarrow \hbar p/d$.

Уравнения Максвелла с учетом диэлектрических и магнитных свойств описанной системы квантовых точек [12] можно записать как

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = 0, \quad (3)$$

причем здесь пренебрегается дифракционным расплыванием лазерного пучка в направлениях, перпендикулярных оси распространения. Вектор-потенциал \mathbf{A} считается имеющим вид $\mathbf{A} = (0, 0, A(y, t))$, $\mathbf{j} = (0, 0, j(y, t))$.

Запишем стандартное выражение для плотности тока:

$$j = e \sum_p v \left(p - \frac{e}{c} A(t) \right) \langle a_p^+ a_p \rangle, \quad (4)$$

где $v(p) = \partial \varepsilon(p) / \partial p$, а скобки означают усреднение с неравновесной матрицей плотности $\rho(t)$: $\langle B \rangle = Sp(B(0)\rho(t))$. В силу того, что рассматриваются предельно короткие оптические импульсы, содержащие несколько периодов колебаний (длительность примерно 10^{-15} s), и характерные величины времен релаксации (примерно 10^{-12} s) много больше длительности импульсов, можно воспользоваться переходом к бесстолкновительному пределу и записать: $\langle a_p^+ a_p \rangle = \langle a_p^+ a_p \rangle_0$, где $\langle B \rangle_0 = Sp(B(0)\rho(0))$.

Учитывая, что $\rho_0 = \exp(-H(t=0)/kT) / Sp(\exp(-H(t=0)/kT))$ (k — постоянная Больцмана, T — температура), получаем точное уравнение на вектор-потенциал электрического поля:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k e n_0 \sin\left(\frac{ke}{c} A\right) = 0,$$

$$B_k = \frac{4\Delta(-1)^{k+1}}{\pi^4 k} \sum_p \cos(kp) \exp(-\beta \varepsilon(p)), \quad (5)$$

$$\beta = 1/kT,$$

причем в (5) уже учтены спины электронов, n_0 — равновесная концентрация электронов в структуре. Также в (5) было учтено, что типичная величина минизоны Δ составляет примерно 0.05 eV, электронный газ является невырожденным и можно воспользоваться статистикой Максвелла. После перехода

$$A \rightarrow \frac{e}{c} A, \quad y \rightarrow 2e \sqrt{\frac{n_0 \Delta r_1}{c}}, \quad t \rightarrow \frac{2e}{c} \sqrt{\frac{n_0 \Delta r}{c}},$$

где

$$r_k = \sum_p \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cos(kp) \exp(-\beta \varepsilon(p)),$$

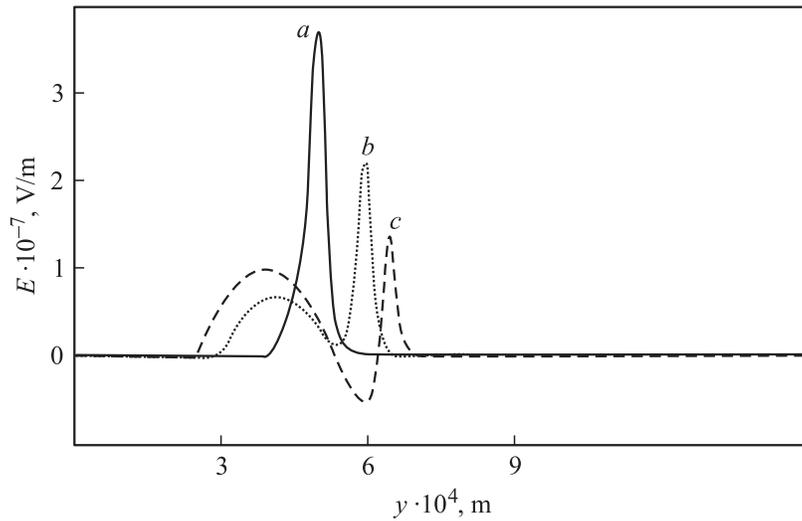


Рис. 1. Распад импульса электрического поля в пределе нулевых температур. По горизонтальной оси координата, по вертикальной оси электрическое поле. Для кривой *b* время в три раза больше, чем для кривой *a*; для кривой *c* время в четыре раза больше, чем для кривой *a*. $v/c = 0.95$.

