Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук
Отделение физики плазмы, атомной физики и астрофизики
Сектор теоретической астрофизики

Краав Кирилл Юрьевич

Релятивистские r-моды в небаротропных нейтронных звездах

Научный доклад

Направление: 03.06.01 – Физика и астрономия

Специальность: 1.3.1 – Физика космоса, астрономия

Санкт-Петербург

2024

Содержание

1 Введение

Нейтронные звезды являются наиболее компактными и плотными объектами во Вселенной. Так, типичная нейтронная звезда обладает массой $M \simeq 1.4\ M_\odot$ (где $M_\odot$ – масса Солнца) и радиусом $R \simeq 10$ km. Плотность вещества в центре нейтронных звезд может достигать $\rho \simeq 10^{14} \div 10^{15}$ g/cm^3, а температура вещества варьируется в пределах $10^6 \div 10^9$ K. Поскольку такая "холодная" сверхплотная ядерная материя на данный момент не может быть воспроизведена в земных лабораториях, ее изучение возможно только через изучение свойств нейтронных звезд. Часть надежд в изучении такого вещества возлагается на астросейсмологию. Подобно тому, как гелиосейсмология позволяет использовать электромагнитные наблюдения солнечных колебаний для изучения строения Солнца, астросейсмология может позволить в будущем использовать гравитационно-волновые и электромагнитные наблюдения колебаний нейтронных звезд для изучения их строения. Чтобы такое изучение было возможным, астросейсмология требует детального знания свойств колебаний нейтронных звезд.

Нейтронные звезды могут колебаться разными способами. Различные режимы (или, как говорят, "моды") колебаний нейтронных звезд можно классифицировать 1) по тому, какая сила для данного колебания является восстанавливающей, то есть играет определяющую роль для его динамики, и 2) по геометрии потоков вещества, соответствующей данному колебанию. В этой работе мы рассматриваем r-моды – квазитороидальные (т.е. с практически тороидальными потоками вещества) колебания вращающихся звезд, для которых роль восстанавливающей силы играет сила Кориолиса. Данные колебания наиболее сильно подвержены неустойчивости Чандрасекара-Фридмана-Шатца (CFS-неустойчивость), согласно которой излучение гравитационных волн возмущенной нейтронной звездой приводит к перекачке энергии вращения звезды в энергию колебания, что, в свою очередь, усиливает излучение гравитацонных волн [1—4]. Так, в отсутствии диссипации в звездном веществе r-моды оказываются CFS-неустойчивыми и гравитационно излучают при любой скорости вращения звезды [5, 6], что делает их одними из наиболее перспективных источников гравитационных волн для будущих [7, 8] и текущих [9—13] наблюдениий (см. также [14—22] и [23, 24] для обзора физики r-мод).

В случае, когда угловая скорость вращения звезды Ω много меньше кеплеровской $\Omega_{\rm K} = \sqrt{GM/R^3}$ (т.е. *звезда вращается медленно*), теоретические исследования r-мод, как правило, опираются на предположение, что собственные функции и собственные частоты r-мод могут быть разложены в ряд Тейлора по малому параметру $\Omega/\Omega_{\rm K}$. Тогда уравнения r-мод могут быть получены с использованием теории возмущений по $\Omega/\Omega_{\rm K}$ (далее – просто *теории возмущений*). В ньютоновской теории такой подход оказывается очень плодотворным (см. [23, 24] и ссылки в этих источниках). Он предсказывает, что частоты колебаний ньютоновских r-мод образуют *дискректный* спектр,

$$\sigma = \left[\frac{2m}{l(l+1)} - m\right]\Omega, \qquad l \in \mathbb{N}, \qquad |m| \le l, \tag{1}$$

где l и m – квантовые числа r-мод. Он также успешно позволяет рассчитать *дискретные* поправки высшего порядка по $\Omega/\Omega_{\rm K}$ к данному спектру и соответствующие собственные функции r-мод (т.е. возмущения скорости, давления, плотности и т.д.). Расчеты удается провести как в общей постановке задачи, так и в упрощенной, когда возмущениями гравитационного поля пренебрегается (*приближение Каулинга* [25]). При этом оказывается, что приближение Каулинга, которое существенно упрощает решаемую задачу, дает качественно правильное описание r-мод [26, 27], а связанная с этим приближением ошибка в определении поправок к спектру колебаний не превышает 8%. В общей теории относительности (ОТО), однако, такой традиционный подход, основанный на теории возмущений, приводит к достаточно противоречивым результатам, известным в литературе под названием *“проблема непрерывного спектра r-мод”*.

Для r-мод принципиальным отличием релятивистской теории от ньютоновской оказывается наличие эффекта увлечения инерциальных систем отсчета. Согласно ОТО, с точки зрения удаленного наблюдателя, локальные инерциальные системы отсчета в точке r увлекаются с угловой скоростью $\Omega\omega(r)$ вокруг вращающейся звезды (точка $r = 0$ соответствует центру нейтронной звезды). В результате релятивистская теория в ведущем порядке теории возмущений предсказывает, что частоты r-мод вместо того, чтобы принимать дискретные значения, как в ньютоновской теории, заполняют *непрерывную* полосу значений [28—34]

$$\frac{2m[1-\omega(0)]}{l(l+1)} - m \le \frac{\sigma}{\Omega} \le \frac{2m[1-\omega(R)]}{l(l+1)} - m, \qquad l \in \mathbb{N}, \quad |m| \le l. \tag{2}$$

Впервые на эту особенность спектра релятивистских r-мод указывается в работах Коджимы [28, 29] 1997-1998 года, в которых изучаются релятивистские линеаризованные уравнения колебаний. В этих работах показывается, что при использовании теории возмущений непрерывный спектр возникает как в общем случае, так и в приближении Каулинга.

Как показали дальнейшие исследования, в действительности возникновение непрерывного спектра при применении теории возмущений оказывается чувствительным к тому, является ли звездное вещество *баротропным* или *небаротропным*. Здесь и далее под баротропным веществом мы подразумеваем вещество, в котором давление и другие термодинамические величины являются функциями только одной переменной (например, барионной плотности). В противном случае вещество будем называть небаротропным. Вскоре после выхода работ Коджимы было показано [33, 35], что *в баротропных звездах теория возмущений не может быть применена для изучения r-мод*, поскольку она приводит к переопределенной системе уравнений (этот момент был упущен в работах Коджимы). Было показано, что *r-моды в баротропных звездах просто не существуют* и что релятивистским обобщением ньютоновских r-мод в баротропных звездах являются релятивисткие инерционные моды с *дискретным* спектром колебаний.

Для небаротропных звезд проблема непрерывного спектра сохраняется. В литературе доказывается [28—30], что причиной возникновения непрерывного спектра является тот факт, что полученные Коджимой уравнения r-мод представляют собой не регулярную, а сингулярную задачу на собственные значения. Также в общем случае было показано, что найти нетривиальное решение уравнений Коджимы возможно, только если собственная частота r-моды принимает значение в диапазоне

$$\frac{2m[1-\omega(0)]}{l(l+1)} - m \leq \frac{\sigma}{\Omega} \leq \frac{2m[1-\omega(\infty)]}{l(l+1)} - m. \tag{3}$$

Этот диапазон содержит полосу частот, которая становится доступной *только* при учете возмущений гравитационного поля и не ассоциируется с непрерывным спектром (2):

$$\frac{2m[1-\omega(R)]}{l(l+1)} - m \leq \frac{\sigma}{\Omega} \leq \frac{2m[1-\omega(\infty)]}{l(l+1)} - m. \tag{4}$$

В действительности [33] для частот в данном диапазоне задача является регулярной и допускает решения с дискретным спектром. Далее мы называем их *дискретными r-модами*. Дискретные r-моды были сразу же найдены [33] для модели звезды с постоянной плотностью и были предложены в качестве релятивистского обобщения ньютоновских r-мод. Примечательно, что, в отличие от ньютоновских r-мод, они возникают только в том случае, когда учитываются возмущения гравитационного поля. По этой причине авторы исследования [33] заключают, что дискретные релятивистские r-моды скорее всего не могут быть описаны в приближении Каулинга. Однако дальнейшее применение их идей к более реалистичному случаю медленно вращающихся релятивистских политропных звезд, выполненное Йошидой, показало [36], что существование дискретных r-мод зависит от значений политропного индекса и компактности звезды и что *скорее всего дискретные r-моды не существуют в типичных нейтронных звездах*. Йошида заключает, что, возможно, стоит искать решение с дискретными частотами, “спрятанными” за полосой непрерывного спектра.

