

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук
Отделение твердотельной электроники
Сектор теории твёрдого тела

Гарбузов Федор Евгеньевич

**Распространение объёмных нелинейных волн деформации в
упругих и вязкоупругих стержнях**

Научный доклад

1.3.8 — физика конденсированного состояния

Санкт-Петербург – 2024

Научный руководитель: **Гурский Виталий Валерьевич**
к.ф.-м.н., с.н.с. сек. теории твердого тела
ФТИ им. А.Ф. Иоффе

Рецензенты: **ФИО**
ученая степень, ученое звание,
организация/место работы, должность

ФИО
ученая степень, ученое звание,
организация/место работы, должность

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Изучение волн деформации в нелинейных средах и элементах конструкций является важным направлением современных исследований, представляющим интерес как с фундаментальной точки зрения, так и для практических приложений, например в задачах неразрушающего контроля. Традиционные методы неразрушающего контроля опираются на линейные упругие свойства материалов, однако различные нелинейные эффекты позволяют расширить получаемую информацию об исследуемом объекте. К числу таких эффектов относятся генерация высших гармоник, зависимость скорости от амплитуды волны, акустоупругий эффект, возникновение солитонов деформации и другие, а их применение позволит создать более совершенные методы неразрушающего контроля [1, 2].

Одним из важных нелинейных эффектов является возникновение солитонов деформации — уединённых волн, стабильность которых обеспечивается балансом между нелинейными характеристиками среды и дисперсией. Дисперсия акустических волн может возникать в результате дискретности среды — в таком случае при балансе с нелинейностью возникают ультракороткие солитоны нанометровой длины, распространяющиеся в объёме среды на расстояния до нескольких миллиметров [3, 4]. Другим источником дисперсии служит ограниченность поперечного размера упругого волновода — в этом случае имеют место длинные солитоны сантиметровой или большей длины в зависимости от толщины волновода [5, 6]. Изучение длинных солитонов деформации как инструментов интраспекции материалов и элементов конструкций является предметом продолжающихся исследований [7, 8].

Многие практически важные материалы, например полимеры или биологические мягкие ткани, помимо нелинейно-упругих свойств демонстрируют существенные вязкоупругие свойства. Ключевой особенностью вязкоупругих материалов являются эффекты памяти — влияние истории деформаций на текущее состояние, что выражается в запаздывающей связи напряжения с деформацией. Вязкость способна оказывать существенное влияние на динамику волн деформации, приводя к диссипации механической

энергии волн, а также к частотной зависимости модулей упругости, однако в теоретических исследованиях нелинейных волн вязкоупругими эффектами зачастую пренебрегают [5, 6]. Учёт вязкоупругих эффектов позволит построить более точную теорию нелинейных волн в реальных материалах, которая будет лучше согласована с имеющимися экспериментальными данными о формировании и распространении солитонов деформации [5, 9].

Целью работы является построение теоретических моделей, описывающих возникновение и распространение нелинейных волн и солитонов деформации в упругих и вязкоупругих волноводах.

Для достижения целей поставлены следующие **задачи**:

1. Провести систематический асимптотический анализ уравнений нелинейной теории упругости и скорректировать при необходимости существующие волновые модели, описывающие нелинейные продольные волны деформации малой, но конечной амплитуды.

2. Разработать численный метод, позволяющий эффективно моделировать трёхмерные уравнения движения для тел со сложной нелинейной и запаздывающей зависимостью напряжения от деформации.

3. Проверить применимость асимптотических моделей, сопоставив описываемые ими солитоны с результатами трёхмерных расчётов динамики волн деформаций в нелинейно-упругих стержнях.

4. Построить математическую модель, позволяющую моделировать процесс зарождения солитонов деформации в упругом волноводе, наблюдавшийся до этого лишь экспериментально.

5. Провести численное моделирование зарождения солитонов деформации в нелинейно-упругих и вязкоупругих стержнях в рамках как полных трёхмерных, так и упрощённых одномерных уравнений.

Методология и методы исследования. При выполнении работы применялись методы асимптотического анализа уравнений в частных производных, содержащих малый параметр: метод возмущений и многомасштабный метод. Кроме того использовались численные методы решения начально-краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных: метод спектрального элемента для пространственной дискретизации

задачи и метод Рунге-Кутты для интегрирования во временной области.

Научная новизна:

1. В рамках асимптотического анализа уравнений нелинейной теории упругости уточнены дисперсионные члены в уравнении типа Буссинеска, описывающем распространение длинных продольных волн малой, но конечной амплитуды в стержнях. Полученное уравнение более точным образом учитывает дисперсию продольных волн деформации в стержне, чем аналогичные уравнения известные из литературы.

2. В режиме средних амплитуд волны деформации описываются расширенным уравнением Кортевега–де Фриза, учитывающим нелинейные и дисперсионные эффекты следующего порядка. В случае, если упругие модули третьего или четвёртого порядка существенно превышают упругие модули второго порядка, то кубически-нелинейный эффект оказывается наиболее существенным среди эффектов следующего порядка, а волны деформации асимптотически описываются уравнением Гарднера. Как следствие, в режиме средних амплитуд деформаций стержня в зависимости от соотношения между модулями упругости могут существовать либо широкие солитоны деформации (флатоны), либо узкие солитоны.

3. Показано, что образование устойчивой длинной уединённой волны деформации после удара по торцу полимерного стержня обусловлено быстрой вязкоупругой диссипацией коротких волн.

Апробация результатов. Результаты работы были изложены на ряде конференций, научных школ и семинаров: Физика.СПб (Санкт-Петербург, 2016 и 2017 гг.), Нелинейные волны – 2018 (Нижний Новгород, 2018 г.), Days on diffraction (Санкт-Петербург, 2018 и 2021 гг.), Solitons, collapses and turbulence (Ярославль, 2019 г.), International conference of numerical analysis and applied mathematics (Родос, 2021 г.), Акустический семинар (Санкт-Петербург, 2021 г.), семинар математического отделения университета Nottingham Trent (Ноттингем, 2022 г.), Нелинейные дни в Саратове (2023 г.), Чайный семинар в ФТИ им. А.Ф. Иоффе (2024 г.) и семинар по механике в ИПМаш РАН (2024 г.).

Публикации:

- [A1] Гарбузов Ф. Е. [Определение упругих модулей 3-го порядка по параметрам объемных солитонов деформации](#) / Гарбузов Ф. Е., Самсонов А. М., Семенов А. А., Шварц А. Г. // Письма в ЖТФ. — 2016. — Т. 42, №3 — С. 16–22.
- [A2] Samsonov A. M. [Nonlinear guided bulk waves in heterogeneous elastic structural elements](#) / Samsonov A. M., Semenova I. V., Garbuzov F. E. // Int. J. Non-Linear Mech. — 2017. — Vol. 94. — P. 343–350.
- [A3] Garbuzov F. E. [On Boussinesq-type models for long longitudinal waves in elastic rods](#) / Garbuzov F. E., Khusnutdinova K. R., and Semenova I. V. // Wave Motion. — 2019. — Vol. 88. — P. 129–143.
- [A4] Гарбузов Ф. Е. [Продольные объемные солитоны деформации в гиперупругом стержне с квадратичной и кубической нелинейностями](#) / Гарбузов Ф. Е., Бельтюков Я. М., Хуснутдинова К. Р. // ТМФ — 2020. — Т. 202, №3 — С. 364–381.
- [A5] [Formation of long strain waves in viscoelastic bar subjected to a longitudinal pulse load](#) / Garbuzov F. E., Semenova I. V., Belashov A. V., and Beltukov Y. M. // 2021 Days on Diffraction (DD). — 2021. — P. 58–62.
- [A6] [Shock wave evolution into strain solitary wave in nonlinearly elastic solid bar](#) / Garbuzov F. E., Belashov A. V., Zhikhoreva A. A., Beltukov Y. M., and Semenova I. V. // Wave Motion. — 2022. — Vol. 114. — P. 103022.
- [A7] Garbuzov F. E. [Viscoelastic relaxation of nonlinear strain waves in polymeric bars.](#) / Garbuzov F. E. and Beltukov Y. M. // AIP Conf. Proc. — 2023. — Vol. 2849. — P. 450024.
- [A8] Garbuzov F. E. [Generalization of nonlinear Murnaghan elastic model for viscoelastic materials](#) / Garbuzov F. E. and Beltukov Y. M. // Int. J. Non-Linear Mech. — 2024. — Vol. 159. — P. 104598.

