

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А.Ф. ИОФФЕ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Попов Алексей Юрьевич

**Теория распространения и трансформации микроволновых
пучков в неоднородной турбулентной плазме**

01.04.08 Физика плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург - 2015

Оглавление

Введение	7
Глава 1. Теория распространения и трансформации пучков электромагнитных волн в неоднородной турбулентной плазме в условиях сильной рефракции и ее применение для описания флуктуационной рефлектометрии	20
1.1. Полоидальная корреляционная рефлектометрия.....	22
1.1.1. Описание модели.....	22
1.1.2. Реконструкция профиля турбулентности и скорости полоидального вращения.....	27
1.1.3. Выводы.....	29
1.2. Радиальная доплеровская корреляционная рефлектометрия (РКДР).....	30
1.2.1. Амплитуда сигнала рассеяния и кросс-корреляционная функция двух сигналов.....	30
1.2.2. Аналитическая модель РКДР.....	31
1.2.3. Сравнение теоретических зависимостей с результатами численного моделирования РКДР	35
1.2.4. Выводы.....	39
1.3. Радиальная корреляционная рефлектометрия	41
1.3.1. Одномерная модель радиальной корреляционной рефлектометрии.....	43
1.3.2. Двумерная модель.....	52
1.3.2.1. Случай слабой дифракции рассеянных волн.....	56
1.3.2.2. Случай сильной дифракции рассеянных волн.....	61
1.3.3. Выводы.....	64
1.4. Доплеровская рефлектометрия.....	66
1.4.1. Нелинейный режим доплеровской рефлектометрии.....	67
1.4.2. Свойства мощности принятого сигнала.....	71

1.4.3. Спектр рефлектометрического сигнала.....	72
1.4.4. Выводы.....	73
1.5. Нелинейный режим брэгговского рассеяния и ограничения рефлектометрической диагностики профиля плотности плазмы.....	75
1.5.1. Сильное отражение зондирующей волны в результате брэгговского рассеяния «назад».....	78
1.5.2. Запирание СВЧ волны в результате сильного брэгговского рассеяния «назад».....	81
1.5.3. Выводы.....	84
1.6. Методы восстановления и интерпретации данных флуктуационной рефлектометрии.....	85
1.6.1. Анализ возможности восстановления спектров турбулентности по радиальным волновым числам для флуктуаций со значительным полоидальным волновым числом по результатам радиальных корреляционных измерений с наклонным зондированием.....	85
1.6.2. Метод реконструкции радиального профиля турбулентности на основании результатов измерений зависимости уровня флуктуаций фазы рефлектометрического сигнала от частоты зондирования.....	90
1.6.3. Схема усиленного рассеяния флуктуационной рефлектометрии.....	96
1.6.3.1. Анализ усиленного рассеяния (УР) в одномерной модели плазмы.....	97
1.6.3.2. Сопоставление с результатами полноволнового моделирования усиления зондирующей волны в двумерно-неоднородной плазме.....	103
1.6.4. Выводы.....	106
Глава 2. Теория линейной трансформации пучков электромагнитных волн, распространяющихся под углом к магнитному полю в среде с сильной рефракцией.....	108
2.1. Система укороченных уравнений, описывающая линейную трансформацию пучков электромагнитных волн в окрестности критической поверхности в трехмерно-неоднородной плазме без учета магнитного шира и кривизны магнитной силовой линии	110
2.1.1. Решение системы укороченных волновых уравнений.....	114

