

На правах рукописи

ЮРЧЕНКО СТАНИСЛАВ ОЛЕГОВИЧ

**НЕУСТОЙЧИВОСТИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ
КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД ВО ВНЕШНИХ ТЕПЛОВЫХ И
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ**

01.04.07 - физика конденсированного состояния

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2013

Официальные оппоненты:

Ерофеев Владимир Иванович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБУН Институт проблем машиностроения
Российской академии наук,
заместитель директора по научной работе

Ошурко Вадим Борисович,
доктор физико-математических наук,
ФГБОУ ВПО "Московский государственный технический
университет "Станкин", заведующий кафедрой физики

Полуэктов Павел Петрович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ОАО "Высокотехнологичный научно-исследовательский
институт неорганических материалов" им. акад. А.А. Бочвара,
научный руководитель центра по обращению с облученным
ядерным топливом и радиоактивными отходами

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Объединенный институт высоких температур
Российской академии наук

Защита диссертации состоится «19» декабря 2013 г. в 15-00 на заседании диссертационного совета Д 212.155.07 в Московском государственном областном университете по адресу: 105005, Москва, ул. Радио, д. 10а.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Московского государственного областного университета.

Автореферат разослан «___» _____ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Барabanова Н.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. Одной из актуальных научных проблем физики конденсированного состояния является теоретическое исследование воздействия электромагнитных и тепловых полей на свойства конденсированных сред, прогнозирование свойств конденсированных сред в зависимости от внешних условий. Именно поэтому проблемы физики систем с дальними корреляциями, микро- и макроскопической неустойчивости, возможности применения методов смежных областей физики конденсированного состояния и теоретической физики вызывают большой интерес у исследователей. Общие вопросы неустойчивостей и конфигурационных переходов в конденсированных многочастичных системах можно найти в классических работах М. Борна, Дж. Майера, Стритера, Грина, Л. Ландау, Я. Френкеля, Р. Фейнмана, Орнштейна и Цернике.

Фундаментальные исследования эволюционных явлений в конденсированных средах с дальними корреляциями важны ввиду широкой области потенциальных приложений.

Примером конденсированной среды с дальним взаимодействием являются электрогидродинамические (ЭГД) системы (проводящие жидкости во внешних электрических полях), для которых характерна возможность самовоздействия системы, а электростатическое взаимодействие между различными участками заряженной поверхности является нелокальным. Поверхность раздела двух фаз взаимодействует с возмущениями электрических полей, которые сами определяются динамикой возмущения системы, вследствие чего задача становится самосогласованной.

Примечательно, что кроме собственной ценности результатов в теории ЭГД систем, развитие в этой области методы и подходы позволяют построить новые модели систем носителей заряда (электронов и дырок) в таком новом объекте, как графен. Избыток носителей в пространственно-разнесенных областях графена приводит к возникновению электрического поля, действующего на плазму носителей заряда (электроны и дырки). В случае, когда частота столкновения носителей сильно превышает частоту столкновений с фононами, возможно квазигидродинамическое рассмотрение.

Графен представляет собой один из наиболее перспективных материалов для элементной базы терагерцовой оптоэлектроники нового поколения ввиду фактического отсутствия запрещенной зоны в спектре носителей. Несмотря на большое число современных исследований графена, проблема описания

коллективного движения жидкости носителей (электронов и дырок) в гидродинамическом приближении решена далеко не полностью. Необходимость разработки гидродинамических моделей для плазмы носителей в графене связана с простотой и наглядностью гидродинамической интерпретации динамических явлений в таких системах, удобством использования для проведения расчетов и оценки эффективности элементной базы (детекторов и излучателей, болометров, модуляторов) на основе графена.

Электромагнитные волны терагерцового (ТГц) диапазона имеют длины от 20 мкм до 2 мм, находятся между инфракрасным и радиоволновым излучением и обладают уникальными свойствами: высокой проникающей способностью, которая сочетается с высокой информативностью ТГц спектроскопии конденсированных, в том числе, высокомолекулярных веществ. В последнее время стало ясно, что свойства ТГц излучения делают его уникальным инструментом для биомедицинских и технических приложений.

Системы с дальним взаимодействием часто являются сильнокоррелированными, примерами могут служить кристаллы и жидкости, коллоидные системы. На основе эволюционных подходов к временной эволюции возмущений, рассмотренных в волновой теории, оказывается возможным построить новый способ приближенного построения парных корреляционных функций в кристаллах.

Закономерности неравновесной нелинейной эволюции в многочастичных системах лежат в основе перспективных технологий управления свойствами материалов как конструкционного, так и приборостроительного назначения. Процессы, обеспечивающие возникновение новых структур, протекают в неравновесных условиях, а свойства образующихся структур полностью определяются нелинейной мезомасштабной эволюцией конденсированной среды. В настоящее время теория таких процессов в субмикронном масштабе даже для простых систем разработана слабо.

Актуальность задачи прогнозирования свойств материалов различного назначения трудно переоценить. Эта проблема, тесно связанная с нелинейной многомасштабной эволюцией конденсированных сред, остается малоразработанной. Представляется, что на основе такой теории в будущем может быть разработана теория разрушения.

Предлагаемый к рассмотрению круг вопросов тесно связан с теорией исследования динамики конденсированных сред во внешних электрических и тепловых полях, теорией неустойчивостей и структурных переходов различных масштабов. Именно это положение привело к настоящей структуре

диссертации, когда результаты развития теории эволюции возмущений в конденсированных средах во внешних электрических полях применяются для исследования новых объектов и разработки новых методов описания конденсированных сред.

Цель диссертационной работы – получение теоретических закономерностей влияния внешних полей на эволюцию состояний в конденсированных средах с дальними корреляциями, представленных в настоящем исследовании проводящей жидкостью во внешнем электрическом поле, электронно-дырочной плазмой носителей в графене, классическими кристаллами.

Научная новизна диссертационной работы. В диссертации получила развитие теория эволюции, неустойчивостей и структурных превращений конденсированных сред во внешних полях.

1. Показано, что законы дисперсии $\omega(k)$ возмущений в ЭГД-системах в длинноволновом пределе сводятся к степенным разложениям, содержащим нечетно-продолженные слагаемые четного порядка (типа $k|k|$). Для таких разложений найдены функции Грина, определяющие линейную эволюцию системы.

2. Выведены квадратично-нелинейные уравнения эволюции возмущений проводящей жидкости в электрическом поле, выведено обобщенное уравнение Римана. Установлены закономерности влияния слабого электрического поля на солитоны и кноидальные волны; найден стационарный профиль возмущения в вырожденном случае – электро-капиллярный солитон.

3. Разработаны гидродинамические модели движения плазмы носителей (электронов и дырок) в графене во внешних электрических и магнитных полях. Из-за линейности энергетического спектра носителей в графене, влияние электрического поля и гидродинамического давления на волны носителей отличается от аналогичных в двумерной электрон-дырочной плазме с параболическим энергетическим спектром частиц. Показано существование гидродинамических нейтральных плазмонов в графене, не связанных с пространственным разделением заряда.

4. Показано, что задачу неустойчивости возмущений поверхности конденсированной среды в электрическом поле можно привести к задаче, аналогичной бозе-конденсации квантов поверхностных возбуждений (электрорипплов).

5. Предложен новый способ описания парного коррелятора кристаллических конденсированных структур. Найдены аналитические

выражения для парной корреляционной функции при низких температурах. Для этого способа описания неупорядоченных структур введен параметр, связанный с делокализацией и поэтому названный параметром неупорядоченности системы.

6. Установлено, что квадрат параметра неупорядоченности линейно зависит от температуры. При помощи вычислительных экспериментов для 2D- и 3D-систем с взаимодействием, описываемым потенциалами Леннарда-Джонса и Дебая, показана эффективность нового метода построения парного коррелятора кристаллов.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Установленные закономерности линейной эволюции возмущений раздела конденсированных ЭГД-систем.
2. Нелинейные модели и найденные закономерности эволюции ЭГД-систем.
3. Гидродинамические модели плазмы носителей в графене во внешних полях.
4. Новый метод описания парного коррелятора кристаллических систем.

Практическая значимость. Результаты исследований представляют собой развитие физики конденсированного состояния в применении к системам с нелокальным взаимодействием, микроскопическим и макроскопическим явлениям в конденсированных средах.

Найденные условия неустойчивости возмущений поверхности жидкости в неравновесном состоянии могут служить теоретическим обоснованием при разработке дисперсных и струйных систем при производстве микро- и нанопорошков, полимерных волокон, для технологий капсулирования и расщепления в медицине и фармацевтике, при получении наноструктурированных материалов с контролируемыми свойствами.

Разработанный способ вывода нелинейных эволюционных уравнений может быть применен для уравнений типа Буссинеска в теории волновых движений жидкости (в том числе, плазмы носителей), газовой динамике, нелинейной теории упругости, методов нелинейной динамики. Найденные аналитические решения могут использоваться в качестве тестовых задач для численных методик расчета.

Разработанные модели плазмы носителей графена могут использоваться при расчете процессов, определяющих эффективность ТГц-элементной базы, а также акусто-электронной элементной базы нового поколения, базирующейся

на графене.

Новый метод описания кристаллических структур позволит разработать методы поиска уравнений состояния веществ, проводить математическое моделирование свойств материалов для применения в различных областях техники. Разработанный метод может быть применим в физике коллоидных систем для описания коллоидных кристаллов.

Результат диссертационной работы представляет собой решение актуальной научной проблемы в физике конденсированного состояния: разработки моделей конденсированных сред с дальними корреляциями.

Достоверность результатов подтверждается согласованностью с использованием общепринятых методов физики конденсированного состояния, нелинейной динамики; в предельных случаях решения согласуются с ранее известными результатами; результаты вычислительных экспериментов обладают устойчивостью, сходимостью и воспроизводимостью.