Такие скрытые дискретные моды, далее называемые *изолированными r-модами*, действительно удалось обнаружить [34]. Оказалось, что они имеют расходящиеся возмущения скорости и поэтому не могут рассматриваться как физические. Авторы исследования [34] приходят к выводу, что физические r-моды следует искать вне диапазона (2), что, очевидно, противоречит точке зрения Йошиды [36], изложенной нами выше. В то же время в литературе обсуждается идея [37], что учет членов более высокого порядка по $\Omega/\Omega_{\mathrm{K}}$ в уравнениях колебаний релятивистских r-мод может регуляризовать задачу и что r-моды, расходящиеся в ведущем порядке теории возмущений, на самом деле могли бы стать конечными, если учесть такие члены. Определение точной формы этих членов является довольно сложной задачей, которая, насколько нам известно, до сих пор не была решена.

При обсуждении происхождения непрерывного спектра выдвигались предположения [30, 33, 36], что уравнения Коджимы, на изучении которых была сосредоточена большая часть усилий, в действительности не описывают динамику “подлинных” r-мод, поскольку они не учитывают гравитационное излучение и/или диссипативные механизмы, действующие в звездном веществе. Идея заключается в том, что эти эффекты могли бы привести к появлению мнимой части в собственных частотах колебаний, что могло бы регуляризовать уравнения. Согласно существующим исследованиям, учет гравитационного излучения не регуляризует задачу [38, 39]. В то же время регуляризация, основанная на включении в теорию сдвиговой вязкости, действительно работает [40, 41]. Непрерывный спектр регуляризуется, и по мере стремления коэффициента сдвиговой вязкости к нулю те звездные модели, которые ранее не допускали решений в виде r-мод, восстанавливают их. Однако следует отметить, что при такой регуляризации поправки, связанные с вращением, неявно считаются малыми по сравнению с вязкими членами. В действительности в нейтронных звездах ожидается ровно противоположная ситуация.

Все вышеупомянутые исследования опираются на применение теории возмущений по Ω/Ω_K. Мы не нашли никаких упоминаний в литературе о том, действительно ли полученные таким образом решения уравнений с приемлемой точностью удовлетворяют точным релятивистским уравнениям колебаний (линераизованным уравнениям Эйнштейна или линеаризованным уравнениям релятивистской гидродинамики, если речь о приближении Каулинга) при малых значениях Ω/Ω_K. Насколько мы понимаем, нет гарантии, что решения уравнений, полученных с использованием теории возмущений, в пределе медленного вращения соответствуют "реальным" релятивистским модам, являющимся решением общих уравнений колебаний. Кроме того, интересно отметить, что более "честные" расчеты, не опирающиеся на теорию возмущений, как в случае баротропных [42—45], так и небаротропных [46, 47] звезд, не выявляют никаких признаков непрерывной части спектра. Они успешно позволяют найти нормальные r-моды с дискретными собственными частотами, попадающими в полосу частот (2), ассоциирующуюся с непрерывным спектром. Этот результат кажется естественным для баротропного случая, поскольку, как уже упоминалось, в баротропных звездах релятивистским обобщением ньютоновских r-мод являются релятивистские дискретные инерционные моды. Однако для небаротропных звезд этот результат является неожиданным, поскольку он противоречит предсказаниям теории возмущений о наличии непрерывного спектра. Насколько нам известно, есть только две работы, посвященные численным расчетам r-мод в небаротропных звездах [46, 47]. Интересно отметить, что в этих работах дискретные r-моды находятся даже в приближении Каулинга, в котором проблема непрерывного спектра кажется особенно острой.

Таким образом, попытки рассчитать релятивистские r-моды в небаротропных звездах приводят ко множеству противоречивых результатов. Исследования, основанные на теории возмущений по Ω/Ω_K, не находят релятивистского обобщения ньютоновских r-мод с дискретным спектром.

Вместо дискретного спектра r-мод они предсказывают существование непрерывной полосы собственных частот (2), существование изолированных r-мод с дискретными частотами в пределах этой полосы и дискретных r-мод с собственными частотами, принимающими значения в диапазоне (4) за пределами этой полосы. Ни изолированные r-моды, ни дискретные r-моды не могут считаться истинным релятивистскимм обобщением ньютоновских r-мод: первые имеют расходящиеся возмущения скорости в ведущем порядке теории возмущений [34, 37], в то время как последние могут просто не существовать в условиях, характерных для вещества внутри нейтронных звезд [36]. Более того, в отличие от ньютоновских r-мод, они не могут быть найдены в приближении Каулинга. Вместе с этим численные исследования, не опирающиеся на теорию возмущений [42—46], воспроизводят дискретные r-моды, аналогичные ньютоновским. Более того, удается найти [46, 47] дискретные релятивистские r-моды даже в приближении Каулинга. Регуляризация спектра через вязкую диссипацию [40, 41] – интересный результат, который, однако, не позволяет объяснить, что происходит в бездиссипативном случае.

В настоящее время не существует единого мнения, является ли наличие непрерывного спектра физическим явлением или это результат используемых предположений и упрощений. Однако тот факт, что численные расчеты, не опирающиеся на теорию возмущений, не выявляют непрерывного спектра, подсказывает, что именно ее применение и приводит к возникновению непрерывного спектра. В главе 2 данной работы мы разрабатываем альтернативный подход к изучению r-мод в приближении Каулинга. Он позволяет выявить ряд ранее незамеченных интересных свойств релятивистских r-мод и получить общие уравнения r-мод, являющиеся релятивистским аналогом ньютоновских уравнений. Новый подход также помогает нам прояснить иллюзорную природу непрерывного спектра и причины краха теории возмущений. В главе 3 приведены результаты численных расчетов r-мод. В главе 4 мы подводим итоги проведенных исследований.

2 Теория релятивистских r-мод в небаротропных звездах

2.1 Релятивистские уравнения колебаний

На протяжении всей работы мы пишем уравнения в безразмерной форме, если не оговорено обратное. Это означает, что все величины в уравнениях являются обезразмеренными. Для этого масса измеряется в единицах звездной массы M, расстояние – в единицах звездного радиуса R, а время – в единицах $\Omega_{\rm K}^{-1}$, где $\Omega_{\rm K} \equiv \sqrt{GM/R^3}$ представляет собой величину порядка кеплеровской частоты, а G – гравитационная постоянная.

Мы рассматриваем нейтронную звезду как идеальную вырожденную жидкую смесь различных нормальных (т.е. не находящихся в сверхтекучем/сверхпроводящем состоянии) сортов частиц. Для простоты мы также не будем учитывать магнитное поле, поскольку ожидается, что его влияние на динамику r-мод слабое [48, 49]. В сделанных предположениях давление p, плотность энергии ε, плотность энтальпии $w = p + \varepsilon$ и химические потенциалы μ_k различных сортов частиц могут рассматриваться как функции только концентраций различных сортов частиц n_k (здесь и далее мы используем латинские индексы, чтобы обозначить принадлежность той или иной физической величины к тому или иному сорту частиц). Вводя 4-скорость $\mathfrak{u}^\mu$ макроскопических потоков в веществе и метрический тензор $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$, описывающий искривленное гравитацией пространство-время, мы можем записать тензор энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ рассматриваемого вещества и 4-векторы $j^\mu_{(k)}$ плотности потока различных сортов частиц в виде (здесь и далее мы используем греческие буквы для обозначения компонент тензоров)

$$T^{\mu\nu} = w\,\mathfrak{u}^\mu\mathfrak{u}^\nu + p\,\mathfrak{g}^{\mu\nu}, \qquad j^\mu_{(k)} = n_k\mathfrak{u}^\mu. \tag{5}$$

Все термодинамические величины измеряются в сопутствующей системе отсчета: $\mathfrak{u}_\mu j^\mu_{(k)} = -n_k$ и $\mathfrak{u}_\mu\mathfrak{u}_\nu T^{\mu\nu} = \varepsilon$ (здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся греческим индексам).

Гидродинамическое равновесие нейтронной звезды, медленно вращающейся с угловой скоростью Ω, в сферических координатах $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$ описывается метрическим тензором $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ следующего вида [50]

$$ds^2 = \mathrm{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + \\ + r^2 \{ d\theta^2 + \sin^2\theta [d\varphi^2 - 2\Omega\omega(r) dt\, d\varphi] \} + O(\Omega^2), \quad (6)$$

а соответствующая равновесная 4-скорость равна

$$u^\mu \approx e^{-\nu} (\delta_t^\mu + \Omega/c\, \delta_\varphi^\mu) + O(\Omega^2). \quad (7)$$

Здесь $\nu(r)$ и $\lambda(r)$ – известные метрические функции, которые находятся из уравнений Толмана-Оппенгеймера-Волкова. Функция $\omega(r)$ описывает эффект увлечения инерциальных систем отсчета, который мы упоминали во введении: с точки зрения удаленного наблюдателя, инерциальные системы отсчета в точке r вращаются вокруг звезды с угловой скоростью $\Omega\omega(r)$. Функция $\omega(r)$ также известна и находится из уравнения, полученного Хартлом [50].