2.1.2. Предельный переход к случаю одномерно-неоднородной плазмы.....	118
2.2. Сравнение аналитических формул с результатами численного моделирования линейной трансформации пучков электромагнитных волн	119
2.3. Анализ влияния шира магнитного поля и кривизны магнитной силовых линий на эффективность линейной трансформации пучков электромагнитных волн в окрестности критической поверхности.....	123
2.4. Анализ влияния низкочастотной дрейфовой турбулентности на эффективность линейной трансформации пучков электромагнитных волн в окрестности критической поверхности.....	130
2.5. Выводы.....	137
Глава 3. Линейная теория распространения пучков электронных бернштейновских волн в двумерно-неоднородной плазме с учетом пространственной дисперсии и слабых релятивистских эффектов.....	138
3.1. Теория квазиперпендикулярного по отношению к внешнему магнитному полю распространения электронных бернштейновских волн в неоднородной плазме.....	139
3.1.1. Выводы.....	147
3.2. Двумерная теория распространения и затухания электронных бернштейновских волн в экваториальной плоскости сферических токамаков.....	148
3.2.1. Волновое уравнение для электронных бернштейновских волн в экваториальной плоскости сферического токамака.....	153
3.2.2. Затухание собственных мод.....	158
3.2.3. Выводы.....	160
3.3. Теория распространения и затухания электронных бернштейновских волн в сферических токамаках при немонотонном профиле модуля магнитного поля.....	161
3.3.1. Описание электронных бернштейновских волн в рамках электростатического приближения.....	161
3.3.2. Описание электронных бернштейновских волн в окрестности ЭЦ	

резонанса.....	164
3.3.3. Полноволновое описание электронных бернштейновских волн в окрестности ЭЦ резонанса.....	166
3.3.4. Выводы.....	169
Глава 4. Низкопороговая нелинейная трансформация пучков электромагнитных волн электронного циклотронного диапазона частот.....	171
4.1. Низкопороговая неустойчивость индуцированного рассеяния «назад» необыкновенной волны.....	172
4.1.1. Уравнения для амплитуд волн, участвующих в распаде волны накачки.....	173
4.1.2. Конвективная отражательная неустойчивость.....	178
4.1.3. Абсолютная отражательная неустойчивость.....	181
4.1.4. Выводы.....	183
4.2. Параметрический механизм нагрева ионов в экспериментах по ЭЦ нагреву плазмы в тороидальных ловушках.....	185
4.2.1. Основные уравнения.....	185
4.2.2. Укороченные уравнения для электронных и ионных бернштейновских волн.....	187
4.2.3. Конвективная параметрическая неустойчивость.....	190
4.2.4. Абсолютная параметрическая неустойчивость.....	193
4.2.5. Выводы.....	196
4.3. Механизм низкопороговой неустойчивости параметрического распада пучка электронных циклотронных волн необыкновенной поляризации в турбулентной плазме.....	197
4.3.1. Анализ трехмерного запираения лучевой траектории ЭБ волны в дрейфовой ячейке...	197
4.3.2. Полуаналитическое описание запираения ЭБ волны в возмущении плотности плазмы.....	200
4.3.3. Параметрическое возбуждение 3D резонатора ЭБ волн пучком электронных циклотронных волн необыкновенной поляризации.....	206

4.3.4. Выводы.....	210
4.4. Низкопороговая двухплазменная параметрическая неустойчивость пучка электронных циклотронных волн необыкновенной поляризации.....	211
4.4.1. Первичный низкопороговый параметрический распад необыкновенной волны.....	211
4.4.2. Насыщение двухплазменной неустойчивости.....	222
4.4.2.1. Каскадный механизм насыщения при широкой области локализации первичных волн на магнитной поверхности.....	223
4.4.2.2. Каскадный механизм насыщения при узкой области локализации первичных волн на магнитной поверхности.....	235
4.4.3. Нелинейное взаимодействие дочерних плазмонов, приводящее к генерации необыкновенной волны.....	244
4.4.4. Выводы.....	248
Заключение.....	250
Список литературы.....	254

Введение

К настоящему времени электродинамика неоднородной плазмы достигла существенного прогресса, который обусловлен последовательным применением асимптотических методов к решению дифференциальных уравнений второго и более высокого порядка, а также к интегро-дифференциальным уравнениям. В итоге, это привело к возможности описать в рамках модельных задач линейную трансформацию волн, - зацепление собственных решений, относящихся к различным ветвям колебаний неоднородной замагниченной плазмы на одной частоте, - а также нелинейную трансформацию волн, - взаимодействие нескольких собственных решений, для частот и волновых чисел которых хотя бы локально выполнены резонансные распадные условия.