Личный вклад автора состоит в постановке целей, задач исследования, в решении ряда изложенных задач, построении нелинейной теории, анализе и обобщении полученных результатов. Все основные результаты получены автором лично или при непосредственном участии.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на The 6-th Annual International Conference on the Physics, Chemistry and Biology of Water (USA, Vermont, 20-23 October, 2011); Japan - Russia - USA Symposium on Modeling of Graphene Terahertz, Nano-Mechanical, and Acousto-Optical Devices (University of Aizu, Aizu-Wakamatsu, Japan, March 7-10, 2012), The 21th International Laser Physics Workshop (University of Calgary, Alberta, Canada. 23-27 July 2012), Progress In Electromagnetics Research Symposium 2012 (Moscow, 19-23 August 2012), 2012 IEEE International Meeting for Future of Electron Devices (Kansai), 2-nd Russia - Japan - USA Symposium on Fundamental and Applied Problems of Terahertz Devices and Technology (Bauman Moscow State Technical University, Moscow, June 3-7, 2013), междисциплинарном семинаре "Фазовые превращения в жидких средах: теория и эксперимент" (2011, Москва, рук. проф. М.А. Анисимов, Университет Мэрилэнд, США), на семинаре Научного центра волновых исследований Института общей физики им. А.М. Прохорова РАН (2010, 2011, 2012 гг., рук. акад. Ф.В. Бункин), Академических чтениях по космонавтике им. С.П. Королева (Москва, 2006, 2007, 2009, 2011), Всероссийских конференциях «Необратимые процессы в природе и технике» (Москва, 2007, 2009, 2011), Всероссийских межвузовских научно-технических конференциях «Электро-механические и внутрикамерные процессы в

энергетических установках, струйная акустика и диагностика, приборы и методы контроля природной среды, веществ, материалов и изделий» (Казань, 2007, 2009, 2011), Международной научно-технической конференции «Чкаловские чтения» (Егорьевск, 2007), на научных семинарах Московского государственного областного университета (2009, 2012) и МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Результаты работы нашли отражение в двух учебных дисциплинах, читаемых автором студентам МГТУ им. Н.Э. Баумана: "Наноинженерия композитных конструкций" и "Физические процессы в микроструктурах".

Результаты диссертации поддержаны в рамках проектов РФФИ № 12-08-31104 мол-а, № 12-08-33112 мол-а-вед; ФЦП "Кадры", проекты № 2012-1.2.2-12-000-1011-047, №2012-1.5-12-000-1009-024; проект №2.6129.2011 в рамках программы "Формирование государственных заданий высшим учебным заведениям на 2012 год и на плановый период 2013 и 2014 годов в части проведения научно-исследовательских работ".

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 54 научных работах, из которых 31 – статьи в 11 различных изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов научных работ соискателей ученой степени кандидата и доктора наук.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 6 глав и заключения, содержит 324 страницы, 70 рисунков, 4 таблицы. Список литературы включает 235 работ.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

ВО ВВЕДЕНИИ показана актуальность темы, проведен критический обзор работ, посвященных современным проблемам и приложениям рассматриваемых систем с дальним взаимодействием. Сформулирована цель и задачи диссертации, выделена научная новизна, практическая значимость результатов работы.

В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ изучаются флуктуации заряженной поверхности раздела двух конденсированных сред, а также заряженной поверхности вертикально прогреваемого слоя жидкости и комбинированные неустойчивости в описанных системах.

В разделе 1.1 выводится дисперсионное соотношение для флуктуаций заряженной горизонтальной поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей конечной глубины в зазоре между двумя электродами идеально проводящими: верхняя считается идеальной, а нижняя – вязкой; на поверхности

раздела сохраняется тангенциальный разрыв скорости. Дисперсионное уравнение (ДУ) записывается в виде равенства нулю дисперсионного определителя.

В разделе 1.2 проведен анализ предельных случаев ДУ: бесконечно глубокая вязкая жидкость; случай двух идеальных жидкостей; в случае двух бесконечно глубоких жидкостей получено ДУ:

$$\left(2 - \frac{i\omega}{vk^2}\right)^2 + \Omega(k) - K(k, \omega) = 4\sqrt{1 - \frac{i\omega}{vk^2}}, \quad \operatorname{Re}\sqrt{1 - \frac{i\omega}{vk^2}} > 0 \quad (1)$$

$$K(k, \omega) = \alpha \frac{(Uk - \omega)^2}{v^2 k^4}, \quad \Omega(k) = \frac{\gamma k^2 - 4\pi\sigma^2 k + (1 - \alpha)\rho_1 g}{\rho_1 v^2 k^3}, \quad \alpha = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

где ω, k – комплексная частота и волновое число; v – кинематическая вязкость; ρ_1, ρ_2 – плотности нижней и верхней жидкости; g – ускорение свободного падения; U – скорость невозмущенного течения верхней жидкости; γ – коэффициент поверхностного натяжения; σ – поверхностная плотность заряда невозмущенной поверхности жидкости.

Раздел 1.3 посвящен анализу влияния поверхностного заряда и фонового движения верхней жидкости на реализацию комбинированной неустойчивости Френкеля–Тонкса и Кельвина–Гельмгольца. Показано, что множество критических точек в плоскости (U, σ) образуют эллипс неустойчивости. Эффективный коэффициент поверхностного натяжения снижается пропорционально U^2 при малых U .

Раздел 1.4 посвящен исследованию комбинированной конвективной и Френкеля–Тонкса неустойчивости и поиску ДУ для малых возмущений.

Раздел 1.5 посвящен обсуждению справедливости граничных условий, допускающих монотонные и колебательные движения, а также анализу свойств амплитудных функций возмущений. Найдено, что тепловой и электрический факторы эффективно взаимодействуют между собой, что приводит к существенному снижению порога конвективной неустойчивости.

Раздел 1.6 посвящен случаю влияния температурного градиента на реализацию неустойчивости Френкеля–Тонкса при нагреве сверху. Проведенные оценки показывают, что снижение порогового значения напряженности электрического поля может составить до **2.5%** для органических жидкостей и **2.5...16%** для металлов и сплавов.

Раздел 1.7 содержит выводы по Главе 1.

ВТОРАЯ ГЛАВА посвящена исследованию структуры решений ДУ (1), а также эволюции пакетов возмущений на заряженной границе раздела двух конденсированных сред в различных постановках задачи.

В разделе 2.1 исследуется влияние слабого движения верхней среды на решение ДУ (1). Показано, что наличие даже малого фонового движения всегда приводит к устранению точек бифуркации и образованию «тонкой структуры» решения ДУ.

В разделе 2.2 для случая $U = 0$ проводится параметризация ДУ(1)

$$\tilde{\omega}^2 = 4u \left(u^3 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} u - \frac{1}{1+\alpha} \right), \quad \tilde{\beta} = \frac{2u-1}{(1+\alpha)u},$$

$$\Omega = \frac{4(1+\alpha)^2 u^6 + 4(1-\alpha^2)u^4 - \alpha u^2 - 1}{(1+\alpha)u^2}, \quad u \geq u_*$$

$$\tilde{\omega} = 0, \quad \tilde{\beta} = \frac{2u-1}{(1+\alpha)u};$$

$$\Omega = -\frac{1+4\alpha u^2}{(1+\alpha)u^2} + 4 \sqrt{\frac{1-(1+\alpha)u}{(1+\alpha)u}}, \quad \frac{1-(1-\alpha)u}{u} \geq 0,$$

где $\tilde{\omega} = \text{Re}(\omega/vk^2)$, $\tilde{\beta} = \text{Im}(\omega/vk^2)$ – безразмерные циклическая частота и коэффициент затухания, u_* -действительный корень уравнения $(1+\alpha)u_*^3 + (1-\alpha)u_* - 1 = 0$. Зависимость параметра $\Omega(\kappa)$ можно представить в безразмерном виде (здесь $F = 4\pi\sigma^2/\sqrt{\gamma\rho g}$ – параметр Френкеля–Тонкса):

$$\Omega = \frac{\tilde{\kappa}^2 - F\tilde{\kappa} + (1-\alpha)}{A\tilde{\kappa}^3}, \quad \kappa = \tilde{\kappa}\sqrt{\rho g \gamma}, \quad A = (\rho g/\gamma)^{3/2} v^2/g$$

В разделе 2.3 на основе найденного параметрического представления проводится полный анализ структуры решений ДУ для различных спектров волн. Вычислены зависимости бифуркационных значений параметров Ω, β от соотношения плотностей верхней и нижней конденсированных сред α .

В разделе 2.4 обсуждаются свойства найденных дисперсионных соотношений. Показано, что в степенных разложениях $\omega(\kappa)$ возможны нечетно-продолженные слагаемые четных порядков.

В разделе 2.5 показано, что степенные разложения $\omega(\kappa)$ для докритических и критических спектров могут описываться выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\tilde{\kappa}) &= \tilde{c}_0 \tilde{\kappa} - \tilde{\beta} \tilde{\kappa}^3, & \tilde{\omega}(\tilde{\kappa}) &= \tilde{c}_0 \tilde{\kappa} - \tilde{\delta} \tilde{\kappa} |\tilde{\kappa}| - \tilde{\beta} \tilde{\kappa}^3 \\ \tilde{\omega}(\tilde{\kappa}) &= \tilde{c}_0 \tilde{\kappa} \left| |\tilde{\kappa}| - 1 \right|, & \tilde{\omega} &= \tilde{\delta} \tilde{\kappa} |\tilde{\kappa}| \end{aligned} \quad (2)$$

Тильдами обозначены безразмерные переменные, $\tilde{c}_0, \tilde{\beta}, \tilde{\delta}$ – коэффициенты, которые определяются для конкретного случая ДУ.