уравнение (5) можно записать в виде обобщения уравнения sin-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \sin A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r_k}{r_1} \sin(kA) = 0. \quad (6)$$

Заметим, что в случае нулевых температур ряд для r_k суммируется и уравнение (6) для случая $|A| < \pi$ приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + A = 0.$$

В этом случае импульс электромагнитного поля будет испытывать дисперсионное расплывание (рис. 1).

Вследствие убывания коэффициентов r_k с ростом k , в сумме в уравнении (6) можно ограничиться несколькими первыми неизчезающими

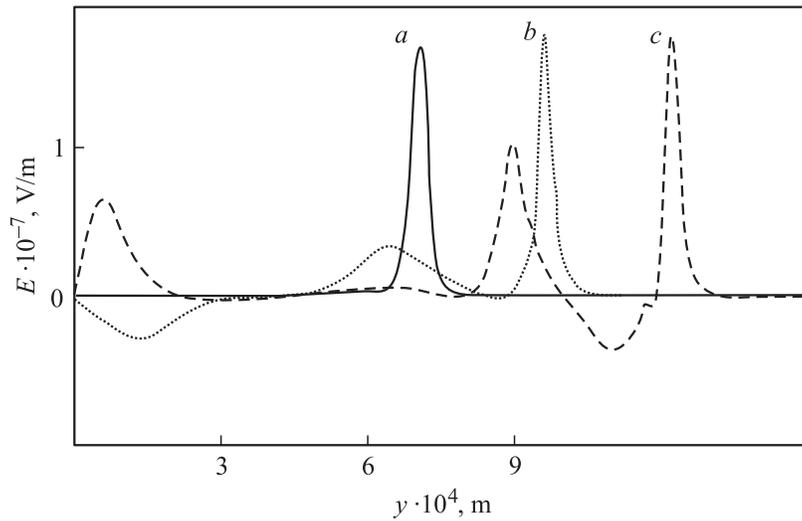


Рис. 2. Электрическое поле, определяемое уравнением (6) в разные моменты времени. По горизонтальной оси координата, по вертикальной оси электрическое поле. Для кривой b время в два раза больше, чем для кривой a ; для кривой c время в три раза больше, чем для кривой a . $v/c = 0.95$.

слагаемыми и получить аналог широко применяемого в приложениях, но не интегрируемого методом обратной задачи рассеяния, двойного уравнения sin-Gordon [13].

Исследуемые уравнения решались численно при помощи прямой разностной схемы типа крест [14]. Шаги по времени и координате определялись из стандартных условий устойчивости. Шаги разностной схемы уменьшались последовательно в два раза, до тех пор пока решение не изменялось в 8-м значащем знаке. Начальное условие выбиралось в виде хорошо известного кинк-решения для уравнения sin-Gordon:

$$A(y, 0) = 4 \operatorname{arctg}(\exp(y/\gamma)), \quad \left. \frac{dA(y, t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{2v}{\gamma} \operatorname{ch}^{-1} y/\gamma, \quad (7)$$

$$\gamma = (1 - v^2)^{1/2}.$$

Возникающая эволюция электромагнитного поля с течением времени представлена на рис. 2.