Все работы опубликованы в изданиях, индексируемых Scopus. Публикации A1 – A4, A6 и A8 входят в Web of Science Core Collection.

Длинные волны малой, но конечной амплитуды

Данный раздел посвящён построению теоретической модели продольных волн деформации в нелинейно-упругих стержнях. Такая задача уже была рассмотрена в ряде работ, однако разные авторы использовали различные подходы и придерживались разной степени математической строгости. В результате получались различные волновые модели, причём некоторые из них обладали нежелательными математическими свойствами. Для устранения разногласий между различными источниками, в этом разделе пересмотрена процедура выведения модели длинных продольных волн из полных уравнений нелинейной теории упругости.

Нелинейно-упругий материал характеризуется, во-первых, учётом нелинейных слагаемых в тензоре деформаций \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[\text{grad } \vec{U} + (\text{grad } \vec{U})^T + (\text{grad } \vec{U})^T \cdot \text{grad } \vec{U} \right], \quad (1)$$

где $\vec{U} = \vec{U}(x, y, z, t)$ — вектор перемещений точек тела, имеющих в недеформированном состоянии координаты (x, y, z) ; а во-вторых, наличием неквадратичных слагаемых в выражении для упругой (потенциальной) энергии. При рассмотрении малых деформаций обычно применяют разложение упругой энергии в степенной ряд по тензору деформаций, удерживая в нём первые несколько порядков. В изотропном материале наиболее общее выражение упругой энергии, содержащее квадратичные и кубические слагаемые, имеет вид

$$\Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1^2 - 2\mu I_2 + \frac{l + 2m}{3} I_1^3 - 2m I_1 I_2 + n I_3, \quad (2)$$

где I_1 , I_2 и I_3 обозначают инварианты тензора деформаций \mathbf{E} , λ и μ — модули упругости Ламе, а l , m и n называют модулями Мурнагана [10]. Уравнения движения (баланса импульса) при отсутствии объёмных сил принимают вид

$$\rho \ddot{\vec{U}} = \text{div } \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = (\mathbf{I} + \text{grad } \vec{U}) \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{E}}. \quad (3)$$

где \mathbf{P} и \mathbf{S} — тензоры напряжений (первый и второй тензоры Пиолы–

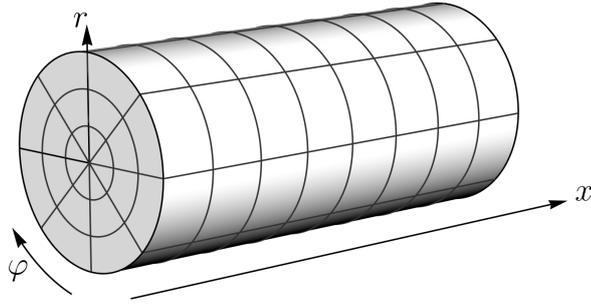


Рис. 1: Схема стержня круглого сечения.

Кирхгофа), ρ — плотность недеформированного материала, а \mathbf{I} — единичный тензор. Эти уравнения должны быть дополнены граничными условиями: заданным перемещением или силой на поверхности тела.

В работе проведена строгая асимптотическая процедура упрощения полных трёхмерных уравнений движения (3) с условием свободной границы для стержня круглого сечения (рис. 1), при этом в задаче выделено два малых параметра: амплитуда волн (ε) и отношение поперечного размера волновода — радиуса стержня — к характерной длине волны (δ). Показано, что трёхмерная постановка задачи асимптотически сводится к классическому волновому уравнению с нелинейной поправкой порядка ε и дисперсионными поправками порядка δ^2 . Такое уравнение относится к классу уравнений типа Буссинеска и в размерной форме имеет вид:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u + \beta u^2) + R^2 \left(\frac{\alpha_1}{c^4} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\alpha_2}{c^2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \alpha_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = 0, \quad (4)$$

где $u = \partial U_x / \partial x \big|_{r=0}$ — линейная компонента продольной деформации на оси стержня, $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость бесконечно малых продольных волн в бесконечно тонком стержне, $\beta = 3/2 + (l(1 - 2\nu)^3 + 2m(1 + \nu)^2(1 - 2\nu) + 3n\nu^2)/E$ — нелинейный коэффициент, $\alpha_1 = (5 - 5\nu - 6\nu^2 + 4\nu^3)/8(1 - \nu)$, $\alpha_2 = (-7 + 7\nu + 2\nu^2)/8(1 - \nu)$ и $\alpha_3 = 1/4$ — дисперсионные коэффициенты, R — радиус стержня, E — модуль Юнга, а ν — коэффициент Пуассона.

Уравнение (4) выведено впервые, однако различные другие уравнения того же типа, описывающие нелинейные продольные волны в упругих стержнях, ранее уже были получены в литературе [5, 11]. Они совпадают с уравнением (4) в нелинейной части (имеют одинаковый коэффициент β), но обладают разными дисперсионными слагаемыми.

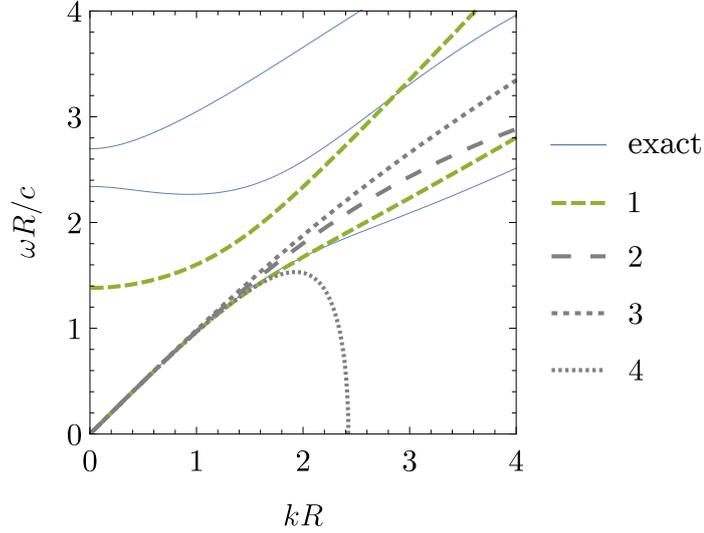


Рис. 2: Нормированные дисперсионные кривые длинных волн в упругом стержне с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.34$. Сплошная линия — точная дисперсионная картина в линейном стержне, пунктирные линии — линейаризованные уравнения типа Бусинеска: 1 — уравнение (4), полученное в данной работе, 2, 3 и 4 — уравнения известные из литературы [5, 11].

Более ранние модели либо опирались на упрощающие предположения о том, что сечение стержня остаётся плоским и деформируется равномерно, либо обладали нежелательным свойством — коротковолновой неустойчивостью (неограниченным ростом высоких гармоник), что затрудняло их численный расчёт. Уравнение (4) отмеченными недостатками не обладает и имеет наиболее точные среди уравнений типа Бусинеска дисперсионные характеристики (рис. 2) [12]. Верный учёт дисперсии важен для описания солитонов, поскольку их существование обусловлено балансом нелинейности и дисперсии.