В разделе 2.6 вычисляются функции Грина для решения задач линейной эволюции возмущений в системах со спектрами (2). Показано, что соответствующие функции Грина выражаются через специальные функции Эйри, синус- и косинус-интегралы Френеля, гипергеометрические функции

Гаусса.

В разделе 2.7 установлены закономерности линейной эволюции структуры типа «ступенька» для пороговых дисперсионных зависимостей.

В разделе 2.8 приводятся выводы по Главе 2.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА посвящена развитию нелинейной теории ЭГД-систем с учетом методов эволюции возмущений в линейной теории. Рассматривается горизонтальный слой проводящей жидкости в ортогональном к невозмущенной поверхности электрическом поле и поле сил тяжести.

В разделе 3.1 найдены квадратично-нелинейные уравнения движения в рассматриваемой системе.

В разделе 3.2 система нелинейных уравнений рассмотрена в длинноволновом приближении Буссинеска (теория «мелкой воды»):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla_1)\mathbf{u} &= -\nabla_1 p[\eta], \quad \eta_t + \nabla_1(\eta\mathbf{u}) = 0 \\ p[\eta] &= \eta + \mu^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma}{\rho g h^2} \right) \Delta_1 \eta - \frac{E^2 \mu}{8\pi^2 \rho g h} L[\eta] \\ L[\xi] &= 2\pi \int \xi_* |\mathbf{k}| \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r}] d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3)$$

где \mathbf{u} – «плоский» вектор возмущений скорости; η – безразмерная полная глубина; μ – параметр дисперсии; ∇_1, Δ_1 – «плоские» операторы Гамильтона и Лапласа; E – напряженность невозмущенного электрического поля; p – оператор эффективного давления; индексами $*, t$ обозначены Фурье-преобразование и производная по времени; интегрирование производится по всем значениям волнового вектора \mathbf{k} .

В разделе 3.3 выводятся квадратично-нелинейные уравнения на поверхности глубокой заряженной жидкости (приближение коротких волн):

$$\begin{aligned} \Phi_t + \frac{\varepsilon}{2} (\nabla_1 \Phi)^2 + p[\xi] &= 0, \quad \mu \xi_t - L[\Phi] = 0 \\ p[\xi] &= \xi - \frac{\gamma}{\rho g h^2} \mu^2 \Delta_1 \xi - \frac{E^2}{8\pi^2 \rho g h} \mu L[\xi] \end{aligned} \quad (4)$$

где ξ – вертикальное отклонение поверхности от равновесного состояния; Φ – потенциал поля скоростей; ε – параметр амплитуды волны. Как и в случае длинноволновых возмущений, оператор эффективного давления p содержит нелокальное интегральное преобразование L , что связано с нелокальным влиянием электрического поля.

В разделе 3.4 выводится векторное операторное уравнение простой волны. Систему уравнений типа уравнений Буссинеска (3) можно представить в виде (используется соотношение $p[\eta] = \hat{P}\eta$):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla_1)\mathbf{u} &= -\eta^{-1} \hat{\mathbf{C}}^2 \nabla_1 \eta \\ \eta_t + \nabla_1(\eta\mathbf{u}) &= 0 \end{aligned}$$

где введен векторный оператор \hat{C} скорости возмущения. Показано, что обобщенное уравнение Римана простой волны имеет вид

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla_1 + \hat{C}(\mathbf{u})\nabla_1)\mathbf{u} = 0 \quad \hat{C}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \mathbf{u}|\mathbf{u}|^{-1}\sqrt{\hat{P}} \quad (5)$$

где оператор $\sqrt{\hat{P}}$ следует понимать в том смысле, что $\sqrt{\hat{P}}\sqrt{\hat{P}} = \hat{P}$. Установлено, что Фурье-образ оператора давления связан с дисперсионной зависимостью: $\hat{P}_* = (\omega(k)/k)^2$.

На основе (4) выведено нелинейное эволюционное уравнение:

$$\xi_t + c_0\left(1 + \frac{3\xi}{2h}\right)\xi_x + \beta\xi_{xxx} - \frac{\alpha}{2\pi}L[\xi_x] = 0 \quad (6)$$

где x — бегущая переменная; $V + c_0$ — скорость волны; A — константа интегрирования.

В разделе 3.5 находятся слабонелинейные решение уравнения (6).

В разделе 3.6 находится солитонное решение (6) в приближении действия слабого электрического поля, т.е. при $\alpha \ll 1$. Разложение (6) по малому параметру α приводит к уравнению Кортевега–де Фриза и неоднородному стационарному уравнению Шрёдингера. Вследствие нелокальности, найденные профили солитонов, приведенные на рис. 1, могут иметь до 3 «горбов».

В разделе 3.7 рассматривается вырожденный случай $\beta = 0$. Показано, что линейный оператор L связан с преобразованием Гильберта (интеграл понимается в смысле главного значения):

$$L[u] = -2\pi H\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad H[u] = \frac{1}{\pi}VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x',t)dx'}{x-x'}$$

Таким образом, уравнение (5) обобщает уравнения Кортевега–де Фриза и Бенджамина–Оно: $u_t + \left(c_0 + \frac{3}{2}u\right)u_x + \beta u_{xxx} + \alpha H[u_{xx}] = 0$

Тогда при $\beta = 0$ существует стационарное решение с "рациональным" профилем $u(z) = 4a/(4 + \alpha a^2 z^2)$, и скоростью $V = 2a/3\alpha$.

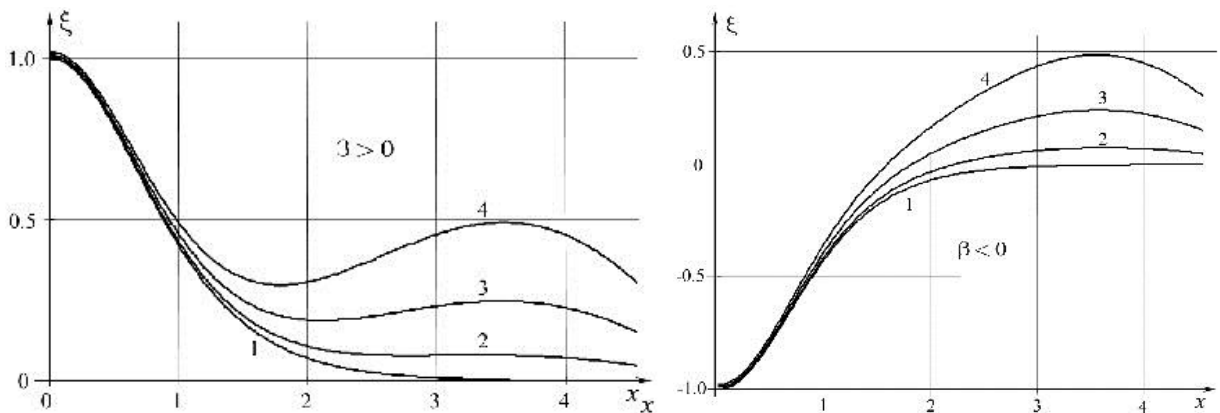


Рис. 1: Профили уединенных волн (1-4): $\alpha\sqrt{V/\beta} = 0; 0.016; 0.05; 0.1$

В разделе 3.8 найдено решение уравнения (6) в виде ряда:

$$u(z) = \psi_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \psi_n(z) \quad \psi_0'' + \frac{3}{2} \psi_0^2 - \psi_0 + A = 0 \quad (7)$$

Функции ψ_n – решения неоднородных стационарных уравнений Шредингера, определяемые рекуррентно ($n \geq 2$):

$$\psi_n(z) = \psi_0' \int (\int \psi_0' G_n(z) dz) (\psi_0')^{-1} dz, \quad G_n(z) = H[\psi_{n-1}] + \sum_{k=1}^{n-1} \psi_k \psi_{n-k} \quad (8)$$

Показано, что ряд (7) представляет собой асимптотическое разложение Пуанкаре.

В разделе 3.9 решается задача исследования влияния электрического поля на кноидальные волны. Показано, что расходимость ряда (7) устраняется методом Линдштедта–Пуанкаре при помощи «растяжения» масштаба по горизонтальной переменной.

В разделе 3.10 рассмотрены приложения разработанного способа вывода нелинейных эволюционных уравнений для различных систем: ионно-звуковых волн в плазме; для волн в плазме, находящейся в сильном магнитном поле, волны в средах со слабой диссипацией и дисперсией. Показано, что разработанный метод приводит к известным результатам.

В разделе 3.11 приводятся выводы по главе 3.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА посвящена разработке гидродинамической модели плазмы носителей графена. Система носителей в графене представляет собой пример конденсированной системы, которая склонна к нелокальности взаимодействия, благодаря возникновению электрических полей из-за возмущений плотности носителей (электронов и дырок). Гидродинамические особенности таких систем могут быть исследованы с использованием методов, развитых в теории возмущений конденсированных систем во внешних электрических полях.

Раздел 4.1 посвящен общим замечаниям, связанным с необходимостью разработки гидродинамических моделей для системы носителей в графене и областью их применения.

В разделе 4.2 показано, что вычисление средних величин в приближении локального равновесия необходимо производить только в лабораторной системе отсчета. В обратном случае (при попытке вычислить среднее значение в систем, связанной с потоком носителей одного сорта) результат оказывается в 2 раза меньше, что связано с линейностью энергетического спектра носителей

$\varepsilon = v_F p$, где $v_F \simeq 10^8$ см/с – характеристическая скорость Ферми, p – квазиимпульс носителя (электрона или дырки). Показано, что причина двукратного различия состоит в том, что в движущейся системе функция распределения отличается от распределения Ферми-Дирака.