В дальнейшем мы будем пренебрегать возмущениями гравитационного поля (приближение Каулинга). В этом приближении метрический тензор, описывающий колеблющуюся нейтронную звезду, совпадает с равновесным (6). В сделанных приближениях малые колебания нейтронной звезды описываются следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \delta[w \mathfrak{u}^\rho \nabla_\rho \mathfrak{u}^\mu + (\mathfrak{g}^{\mu\rho} + \mathfrak{u}^\mu \mathfrak{u}^\rho) \nabla_\rho p] = 0 \\ \delta[\nabla_\mu (n_k \mathfrak{u}^\mu)] = 0 \\ d\varepsilon = \mu_k dn_k,\ dp = n_k d\mu_k,\ w = \mu_k n_k \\ p = p(n_k) \end{cases}, \quad (8)$$

где ∇_μ – ковариантная производная, ассоциированная с метрикой (6), а $\delta f = f - f_0$ – эйлерово возмущение величины f, описывающее малое ее отклонение от соответствующего равновесного значения f_0. Здесь и далее мы подразумеваем суммирование по повторяющимся латинским индексам.

Первое уравнение в системе (8) – линеаризованное уравнение Эйлера, $(\delta^\rho_\nu + \mathfrak{u}^\rho \mathfrak{u}_\nu)\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, второе – линеаризованные уравнения непрерывности для разных сортов частиц, $\nabla_\mu j^\mu_{(k)} = 0$. Оставшиеся уравнения представляют собой стандартные термодинамические соотношения для вырожденного вещества, а также уравнение состояния звездного вещества. В данной работе мы будем рассматривать случай *небаротропного* вещества. По определению в таком веществе термодинамические функции принципиально не могут быть параметризованы единственной величиной (например, барионной плотностью) и являются функциями нескольких переменных (в нашем случае – концентраций различных сортов частиц).

В дальнейшем нам будет удобно оперировать лагранжевым смещением ξ^μ, которое описывает вариацию мировых линий жидких элементов в результате возмущения и связано (в приближении Каулинга) с возмущением 4-скорости следующим равенством (см., например, [4]):

$$\delta \mathfrak{u}^\mu = (\delta^\mu_\rho + u^\mu u_\rho)(u^\lambda \partial_\lambda \xi^\rho - \xi^\lambda \partial_\lambda u^\rho). \tag{9}$$

Пользуясь калибровочной свободой $\xi^\rho \rightarrow \xi^\rho + f u^\rho$ в определении (9), где f – произвольная функция, мы потребуем, чтобы лагранжево смещение удовлетворяло дополнительному условию $u_\mu \xi^\mu = 0$.

2.2 Новый подход к изучению r-мод

В ньютоновской теории, как известно, при медленном вращении звезды частота r-мод σ пропорциональна Ω, а потоки вещества квазитороидальны. Последнее означает, что лагранжево смещение с хорошей точностью описывается формулой $\boldsymbol{\xi} \propto [\boldsymbol{\nabla} \times r\boldsymbol{\nabla}]T$, где T – некоторая функция, которую иногда называют *тороидальной функцией*. В случае небаротропного вещества показывается, что при медленном вращении угловая зависимость тороидальной функции описывается одним полиномом Лежандра $T \propto P_l^m(\cos\theta)$, а соответствующая частота r-моды определяется равенством (1).

По аналогии с ньютоновской теорией, в ОТО мы также будем искать решение уравнений релятивистской гидродинамики (8) с квазитороидальными потоками и частотой $\sigma \propto \Omega$:

$$\sigma = \Omega[\sigma^{(0)} + \sigma^{(1)}], \tag{10}$$

$$\xi^{\mu} = \xi^{(0)\mu} + \xi^{(1)\mu}, \quad \xi^{(0)\mu} = \frac{1}{r\sin\theta}\big[\delta^{\mu}_{\theta}\partial_{\varphi} - \delta^{\mu}_{\varphi}\partial_{\theta}\big]T. \tag{11}$$

Здесь по определению $f^{(1)} \ll f^{(0)}$ для любой величины f. Функцию T, введенную равенством (11), мы, как и в ньютоновской теории, будем называть тороидальной функцией. Можно показать, что в том случае, когда $\sigma \propto \Omega$, частота вращения Ω входит в уравнения колебаний (8) только в четных степенях. По этой причине кажется разумным предположить, что малые поправки $f^{(1)} \propto \Omega^2$, однако именно такой подход и приводит к проблеме непрерывного спектра, которую мы описали во введении.

В данной работе мы будем действовать иначе. Чтобы упростить анализ уравнений, мы предположим, что эффект увлечения инерциальных систем отсчета, с которым связана проблема непрерывного спектра, является слабым: $\omega(r) = \epsilon\tilde{\omega}(r)$, где $\epsilon \ll 1$. Также для простоты мы не будем учитывать сплюснутость звезды в результате вращения, то есть будем пренебрегать слагаемыми $O(\Omega^2)$ в уравнениях (6) и (7). При этом в разложении (10) мы будем полагать, что слагаемые $f^{(0)}$ соответствуют пределу $\epsilon \to 0$ и $\Omega^2/\epsilon \to 0$ (т.е. мы учитываем увлечение инерциальных систем отсчета при произвольно медленных скоростях вращения), в то время как слагаемые $f^{(1)}$ будем считать малыми из-за малости ϵ или малости Ω^2 (или малости обоих этих параметров). При этом мы явно не постулируем вид зависимости $f^{(1)}$ от ϵ и Ω – он будет установлен в ходе анализа уравнений.

Чтобы вывести уравнения r-мод мы действуем следующим образом [51]:

1) Пользуясь термодинамическими соотношениями и уравнениями непрерывности, исключаем возмущения скалярных величин (давления, плотности энтальпии и концентрации частиц) из системы (8)

2) Затем мы подставляем разложение (10) в полученную таким образом систему и в пределе $\epsilon \to 0$ и $\Omega^2/\epsilon \to 0$ находим частоту $\sigma^{(0)}$ и угловую зависимость тороидальной функции (которые, заметим, совпадают с ньютоновскими):

$$\sigma^{(0)} = \frac{2m}{l(l+1)} - m, \quad T = -iT_l(r)P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{12}$$

3) Упрощаем систему, полученную в пункте 1), используя уравнения (12). При этом мы пренебрегаем малыми членами, пользуясь следующим правилом: если в данном уравнении есть слагаемое f, то в этом (и только в этом) уравнении мы будем пренебрегать слагаемыми ϵf и $\Omega^2 f$.

Анализ полученных по такой схеме уравнений показывает [51], что радиальное смещение ξ^r имеет вид

$$\xi^r = [\xi^r_{l-1}(r)P^m_{l-1}(\cos\theta) + \xi^r_{l+1}(r)P^m_{l+1}(\cos\theta)]e^{im\varphi}, \tag{13}$$

и что задача сводится к решению замкнутой системы уравнений на T_l и $\xi^r_{l\pm1}$. В случае $l = m$, описывающем наиболее CFS-неустойчивую r-моду, данная система формально может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \left[C_1(r)\dfrac{d}{dr} + C_2(r)\right]\xi^r_{l+1} + \\ \qquad + \left[\Omega^2 C_3(r) + \sigma^{(1)} + \dfrac{2\epsilon\tilde{\omega}(r)}{l+1}\right]T_l = 0 \; . \\ \left[\dfrac{d}{dr} + G_1(r)\right]T_l + \dfrac{G_2(r)}{\Omega^2}\xi^r_{l+1} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Коэффиценты $C_{1,2,3}(r)$ и $G_{1,2}(r)$ являются функциями r, не зависящимии от скорости вращения Ω и увлечения инерциальных систем отсчета $\epsilon\tilde{\omega}(r)$. Их явный вид можно найти в [51]. При этом хочется отметить, что в ньютоновском пределе полученные уравнения переходят в хорошо известные уравнения ньютоновских r-мод в приближении Каулинга. Этот факт указывает, что в сделанных предположениях система (14) по-видимому описывает искомое релятивистское обобщение ньютоновских r-мод.