Уравнение (4) обладает следующим семейством солитонных решений:

$$u(x, t) = A \cosh^{-2}\left(\frac{x \pm vt}{\Lambda}\right), \quad (5)$$

$$v = c\sqrt{1 + \frac{2A\beta}{3}}, \quad \Lambda = 2R\sqrt{-\frac{\alpha_1(v/c)^4 + \alpha_2(v/c)^2 + \alpha_3}{(v/c)^2 - 1}}, \quad (6)$$

где A является свободным параметром семейства и определяет амплитуду солитона, величина Λ определяет ширину солитона, а сам солитон имеет колоколообразный вид с экспоненциально убывающими хвостами. При малых амплитудах деформации (для которых и строилась модель) скорость

и ширина солитона (5) с точностью до слагаемых более высокого порядка малости равны скорости и длине солитона Кортевега–де Фриза:

$$v \approx v_{\text{KdV}} = c \left(1 + \frac{A\beta}{3} \right), \quad \Lambda \approx \Lambda_{\text{KdV}} = \frac{R|\nu|}{\sqrt{v_{\text{KdV}}/c - 1}}, \quad \text{при } |A| \ll 1, \quad (7)$$

где учтено, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\nu^2/2$. Это следует из известного в теории нелинейных волн факта о том, что длинные волны малой амплитуды, являющиеся решением уравнения типа Буссинеска (4), асимптотически описываются уравнением Кортевега–де Фриза (КдФ):

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + (1 + \beta u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu^2 R^2}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (8)$$

На рис. 3 представлено сравнение параметров солитонов в рамках нелинейных волновых моделей типа Буссинеска (4), КдФ (8) и в рамках расчёта полных трёхмерных уравнений (3) с условием свободной границы. При достаточно малых амплитудах обе модели одинаково хорошо соответствуют точной зависимости скорости и полуширины солитона от его амплитуды, полученной в трёхмерном расчёте. Однако с увеличением амплитуды эти модели показывают заметное расхождение с трёхмерными уравнениями, что говорит о влиянии неучтённых в уравнениях типа Буссинеска и КдФ эффектов. Этим эффектам посвящён следующий раздел.

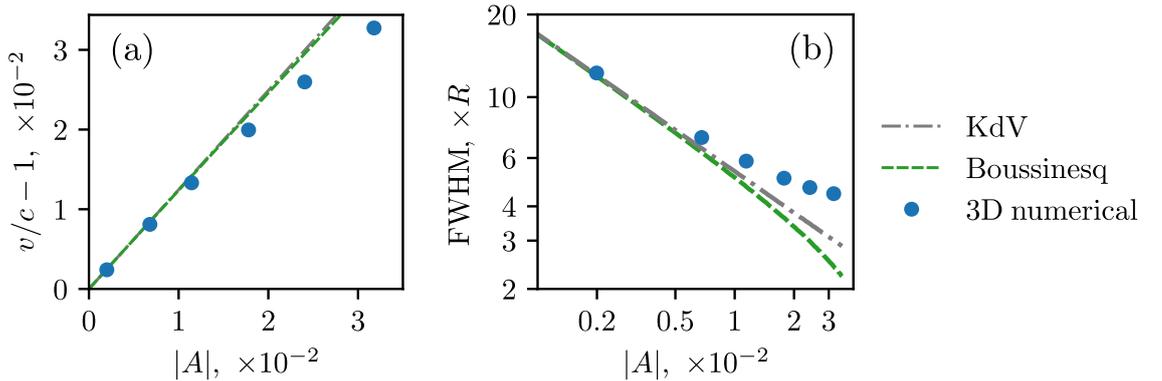


Рис. 3: Зависимости нормированной скорости (а) и ширины на половине высоты (б) от амплитуды солитонов в полистироловом стержне радиуса R в рамках моделей Кортевега-де Фриза, Буссинеска и полных трёхмерных уравнений. Полуширина приведена в единицах R .

Длинные волны средней амплитуды

Данный раздел обобщает описанную ранее теорию на случай волн средних амплитуд деформаций, при которых существенными оказываются эффекты более высокого порядка малости. Во многих материалах модули упругости четвёртого порядка заметно превышают по абсолютному значению модули третьего порядка, а те в свою очередь заметно больше модулей второго порядка [13]. Особенно велико отличие модулей разных порядков в наноструктурированных материалах: нелинейно-упругие свойства в результате добавления в материал наночастиц могут претерпевать на несколько порядков более существенные изменения, чем линейные [14, 15]. В таких материалах деформации средней амплитуды могут иметь относительно небольшую (не превышающую порог упругости) величину.

Нелинейно-упругие эффекты следующего порядка в изотропном материале учитываются расширенным по сравнению с формулой (2) выражением плотности потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1^2 - 2\mu I_2 + \frac{l + 2m}{3} I_1^3 - 2m I_1 I_2 + n I_3 \\ + \nu_1 I_1^4 + \nu_2 I_1^2 I_2 + \nu_3 I_1 I_3 + \nu_4 I_2^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где ν_1 , ν_2 , ν_3 и ν_4 — модули упругости Мурнагана четвёртого порядка, которые следует отличать от коэффициента Пуассона, обозначаемого буквой ν без каких-либо индексов. Систематический учёт эффектов следующего порядка требует учёт и более высокой дисперсии в силу баланса нелинейности и дисперсии. Асимптотический анализ приводит к расширенному уравнению КдФ, включающему ряд дополнительных слагаемых: кубическое $\partial(u^3)/\partial x$, несколько квадратичных и пятую производную $\partial^5 u/\partial x^5$. Для нахождения асимптотических решений этого уравнения применяют почти тождественные (near-identity) преобразования, позволяющие свести его к обычному уравнению КдФ [16]. Однако во многих материалах модули упругости следующего порядка существенно превышают модули предыдущего порядка, поэтому коэффициент при кубическом слагаемом часто оказывается большим по сравнению с остальными коэффициентами в расширенном КдФ. Для получения модели, пригодной для описания волн деформации в

максимальном диапазоне амплитуд, почти тождественные преобразования в данной работе были модифицированы таким образом, чтобы они сохраняли кубическое слагаемое. Получаемое в результате уравнение называется уравнением Гарднера:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \left(1 + \beta u + \frac{3}{2} \gamma_{\text{ni}} u^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu^2 R^2}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (10)$$

в котором кубический коэффициент γ_{ni} является комбинацией отношений модулей упругости третьего порядка l, m, n к модулю Юнга E , квадратов этих отношений и отношений модулей четвёртого порядка $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ к модулю Юнга:

$$\gamma_{\text{ni}} = \gamma - \frac{(1 + 2\nu)\beta}{9} + \frac{(7 - 65\nu^2 + 57\nu^4)\beta^2}{81\nu^2(1 - \nu^2)} - \frac{4\beta}{9\nu} \left(\frac{\beta}{9} + \beta_2 \right), \quad (11)$$

$$\gamma = -\frac{5}{2} + 2\beta - \frac{4\beta_2^2}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{4}{E} (\nu_1(1 - 2\nu)^4 - \nu_2(2 - \nu)\nu(1 - 2\nu)^2 + \nu_3(1 - 2\nu)\nu^2 + \nu_4(2 - \nu)^2\nu^2), \quad (12)$$

где $\beta_2 = (l(1 - 2\nu)^2 + 2m\nu(1 + \nu) - n\nu)(1 + \nu)(1 - 2\nu)/E$ — вспомогательный коэффициент, имеющий схожую с β структуру (вид β приведён в пояснении к уравнению (4)). Несмотря на громоздкий вид, выражения (11) и (12) показывают, что типичная для многих материалов ситуация $|\nu_1|, |\nu_2|, |\nu_3|, |\nu_4| \gg |l|, |m|, |n| \gg E$ почти наверняка приводит к $|\gamma_{\text{ni}}| \gg |\beta|$.