Раздел 4.3 посвящен выводу гидродинамических уравнений плазмы носителей графена в плавно изменяющихся внешних полях. Для безмассовых носителей в графене дисперсионное соотношение между энергией и импульсом линейно $\varepsilon(p) = v_F p$, следовательно кинетические уравнения, определяющие функции распределения $f_e = f_e(\mathbf{p})$ и $f_h = f_h(\mathbf{p})$, имеют вид:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_F \frac{p}{p} \frac{\partial f_e}{\partial r} + e \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial p} = St\{f_e, f_e\} + St\{f_e, f_h\} + St_i\{f_e\}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial f_h}{\partial t} + v_F \frac{p}{p} \frac{\partial f_h}{\partial r} - e \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial p} = St\{f_h, f_h\} + St\{f_h, f_e\} + St_i\{f_h\}. \quad (10)$$

Здесь e – абсолютное значение заряда электрона, $E = -\partial\varphi/\partial r$ – напряженность электрического поля, $St_i\{f_e\}$ и $St_i\{f_h\}$ – интегралы столкновений электронов и дырок с внешними рассеивателями (примесями или фононами); $St\{f_e, f_e\}$, $St\{f_h, f_h\}$ и $St\{f_e, f_h\}$ – интегралы столкновений между различными носителями.

Из уравнений (9), (10) следует система гидродинамических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_e}{\partial t} + \frac{\partial \Sigma_e V_e}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \Sigma_h}{\partial t} + \frac{\partial \Sigma_h V_h}{\partial r} &= 0 \\ \frac{3}{2} \frac{\partial \langle p_e \rangle V_e}{\partial t} + \frac{\partial v_F \langle p_e \rangle}{\partial r} - e \Sigma_e \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= -\beta_e V_e - \beta_{eh} (V_e - V_h), \\ \frac{3}{2} \frac{\partial \langle p_h \rangle V_h}{\partial t} + \frac{\partial v_F \langle p_h \rangle}{\partial r} + e \Sigma_h \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= -\beta_h V_h - \beta_{eh} (V_h - V_e) \\ \frac{\partial (v_F \langle p_e \rangle)}{\partial t} + \frac{3v_F}{2} \frac{\partial (V_e \langle p_e \rangle)}{\partial r} + e \Sigma_e V_e E &= Q_e \\ \frac{\partial (v_F \langle p_h \rangle)}{\partial t} + \frac{3v_F}{2} \frac{\partial (V_h \langle p_h \rangle)}{\partial r} - e \Sigma_e V_h E &= Q_h \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\Sigma_{e,h}$ – поверхностные плотности электронов и дырок, соответственно; $V_{e,h}$ – дрейфовые скорости потоков носителей; коэффициенты "трения" β_{eh} , β_e и β_h являются функциями стационарного значения химпотенциалов $\mu_{e,0}$ и $\mu_{h,0}$; величины $Q_{e,h}$ характеризуют скорость тепловой релаксации системы.

Уравнения (11) необходимо дополнить уравнением состояния, связывающим между собой плотность носителей на единицу площади и средний модуль импульса, которые в "газовом приближении" имеют вид:

$$\langle p \rangle = \frac{T^2}{\pi^2 \hbar^2 v_F^3} I_2 \left(\frac{\mu}{T} \right) \quad \Sigma = \frac{T^2}{\pi^2 \hbar^2 v_F^2} I_1 \left(\frac{\mu}{T} \right) \quad I_\alpha(Z) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{1 + \exp(x-z)}$$

Раздел 4.4 посвящен поиску спектра плазменных волн в системе, описываемой моделью (11). В длинноволновом приближении искомое дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left[-i\omega + \frac{ik^2 v_e^2}{\omega} (1 + r_e) + v_{i,e} + v_F \frac{\beta_{eh}}{\langle p_e \rangle}\right] \left[-i\omega + \frac{ik^2 v_h^2}{\omega} (1 + r_h) + v_{i,h} + v_F \frac{\beta_{eh}}{\langle p_h \rangle}\right] = \left[\frac{ik^2 v_e^2 \Sigma_h}{\omega \Sigma_e} r_e + \frac{\beta_{eh} v_F}{\langle p_e \rangle}\right] \left[\frac{ik^2 v_h^2 \Sigma_e}{\omega \Sigma_h} r_h + \frac{\beta_{eh} v_F}{\langle p_h \rangle}\right], \quad (12)$$

где для удобства введены следующие обозначения: безразмерные константы $r_e = \frac{e^2 \langle p_e^{-1} \rangle}{C v_F}$ и $r_h = \frac{e^2 \langle p_h^{-1} \rangle}{C v_F}$; характеристические скорости $v_e^2 = \frac{2n_e^2 v_F^2}{3 \langle p_e \rangle \langle p_e^{-1} \rangle}$ и $v_h^2 = \frac{2n_h^2 v_F^2}{3 \langle p_h \rangle \langle p_h^{-1} \rangle}$; частоты $v_{i,e} = v_F \beta_e / \langle p_e \rangle$ и $v_{i,h} = v_F \beta_h / \langle p_h \rangle$, которые определяют инкремент затухания плазменных волн; C – удельная емкость затвора.

Уравнение (12) можно решить в предельных случаях. В точке Дирака ($\mu_{e0,h0} = 0$) $n_e = n_h$, $\beta_e = \beta_h$ и условие разрешимости (12) приводит к спектру с двумя ветвями. Волновая скорость на одной из ветвей (акустической) зависит только от скорости Ферми и химпотенциала:

$$\omega_{ac} = -i \frac{v_{i,e}}{2} + \sqrt{k^2 v_e^2 - \left(\frac{v_{i,e}}{2}\right)^2} \simeq v_e k - i \frac{v_{i,e}}{3}, \quad (13)$$

а возмущения на плазменной ветви являются сильно затухающими и потому фактически не должны приниматься в рассмотрение. Решение (13) соответствует синфазным возмущениям электронной и дырочной компонент, а его затухание определяется только взаимодействием с фононами и примесями.

Раздел 4.5 посвящен выводу уравнений гидродинамики в медленно меняющихся электрических и слабых магнитных полях. Аналогично тому, как это сделано в разделе 4.3, исходное кинетическое уравнение Больцмана имеет вид

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_F \frac{p}{p} \frac{\partial f_e}{\partial r} - e \left(\mathbf{E} + v_F \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{B}}{p} \right) \frac{\partial f_e}{\partial p} = St\{f_e, f_h\} \quad (14)$$

$$\frac{\partial f_h}{\partial t} + v_F \frac{p}{p} \frac{\partial f_h}{\partial r} + e \left(\mathbf{E} - v_F \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{B}}{p} \right) \frac{\partial f_h}{\partial p} = St\{f_h, f_e\} \quad (15)$$

где \mathbf{B} – вектор нормальной компоненты магнитного поля к графеновой плоскости. Уравнения непрерывности и переноса энергии не изменяются, а вот в уравнениях динамики появляется слагаемое, связанное с действием силы Лоренца:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle p_e \rangle \mathbf{V}_e}{v_F} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial (\langle p_e \rangle v_F)}{\partial r} - e \Sigma_e \mathbf{E} + \frac{1}{2} e \Sigma_e \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}_z = \mathbf{F}_e \quad (16)$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle p_h \rangle v_h}{v_F} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial (\langle p_h \rangle v_F)}{\partial r} + e \Sigma_h \mathbf{E} - \frac{1}{2} e \Sigma_h \mathbf{V}_h \times \mathbf{B}_z = \mathbf{F}_h \quad (17)$$

Здесь следует обратить внимание на то, что благодаря линейности энергетического спектра носителей, сила Лоренца, действующая на поток частиц с плотностью тока $\mathbf{j} = e \Sigma \mathbf{V}$, имеет вид

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{2} e \Sigma \mathbf{V} \times \mathbf{B}_z = \frac{1}{2} \mathbf{j} \times \mathbf{B}_z,$$

что ровно в 2 раза меньше, чем аналогичное выражение для классического электронного газа. Множитель $\frac{1}{2}$ получается при усреднении потоков частиц в различных направлениях и связан с тем, что микроскопически все частицы движутся с одной и той же скоростью.

В разделе 4.6 выведено дисперсионное уравнение для возмущений в плазме носителей графена в слабом внешнем магнитном поле: $\det D = 0$, где матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} \frac{3i\omega \langle p_e \rangle}{2v_F} + \beta_{eh} + \beta_{ei} & \frac{e \Sigma_e B_z}{2} & -\beta_{eh} & 0 \\ -\frac{e \Sigma_e B_z}{2} & \frac{3i\omega \langle p_e \rangle}{2v_F} + \beta_{eh} + \beta_{ei} & 0 & -\beta_{eh} \\ -\beta_{eh} & 0 & \frac{3i\omega \langle p_h \rangle}{2v_F} + \beta_{eh} + \beta_{hi} & -\frac{e \Sigma_h B_z}{2} \\ 0 & -\beta_{eh} & \frac{e \Sigma_h B_z}{2} & \frac{3i\omega \langle p_h \rangle}{2v_F} + \beta_{eh} + \beta_{hi} \end{pmatrix}$$

Показано, что в униполярном случае циклотронная частота и эффективная масса определяются как $\omega_0 = \frac{e v_F \Sigma_e B_z}{3 \langle p_e \rangle} = \frac{e B_z}{m^*}$, $\mu = \frac{m^* v_F^2}{2}$.