Вблизи центра решение системы (14) должно выходить на соответствующую регулярную асимптотику $T_l(r) \propto r^l$ [51]. Также на поверхности звезды ($r = 1$) полное давление должно обращаться в ноль, что в нашем случае эквивалентно выполнению условия [51]

$$\xi^r_{l+1}(1) = -\frac{4\Omega^2 l e^{-2\nu(1)}}{c^2(l+1)^2(2l+1)\nu'(1)} T_l(1), \tag{15}$$

где штрих означает производную по r. Данные граничные условия, так же как и уравнения (14), переходят в ньютоновские аналоги в ньютоновском пределе.

Решение системы (14) с граничными условиями, указанными выше, представляет собой задачу на собственные функции и собственные значения. Те значения $\sigma^{(1)}$, для которых всем граничным условиям удается удовлетворить одновременно, образуют спектр релятивистских r-мод. Соответствующие решения уравнений можно различать по числу узлов (нулей) тороидальной функции T_l внутри звезды.

2.3 R-моды в пределе $\Omega \to 0$

Рассмотрим полученные уравнения r-мод в пределе $\Omega \to 0$. Если мы предположим, что $\xi^r_{l+1} \propto \Omega^2$, как в ньютоновской теории, то, как легко видеть, система (14) в при $\Omega \to 0$ приводит к непрерывному спектру частот. Действительно, в этом случае первое уравнение системы принимает вид

$$\left[\sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon\tilde{\omega}(r)}{l+1}\right] T_l(r) = 0. \tag{16}$$

Решение этого уравнения имеет вид резонанса

$$\sigma^{(1)} = -\frac{2\epsilon\tilde{\omega}(r^*)}{l+1}, \qquad T_l \sim \delta(r - r^*), \tag{17}$$

где точка резонанса $r^* \in [0, R]$ может принимать любое положение внутри звезды. Поскольку функция $\omega(r)$ монотонно убывает с ростом r [50], мы приходим к выводу, что частоты r-мод в сделанных предположениях заполняют непрерывную полосу (2).

Однако, как мы увидим далее, численное решение системы (14) не выявляет никаких признаков непрерывного спектра и позволяет найти регулярные собственные функции r-мод и соответствующие *дискретные* поправки $\sigma^{(1)}$. Это означает, что ее решение не удовлетворяет условию $\xi^r_{l+1} \propto \Omega^2$. Чтобы понять как оно может быть устроено, заметим, что в пределе $\Omega \to 0$ ведущий вклад в поправку $\sigma^{(1)}$ к частоте определяется эффектом увлечения инерциальных систем отсчета (вклад, связанный с вращением, становится пренебрежимо малым). Поскольку поправка $\sigma^{(1)}$ и функция $\tilde{\omega}(r)$ входят в уравнения только в комбинации $[\sigma^{(1)} + 2\epsilon\tilde{\omega}(r)/(l+1)]$, мы заключаем, что в рассматриваемом пределе поправка $\sigma^{(1)} \sim \epsilon$ является величиной порядка ϵ. Далее предположим, что в пределе $\Omega \to 0$ ведущие вклады в собственные функции r-мод ведут себя следующим образом:

$$\sigma^{(1)} = \epsilon\sigma^{(10)}, \qquad \xi^r_{l+1} \sim \epsilon^{k_1}\Omega^{k_2}T_l, \qquad \frac{d}{dr} \sim \epsilon^{d_1}\Omega^{d_2}, \tag{18}$$

где $\sigma^{(10)} \sim 1$. Последнее условие в (18) означает, что оператор d/dr при действии на собственные функции приводит к возникновению множителя $\epsilon^{d_1}\Omega^{d_2}$. Как будет показано ниже, значения $d_{1,2} \neq 0$ возможны, когда собственные функции неаналитичны по ϵ и Ω.

В сделанных предположениях некоторые слагаемые в системе (14) могут оказаться малыми по сравнению с другими. Поскольку уравнения должны позволять найти поправку $\sigma^{(1)}$, слагаемые $\sigma^{(10)}$ и $\tilde{\omega}(r)$ должны быть одного порядка хотя бы с одним остальных членов в первом уравнении, в то время как остальным слагаемым в этом уравнении позволяется быть пренебрежимо малыми. Во втором уравнении системы (14) хотя бы два слагаемых должны быть одного порядка и не меньше остающегося слагаемого – в противном случае мы приходим к тривиальному решению системы. Анализ уравнений показывает, что данным условиям удается удовлетворить, только когда $k_1 = d_1 = 1/2$ и $k_2 = -d_2 = 1$. Таким образом, в пределе $\Omega \to 0$ имеем

$$\xi^r_{l+1} \sim \epsilon\kappa T_l, \qquad \frac{d}{dr} \sim \frac{1}{\kappa}, \quad \text{где} \quad \kappa \equiv \frac{\Omega}{\sqrt{\epsilon}}. \tag{19}$$

Теперь, используя (19), мы можем выкинуть малые слагаемые в системе (14) и после некотрых преобразований привести ее к следующему виду

$$\begin{cases} \kappa^2 \dfrac{d^2}{dr^2} T_l - q_\sigma(r) T_l = 0 \\ \xi^r_{l+1} = -\dfrac{\Omega^2}{G_2(r)} \dfrac{d}{dr} T_l, \end{cases} \qquad q_\sigma(r) = \frac{G_2(r)}{C_1(r)} \left[\sigma^{(10)} + \frac{2\tilde{\omega}(r)}{l+1} \right]. \qquad (20)$$

Вблизи центра звезды $0 \leq r \leq r_c$ часть выкинутых слагаемых в действительности не являются малыми и, следовательно, решение уравнений (20) не удовлетворяет уравнениям (14) [значение r_c может быть найдено из уравнений (14) и стремится к нулю при $\kappa \to 0$]. Из уравнений (14) и асимптотики $T_l \propto r^l$ следует, что вблизи центра $\xi^r_{l+1} \sim \epsilon\kappa^2 T_l$. Ведущий вклад в радиальное смещение $\xi^r_{l+1} \sim \epsilon\kappa T_l$, очевидно, не может удовлетворить этому условию и, следовательно, должен стремиться к нулю при приближении к r_c. Аналогично можно показать, что ведущий вклад в радиальное смещение должен обращаться в ноль на поверхности звезды. В результате нам необходимо найти решение системы (20), удовлетворяющее граничным условиям $\xi^r_{l+1}(r_c) = \xi^r_{l+1}(1) = 0$. При этом отметим, что, чтобы удовлетворить "правильным" граничным условиям, которые мы обсуждали после (14), необходимо учитывать поправки более высокого порядка к радиальному смещению.

Рассмотрим сначала простейшую "тестовую" модель, в которой функция $q_\sigma(r) = \text{const}$. В этом случае мы сразу же находим решение в виде $T_l \propto e^{\pm\sqrt{q_\sigma} r/\kappa}$ для $q_\sigma > 0$ и $T_l \propto \sin(\sqrt{|q_\sigma|} r/\kappa + \phi)$ для $q_\sigma < 0$. Мы видим, что данное решение является наеалитичной функцией κ, которая под действием оператора d/dr производит множитель $1/\kappa$. Такое поведение – наглядная иллюстрация того, что мы понимаем под записью $d/dr \sim 1/\kappa$ в (19).

В действительности функция $q_\sigma(r)$ зависит от r и может обладать точками поворота, в которых она меняет знак. Из явного вида функций $G_2(r)$ и $C_1(r)$ следует, что отношение $G_2(r)/C_1(r) > 0$. При этом функция $\tilde{\omega}(r)$ в общем случае является монотонно убывающей функцией r [50]. Поэтому точка поворота r_t, если существует, является единственной и связана с частотой r-моды равенством

$$(l+1)\sigma^{(10)} + 2\tilde{\omega}(r_t) = 0. \tag{21}$$

Опираясь на тестовую модель, мы ожидаем экспоненциальное поведение тороидальной функции при $r_c < r < r_t$ и осцилляции при $r_t < r < 1$. Собственные функции r-мод тогда можно классифицировать по числу узлов n тороидальной функции T_l (что мы уже упоминали ранее). При этом, поскольку скорость осцилляций возрастает с уменьшением κ, точка поворота любой собственной функции с фиксированным числом узлов n будет стремиться к поверхности $r_{t,n} \to 1$ при $\kappa \to 0$. Следовательно, при $\kappa \to 0$ частоты r-мод стремятся к значению

