УДК 539.12

Н.Б. СУХОМЛИН

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ «STRIKE PRICE» И ОБРАЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ БЛЭЙКА – ШОУЛСА

Обратная задача выбора в рамках модели Блэйка – Шоулса (Black Scholes) [1] существует уже 34 года. Трудности ее прямого решения могут быть проиллюстрированы работами [2–5]. Некоторые авторы утверждают, что вообще невозможно обратить формулу Блэйка – Шоулса [6]. Экономфизика дает новый импульс этой проблеме. Концепция законов сохранения была первоначально разработана в физике, но интерес экономистов к ней постоянно растет [7–11]. Используя концепцию законов сохранения, мы строим выражение волатильности (volatility) как функцию переменных наблюдаемых и тем самым впервые точно решаем обратную задачу в рамках модели Блэйка – Шоулса (тем самым попутно решается задача выбора ценообразования в экономфизике). Мы основываем наши исследования на работах [12–15].

Уравнение Блэйка – Шоулса

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{1}$$

имеет решение, ставшее уже классическим, со следующей структурой:

$$V(t,S) = S\,N(d_1) - F(t)\,N(d_2),$$

$$F(t) \equiv K e^{-r(T-t)}, \quad N(d) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-u^2/2}\,du,$$

$$d_2 \equiv \frac{\ln S - \ln K}{\tau} - \beta\tau, \quad d_1 = d_2 + \tau, \tag{2}$$

$$\beta \equiv \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2}, \quad \tau \equiv \sigma\sqrt{T-t}, \quad \sigma = \mathrm{const} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S\,N'(d_1) = F(t)\,N'(d_2). \tag{3}$$

Это соотношение хорошо известно (см., например, [16]). Рассмотрим функцию

$$\xi \equiv V^{(2)} - V^{(1)}, \quad \text{где } V^{(1)} \equiv \partial V/\partial(\ln S), \quad V^{(2)} \equiv \partial^2 V/\partial(\ln S)^2. \tag{4}$$

Используя свойство функции нормального распределения $N''(d) = -d\,N'(d)$ и отношение (3), получаем различные выражения для новой характеристики ξ: $\xi = S\,N'(d_1)/\tau = F(t)\,N'(d_2)/\tau$. Введем эластичность E_ξ этой вспомогательной функции:

$$E_\xi \equiv \frac{\partial \ln|\xi|}{\partial \ln S} = -\frac{1}{\tau^2}\left(\ln S - \ln K\right) + \beta. \tag{5}$$

Функция ξ (4) связана с хорошо известной характеристикой Γ:

$$\xi = S^2\Gamma \;\Rightarrow\; E_\xi = 2 + E_\Gamma, \; E_\Gamma \equiv \Gamma^{(1)}/\Gamma. \tag{6}$$

После подстановки τ и β из (2) в (5) несложно выразить волатильность модели Блэйка – Шоулса в виде

$$\sigma^2_{\text{B–S}} = \frac{\ln(K/S) - r(T-t)}{(T-t)(E_\xi - 1/2)}. \tag{7}$$

Соотношение (6) позволяет записать эту формулу с помощью эластичности коэффициента *Гамма* в виде

$$\sigma^2_{\text{B–S}} = \frac{\ln(K/S) - r(T-t)}{(T-t)(E_\Gamma + 3/2)},$$

что может быть более понятным для практиков финансовых операций.

Проверка формулы (7) с помощью данных симуляции [17, 18] дает погрешность порядка 10^{-9}. Применение рыночных данных к формуле (7) сделано в [19]. Выражение (7) является точным решением обратной задачи ценообразования опционов в рамках модели Блэйка – Шоулса и поэтому отличается от локальной волатильности типа Дюпира [20].

Ключевое для сделанных выше выкладок выражение (5) представляет собой закон сохранения, соответствующий классическому решению Блэйка – Шоулса:

$$\tau^2(E_\xi - \beta) + \ln S = \ln K = \mathrm{const}.$$

Этот закон выражает сохранение «*strike price*» в процессе эволюции динамической системы. Используя оператор $\hat{L} \equiv x^2 \partial^2 / \partial x^2$, этот закон сохранения, который мы называем *закон сохранения strike price*, может быть также написан в терминах классического решения:

$$V^{-1}(\hat{L}^{-1}\hat{B}\,\hat{L})V = \ln K = \text{const} \,, \tag{8}$$

где оператор $\hat{B}$ определяется как

$$\hat{B} \equiv \sigma^2 (T-t)\left(S\frac{\partial}{\partial S} - \beta \right) + \ln S \,. \tag{9}$$

Представление *закона сохранения strike price* в виде (8) возможно потому, что вспомогательная характеристика ξ является собственной функцией оператора $\hat{B}$ (9): $\hat{B}\xi = \lambda\xi$ с собственным значением $\lambda \equiv \ln K$ [12]. Этот оператор может быть интерпретирован как «*оператор strike price*».

В других случаях ситуация может быть более сложной: наш подход выявляет для некоторых моделей возможность существования нескольких волатильностей и законов сохранения [21]. Можно интерпретировать этот факт как присутствие в модели возможностей арбитража [14].