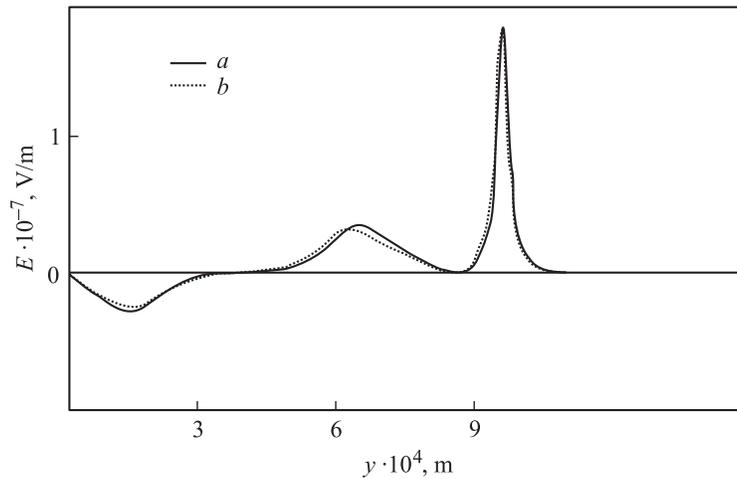


Рис. 3. Электрическое поле, определяемое уравнением (6) в разные моменты времени. По горизонтальной оси координата, по вертикальной оси электрическое поле. Для кривой a $\Delta/kT = 0.5$, для b $\Delta/kT = 30$. Время соответствует случаю b рис. 2. $v/c = 0.95$.

Видно, что ультракороткий импульс движется, сохраняя свою форму, но на больших временах за ним возникает ‘‘хвост’’, что, на наш взгляд, объясняется влиянием высших гармоник в обобщенном потенциале. Обратим внимание на то, что при движении ультракороткого импульса площадь ‘‘хвоста’’ на малых временах нулевая, что, в общем, согласуется с результатами по эволюции систем, описываемых уравнением, ‘‘близким’’ к уравнению sin-Gordon .

Отметим, что в случае косинусоидального закона дисперсии импульс, заданный начальными условиями (7), распространялся бы, не изменяя своей формы [6] вплоть до времени, когда начали бы играть свою роль процессы релаксации. В связи с этим можно предложить применение сверхрешеток с параболической минизоной в устройствах управления формой импульсов. Например, появление пичков (рис. 2, кривая c) может быть использовано в устройствах повторения для преобразования одного импульса в несколько.

На рис. 3 приведены типичные зависимости обезразмеренной амплитуды электрического поля от координаты для случая одинаковых начальных условий и времен, но разных температур.

Полученные и представленные на рис. 3 данные можно объяснить тем, что при изменении температуры изменяется эффективная дисперсия.

Из проведенного исследования можно сделать следующие основные выводы:

1. Получено уравнение, описывающее динамику электромагнитного поля в системе квантовых точек с параболической минизоной.

2. Численно проанализировано полученное эффективное уравнение и обнаружено устойчивое распространение ультракороткого оптического импульса.

3. Первоначальное возмущение в общем случае на больших временах образует за собой „хвост“, который генерирует вторичные импульсы.

4. Изменение температуры приводит к изменению „хвоста“ у импульса, но слабо влияет на форму самого импульса.

Список литературы

- [1] Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. М.: Наука, 1989. 288 с.
- [2] Херман М. Полупроводниковые сверхрешетки. М.: Мир, 1989. 207 с.
- [3] Валиев К.А., Кокин А.А. Квантовые компьютеры: надежды и реальность. Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2001. 352 с.
- [4] Tanamoto T. // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 022305.
- [5] Игнатов А.А., Романов Ю.А. // ФТТ. 1975. Т. 17. В. 11. С. 3388–3389.
- [6] Эпштейн Э.М. // ФТТ. 1977. Т. 19. В. 11. С. 3456–3458.
- [7] Romanov Yu.A., Romanova J.Yu. // Solid State Phys. 2004. V. 46. P. 164.
- [8] Romanov Yu.A. // Solid State Phys. 2003. V. 45. P. 559.
- [9] Esaki L., Tsu R. // IBM. J. Res. Dev. 1970. V. 14. P. 61.
- [10] Lebowhl P.A., Tsu R. // J. Appl. Phys. 1970. V. 41. P. 2664.
- [11] Belonenko M.B., Meshcheryakova N.E. // J. Russian Laser Research. 2008. V. 29. N 6. P. 544–551.
- [12] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. М.: Наука. Физматлит, 1988. 512 с.
- [13] Davydov A.S. Solution in Molecular System. Kiev: Naukova Dumka, 1984. (in Russian).
- [14] Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Наука, 1975. 631 с.