В разделе 4.7 рассмотрены возмущения плазмы носителей в слабом магнитном поле. Показано, что спектр магнетоплазмонов в такой системе имеет вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \lambda^2 k^2), \quad \lambda = \frac{2T}{e B_z v_F^2} \sqrt{\frac{-3 \text{Li}_2 \left(-e^{\frac{\mu}{T}} \right)}{\ln \left(1 + e^{\frac{\mu}{T}} \right)}} \quad (18)$$

Температурная область применимости развитой теории и оценка нижнего значения химического потенциала имеют вид $T \gg v_F \sqrt{\frac{e \hbar B_z}{2}}$, $\mu \gg \frac{e \hbar v_F^2 B_z}{2T}$.

Раздел 4.8 содержит выводы к Главе 4.

ПЯТАЯ ГЛАВА посвящена вопросам неустойчивости во внешних полях, фазовых переходах и описанию кристаллических систем. Хорошо известно, что свойства конденсированных систем определяются спектрами

элементарных возбуждений в них. Для рассматриваемых систем характерно, что нелокальность приводит к перестройке закона дисперсии элементарных возбуждений, т.е. к изменению термодинамических свойств. Сильные корреляции кристаллических систем также являются следствием дальних взаимодействий (по отношению к межчастичному расстоянию).

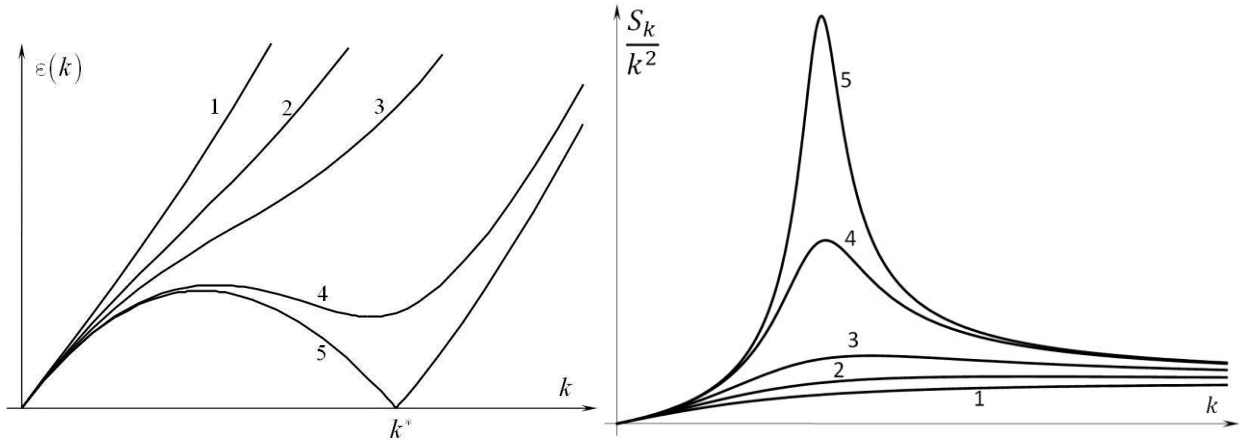


Рис. 2: Характерный вид спектра (слева) $\varepsilon(k)$ и форм-фактора S_k электрорипплов в зависимости от параметра электрического поля: $\alpha_1 = 0$, $0 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$, $\alpha_5 = \alpha_*$. Появление пика на зависимости форм-фактора от волнового числа свидетельствует о дальнем взаимодействии, обусловленном внешним электрическим полем.

В разделе 5.1 рассмотрена задача об элементарных возмущениях поверхности конденсированной среды во внешнем электрическом поле. Гамильтониан элементарных возмущений с волновым числом k может быть представлен в виде:

$$H_k = \frac{\rho Q_k^2}{2k k h_1} + \frac{Q_k^2}{2} (\gamma k^2 - \alpha k + \rho g), \quad (19)$$

$$\alpha = \frac{\varphi_0^2 (\varepsilon - 1)^2}{4\pi (h_1 + \varepsilon h_2)^2 (k h_1 + \varepsilon k h_2)}.$$

ρ – плотность, γ – коэффициент поверхностного натяжения, ε – диэлектрическая проницаемость жидкости, h_1, h_2 – глубина слоя и расстояние до верхнего электрода от невозмущенной поверхности, соответственно, φ_0 – разность потенциалов между электродами, Q_k – амплитуда гармоники возмущения с волновым числом k . Гамильтониан системы сводится к гамильтониану ансамбля гармонических осцилляторов с частотами $\omega_k^2 = (\gamma k^2 - \alpha k + \rho g) \rho^{-1} k k h_1$.

В разделе 5.2 рассмотрена неустойчивость начального состояния, которая связана с возникновением ненулевых мнимых частей у частоты возмущений ω_k . Электрическое поле входит в управляющий параметр α и эффективно влияет на спектр элементарных возмущений поверхности. Особенно ярко это видно на зависимости форм-фактора S_k , которую можно построить, используя формулу Фейнмана

$$S_k \propto \frac{k^2}{m\varepsilon(k)}$$

Спектр квазичастиц-квантов поверхностных возмущений (рипплон) диэлектрической жидкости во внешнем электрическом поле при некоторых значениях разности потенциалов между электродами становится немонотонным (рис. 2).

С точки зрения теории эволюции волновых пакетов профиль в каждый последующий момент времени можно найти, зная ядро эволюционного временного преобразования $K(t' - t, x)$:

$$\xi(t', x) = \int K(t' - t, x - x')\xi(t, x')dx'.$$

В неустойчивом состоянии, фурье-образ ядра $K(t' - t, x)$ становится экспоненциально расходящимся для неустойчивых возмущений. Хорошо известны свойства ядер временных преобразований, связанные с однородностью и афинностью времени: $K(x_3, x_1) = \int K(x_3, x_2)K(x_2, x_1)dx_2$, где под x_1, x_2, x_3 подразумеваются хронологически упорядоченные состояния системы.

Раздел 5.3 посвящен разработке нового способа описания конденсированных структур. Метод временной эволюции амплитудных функций (характерный для волновой теории, а также квантовой теории) можно расширить и перенести на конденсированные структуры: для описания парного коррелятора кристаллов. Афинность в этом случае будет связана с пространственными корреляциями в конденсированных средах.

Для описания аморфной структуры можно исходить из кристаллической структуры, подвергая ее узлы отклонениям. Функция парного распределения (парный коррелятор) узлов кристаллической структуры $p(\mathbf{r})$ может быть найдена как:

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} p_{\alpha}(\mathbf{r}),$$

где слагаемые в правой части представляют собой вклад каждого узла α решетки, а суммирование проводится по всем узлам α .

Показано, что с использованием функций $f_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ плотности вероятности для пары ближайших соседей α и β процесс вычисления вклада каждого узла решетки $p_{\alpha}(\mathbf{r})$ можно представить в виде свертки по кратчайшему графу к узлу α :

$$p_{\alpha}(\mathbf{r}) = \int \dots \int f_{0,1}(\mathbf{r}_1) f_{1,2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \dots f_{n-1,n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{n-1}) d\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{n-1} \quad (20)$$

В разделе 5.4 рассмотрены изотропные структуры. Показано, что функция парного распределения $p(r) = ng(r)$ (n – плотность частиц) может быть представлена в виде

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\alpha})} s^{n_{\alpha}}(\mathbf{k}) \quad (21)$$

где \mathbf{r}_{α} – радиус-вектор узла α ; n_{α} – число узлов в кратчайшем графе (не считая начального узла), ведущем к узлу α из начального узла; функция $s(\mathbf{r})$ представляет собой пространственную плотность вероятности пребывания узла вблизи своего равновесного положения, суммирование необходимо проводить по всем узлам α .

Для кристаллов важным приближением являются f -функции гауссова типа, для которых интегралы в сумме (21) можно рассчитать аналитически:

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \exp\left[-\frac{\mathbf{k}^2 \eta^2}{2}\right], \quad p(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \frac{1}{(\eta \sqrt{2\pi n_{\alpha}})^3} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\alpha})^2}{2\eta^2 n_{\alpha}}\right], \quad (22)$$

где введено среднеквадратичное смещение узлов η , которое может считаться мерой неупорядоченности структуры.

В разделе 5.5 показано, что с использованием предложенного подхода можно вывести уравнение состояния системы.

Раздел 5.6 посвящен поиску связи температуры и неупорядоченности. Показано, что при низких температурах $\eta^2 \sim T$, в то время, как при высоких температурах η слабо зависит от температуры.

В разделе 5.7 строится феноменологическая теория неравновесных превращений неупорядоченных структур на основе разложения для плотности функционала свободной энергии в виде:

$$F = A(\eta) - B(\eta)u_{ll} + \frac{1}{2}C(\eta)u_{ll}^2 + D(\eta)(u_{jk} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{jk})^2, \quad (23)$$

где $A(\eta), B(\eta), C(\eta), D(\eta)$ – некоторые коэффициенты, u_{jk} – тензор деформаций, определенный через усредненные перемещения точек структуры u_j как:

$$u_{jk} = \frac{1}{2}(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k), \quad \nabla_k = \partial / \partial x_k,$$

по повторяющимся в (23) индексам подразумевается суммирование.

Предполагается, что временная эволюция системы вблизи состояния равновесия определяется уравнением Ландау-Халатникова $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\gamma \frac{\delta F}{\delta \eta}$, где $\gamma > 0$ – обобщенная “вязкость” по параметру η . На основе функционала свободной энергии (23) отсюда следует система уравнений для медленных превращений:

$$\begin{aligned} \nabla_j [(K - \frac{2}{3}\mu)\nabla_l u_l] + \nabla_k [\mu(\nabla_k u_j + \nabla_j u_k)] &= \beta \nabla_j \eta, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\gamma [\lambda - \beta u_{ll} + \frac{1}{2}K_\eta u_{ll}^2 + \mu_\eta (u_{jk} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{jk})^2], \end{aligned} \quad (24)$$

где K, μ – модули всестороннего сжатия и сдвига; $\beta(\eta) = \frac{dB}{d\eta}$, где $\lambda(\eta) = \frac{dA}{d\eta}$, $K_\eta = \frac{dK}{d\eta}$, $\mu_\eta = \frac{d\mu}{d\eta}$. Уравнения (24) в совокупности с начальными условиями определяют модель эволюции изотропной структуры.