Линейная трансформация волн активно используется в разных сценариях дополнительного нагрева плазмы. Она лежит в основании преобразования мощных пучков электромагнитных волн, которые в силу параметров разряда либо слабо поглощаются частицами, либо не могут вообще распространяться в плазме, в пучки коротковолновых плазменных колебаний (ионные или электронные бернштейновские волны). Последние не имеют областей непрозрачности в плазме и полностью поглощаются в окрестности циклотронной гармоник, ближайшей к области линейной трансформации.

Нелинейная трансформация волн лежит в основании диагностик и исследований различных видов плазменных неустойчивостей и микротурбулентности с помощью коллективного рассеяния зондирующих микроволновых пучков в плазменном объеме, зачастую с использованием частот близких к характерным плазменным. В то же время нелинейная трансформация является опасным паразитным эффектом при дополнительном нагреве плазмы и генерации безындукционных токов с помощью мощных СВЧ пучков. Аномальное рассеяние и поглощение микроволновых пучков приводит к снижению эффективности и локальности дополнительного нагрева плазмы.

В развитых до настоящего времени теоретических моделях, описывающих процесс распространения, линейной и нелинейной трансформации микроволновых пучков в плазме тороидальных установок, использовались упрощающие предположения, позволявшие свести анализируемую задачу к одномерной, допускающей аналитическое решение. Однако такое упрощение возможно не во всех случаях и далеко не всегда одномерная модель адекватно описывает экспериментальную ситуацию. Так в последнее время были получены экспериментальные данные, которые невозможно объяснить без учета двумерной/трехмерной неоднородности плазмы токамака/стелларатора, реального профиля невозмущенных

параметров, эффектов дифракции и рефракции пучка и наличия в плазме низкочастотной турбулентности. Поэтому диссертация посвящена развитию теоретических моделей адекватных реальному эксперименту, которые описывают линейную и нелинейную трансформацию волновых пучков.

Актуальность темы и степень ее разработанности

Нелинейная трансформация пучков СВЧ волн лежит в основе коллективного рассеяния пучков зондирующих СВЧ волн, которое широко используется как метод диагностики плазмы для получения информации о турбулентности. Для улучшения локализации измерений характеристик турбулентности при использовании этого метода был предложен новый подход, в рамках которого зондирование осуществляется СВЧ волнами, имеющими в плазме область с сильной рефракцией. Использование этого подхода привело к появлению одного из самых распространенных активных методов диагностики флуктуаций плотности плазмы - флуктуационной рефлектометрии [1], - чьим несомненным преимуществом является относительная техническая простота. Для интерпретации данных измерений и оценки экспериментальных параметров, полученных с помощью различных разновидностей флуктуационной рефлектометрии, до последнего времени использовались упрощенные модели, основанные на предположении о линейном характере рассеяния зондирующей волны и отождествлении поведения рефлектометрического сигнала с флуктуациями плотности плазмы в окрестности поверхности отсечки [2 - 4]. Однако, предсказания, сделанные в рамках этих упрощенных моделей, находятся в прямом противоречии с экспериментальными данными, что оставляет открытыми вопросы о локальности измерений и о возможности разрешения измерений по спектрам радиальных волновых векторов флуктуаций плотности. Это противоречие делает актуальным развитие линейной и нелинейной (по амплитуде турбулентности) моделей флуктуационной рефлектометрии и разработку математических процедур восстановления спектров и радиальных профилей флуктуаций плотности.

Линейная трансформация пучков СВЧ волн играет ключевую роль в методе нагрева плазмы, основанного на использовании электронных бернштейновских волн (ЭБВ). Этот метод используется при плотностях плазмы выше критической, когда применение традиционной схемы нагрева при вводе пучка СВЧ волн со стороны слабого магнитного поля сталкивается с проблемой доставки излучения в центральную часть плазменного шнура в область электронного циклотронного (ЭЦ) резонанса [70 - 74]. Задача корректного теоретического

описания этого метода нагрева в рамках реалистичной двумерной модели плазмы распадается на две.