Уравнение Гарднера (10) обладает следующим семейством солитонных решений:

$$u(x, t) = \frac{A}{B + (1 - B) \cosh\left(\frac{x - v_G t}{\Lambda_G/2}\right)}, \quad (13)$$

$$v_G = c \left(1 + \frac{A\beta}{3} + \frac{A^2 \gamma_{\text{ni}}}{4} \right) = v_{\text{KdV}} + \frac{cA^2 \gamma_{\text{ni}}}{4}, \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{v_{\text{KdV}} - c}{v_G - c}, \quad \Lambda_G = \frac{R|\nu|}{\sqrt{v_G/c - 1}}, \quad (15)$$

где A является свободным параметром. При достаточно малых амплитудах $|A| \ll |\beta/\gamma_{\text{ni}}|$ такой солитон эквивалентен солитону КдФ, определяемого формулами (5) и (7), но при амплитудах $|A| \sim |\beta/\gamma_{\text{ni}}|$, называемых в данной работе средними, принимает вид либо узкого солитона в случае

$\gamma_{ni} > 0$, либо широкого солитона в случае $\gamma_{ni} < 0$. Последний известен также как солитон с плоским верхом (table-top soliton) или флатон (flaton), а его отличительной особенностью является наличие критической амплитуды $|2\beta/3\gamma_{ni}|$, превышать которую широкий солитон не может. Оба случая проиллюстрированы на рис. 4 на примере двух модельных материалов, у которых модули упругости второго и третьего порядков совпадают с модулями полистирола [17], а модули четвёртого порядка подобраны так, чтобы при амплитуде деформации 2% отчётливо выделялись случаи широкого и узкого солитонов.

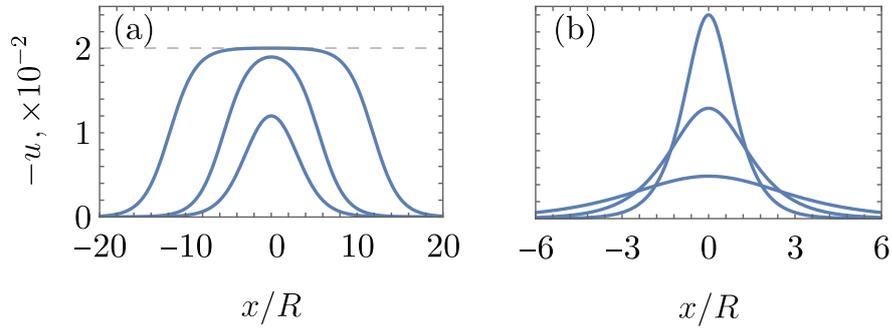


Рис. 4: Солитоны Гарднера (13). Панель (a) — случай широкого солитона ($\gamma_{ni} < 0$) при различных амплитудных параметрах A . Панель (b) — то же, что и (a) в случае узкого солитона ($\gamma_{ni} > 0$). Пунктир на панели (a) — предельная амплитуда широкого солитона.

Для проверки применимости асимптотической модели (10) было проведено трёхмерное моделирование полных уравнений движения (3) с начальным условием, построенным на основе солитона Гарднера (13). Для численного моделирования применялся многодоменный псевдоспектральный метод [20, 21], программная реализация которого выполнена автором самостоятельно. На рисунке 5(a) показаны результаты расчёта в случае широкого солитона, а на рисунке 5(b) — в случае узкого. Несмотря на преобразования, которые претерпевает начальный солитон в трёхмерном расчёте, свойства итогового солитона аналогичны свойствам солитона Гарднера (13).

На рисунке 6 показаны зависимости скорости и полуширины солитонов от их амплитуды, где оранжевой линией показаны зависимости, соответствующие солитону Гарднера (13). Для сравнения изображена кривая, соответствующая модели, предложенной в [18] — солитон Гарднера с

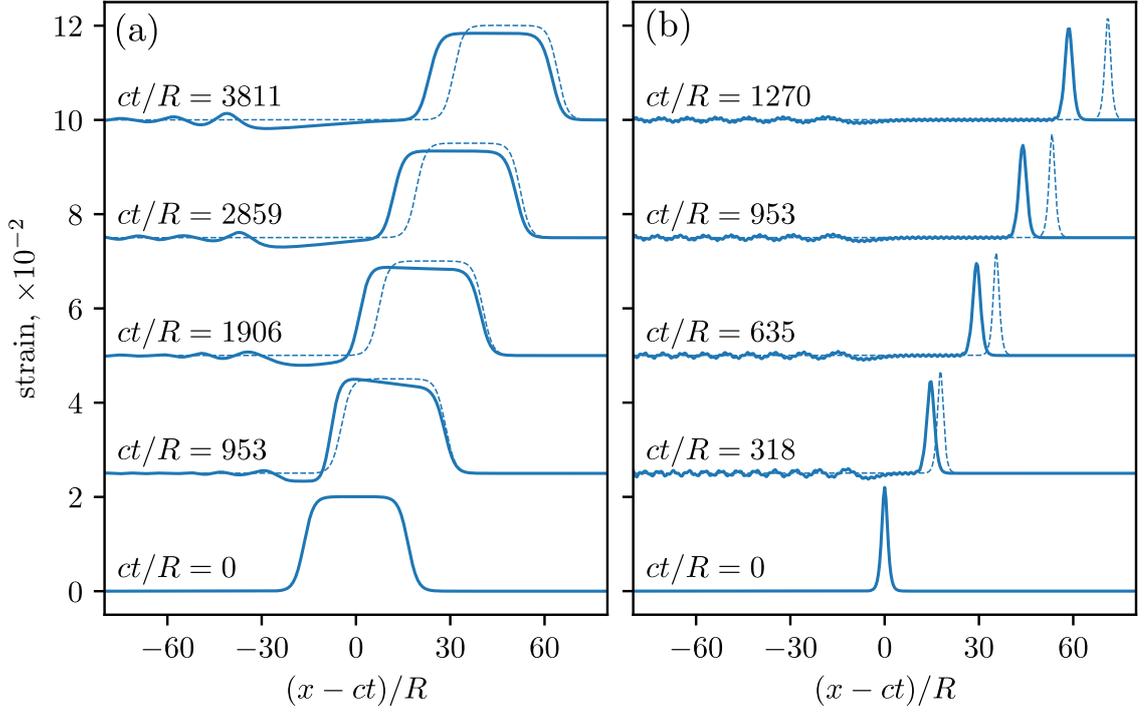


Рис. 5: Сравнение трёхмерных расчётов с уравнением Гарднера. Сплошная линия — отрицательная линейная продольная деформация на оси стержня $-\frac{\partial}{\partial x}U(x, r, t)|_{r=0}$ в разные моменты времени. Координата и время приведены в единицах R и R/c соответственно. Применён вертикальный сдвиг на 2.5 для разделения профилей в разные моменты времени. Панель (a) — случай широкого солитона, пунктиром показан солитон Гарднера, распространяющийся согласно формуле (13) без изменения формы и скорости. Панель (b) — то же, что и на панели (a) в случае узкого солитона.

кубическим коэффициентом γ (формула (12)) вместо γ_{ni} (формула (11)), однако такая модель не является строго асимптотической. На рисунке видно, что модель с коэффициентом γ_{ni} лучше всего количественно описывает значения, полученные при численном моделировании полных трёхмерных уравнений, причём как по скорости, так и по ширине солитона.

Полученные в данном разделе результаты позволяют объяснить видимые на рис. 3 отклонения зависимостей скорости и полуширины солитона от его амплитуды от точных зависимостей. Результаты трёхмерного расчёта на этом рисунке получены для полистирола, у которого модули упругости второго и третьего порядков приведены в работе [17], а модули четвёртого порядка равны нулю. Несмотря на это, кубический коэффициент в уравнении Гарднера $\gamma_{\text{ni}} = -31$ оказался достаточно большим по сравнению с $\beta = -3.7$ и соответствует случаю широкого солитона. Зависимости ско-

рости и полуширины от амплитуды солитона для полистирола с малыми (равными нулю) модулями четвёртого порядка показаны на рис. 7.