В случае, когда можно пренебречь сдвиговыми деформациями (например, в случае $\mu \ll K$), система (24) сводится к уравнениям

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\gamma [\lambda - \frac{\beta(B+p(t))}{K} + \frac{1}{2} \frac{K_\eta}{K^2} (B+p(t))^2] \quad \nabla_k u_k = \frac{1}{K} (B+p(t))$$

Коэффициенты в выражении для свободной энергии (23) можно разложить в ряд по отклонениям от равновесного значения η . Отсюда следует, что при пороговом отклонении неупорядоченность может начать расти, что означает микроскопическую локальную неустойчивость структуры.

Раздел 5.8 посвящен обсуждению механизмов генерации неупорядоченности. Кроме анализа неустойчивости, описанной ранее, рассмотрен случай, когда энергия сдвига намного больше энергии всесторонней деформации. Показано, что в этом случае эволюционное уравнение для η имеет вид

$$\dot{\eta} = -\gamma (\lambda_1 + \frac{\mu_2 p_{jk}^2}{2\mu_0^2}) \eta,$$

где $\mu_2 = \frac{1}{2} \partial^2 \mu / \partial \eta^2 < 0$. При пороговых значениях сдвиговых напряжений состояние $\eta = 0$ оказывается неустойчивым и начинается переход в более

неупорядоченное состояние.

Раздел 5.9 посвящен разработке модели теплоемкости для структур с фоновым спектром дробного типа $\omega \sim k^\alpha$ (ω, k – частота и волновое число фонона, α – некоторое число). Выведена интерполяционная формула, отображающая вклад колебаний решётки кристалла и электронной системы:

$$C = A \left[D_\alpha \left(\frac{T_d}{T} \right) - \frac{T_d}{T} D'_\alpha \left(\frac{T_d}{T} \right) \right] + \gamma T, \quad D_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x \frac{z^\alpha}{e^z - 1} dz$$

где A – некоторый интерполяционный параметр, γ характеризует вклад электронной теплоемкости, T_d – обобщенная температура Дебая; показатель α функции Дебая $D_\alpha(x)$ связан с динамической размерностью колебаний D и газовой постоянной R : $D = \frac{A}{\alpha R}$.

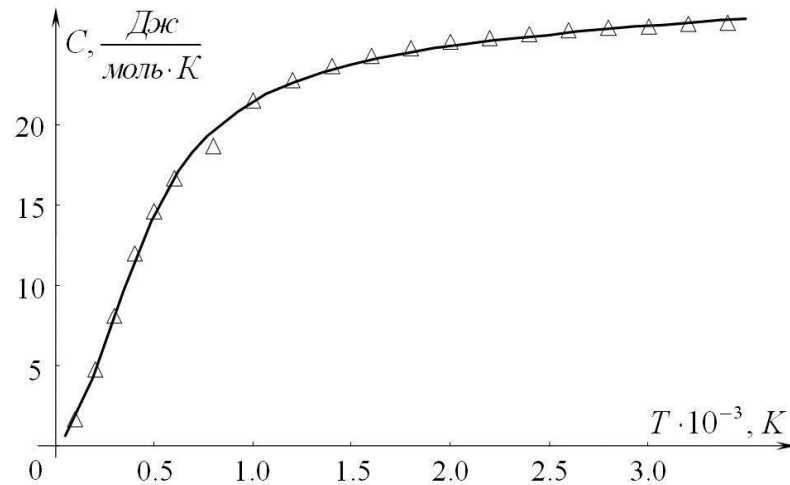


Рис. 3: Теплоёмкость графита: сплошная линия соответствует разработанной модели теплоемкости, точки – экспериментальные данные

В **разделах 5.10, 5.11** проведено сравнение выведенной интерполяционной формулы с экспериментальными данными для углерода, тугоплавких веществ, оксидных стекол и оксидов металлов. Показано хорошее согласие в диапазоне температур 20...1400 К, а для углерода в интервале 20...3500 К.

Раздел 5.12 содержит выводы к Главе 5.

ШЕСТАЯ ГЛАВА посвящена исследованию микроскопических неустойчивостей классических структур и фазовых переходов. Главным образом, при помощи метода молекулярной динамики и моделирования с использованием распределенных вычислительных экспериментов в этой главе решены задачи:

- проверка возможности описания кристаллических и жидких систем при помощи предложенного метода поиска парного коррелятора;
- проверка температурных зависимостей параметра неупорядоченности, в том числе, вблизи точек фазового перехода;
- установление возможности генерации неупорядоченного состояния в системе, подверженной сдвигу.

В разделе 6.1 описан метод моделирования (моделирование выполнялось при помощи пакета LAMMPS), методика обработки и интерпретации результатов.

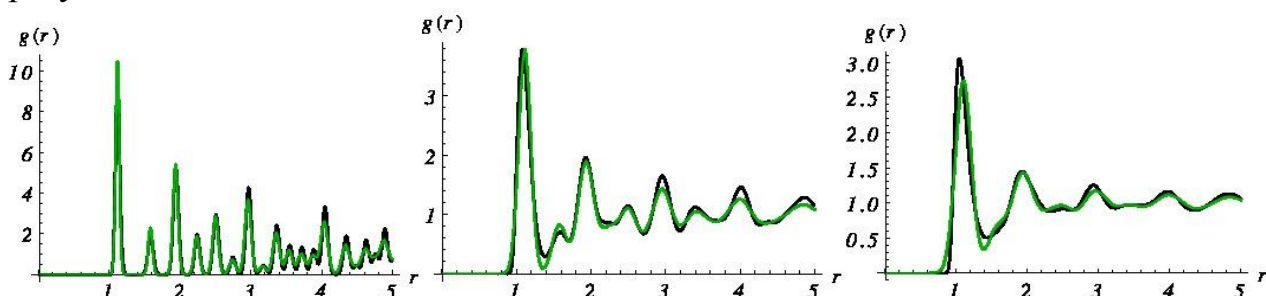


Рис. 4. Леннард-Джонсовский ГЦК-кристалл: численно-найденная функция $g(r)$ (черная линия) и интерполяция формулой (21) (светлая линия). Температуры (слева направо): 0.1, 1 и 1.6 (вблизи точки плавления) в единицах Леннарда-Джонса.

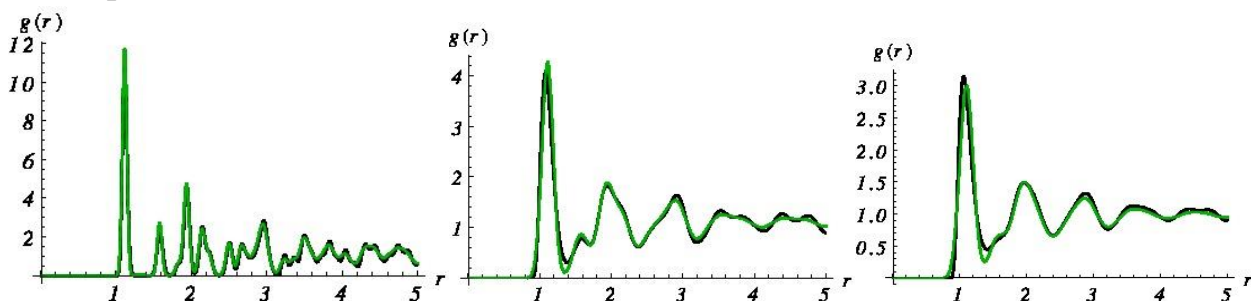


Рис. 5. Леннард-Джонсовский ГПУ-кристалл: численно-найденная функция $g(r)$ (черная линия) и интерполяция формулой (21) (светлая линия). Температуры (слева направо): 0.1, 1 и 1.55 (вблизи точки плавления) в единицах Леннарда-Джонса.

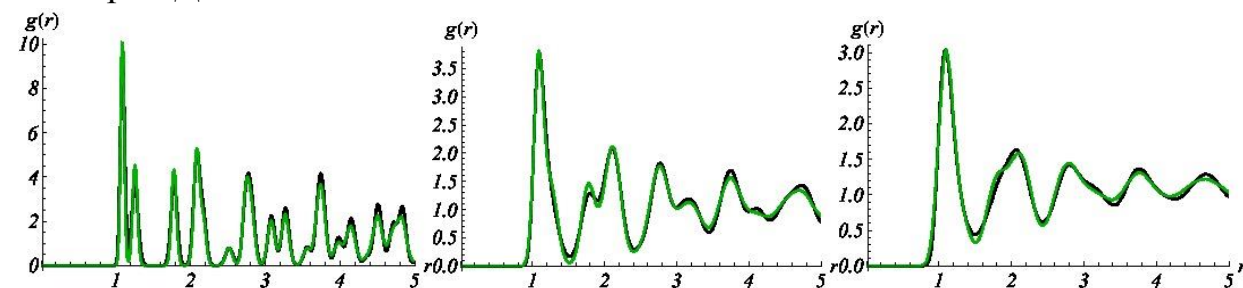


Рис. 6. Дебаевский ОЦК-кристалл: численно-найденная функция $g(r)$ (черная линия) и интерполяция формулой (21) (светлая линия). Температуры

(слева направо): 0.1, 0.55 и 0.9 (точка плавления – 0.95) в единицах потенциала Дебая.