$$\sigma_n^{(10)} \to -\frac{2\tilde{\omega}(1)}{l+1}. \tag{22}$$

Чтобы найти приближенное решение уравнений (20) в пределе $\kappa \to 0$, мы используем ВКБ-метод. Вдали от точки поворота, где $q_\sigma(r)$ существенно отличается от нуля (область I при $r_c < r < r_t$ и область III при $r_t < r < 1$), мы ищем решение в виде $T_l(r) = e^{h(\kappa,r)/\kappa}$, где $h(\kappa, r)$ – некоторая аналитичная функция κ. Вблизи точки поворота (область II) мы используем разложением Тейлора $q_\sigma(r) \approx \alpha^2(r_t - r)$ и вводим новую переменную $z = (r_t - r)(\alpha/\kappa)^{2/3}$, после чего уравнение второго порядка (20) сводится к уравнению Эйри. В переходных областях, где функция $q_\sigma(r)$ существенно отличается от нуля, но ее разложение в ряд Тейлора все еще хорошо работает, решения в областях I и III должны с хорошей точностью совпадать с решением, найденным в области II. Данное условие в совокупности с граничным условием $\xi^r_{l+1}(r_c) = 0$ позволяет найти собственые функции r-мод (Ai – функция Эйри первого рода):

$$T_{l,\mathrm{I}}(r) = \frac{A_{\mathrm{I}}}{q_\sigma^{1/4}} \cosh\left[\frac{1}{\kappa}\int\limits_{r_c}^{r} \sqrt{q_\sigma} dr\right], \quad T_{l,\mathrm{II}} = A_{\mathrm{II}}\mathrm{Ai}(z),$$
$$T_{l,\mathrm{III}}(r) = \frac{A_{\mathrm{III}}}{|q_\sigma|^{1/4}} \sin\left[\frac{1}{\kappa}\int\limits_{r_t}^{r} \sqrt{|q_\sigma|} dr + \frac{\pi}{4}\right]. \tag{23}$$

Далее, требуя выполнения оставшегося граничного условия $\xi^r_{l+1}(1) = 0$, мы приходим к условию квантования

$$\int\limits_{r_t}^{1} \sqrt{|q_\sigma|}\, dr = \pi\kappa\left(n + \frac{1}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{24}$$

которое вместе с уравнением (21) определяет *дискретный* спектр r-мод в пределе $\kappa \to 0$. Можно показать, что квантовое число n равно числу узлов тороидальной функции. Для тех значений κ, при которых точка поворота оказывается настолько близко к поверхности, что разложение Тейлора для $q_\sigma(r)$ работает вплоть до $r = 1$, можно получить следующие явные выражения для точки поворота и спектра r-мод:

$$\begin{gathered} r_{t,n} = 1 - \left[\frac{3}{2}\frac{\pi\kappa}{\alpha}\left(n + \frac{1}{4}\right)\right]^{2/3}, \\ \sigma_n^{(1)} = -\frac{2\epsilon\tilde{\omega}(1)}{l+1}\left\{1 - \frac{\tilde{\omega}'(1)}{\tilde{\omega}(1)}\left[\frac{3}{2}\frac{\pi\kappa}{\alpha}\left(n + \frac{1}{4}\right)\right]^{2/3}\right\}. \end{gathered} \tag{25}$$

Таким образом, разработанная теория предсказывает, что в пределе $\Omega \to 0$ (точнее $\kappa = \Omega/\sqrt{\epsilon} \to 0$) релятивистское обобщение ньютоновских r-мод описывается неаналитичными функциями Ω. Такие функции не могут быть разложены в ряд Тейлора по Ω и, следовательно, не могут быть описаны в рамках традиционного подхода, опирающегося на теорию возмущений по Ω. В то же время такие моды могут быть найдены и, по всей видимости, были найдены в численных расчетах, не опирающихся на теорию возмущений [46, 47]. При этом частоты неаналитичных r-мод образуют дискретный спектр и принимают значения внутри полосы (2), которая в литературе ассоциируется с непрерывным спектром.

В завершение данного раздела отметим, что все обнаруженные особенности релятивистских r-мод возникают из-за эффекта увлечения инерциальных систем отсчета. Действительно, если в системе (14) положить $\epsilon = 0$, мы мгновенно получаем, что $\xi^r_{l+1} \propto \Omega^2$ и $\sigma^{(1)} \propto \Omega^2$, как в стандартной теории возмущений. При этом скорость вращения исчезает из уравнений и неаналитичность не возникает.

3 Численные результаты

В данном разделе мы показываем результаты численных расчетов, проведенных для случая $l = m = 2$ (наиболе CFS-неустойчивые r-моды). В качестве модели нейтронной звезды мы используем звезду с массой $M = 1.4\,M_\odot$ и радиусом $R = 11.5\,\mathrm{km}$, описываемую уравнением состояния BSk24 [52]. Здесь мы хотим напомнить, что в наших обозначениях координата r измеряется в единицах радиуса R, а скорость вращения Ω измеряется в единицах величины $\Omega_\mathrm{K} \equiv \sqrt{GM/R^3} \approx 1.7\,\mathrm{kHz}$.

Рисунок 1 показывает результаты расчета тороидальной функции T_l в ОТО [“GR”, решаются уравнения (14)] и в ньютоновской теории (“Newt”). В верхнем левом углу показаны собственные функции без узлов (“0 nodes” – фундаментальная гармоника), в верхнем правом – с одним узлом (“1 node”), в нижнем левом – с двумя (“2 nodes”), и в нижнем правом – с тремя (“3 nodes”). Все собственые функции для удобства нормированы согласно условию $T_l(1) = 1$. Как видно из данного рисунка, при не слишком медленной скорости вращения $\Omega = 0.1$, собственные функции релятивистских r-мод похожи на собственные функции ньютоновских r-мод. Мы видим, однако, что, по мере уменьшения Ω, релятивистские r-моды склонны к локализации вблизи поверхности звезды. Данное поведение объясняется тем, что, как предсказывает теория в пределе $\Omega \to 0$, собственные функции экспоненциально подавлены слева от точки поворота r_t, которая стремится к поверхности при $\Omega \to 0$. В узкой области от точки поворота до поверхности звезды собственные функции отличны от нуля и быстро осциллируют. В качестве детальной иллюстрации подобного поведения, мы приводим Рисунок 2, на котором изображена тороидальная функция с 4мя узлами в ньютоновской теории (“Newt”) и в ОТО (“GR”) при скорости вращения $\Omega = 0.005\,\Omega_\mathrm{K}$. Значение точки поворота r_t на данном рисунке определено с помощью уравнения (21) с частотой $\sigma^{(1)}$, найденной из условия квантования (24).