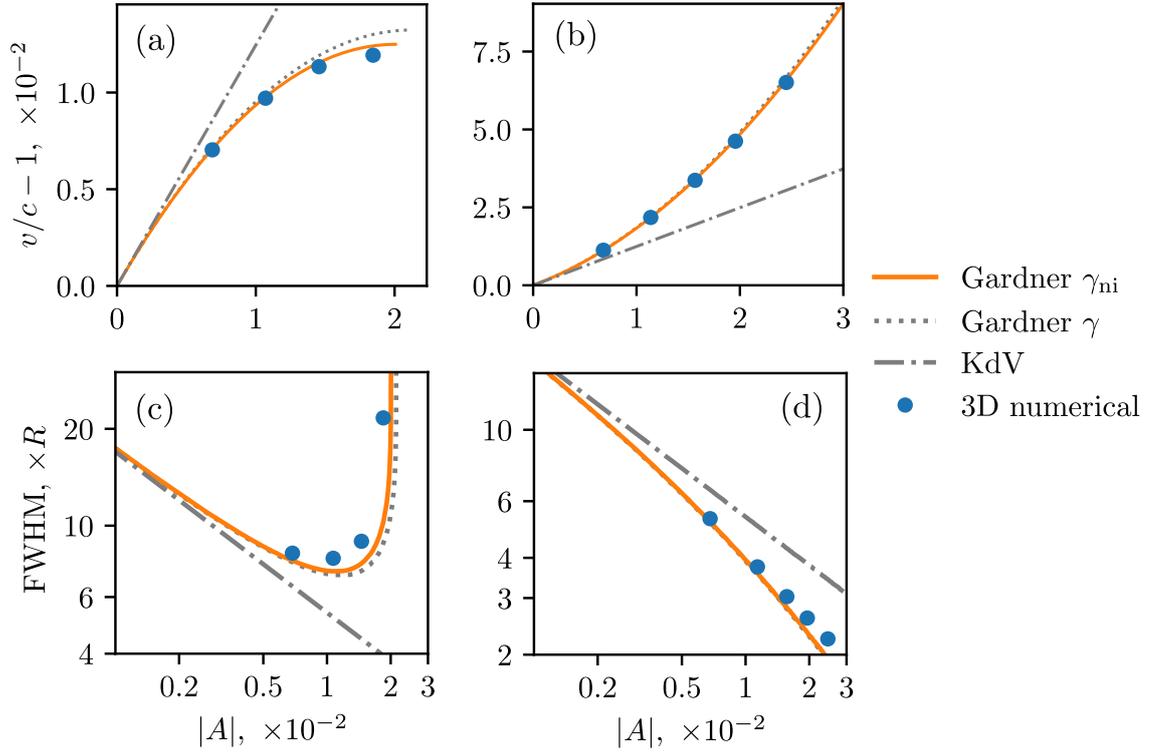


Рис. 6: Зависимости скорости солитонов и ширины на половине высоты от их амплитуды. Панели (a) и (c) — случай широкого солитона. Панели (b) и (d) — случай узкого солитона. Легенда: оранжевая линия — солитон Гарднера (13), точечная линия — солитон Гардрена с кубическим коэффициентом γ вместо γ_{ni} , штрих-пунктир — солитон КдФ (5), (7).

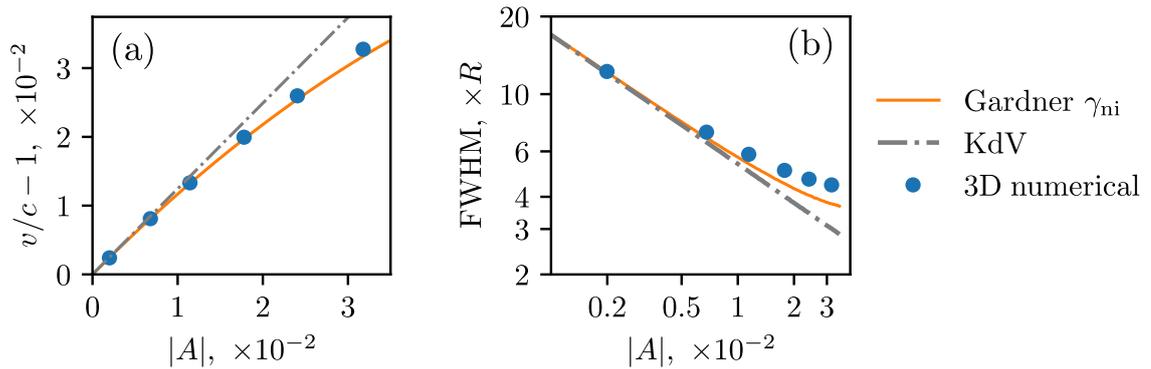


Рис. 7: То же, что и на рис. 6 при нулевом значении модулей четвёртого порядка: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0$.

Одновременное распространение длинных и коротких ВОЛН

В данном разделе рассмотрена задача о распространении как длинных, так и коротких продольных волн в стержне. При моделировании волн деформации в упругих волноводах обычно применяют длинноволновое приближение, поскольку иначе волновод не сможет канализировать их в одном направлении. В то же время короткие волны, возникнув в стержне, в силу нелинейности могут взаимодействовать с длинными, поэтому имеет смысл построить упрощённую (пространственно одномерную) модель, применимую как для длинных, так и для коротких волн. Отказ от длинноволнового приближения не позволяет построить строго асимптотическую одномерную модель из полных уравнений движения (3). Однако в данном разделе показано, что применение простого предположения о плоских равномерно деформируемых сечениях волновода позволяет получить упрощённую нелинейную модель, описывающую все основные предельные случаи для продольных волн: Р-волны со скоростью $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ в пределе бесконечно малых деформаций и коротких волн, стержневые волны со скоростью $c = \sqrt{E/\rho}$ в пределе бесконечно малых деформаций и длинных волн, а также длинные солитоны в случае конечных деформаций. Описанная модель представляет собой систему двух уравнений относительно продольного (осевого) перемещения точек поперечного сечения стержня $U(x, t)$ и величины равномерной деформации сечения $w(x, t)$:

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\lambda \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f_{\text{nl}}}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{2}{R_*^2} \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial x} + 2(\lambda + \mu)w + g_{\text{nl}} \right), \quad (17)$$

где R_* — радиус инерции поперечного сечения стержня, а нелинейные слагаемые, обозначенные f_{nl} и g_{nl} имеют следующий вид:

$$f_{\text{nl}} = (\lambda + 4l - 2m + n)w^2 + 2(\lambda + 2l) \frac{\partial U}{\partial x} w + \left(\frac{3}{2}(\lambda + 2\mu) + l + 2m \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{R_*^2}{2} (\lambda + 2\mu + m) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
g_{nl} = & (3\lambda + 3\mu + 4l + 2m)w^2 + (\lambda + 4l - 2m + n)\frac{\partial U}{\partial x}w + \frac{\lambda + 2l}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \\
& - \frac{R_*^2}{2}\left[(\lambda + 2\mu + m)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\lambda + \mu + m - \frac{n}{4}\right)\left(2w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)\right]
\end{aligned} \tag{19}$$

Данная модель обладает упрощённым законом дисперсии по сравнению с полной трёхмерной моделью, однако дисперсия преимущественно продольных волн (жирные линии на рис. 8) согласуется с дисперсией данной модели.