Раздел 6.2 посвящен исследованию структурных неустойчивостей в двумерной структуре, частицы которой взаимодействуют с потенциалами Леннарда-Джонса, начальное расположение узлов до перехода в беспорядочное состояние представляет собой гексагональную решетку. Аналогичная задача для трехмерного случая решена в **разделе 6.3**. На рис. 3 и 4 приведены парные корреляторы для кристалла в широком диапазоне температур, из которых видно хорошее согласие предложенного метода и результатов вычислительных экспериментов.

В **разделе 6.4** рассмотрена трехмерная система частиц, взаимодействующих между собой с потенциалом Дебая (экранированный кулоновский потенциал) $\varphi \sim e^{-r/b}/r$; такая система является модельной при исследовании структурных переходов в кристаллах пылевой плазмы, коллоидных кристаллах, различных растворах электролитов. Результаты сравнения теории с вычислительными экспериментами приведены на рис. 6.

Раздел 6.5 посвящен проверке гипотезы о генерации неупорядоченного состояния при сдвиге. Проведено моделирование трехмерной системы частиц, взаимодействующих с потенциалами Леннарда-Джонса, подверженной сдвигу при различных температурах. Построена фазовая диаграмма в координатах "напряжение – температура".

Раздел 6.6 содержит выводы к Главе 6. Все результаты моделирования подтверждают поведение систем, описываемое в рамках развитых теоретических положений настоящей диссертации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ обобщает основные результаты диссертационной работы.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В качестве основных результатов диссертационной работы можно выделить:

1. Найдено новое параметрическое представление дисперсионного соотношения для флуктуаций заряженной поверхности раздела двух конденсированных сред. При помощи параметрического представления показано, что наличие верхней среды приводит к изменению бифуркационных значений волновых чисел, отвечающих переходу двух затухающих периодических мод в две апериодические. Найден спектр возмущений для состояний вблизи критического электрического поля. Показано, что дрейфовое

относительное движение приводит к устранению точек бифуркации. Вычислены для характерных разложений дисперсионной зависимости $\omega(k)$ функции Грина, определяющие линейную эволюцию волновых пакетов возмущений. Решены задачи о линейной эволюции для различных законов дисперсии, в том числе, вблизи перехода системы в неустойчивое состояние.

2. Выведены квадратично-нелинейные уравнения, а также уравнения простых волн для возмущений проводящей жидкости в электрическом поле. Развита методика вывода уравнений наперед заданного порядка нелинейности с учетом влияния электрического поля. Показано, что наличие электрического поля (и связанной с ним нелокальности взаимодействия) приводит к появлению в эволюционных уравнениях оператора Гильберта. Разработан новый способ вывода уравнений простых волн.

3. Показано, что даже слабое электрическое поле существенно влияет на вид стационарных решений эволюционного уравнения. При разложении по параметру электрического поля поиск профиля стационарной волны сводится к решению уравнений Кортевега–де Фриза и Шрёдингера. Учет слабого электрического поля приводит к появлению дополнительных максимумов в профиле солитона. Найдены соответствующие функции поправки.

4. Разработанные методы эволюции возмущений в конденсированных системах во внешних полях применены для исследования электронно-дырочной плазмы носителей в графене. Показано, что при выводе уравнений гидродинамики плазмы носителей в графене необходимо учитывать существенную специфику спектра носителей заряда – линейную зависимость между энергией и импульсом носителей, а задача носит самосогласованный характер. Выведены уравнения квазигидродинамики плазмы носителей в графене, проанализированы возмущения двумерной электрон-дырочной плазмы.

5. В униполярной плазме скорость волн зависит от напряжения на затворе и может заметно превышать скорость ферми носителей заряда в графене. Рассмотрены плазменные волны в графене с относительно высокими плотностями носителей. Показано, что в униполярной плазме могут распространяться слабозатухающие волны, скорость которых определяется как параметрами самого графена, так и параметрами транзисторной структуры.

6. В дираковской точке слабым затуханием обладают волны со скоростью, не зависящей от параметров транзисторной структуры. Слабое затухание данных волн обусловлено синфазным движением электронов и дырок, что фактически исключает влияние частых электрон-дырочных

столкновений на затухание. Скорость затухания волн рассмотренных типов определяется, поэтому, рассеянием на акустических фонах и дефектах.

7. Рассмотрены малые возмущения поверхности диэлектрической идеальной жидкости в зазоре между двумя плоскими электродами. Показано, что линеаризованный гамильтониан системы, отнесенный к единице длины по горизонтали, можно представить в виде суммы гамильтонианов гармонических осцилляторов. Влияние электрического поля приводит к появлению выделенного масштаба возмущений, а неустойчивость поверхности в электрическом поле аналогична бозе-конденсации квантов поверхностных возбуждений (электрорипплов). Форм-фактор рипплов приобретает немонотонный вид во внешнем электрическом поле, что говорит о появлении корреляций на расстояниях, намного превышающих межчастичные.

8. На основе методов, развитых для теории эволюции волновых возмущений, разработан новый способ описания кристаллических структур. Записаны конфигурационный интеграл и уравнение состояния, а также температурные асимптотики для параметра неупорядоченности. Предложена модель теплоёмкости кристаллов различной динамической связности и размерности с учетом вклада теплоёмкости решётки и электронного газа.

9. При помощи вычислительных экспериментов для 2D- и 3D-систем с взаимодействием, описываемого потенциалами Леннарда-Джонса и Дебая, установлено, что метод s-функций применим для построения парных корреляционных функций межчастичных расстояний. Показана эффективность этого способа для анализа кристаллических систем вплоть до температуры плавления. Прогнозируемые температурные зависимости параметра неупорядоченности согласуются с вычислительными экспериментами.

Основные результаты диссертации отражены в работах автора:

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. I.N. Aliev, **S.O. Yurchenko**, E.V. Nazarova. Features of combined instability of a charged interface between moving media // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2007. – Vol. 80, No. 5. – P.912-917.

2. I.N. Aliev, **S.O. Yurchenko**, E.V. Nazarova. On the problem of instability of the boundary of two media of finite thickness // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2007. – Vol. 80, No. 6. – P.1199-1205.

3. Алиев И.Н., **Юрченко С.О.** О нелинейных волнах на заряженной границе раздела двух движущихся сред // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”. – 2008. – №1. – С. 56-69.

4. Алиев И.Н., Назарова Е.В., **Юрченко С.О.** Исследование комбинированной Френкеля-Тонкса и конвективной неустойчивости // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”. – 2008. – №3. – С. 16-28.

5. Алиев И.Н., Резник С.В., **Юрченко С.О.** О фрактонной модели тепловых свойств наноструктур // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”. – 2008. – №4. – С. 54-61.

6. Алиев И.Н., **Юрченко С.О.** О нелинейных волнах, распространяющихся на поверхности идеальной проводящей жидкости в электрическом поле // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2009. – №5. – С.139-150.

7. **Юрченко С.О.**, Алиев И.Н. О расщеплении и бифуркациях решений дисперсионного уравнения волн малой амплитуды на заряженной поверхности раздела двух сред // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”. – 2009. – №3. – С. 38-45.

8. Алиев И.Н., **Юрченко С.О.** Эволюция возмущений заряженной поверхности раздела несмешивающихся невязких жидкостей в зазоре между двумя электродами // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2010. – №5. – С.140-150.

9. Федоров А.К., **Юрченко С.О.** Томографические методы в теории вторичного квантования // Наука и образование: электронное научно-техническое издание, 2011. – №13. – С.62-69.

10. **Юрченко С.О.** О дробной динамической модели теплоемкости кристаллических тел // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2011. – №2. – С.41-50.

11. **Юрченко С.О.**, Алиев И.Н. О квантовании поверхностных возмущений невязкой жидкости в однородном внешнем электрическом поле // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”. – 2011, №3. – С.84-89.

12. Hydrodynamic model for electron-hole plasma in graphene / D. Svintsov, V. Vyurkov V., **S. Yurchenko**, T. Otsuji and V. Ryzhii // Journal of Applied Physics. – 2012. – Vol. 111. – 083715.

13. Федоров А.К., **Юрченко С.О.** Симплектические томограммы в представлении фейнмановскими интегралами по траекториям // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. “Естественные науки”. – 2012. – №2. – С. 29-38.

14. Structure of the nanobubble clusters of dissolved air in liquid media / N.F. Bunkin, **S.O. Yurchenko**, N.V. Suyazov et al. // Journal of Biological Physics,

2012. – Vol. 38. – No. 1. – P.121-152.

15. Effect of plasma resonances on dynamic characteristics of double graphene-layer optical modulator / V. Ryzhii, T. Otsuji, M. Ryzhii, V. G. Leiman, **S.O. Yurchenko**, V. Mitin, M. S. Shur // Journal of Applied Physics. – 2012. – Vol. 112. – 104507.

16. Fedorov A.K., **Yurchenko S.O.** Quantum tomograms and their application in quantum information science // Journal of Physics: Conference Series, 2013. – Vol. 414. – No 1. – 012040.

17. Graphene terahertz uncooled bolometers / Ryzhii, V., Otsuji, T., Ryzhii, M., Ryabova, N., **Yurchenko S.O.**, Mitin, V., Shur, M.S. // Journal of Physics D: Applied Physics, 2013. – Vol. 46. – No 6. – 065102.

18. Graphene-Based Electro-Optical Modulator: Concept and Analysis / V. Ryzhii, A. Satou, T. Otsuji, M. Ryzhii, N. Ryabova, **S.O. Yurchenko** and M. Shur // IMFEDK 2012 - 2012 International Meeting for Future of Electron Devices, Kansai, art. no. 6218573 , pp. 44-45

19. **Юрченко С.О.** Новый метод построения функции парного распределения расстояний между частицами в неупорядоченных структурах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”. – 2012. – №55. – С.172-179.