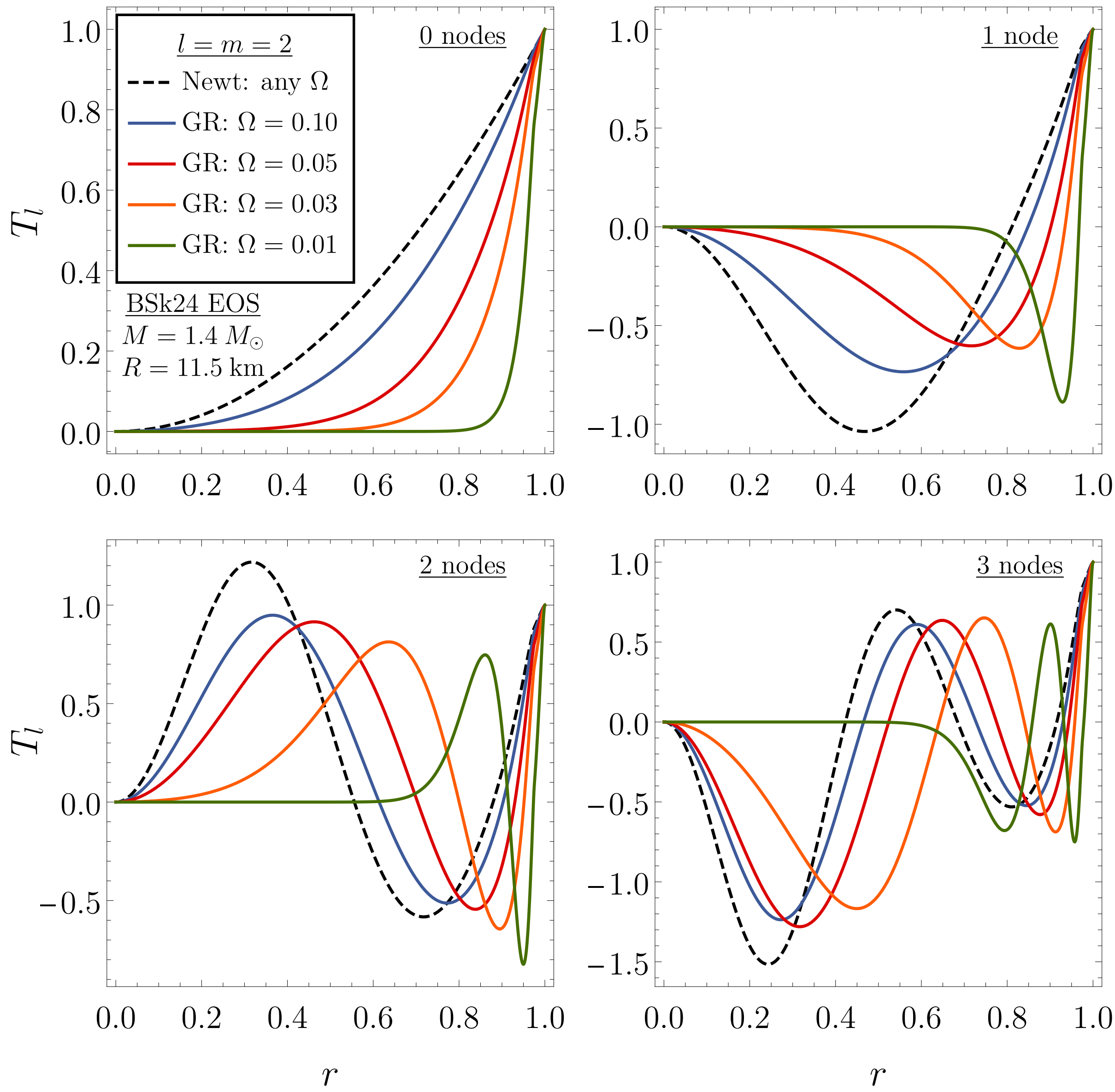

Рис. 1: Тороидальная функция T_l для $l = m = 2$ r-мод с разным числом узлов, варьирующимся от 0 до 3. Результаты расчета в ОТО (“GR”) показаны сплошными линиями, а результаты расчета в ньютоновской теории (“Newt”) показаны штриховыми линиями. Разными цветами показаны результаты расчета релятивистских r-мод для разных скоростей вращения Ω. Результаты расчетов ньютоновских r-мод не зависят от Ω и показаны черным цветом. Все собственные функции для удобства нормированы согласно условию $T_l(1) = 1$.

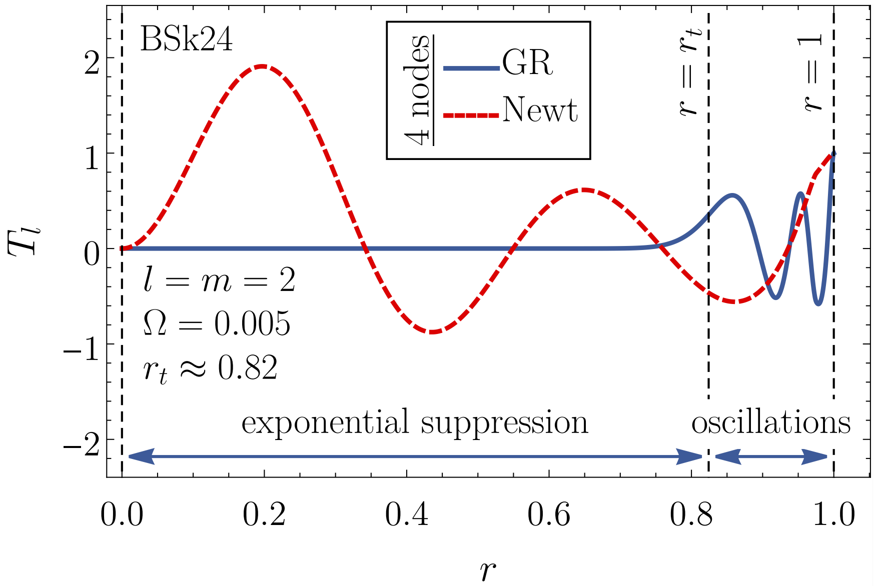

Рис. 2: Релятивистская (“GR”, синяя линия) и ньютоновская (“Newt”, красные штрихи) тороидальная функция $l = m = 2$ r-моды с 4мя узлами для $\Omega = 0.005$.

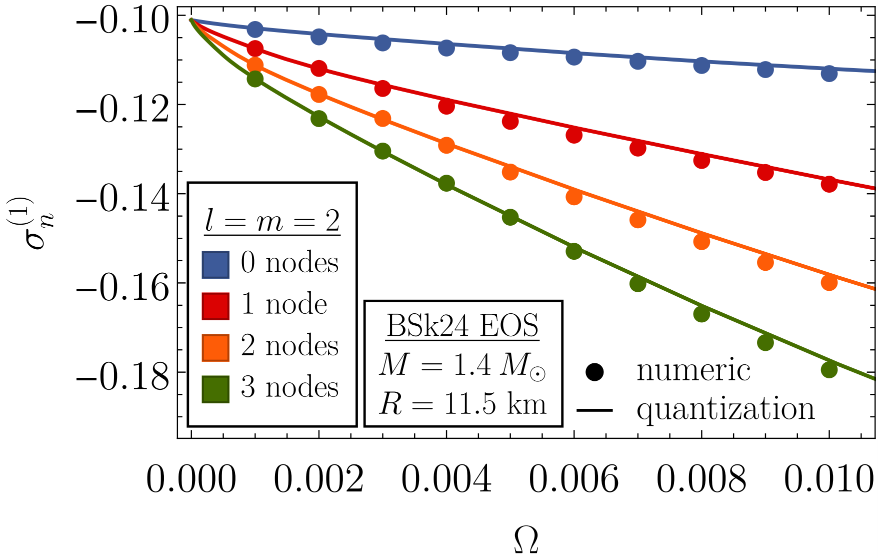

Рис. 3: Спектр релятивистских $l = m = 2$ r-мод в пределе $\Omega \to 0$. Разными цветами показаны результаты расчета для r-мод с разным числом узлов, варьирующимся от 0 до 3. Жирными точками (“numeric”) показаны собственные частоты, найденные при интегрировании системы уравнений (14). Сплошными линиями (“quantization”) показаны частоты, предсказываемые условием квантования (24).

Наконец, Рисунок 3 показывает полученный спектр релятивистских r-мод в пределе $\Omega \to 0$. Разными цветами показаны результаты, полученные для r-мод с разным количеством узлов. Жирными точками (“numeric”) показаны собственные частоты, найденные при интегрировании общей системы уравнений (14), а линии (“quantization”) показывают спектр r-мод, предсказываемый условием квантования (24). Как видно, результаты численного расчета с хорошей точностью ложатся на предсказания теории. При этом следует отметить, что во всем рассмотренном нами диапазоне скоростей вращения $\Omega \in [0.1; 0.001]$ мы не нашли никаких признаков непрерывного спектра.

4 Заключение

Долгое время попытки найти релятивистское обобщение ньютоновских r-мод в небаротропных нейтронных звездах, основанные на применении теории возмущений по Ω, были безуспешны. В то время как такой подход предсказывает наличие непрерывной части в спектре релятивистских r-мод, более “честные” численные расчеты, не опирающиеся на теорию возмущений, позволяют определить дискретные частоты релятивистских r-мод и не находят никаких признаков непрерывного спектра. В данной работе мы предложили новый оригинальный способ исследования релятивистских r-мод. В отличие от традиционного подхода, он не опирается не разложения собственных функций и собственных частот по Ω. Единственные существенные предположения заключаются в том, что эффект увлечения инерциальных систем отсчета $\omega(r) = \epsilon\tilde{\omega}(r)$ считается слабым, $\epsilon \ll 1$, и что вращение медленное.

В рамках сделанных предположений нам удалось вывести уравнения релятивистских r-мод и показать, что их собственные функции из-за эффекта увлечения инерциальных систем отсчета описываются неаналитичными функциями Ω. Именно поэтому они не могут быть разложены в ряд по Ω

и, следовательно, их описание в рамках традиционного подхода невозможно. Обнаруженная неаналитичность также влияет на “ордеринг” r-мод. Если в ньютоновской теории мы имеем $\xi^r_{l+1} \sim \Omega^2 T_l$ и $\sigma^{(1)} \propto \Omega^2$, то для релятивистских r-мод мы находим, что $\xi^r_{l+1} \sim \sqrt{\epsilon}\Omega T_l$ и $\sigma^{(1)} \sim \epsilon$. Более того, неаналитичность выражена тем сильнее, чем медленнее вращение, и в пределе $\Omega \to 0$ оператор d/dr при действии на собственные функции производит множитель $\sqrt{\epsilon}/\Omega$. Проведенные нами численные рассчеты показывают, что спектр неаналитичных r-мод является дискретным (что согласуется с предсказаниями численных рассчетов за рамками теории возмущений). При этом в пределе $\Omega \to 0$ он с хорошей точностью описывается условием квантования (24) (отметим, что данное условие не имеет ньютоновского аналога). В этом пределе собственные функции релятивистских r-мод существенно отличаются от ньютоновских. Они экспоненциально подавлены практически во всей звезде за исключением узкой полосы вблизи поверхности, где они быстро осциллируют.