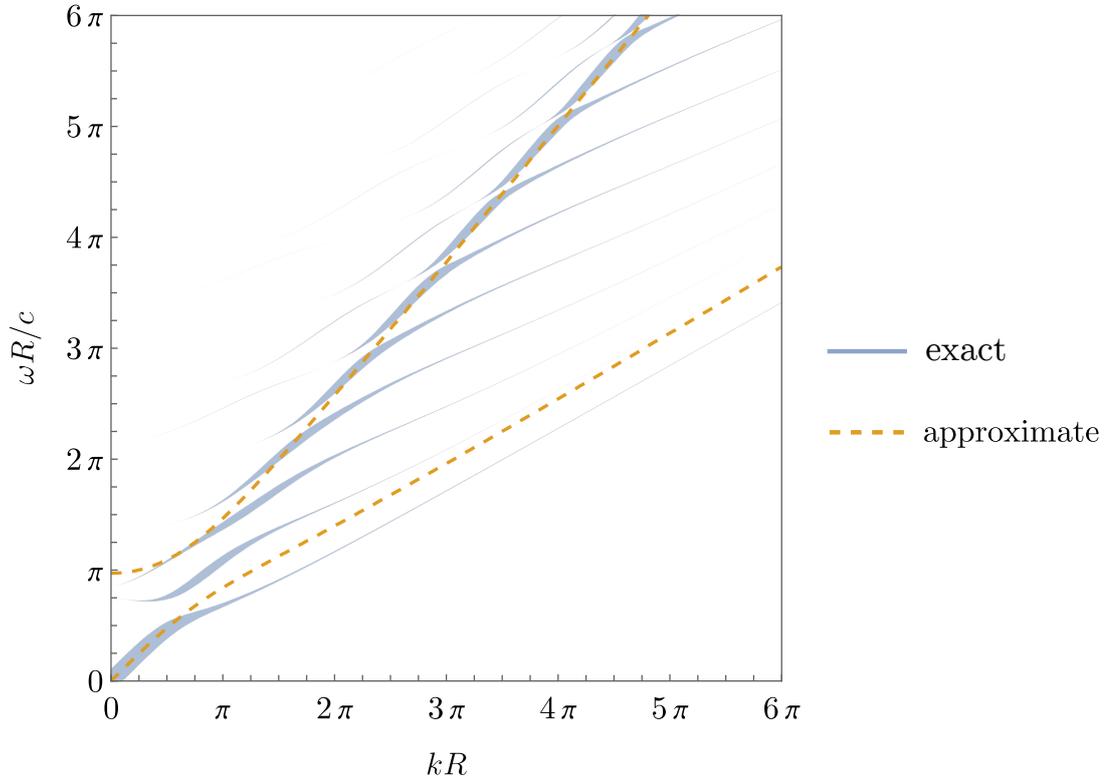


Рис. 8: Нормированная дисперсия линеаризованной приближённой модели (16) и (17) в стержне с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.34$ в сравнении с точной дисперсией в линейной задаче, где толщина линий характеризует степень продольности волны.

В нелинейном длинноволновом режиме система (16) и (17) сводится к уравнению типа Буссинеска, обладающим солитонным решением:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \left(1 + 2\beta \frac{\partial U}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\
& + \frac{R_*^2}{4(c_p^2 - c_s^2)} \left(\frac{\partial^4 U}{\partial t^4} - (c_p^2 + c_s^2) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2} + c_p^2 c_s^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{20}$$

где нелинейный коэффициент β такой же, как и в ранее обсуждавшихся моделях (см. пояснение к уравнению (4)).

Представленные в данном разделе результаты важны, в частности, для моделирования зарождения солитонов деформации, поскольку в экспериментальных исследованиях именно из короткой волны возникает длинная уединённая волна деформации [5]. Однако, поскольку для моделирования этого процесса необходимо дополнительно учесть вязкоупругие свойства волновода, то более детально этой задаче уделено место в следующем разделе.

Формирование уединённой волны в вязкоупругом стержне

Данный раздел посвящён обобщению теории нелинейных волн в упругих стержнях на случай вязкоупругого материала, поскольку известно, что многие нелинейно-упругие материалы, например полимеры, демонстрируют существенные вязкоупругие свойства. Вязкоупругость предполагает запаздывающую связь напряжения с деформацией материала, что приводит к диссипации механической энергии волн, а также к частотной зависимости упругих характеристик материалов.

Для моделирования диссипационных (неравновесных) процессов в термодинамике часто применяется подход, в рамках которого текущее состояние системы определяется набором внутренних или скрытых переменных состояния, каждая из которых подчиняется некоторому эволюционному уравнению. Одним из наиболее общих и распространённых подходов к моделированию вязкоупругости является обобщённая модель Максвелла, называемая также обобщённым стандартным линейным телом. Эту модель как правило иллюстрируют для случая одномерных деформаций с помощью системы демпферов и пружин, изображённой на рис. 9. В рамках этой модели напряжение σ предполагается линейной комбинацией деформации ε и внутренних переменных (внутренних деформаций) ε_s , каждая из которых подчиняется релаксационному процессу с характерным временем τ_s :

$$\sigma(t) = k_0\varepsilon(t) + \sum_s k_s\varepsilon_s(t), \quad (21)$$

$$\dot{\varepsilon}_s + \frac{\varepsilon_s}{\tau_s} = \dot{\varepsilon}. \quad (22)$$

В таком представлении время релаксации элемента с номером s , состоящего из пружины и демпфера равно отношению вязкости демпфера к упругому модулю пружины: $\tau_s = \eta_s/k_s$. Важно отметить, что эволюционные уравнения (22) легко интегрируются, что позволяет в явном виде выразить запаздывающую связь напряжения с деформацией [19]:

$$\sigma(t) = k_0\varepsilon(t) + \sum_s k_s \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t_1}{\tau_s}} \varepsilon(t_1) dt_1. \quad (23)$$

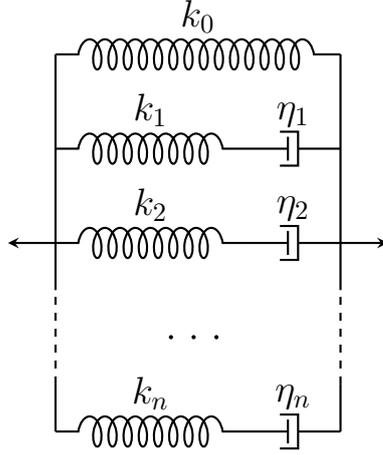


Рис. 9: Схема обобщённого стандартного линейного тела (обобщённой модели Максвелла).

В данной работе проведено моделирование процесса зарождения солитона деформации в изотропном нелинейно-упругом и линейно-вязком стержне в результате воздействия ударной волны на его торец. Для построения определяющего соотношения материала стержня необходимо скомбинировать модель нелинейной упругости с вышеописанной моделью вязкоупругости:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \hat{\lambda} \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{E} + 2\hat{\mu} \mathbf{E} \\ &+ l \mathbf{I} (\operatorname{tr} \mathbf{E})^2 + 2m (\mathbf{E} \operatorname{tr} \mathbf{E} - \mathbf{I} I_2) + n (\mathbf{I} I_2 - \mathbf{E} \operatorname{tr} \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}), \end{aligned} \quad (24)$$

где \mathbf{S} — второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа (см. уравнения (3)), $I_2 = ((\operatorname{tr} \mathbf{E})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{E}^2)/2$ — второй инвариант тензора деформаций \mathbf{E} , а $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ — запаздывающие интегральные операторы, действующие на произвольную функцию f следующим образом:

$$\hat{\lambda} f(t) = \lambda_0 f(t) + \sum_s \lambda_s \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t_1}{\tau_s}} \dot{f}(t_1) dt_1, \quad (25)$$

$$\hat{\mu} f(t) = \mu_0 f(t) + \sum_s \mu_s \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t-t_1}{\tau_s}} \dot{f}(t_1) dt_1, \quad (26)$$

где λ_0 и μ_0 — квазистатические упругие модули Ламе, а λ_s и μ_s — вязкоупругие модули, соответствующие релаксационным процессам со време-

нем τ_s . Применение такой модели, как следует из самой формулы, разумно, если нелинейные эффекты, величина которых определяется модулями l , m , n , и вязкие диссипационные эффекты, определяемые модулями λ_s и μ_s , $s \geq 1$, вносят сопоставимый вклад в тензор напряжений.