Автор выражает благодарность фонду SEESCyT, г-ну Roberto Reyna, кафедре физики UASD и кафедре экономии PUCMM за помощь. Автор благодарит также профессора В.Г. Багрова за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Black F. and Scholes M. The pricing of Options and Corporate Liabilities // J. Political Economy. – 1973. – V. 81 (mai/juin). – P. 637–659.
2. Bouchouev I. and Isakov V. The inverse problem of option pricing // Inverse Problems. – 1997. – V. 13. – P. 11–17.
3. Chiarella C., Craddock M., and El-Hassan N. An Implementation of Bouchouev's Method for a Short Time Calibration of Option Pricing Models // Computational Economics. – 2003. – V. 22. – No. 2–3. – P. 113–138.
4. Cont R., Tankov P., and Voltchkova E. Option pricing models with jumps: integro-differential equations and inverse problems. Published / Eds. P. Naittaanmäki, T. Rossi, S. Korotov, E. Onate, J. Périaux, D. Knorzer. – European Congress on Computational Methods in Applied Sciences (ECCOMAS 2004)}. – Jyväskylä, 2004.
5. Egger H., Hein T., and Hofmann B. On decoupling of volatility smile and term structure in inverse option pricing // Inverse Problems. – 2006. – V. 22. – P. 1247–1259.
6. Hull J. Options, Futures, and other Derivatives. – Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2003.
7. Samuelson Paul A. Law of Conservation of the Capital – Output Ratio // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 1970. – V. 67. – No. 3. – P. 1477–1479.
8. Sato Ryuzo and Ramachandran Rama V. Conservation Laws and Symmetry: Applications to Economics and Finance. – Boston: Kluwer Academic Print, 1990.
9. Samuelson Paul A. Conservation laws in economics // Jpn and the World Economy. – 2004. – V. 16. – No. 3. – P. 243–246: International Journal of Theory and Policy / Eds. Robert Dekle, Yasushi Hamao. – Elsevier. North – Holland.
10. Sato Ryuzo. Economic Conservation Laws as Indices of Corporate Performance // Jpn and the World Economy. – 2004. – V. 16. – No. 3. – P. 247–267: International Journal of Theory and Policy / Eds. Robert Dekle, Yasushi Hamao. – Elsevier. North – Holland.
11. Sato Ryuzo and Fujii Mariko. Evaluating corporate performance: empirical tests of a conservation law // Japan and the World Economy. – 2006. – V. 18. – No. 2. – P. 158–168: International Journal of Theory and Policy / Eds. Robert Dekle, Yasushi Hamao. – Elsevier. North – Holland.
12. Sukhomlin N. Simetría y nuevas soluciones de la ecuación de Black Scholes. (Symmetry & New Solutions of the Black Scholes Equation) // Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. – 2004. – V. XI. – P. 175–189. http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol11/nikolay.pdf
13. Sukhomlin N. Ley de conservación del precio final en el modelo de Black Scholes. (Strike price conservation law in the Black Scholes model) // Economía. Universidad de los Andes, Venezuela. – 2006. – No. 17–18. – P. 147–161. http://www.saber.ula.ve/revistaeconomia/
14. Sukhomlin N. The Black Scholes type financial models and the arbitrage opportunities // Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones (Universidad de Costa Rica). – 2007. – V. 14. – No. 1. – P. 84–87 (Enero 2007).
15. Sukhomlin N. and Ortiz J. New exact solutions for the Black Scholes equation & diffusion equation. (accepted to publication in Applied Mathematics E – Notes, 2007).
16. Wilmott P., Howison S., and Dewynne J. The Mathematics of Financial Derivatives. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – P. 80.
17. Sukhomlin N. and Jacquinot Ph. Symmetries & Conservation Laws in the Black Scholes model of financier markets // Paper presented at The XVth International Symposium on Mathematical Methods Applied to the Sciences (The University of Costa Rica, 21–24 February 2006). – Costa Rica, 2006. – P. 153–154.
18. Sukhomlin N. and Jacquinot Ph. Conservation Laws & the Black Scholes Model // Paper presented at the International Conference on the Optimisation Mathematics and Decision Making (University of Antilles and Guyana, Guadeloupe, France, 18–21 April 2006). P. 31. http://gala.univ-perp.fr/~aussel/CIMODE06/
19. Sukhomlin N. and Jacquinot Ph. Direct Formulation of the implied volatility in the Black et Scholes mode: theory and application // J. Futur. Markets. – 2007 (in publication).
20. Dupire B. Pricing and Hedging with smiles // Paper presented at The Proceedings of the AFFI Conference La Boule, June 1993.
21. Sukhomlin N. Market calibration and correct definition of the Black Scholes type financial models // Review of Derivatives Research. – 2007 (in publication).

Department of Physics, Autonomous University of Santo-Domingo, Dominican Republic
Department of Economics, Pontifical Catholic University of Santo-Domingo, Dominican Republic
E-mail: W17971865@GMAIL.COM

Поступило в редакцию 10.04.07.