Обнаруженные особенности релятивистских r-мод могут повлиять на интерпретацию наблюдаемых периодических электромагнитных колебаний вращающихся нейтронных звезд [53, 54]. Они также могут повлиять на характерные времена затухания r-мод под действием различных диссипативных механизмов (сдвиговая вязкость, объемная вязкость, диффузия и др.), а также на время раскачки r-мод CFS-неустойчивостью. Наконец, ввиду обнаруженных особенностей релятивистских r-мод, эффективность их возбуждения приливными силами со стороны звезды-компаньона в двойных системах также необходимо пересмотреть, что, в свою очередь, может отразиться на излучаемом гравитационно-волновом сигнале (см. например [55]).

5 Список литературы

Список литературы

[1] S. Chandrasekhar. «Solutions of Two Problems in the Theory of Gravitational Radiation». В: *Phys. Rev Lett.* 24.11 (март 1970), с. 611—615. DOI: 10.1103/PhysRevLett.24.611.

[2] J. L. Friedman и B. F. Schutz. «Lagrangian perturbation theory of nonrelativistic fluids.» В: *Astrophys. J.* 221 (май 1978), с. 937—957. DOI: 10.1086/156098.

[3] J. L. Friedman и B. F. Schutz. «Secular instability of rotating Newtonian stars.» В: *Astrophys. J.* 222 (май 1978), с. 281—296. DOI: 10.1086/156143.

[4] John L. Friedman. «Generic instability of rotating relativistic stars». В: *Communications in Mathematical Physics* 62.3 (окт. 1978), с. 247—278. DOI: 10.1007/BF01202527.

[5] Nils Andersson. «A New Class of Unstable Modes of Rotating Relativistic Stars». В: *Astrophys. J.* 502.2 (авг. 1998), с. 708—713. DOI: 10.1086/305919. arXiv: gr-qc/9706075 [gr-qc].

[6] John L. Friedman и Sharon M. Morsink. «Axial Instability of Rotating Relativistic Stars». В: *Astrophys. J.* 502.2 (авг. 1998), с. 714—720. DOI: 10.1086/305920. arXiv: gr-qc/9706073 [gr-qc].

[7] Michele Maggiore и др. «Science case for the Einstein telescope». В: *JCAP* 2020.3, 050 (март 2020), с. 050. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/03/050. arXiv: 1912.02622 [astro-ph.CO].

[8] Magdalena Sieniawska и Michał Bejger. «Continuous Gravitational Waves from Neutron Stars: Current Status and Prospects». В: *Universe* 5.11 (окт. 2019), с. 217. DOI: 10.3390/universe5110217. arXiv: 1909.12600 [astro-ph.HE].

[9] The LIGO Scientific Collaboration и the Virgo Collaboration. «Searches for Continuous Gravitational Waves from 15 Supernova Remnants and Fomalhaut b with Advanced LIGO». В: *Astrophys. J.* 875.2, 122 (апр. 2019), с. 122. DOI: 10.3847/1538-4357/ab113b. arXiv: 1812.11656 [astro-ph.HE].

[10] The LIGO Scientific Collaboration и the Virgo Collaboration. «All-sky search in early O3 LIGO data for continuous gravitational-wave signals from unknown neutron stars in binary systems». В: *Phys. Rev. D* 103.6, 064017 (март 2021), с. 064017. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.064017. arXiv: 2012.12128 [gr-qc].

[11] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration и the KAGRA Collaboration. «Searches for continuous gravitational waves from young supernova remnants in the early third observing run of Advanced LIGO and Virgo». В: *arXiv e-prints* (май 2021). arXiv: 2105.11641 [astro-ph.HE].

[12] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration и the KAGRA Collaboration. «Search for continuous gravitational waves from 20 accreting millisecond X-ray pulsars in O3 LIGO data». В: *arXiv e-prints*, arXiv:2109.09255 (сент. 2021), arXiv:2109.09255. arXiv: 2109.09255 [astro-ph.HE].

[13] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration и the KAGRA Collaboration. «All-sky search for continuous gravitational waves from isolated neutron stars in the early O3 LIGO data». В: *Phys. Rev. D* 104.8, 082004 (окт. 2021), с. 082004. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.082004. arXiv: 2107.00600 [gr-qc].

[14] Lee Lindblom, Benjamin J. Owen и Sharon M. Morsink. «Gravitational Radiation Instability in Hot Young Neutron Stars». В: *Phys. Rev. Lett.* 80.22 (июнь 1998), с. 4843—4846. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.4843. arXiv: gr-qc/9803053 [gr-qc].

[15] Lee Lindblom, Joel E. Tohline и Michele Vallisneri. «Nonlinear Evolution of the r-Modes in Neutron Stars». В: *Phys. Rev. Lett.* 86.7 (февр. 2001), с. 1152—

1155. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.1152. arXiv: astro-ph/0010653 [astro-ph].

[16] Andreas Reisenegger и Axel Bonačić. «Millisecond Pulsars with r-Modes as Steady Gravitational Radiators». В: *Phys. Rev. Lett.* 91.20, 201103 (нояб. 2003), с. 201103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.201103. arXiv: astro-ph/0303375 [astro-ph].

[17] Massimo Mannarelli, Cristina Manuel и Basil A. Sa'D. «Mutual Friction in a Cold Color-Flavor-Locked Superfluid and r-Mode Instabilities in Compact Stars». В: *Phys. Rev. Lett.* 101.24, 241101 (дек. 2008), с. 241101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.241101. arXiv: 0807.3264 [hep-ph].

[18] Wynn C. G. Ho, Nils Andersson и Brynmor Haskell. «Revealing the Physics of r Modes in Low-Mass X-Ray Binaries». В: *Phys. Rev. Lett.* 107.10, 101101 (сент. 2011), с. 101101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.101101. arXiv: 1107.5064 [astro-ph.HE].

[19] Mark G. Alford и Kai Schwenzer. «What the Timing of Millisecond Pulsars Can Teach us about Their Interior». В: *Phys. Rev. Lett.* 113.25, 251102 (дек. 2014), с. 251102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.251102. arXiv: 1310.3524 [astro-ph.HE].

[20] Mikhail E. Gusakov, Andrey I. Chugunov и Elena M. Kantor. «Instability Windows and Evolution of Rapidly Rotating Neutron Stars». В: *Phys. Rev. Lett.* 112.15, 151101 (апр. 2014), с. 151101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.151101. arXiv: 1310.8103 [astro-ph.HE].

[21] B. Haskell и A. Patruno. «Are Gravitational Waves Spinning Down PSR J 1023 +0038 ?» В: *Phys. Rev. Lett.* 119.16, 161103 (окт. 2017), с. 161103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.161103. arXiv: 1703.08374 [astro-ph.HE].

[22] Elena M. Kantor, Mikhail E. Gusakov и Vasiliy A. Dommes. «Constraining Neutron Superfluidity with R -Mode Physics». В: *Phys. Rev. Lett.* 125.15, 151101 (окт. 2020), с. 151101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.151101. arXiv: 2009.12553 [astro-ph.HE].

[23] Nils Andersson и Kostas D. Kokkotas. «The R-Mode Instability in Rotating Neutron Stars». В: *International Journal of Modern Physics D* 10.4 (янв. 2001), с. 381—441. DOI: 10.1142/S0218271801001062. arXiv: gr-qc/0010102 [gr-qc].

[24] B. Haskell. «R-modes in neutron stars: Theory and observations». В: *International Journal of Modern Physics E* 24.9, 1541007 (авг. 2015), с. 1541007. DOI: 10.1142/S0218301315410074. arXiv: 1509.04370 [astro-ph.HE].

[25] T. G. Cowling. «The non-radial oscillations of polytropic stars». В: *MNRAS* 101 (янв. 1941), с. 367. DOI: 10.1093/mnras/101.8.367.

[26] J. Provost, G. Berthomieu и A. Rocca. «Low Frequency Oscillations of a Slowly Rotating Star - Quasi Toroidal Modes». В: *A& A* 94 (янв. 1981), с. 126.

[27] H. Saio. «R-mode oscillations in uniformly rotating stars». В: *Astrophys. J.* 256 (май 1982), с. 717—735. DOI: 10.1086/159945.