Для моделирования зарождения солитона применялось два подхода: первый — трёхмерное моделирование полных уравнений движения (3) с учётом соотношения (24), а второй — на основе упрощённой модели (16), (17), где умножение на константные модули Ламе λ и μ заменено на действие приведённых выше операторов $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$. Для моделирования применялся многодоменный псевдоспектральный метод [20, 21], реализованный автором самостоятельно.

Для сопоставления результатов моделирования с экспериментальными данными были определены реалистичные параметры полистирола, а также граничное условие, моделирующее падающую ударную волну на торец стержня. Оказалось, что нелинейные эффекты не оказывают заметного влияния на моделируемый процесс (начальный этап формирования солитона), поэтому демонстрируемые далее результаты моделирования получены в рамках линеаризованных моделей.

Сравнение результатов моделирования с учётом вязкости и без неё в рамках упрощённых одномерных и полных трёхмерных уравнений показано на рис. 10. Как в трёхмерном, так и в одномерном случае наблюдается формирование лидирующей длинной волны из начальной короткой. Положение, амплитуда и ширина лидирующей волны во всех случаях примерно одинаковы, однако одномерная модель имеет небольшие колебания вблизи фронта основной волны, а также несколько иную форму хвоста позади основной волны. В рамках моделей без вязких эффектов лидирующая длинная волна оказывается похожей на ту, что получится при вязкоупругом моделировании, однако помимо неё имеется множество коротковолновых колебаний, затухающих в вязкоупругом случае. Вязкоупругие эффекты особенно важны для полного трёхмерного моделирования, результаты которого более подробно представлены на рис. 11: в абсолютно упругом случае формирование длинной волны почти полностью скрыто множеством коротких волн.

Сравнение профилей основной волны, полученной при трёхмерном мо-

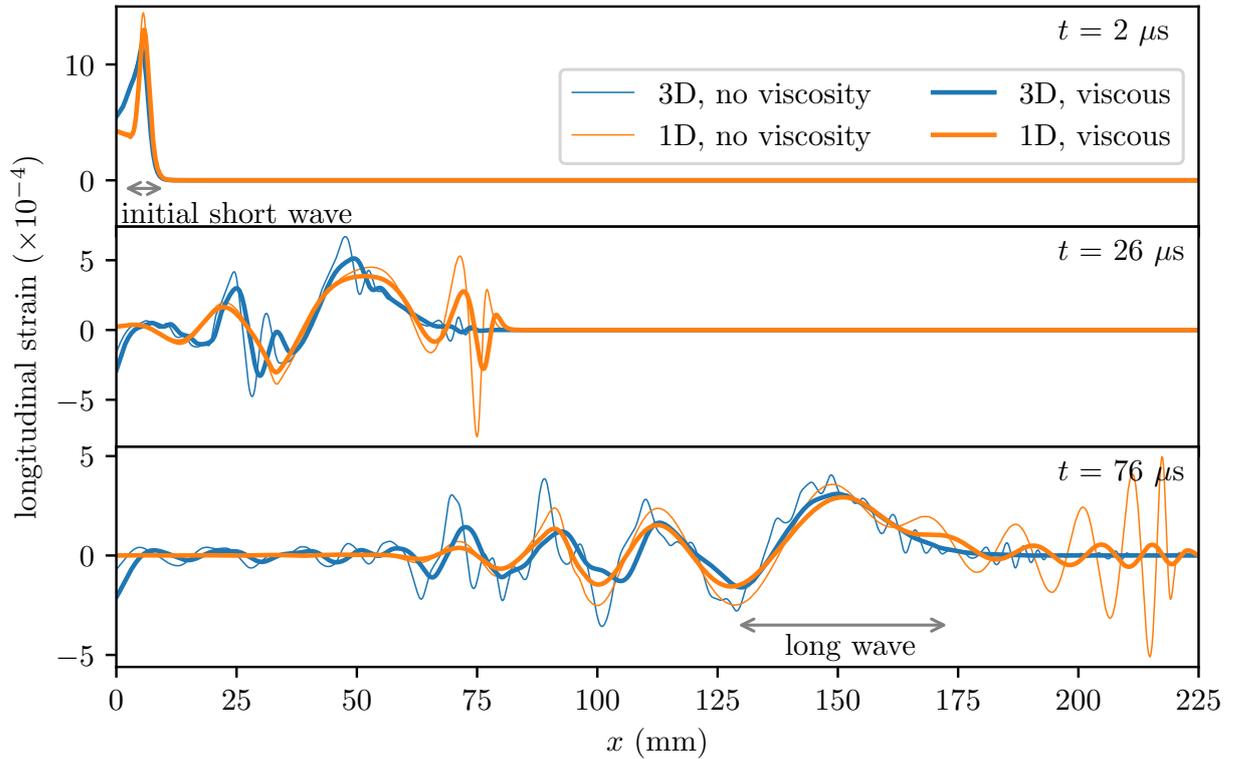


Рис. 10: Продольная деформация, усредненная по поперечному сечению, как функция координаты x вдоль стержня. Сравнение полной трехмерной модели и упрощенной одномерной модели с вязкостью и без.

делировании, с экспериментальными данными показано на рис. 12. Видно, что форма этой волны, наблюдаемая в разные моменты времени в эксперименте, адекватно воспроизводится при численном моделировании. Таким образом, трёхмерная численная модель учитывает все необходимые свойства упругого волновода, ответственные за формирование лидирующей длинной волны деформации. Поскольку трёхмерную модель можно свести к простой одномерной модели без существенной потери точности, можно сделать вывод, что именно дисперсия продольных волн в волноводе, а также вязкоупругие свойства материала приводят к образованию длинной волны. Дисперсионные эффекты заключаются в отражении распространяющейся упругой волны от боковой поверхности и концентрации энергии внутри волновода, а вязкоупругие эффекты подавляют коротковолновые колебания, сохраняя лишь длинные волны. Дальнейшее распространение длинной волны можно описать с точки зрения динамики солитонов, обсуждавшейся в предыдущих разделах.

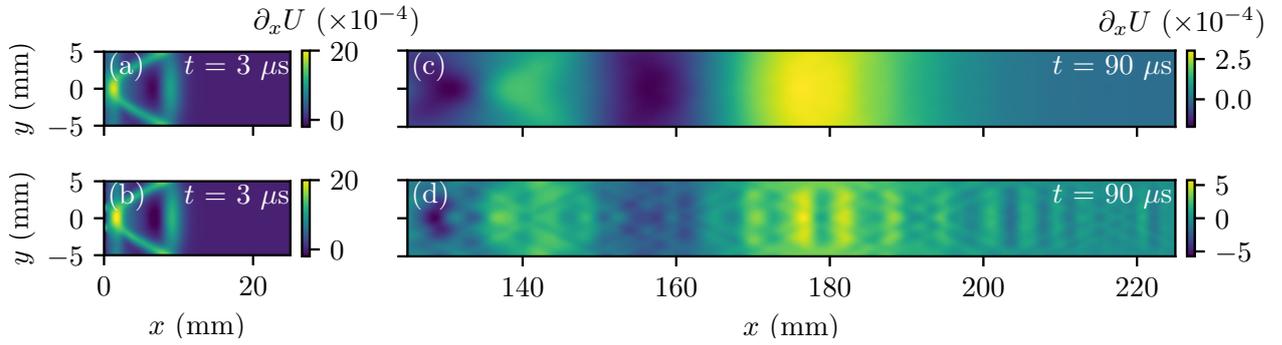


Рис. 11: Результаты трёхмерного численного моделирования стержня в рамках обобщённой модели Максвелла (панели a и c) и без вязкости (панели b и d). На рисунках изображена линейная компонента продольной деформации как функция координат x и y при $z = 0$ (срез вдоль оси стержня) на раннем и позднем моменте времени.