20. **Юрченко С.О.**, Крючков Н.П. Неупорядоченные состояния и функции парного распределения расстояний в Леннард-Джонсовской системе // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”. – 2012. – №55. – С.13-20.

21. Федоров А.К., **Юрченко С.О.** Томографический ряд теории возмущений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”. – 2012. – №55. – С.6-12.

22. **Юрченко С.О.**, Алиев И.Н. Операторный способ вывода уравнений простых волн в приближении Буссинеска // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”. – 2012. – №55. – С.21-28.

23. **Юрченко С.О.**, Свинцов Д.А. Парадокс вычисления потока носителей в графене // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Приборостроение". – 2011. – №52. – С.100-103.

24. Гидродинамическая модель малых возмущений и спектр электрон-дырочных плазмонов в графене / **Юрченко С.О.**, Свинцов Д.А., Вьюрков В.В., Рыжий В.И. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2011. – №52. – С.56-69.

25. К.В. Михайловский, С.В. Резник, **С.О. Юрченко**. Прогнозирование

зарождения и эволюции дефектов в материалах композитных конструкций многоразовых космических аппаратов на основе многомасштабного математического моделирования // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". – 2010. – №5. – С.30-43.

26. **Юрченко С.О.**, Рыжий В.И. Гидродинамическая модель электрон-дырочной плазмы носителей графена в стационарных электромагнитных полях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Приборостроение". – 2012. – №8. – С.178-186.

27. Терагерцовые болометры на основе графеновых p-I-n гетероструктур: концепция, модель и характеристики / В.И. Рыжий, Н.Л. Рябова, **С.О. Юрченко**, Т. Отцуджи, М.В. Рыжий // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Приборостроение". – 2012. – №9. – С.174-183.

28. **Юрченко С.О.**, Крючков Н.П. Компьютерное моделирование переходов "порядок-беспорядок" при тепловом и сдвиговом воздействии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Машиностроение". – 2012. – №6. – С.193-201.

29. **Юрченко С.О.**, Крючков Н.П. Изменения функции распределения расстояний между частицами Леннарда-Джонса в двумерной системе при плавлении // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Естественные науки". – 2012. – №6. – С.262-270.

30. Анализ спектральных характеристик воды и льда в ТГц области спектра в процессе фазового перехода / Зайцев К.И., Федоров А.К., Фокина И.В., **Юрченко С.О.** // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Естественные науки". – 2012. – №6. – С.113-119.

31. **Юрченко С.О.** Влияние слабого электрического поля на нелинейные возмущения поверхности раздела конденсированных сред // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия "Естественные науки". – 2012. – №6. – С.244-256.

Учебные пособия и монографии:

32. Modeling the cluster structure of dissolved air nanobubbles in liquid media / N.F. Bunkin, **S.O. Yurchenko**, N.V.Suyazov et al. // Classification and Application of Fractals. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2011. (ISBN 978-1-61209-967-5) – 50 pp.

33. Резник С.В., Михайловский К.В., **Юрченко С.О.** Термостойкие композиты и их использование в многоразовых объектах ракетно-космической техники: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 55 с.

Тезисы конференций:

34. А.К. Fedorov, **S.O. Yurchenko**, K.I. Zaytsev, I.N. Fokina. Quantum Tomograms and Their Application in Quantum Information Science. Book of Abstracts. 21th International Laser Physics Workshop. University of Calgary, Alberta, Canada. 23-27 July. P. 79.

35. Plasma Effects in Graphene-based Electro-optical Modulators / M. Ryzhii, T. Otsuji, **S. Yurchenko**, N. Ryabova, V. Ryzhii, and M. S. Shur // Proceedings of the Progress In Electromagnetics Research Symposium 2012 in Moscow, Russia, 19-23 August, 2012.

36. **Юрченко С.О.** К теории многомасштабной эволюции неупорядоченных структур // Приложение к журналу “Физическое образование в вузах”. – 2010. – Т.16, №1. – С. 27.

37. Федоров А.К., **Юрченко С.О.** Томографическое представление в квантовой механике // Физическое образование в вузах (приложение). Труды конференции-конкурса молодых физиков, XVII (2011), №1, С. 23.

38. **Юрченко С.О.**, Алиев И.Н. Особенности комбинированной неустойчивости заряженной границы раздела движущихся сред // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXX Академических чтений по космонавтике. (Москва, январь 2006 г.) / Под ред. А.К. Медведевой. – М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2006. – С. 316–318.

39. И.Н. Алиев, А.В. Косоголов, **С.О. Юрченко**. О постановке нелинейной задачи в электродинамике поверхности жидкости // Необратимые процессы в природе и технике: Труды Четвертой Всероссийской конференции. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, ФИАН, 2007. – С. 209–211.

40. **Юрченко С.О.** Учет нелинейных эффектов в динамике движения топлива в двигателях малой тяги // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXI Академических чтений по космонавтике. (Москва, январь 2007 г.) / Под ред. А.К. Медведевой. – М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2007. – С. 364.

41. **Юрченко С.О.** К многомасштабной теории эволюции неупорядоченных структур // Наноинженерия, 2011. - №3. - С. 28-35.

42. И.Н. Алиев, В.П. Карасева, **С.О. Юрченко**. Некоторые вопросы динамики движения топлива в реактивных двигателях малой тяги // Электромеханические и внутрикамерные процессы в энергетических

установках, струйная акустика и диагностика, приборы и методы контроля природной среды, веществ, материалов и изделий. Сб. материалов XIX Всероссийской межвузовской научно-технической конференции. – Казань: Изд-во «Отечество», 2007. – С. 125–127.

43. И.Н. Алиев, В.П. Карасева, **С.О. Юрченко**. Учет нелинейных эффектов в динамике движения топлива в реактивных двигателях малой тяги // Шестая международная научно-техническая конференция. Чкаловские чтения. Посвящается 70-летию перелета экипажа Чкалова и 60-летию ЕАТК ГА им. В.П. Чкалова. Сборник материалов. – Егорьевск: ЕАТК ГА им. В.П. Чкалова, 2007. – С. 79–80.

44. **С.О. Юрченко**, И.Н. Алиев, В.А. Павлов. О расщеплении решений дисперсионного уравнения волн малой амплитуды на поверхности раздела несмешивающихся жидкостей // Необратимые процессы в природе и технике: Труды Четвертой Всероссийской конференции. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, ФИАН, 2009. – С. 142–145.

45. **С.О. Юрченко**, И.Н. Алиев, С.Л. Гайдашов. О влиянии электрического поля на вид нелинейных волн на поверхности проводящей жидкости // Электромеханические и внутрикамерные процессы в энергетических установках, струйная акустика и диагностика, приборы и методы контроля природной среды, веществ, материалов и изделий. Сб. материалов XX Всероссийской межвузовской научно-технической конференции. – Казань: Изд-во «Отечество», 2009. – С.5-6.

46. **Юрченко С.О.** Исследование равновесных состояний и теплофизических свойств фрактальных нанодфектов в карбидных керамиках // Сб. трудов Третьей международной конференции “Ракетно-космическая техника: фундаментальные и прикладные проблемы” (Москва, 19-23 ноября 2007 г.). – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – С.201-205.

47. Михайловский К.В., **Юрченко С.О.** Математическое моделирование эволюции свойств дефектных образований различных структурных уровней в углерод-керамических композитах // Студенческий научный вестник. Сборник статей 2-й научно-исследовательской выставки “Политехника” (3-7 декабря 2007 г., МГТУ им. Н.Э. Баумана) / Под ред. К. Е. Демихова. – М.: НТА “АПФН”, 2007. (Сер. Профессионал). – Т.5. – С. 32-39.

48. **Юрченко С.О.** Анализ эволюции нанодфектов в керамических материалах при силовом и тепловом воздействии // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXII Академических чтений по космонавтике. (Москва, январь 2008 г.) / Под ред. А.К. Медведевой. – М.:

Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2008. – С. 391-392.

49. Александров И.А., Хатухов В.М., **Юрченко С.О.** Исследование влияния структуры поверхности углеродных волокон на прочностные свойства армируемых композиционных материалов. // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXXII Академических чтений по космонавтике. Москва, январь 2008 г./ Под ред. А.К. Медведевой. – М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2008. – С. 393-394.

50. **Юрченко С.О.**, Ильин А.В. Теория многомасштабной эволюции дефектных структур в углерод-керамических композиционных материалах // Студенческий научный вестник. Сб. статей 3-й научно-инженерной выставки “Политехника” (1-4 декабря 2008 г., МГТУ им. Н. Э. Баумана) / Под ред. К.Е. Демихова. – М.: НТА “АПФН”, 2008. (Сер. Профессионал). – Т.7. – С. 120-126.

51. **Юрченко С.О.** О механизме образования субмикронных трещин в углерод-керамических композиционных материалах // Необратимые процессы в природе и технике: Труды Четвертой Всероссийской конференции. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, ФИАН, 2009. – С. 146-149.

52. **Юрченко С.О.**, Алиев И.Н., Косоголов А.В. Линейная эволюция возмущений в электрогидродинамике поверхности проводящей жидкости// Необратимые процессы в природе и технике: Труды Четвертой Всероссийской конференции. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – С. 306-318.

53. **Юрченко С.О.** О теплоёмкости кристаллических веществ // Необратимые процессы в природе и технике: Сб. науч. трудов. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – С. 283-291

54. **Юрченко С.О.** Об операторном уравнении простых волн в приближении Буссинеска // Необратимые процессы в природе и технике: Труды Четвертой Всероссийской конференции. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – С. 283-291.