[28] Y. Kojima. «Chapter 4. The Rotational Effects of General Relativity on the Stellar Pulsations». В: *Progress of Theoretical Physics Supplement* 128 (янв. 1997), с. 251—293. DOI: 10.1143/PTPS.128.251.

[29] Yasufumi Kojima. «Quasi-toroidal oscillations in rotating relativistic stars». В: *MNRAS* 293.1 (янв. 1998), с. 49—52. DOI: 10.1046/j.1365-8711.1998.01119.x. arXiv: gr-qc/9709003 [gr-qc].

[30] Horst R. Beyer и Kostas D. Kokkotas. «On the r-mode spectrum of relativistic stars». В: *MNRAS* 308.3 (сент. 1999), с. 745—750. DOI: 10.1046/j.1365-8711.1999.02739.x. arXiv: gr-qc/9903019 [gr-qc].

[31] Yasufumi Kojima и Masayasu Hosonuma. «The r-Mode Oscillations in Relativistic Rotating Stars». В: *Astrophys. J.* 520.2 (авг. 1999), с. 788—796. DOI: `10.1086/307481`. arXiv: `astro-ph/9903055 [astro-ph]`.

[32] Yasufumi Kojima и Masayasu Hosonuma. «Approximate equation relevant to axial oscillations on slowly rotating relativistic stars». В: *Phys. Rev. D* 62.4, 044006 (авг. 2000), с. 044006. DOI: `10.1103/PhysRevD.62.044006`. arXiv: `gr-qc/0004058 [gr-qc]`.

[33] Keith H. Lockitch, Nils Andersson и John L. Friedman. «Rotational modes of relativistic stars: Analytic results». В: *Phys. Rev. D* 63.2, 024019 (янв. 2001), с. 024019. DOI: `10.1103/PhysRevD.63.024019`. arXiv: `gr-qc/0008019 [gr-qc]`.

[34] Johannes Ruoff и Kostas D. Kokkotas. «On the r-mode spectrum of relativistic stars in the low-frequency approximation». В: *MNRAS* 328.2 (дек. 2001), с. 678—688. DOI: `10.1046/j.1365-8711.2001.04909.x`. arXiv: `gr-qc/0101105 [gr-qc]`.

[35] Keith H. Lockitch, John L. Friedman и Nils Andersson. «Rotational modes of relativistic stars: Numerical results». В: *Phys. Rev. D* 68.12, 124010 (дек. 2003), с. 124010. DOI: `10.1103/PhysRevD.68.124010`. arXiv: `gr-qc/0210102 [gr-qc]`.

[36] Shijun Yoshida. «r-Modes of Slowly Rotating Nonisentropic Relativistic Stars». В: *Astrophys. J.* 558.1 (сент. 2001), с. 263—269. DOI: `10.1086/322275`. arXiv: `gr-qc/0101115 [gr-qc]`.

[37] Keith H. Lockitch, Nils Andersson и Anna L. Watts. «Regularizing the r-mode problem for nonbarotropic relativistic stars». В: *Classical and Quantum Gravity* 21.19 (окт. 2004), с. 4661—4675. DOI: `10.1088/0264-9381/21/19/012`. arXiv: `gr-qc/0106088 [gr-qc]`.

[38] Shijun Yoshida и Toshifumi Futamase. «R-mode instability of slowly rotating nonisentropic relativistic stars». В: *Phys. Rev. D* 64.12 (дек. 2001), с. 123001. DOI: 10.1103/PhysRevD.64.123001. arXiv: gr-qc/0106076 [gr-qc].

[39] Johannes Ruoff и Kostas D. Kokkotas. «On the r-mode spectrum of relativistic stars: the inclusion of the radiation reaction». В: *MNRAS* 330.4 (март 2002), с. 1027—1033. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2002.05169.x. arXiv: gr-qc/0106073 [gr-qc].

[40] J. A. Pons и др. «Relativistic r modes and shear viscosity: regularizing the continuous spectrum». В: *MNRAS* 363.1 (окт. 2005), с. 121—130. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2005.09429.x. arXiv: astro-ph/0504062 [astro-ph].

[41] L. Gualtieri и др. «Relativistic r-modes and shear viscosity». В: *Albert Einstein Century International Conference*. Под ред. Jean-Michel Alimi и André Füzfa. Т. 861. American Institute of Physics Conference Series. Нояб. 2006, с. 638—645. DOI: 10.1063/1.2399636. arXiv: gr-qc/0702040 [gr-qc].

[42] Shijun Yoshida, Shin'ichirou Yoshida и Yoshiharu Eriguchi. «R-mode oscillations of rapidly rotating barotropic stars in general relativity: analysis by the relativistic Cowling approximation». В: *MNRAS* 356.1 (янв. 2005), с. 217—224. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2004.08436.x. arXiv: astro-ph/0406283 [astro-ph].

[43] Erich Gaertig и Kostas D. Kokkotas. «Oscillations of rapidly rotating relativistic stars». В: *Phys. Rev. D* 78.6, 064063 (сент. 2008), с. 064063. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.064063. arXiv: 0809.0629 [gr-qc].

[44] Daniela D. Doneva и др. «Gravitational wave asteroseismology of fast rotating neutron stars with realistic equations of state». В: *Phys. Rev. D* 88 (4 авг. 2013), с. 044052. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.044052. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.88.044052.

[45] Michael Jasiulek и Cecilia Chirenti. «R-mode frequencies of rapidly and differentially rotating relativistic neutron stars». В: *Phys. Rev. D* 95 (6 март 2017), с. 064060. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.064060. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.064060.

[46] Shijun Yoshida и Umin Lee. «Relativistic r-Modes in Slowly Rotating Neutron Stars: Numerical Analysis in the Cowling Approximation». В: *Astrophys. J.* 567.2 (март 2002), с. 1112—1120. DOI: 10.1086/338663. arXiv: gr-qc/0110038 [gr-qc].

[47] L. Villain, S. Bonazzola и P. Haensel. «Inertial modes in stratified rotating neutron stars: An evolutionary description». В: *Phys. Rev. D* 71.8, 083001 (апр. 2005), с. 083001. DOI: 10.1103/PhysRevD.71.083001. arXiv: gr-qc/0407081 [gr-qc].

[48] Cecilia Chirenti и Jozef Skákala. «Effect of magnetic fields on the r-modes of slowly rotating relativistic neutron stars». В: *Phys. Rev. D* 88.10, 104018 (нояб. 2013), с. 104018. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.104018. arXiv: 1308.3685 [gr-qc].

[49] Justin B. Kinney и Gregory Mendell. «r-modes in accreting neutron stars with magnetoviscous boundary layers». В: *Phys. Rev. D* 67.2, 024032 (янв. 2003), с. 024032. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.024032. arXiv: gr-qc/0206001 [gr-qc].

[50] James B. Hartle. «Slowly Rotating Relativistic Stars. I. Equations of Structure». В: *Astrophys. J.* 150 (дек. 1967), с. 1005. DOI: 10.1086/149400.

[51] K. Y. Kraav, M. E. Gusakov и E. M. Kantor. «Nonanalytic behavior of the relativistic r -modes in slowly rotating neutron stars». В: *Phys. Rev. D* 106.10, 103009 (нояб. 2022), с. 103009. DOI: 10.1103/PhysRevD.106.103009. arXiv: 2112.01171 [astro-ph.HE].

[52] S. Goriely, N. Chamel и J. M. Pearson. «Further explorations of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas. XIII. The 2012 atomic mass evaluation and the symmetry coefficient». В: *Phys. Rev. C* 88.2, 024308 (авг. 2013), с. 024308. DOI: 10.1103/PhysRevC.88.024308.

[53] Tod Strohmayer и Simin Mahmoodifar. «Discovery of a Neutron Star Oscillation Mode During a Superburst». В: *ApjL* 793.2, L38 (окт. 2014), с. L38. DOI: 10.1088/2041-8205/793/2/L38. arXiv: 1409.2847 [astro-ph.HE].

[54] Tod Strohmayer и Simin Mahmoodifar. «A Non-radial Oscillation Mode in an Accreting Millisecond Pulsar?» В: *Astrophys. J.* 784.1, 72 (март 2014), с. 72. DOI: 10.1088/0004-637X/784/1/72. arXiv: 1310.5147 [astro-ph.HE].

[55] Wenrui Xu и Dong Lai. «Resonant tidal excitation of oscillation modes in merging binary neutron stars: Inertial-gravity modes». В: *Phys. Rev. D* 96.8, 083005 (окт. 2017), с. 083005. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.083005. arXiv: 1708.01839 [astro-ph.HE].