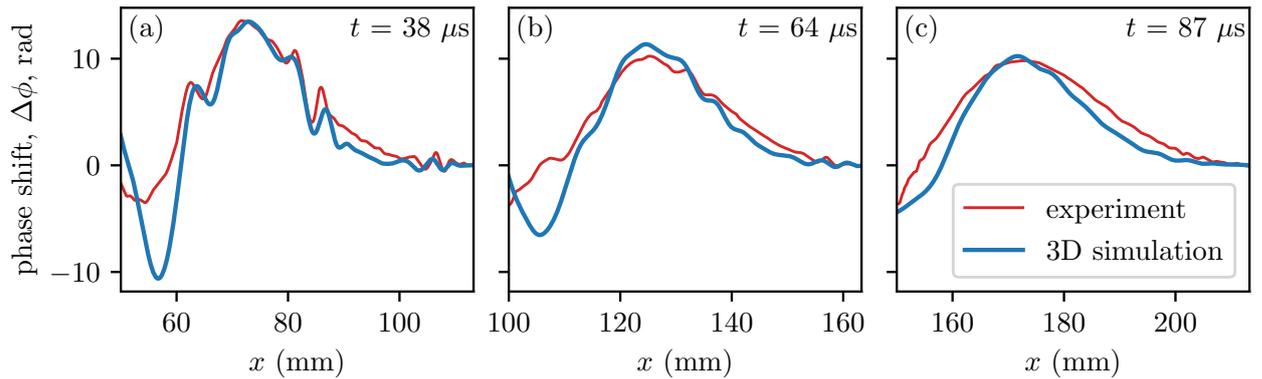


Рис. 12: Сравнение экспериментально полученных профилей волны деформации в полистироловом стержне с результатами трёхмерного численного моделирования в три разных момента времени.

Заключение

1. Проведён систематический асимптотический анализ уравнений нелинейной теории упругости (уравнений баланса импульса и граничных условий) в приближении длинных продольных волн и малых деформаций в упругом стержне круглого сечения. В результате получено скорректированное уравнение типа Буссинеска, обладающее наилучшими дисперсионными свойствами среди известных из литературы уравнений того же типа. Дальнейший асимптотический анализ позволяет свести его к известному уравнению Кортевега–де Фриза (КдФ).

2. С увеличением амплитуды деформации приобретают значимость эффекты следующего порядка малости, учитываемые в расширенном уравнении КдФ. При этом показано, что, если модули упругости третьего и четвёртого порядков существенно превышают модуль Юнга (что типично для многих материалов), то ключевые свойства нелинейных волн и солитонов описываются уравнением Гарднера. Как следствие, в зависимости от соотношения между модулями упругости солитоны деформации в режиме средних амплитуд могут приобретать вид либо узких, либо широких солитонов, также известных как флатоны. Справедливость асимптотических моделей подтверждена результатами расчётов полных трёхмерных уравнений.

3. С помощью гипотезы плоских и равномерно деформируемых сечений получена одномерная модель, не являющаяся асимптотической, но применимая для качественного моделирования как длинных, так и коротких продольных волн в стержнях с произвольной формой поперечного сечения.

4. Проведено моделирование зарождения длинной солитоноподобной волны в нелинейно-упругом и линейно-вязком стержне. Установлено, что быстрое формирование длинной волны в результате приложения короткого давления к торцу стержня, наблюдавшееся в экспериментах, происходит благодаря линейным эффектам: дисперсии и вязкоупругой диссипации, а нелинейные эффекты должны проявляться на существенно более поздних этапах эволюции волны.

Список литературы

- [1] Lissenden C. J. [Nonlinear ultrasonic guided waves — Principles for non-destructive evaluation](#) // J. Appl. Phys. — 2021. — Vol. 129, no. 2. — P. 021101.
- [2] Maev R. G. [Applications of non-linear acoustics for quality control and material characterization](#) / Maev R. G. and Seviaryn F. // J. Appl. Phys. — 2022. — Vol. 132, no. 16. — P. 161101.
- [3] van Capel P. J. S. [Nonlinear ultrafast acoustics at the nano scale](#) / van Capel P. J. S., Péronne E., and Dijkhuis J. I. // Ultrasonics. — 2015. — Vol. 56. — P. 36–51.
- [4] [Acoustic solitons: A robust tool to investigate the generation and detection of ultrafast acoustic waves](#) / Péronne E., Chuecos N., Thevenard L., and Perrin B. // Phys. Rev. B. — 2017. — Vol. 95. — P. 064306.
- [5] Samsonov A. M. [Strain solitons in solids and how to construct them.](#) — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001.
- [6] Porubov A. V. [Amplification of nonlinear strain waves in solids.](#) — Singapore: World Scientific, 2003.
- [7] Khusnutdinova K. R. [Fission of a longitudinal strain solitary wave in a delaminated bar](#) / Khusnutdinova K. R. and Samsonov A. M. // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 77, no. 6. — P. 1–11.
- [8] [Detecting delamination via nonlinear wave scattering in a bonded elastic bar](#) / Tamber J. S., Chappell D. J., Poore J. C., and Tranter M. R. // Nonlinear Dyn. — 2023. — Vol. 112. — P. 23–33.
- [9] Samsonov A. M. [Do the bulk solitary strain waves decay?](#) / Samsonov A. M., Dreiden G. V., and Semenova I. V. // Proc. Inst. Mech. Eng. C: J. Mech. Eng. Sci. — 2008. — Vol. 222, no. 10. — P. 1975–1980.
- [10] Murnaghan F. D. Finite deformation of an elastic solid. — New York: John Wiley & Sons, 1951.

- [11] Ostrovskii L. A. [Nonlinear elastic waves in rods](#) / Ostrovskii L. A. and Sutin A. M. // J. Appl. Math. Mech. — 1977. — Vol. 41. — P. 543–549.
- [12] Boström A. [On wave equations for elastic rods](#) // Z. Angew. Math. Mech. — 2000. — Vol. 80. — P. 245–251.
- [13] Hiki Y. [Higher order elastic constants of solids](#) // Ann. Rev. Mater. Sci. — 1981. — Vol. 11, no. 1. — P. 51–73.
- [14] Semenov A. [Nonlinear elastic moduli of composite materials with nonlinear spherical inclusions dispersed in a nonlinear matrix](#) / Semenov A. and Beltukov Y. // Int. J. Solids Struct. — 2020. — Vol. 191-192. — P. 333–340.
- [15] [Relative variations of nonlinear elastic moduli in polystyrene-based nanocomposites](#) / Belashov A. V., Beltukov Y. M., Moskalyuk O. A., and Semenova I. V. // Polymer Testing. — 2021. — Vol. 95. — P. 107132.
- [16] Fokas A. S. [Asymptotic integrability of water waves](#) / Fokas A. S. and Liu Q. M. // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77, no. 12. — P. 2347.
- [17] Hughes D. S. [Second-order elastic deformation of solids](#) / Hughes D. S. and Kelly J. L. // Phys. Rev. — 1953. — Vol. 92. — P. 1145–1149.
- [18] Porubov A. V. [Longitudinal strain solitary waves in presence of cubic non-linearity](#) / Porubov A. V. and Maugin G. A. // Int. J. Non-Linear Mech. — 2005. — Vol. 40, no. 7. — P. 1041–1048.
- [19] Truesdell C. [The non-linear field theories of mechanics](#) / Truesdell C. and Noll W. // The non-linear field theories of mechanics / ed. by Antman S. S. — Berlin: Springer, 2004.
- [20] Spectral methods: fundamentals in single domains / Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., and Zang T. A. — Springer, 2007.
- [21] Spectral methods: evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics / Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., and Zang T. A. — Springer, 2007.