Первая из них – построение теории линейной трансформации быстрых волн в окрестности критической поверхности с учетом реальной неоднородности плазмы. Эта задача до последнего времени была проанализирована в рамках приближения одномерно неоднородной плазмы, а также в модели внешнего магнитного поля с прямолинейными силовыми линиями [71 - 76]. Вопрос о возможности учета влияния двумерной неоднородности плазмы и о способе аналитического описания линейной связи быстрых волн в реалистичной модели плазмы долгие годы оставался открытым. В последнее время возникло твердое убеждение в необходимости анализа этой проблемы с учетом как двумерной (для стелларатора – трехмерной) неоднородности плазмы [77], так и наличия шира внешнего магнитного поля [78].

Вторая задача – развитие теории распространения и поглощения ЭБВ в двумерно-неоднородной плазме с учетом пространственной дисперсии и слабых релятивистских эффектов. Поскольку ЭБВ является сильно замедленной плазменной волной с весьма небольшой по сравнению с вакуумной поперечной длиной волны, для ее описания обычно вполне достаточно ограничиться потенциальным приближением. К сожалению, точное потенциальное релятивистское дисперсионное уравнение в ЭЦ диапазоне частот является громоздким и не может быть эффективно использовано при теоретическом анализе [93 - 97]. Поэтому представляет интерес вывод приближенного дисперсионного уравнения ЭБВ, учитывающего эффекты слабого релятивизма. Кроме того, при распространении ЭБВ в токамаке с малым аспектным отношением имеют место явления, которые не возникают в традиционных установках с большим аспектным отношением. Среди них – возбуждение плазменного волновода для волн, распространяющихся в экваториальной плоскости, появление новых областей прозрачности и заметное отражение падающей волны от поверхности ЭЦ резонанса. Ранее эти явления не были исследованы в литературе. По этой причине задача, включающая их анализ и описание, представляет не только практический, но и самостоятельный теоретический интерес.

Электронный циклотронный нагрев плазмы – это эффективный метод локального дополнительного нагрева, который широко применяется в настоящее время в экспериментах на тороидальных магнитных ловушках и планируется для использования в токамаке - реакторе ITER как для нагрева электронов плазмы, так и для контроля и подавления неоклассической тиринг - моды. Эффективность и привлекательность этого метода базируется на использовании надежных и эффективных генераторов, - гиротронов, - которые позволяют возбуждать пучки ЭЦ волн с мощностью от 100 кВт до 1МВт в каждом. Согласно общепринятым представлениям, распространение ЭЦ волн и их поглощение в плазме хорошо описываются в рамках линейной

теории и являются детально предсказуемыми. Теоретический анализ таких нелинейных явлений как параметрические распадные неустойчивости ЭЦ волн, выполненный в предположении монотонных профилей плотности плазмы, предсказывает крайне высокий порог их возникновения, существенно (на несколько порядков) превышающий мощность современных гиротронов [118 - 120]. Вместе с тем в последнее время накопилась значительное число наблюдений явлений, не укладывающихся в простую линейную картину. К ним относятся ускорение и нагрев ионов, наблюдавшиеся различными диагностическими методами на установках TJ-II [125] и TCV [126], а также аномальное отражение греющего излучения «назад», сопровождающееся сдвигом частоты вниз и обнаруженное в 2009 году на токамаке TEXTOR [127, 128, 143]. Общим элементом этих вышеперечисленных наблюдений являлось наличие немонотонного профиля плотности плазмы. Причиной формирования немонотонного профиля плазмы могут служить различные физические механизмы. Среди них аномальный конвективный вынос плазмы в результате так называемого «electron-pump-out» эффекта [125] при мощном ЭЦ нагреве, особенности удержания плазмы в локализованной турбулентной структуре, такой как филамент, blob, дрейфовый вихрь [126], или в магнитном острове [129, 130]. Аномальные эффекты не могут быть объяснены в рамках существующих теоретических моделей [118 - 120] и требуют анализа различных сценариев низкороговой неустойчивости ЭЦ волны с учетом наличия немонотонного профиля плотности плазмы, который, по всей видимости, и приводил к значительному снижению порога возбуждения нелинейных явлений. Таким образом, как научный, так и практический интерес представляют исследование механизма, ответственного за значительное снижение порога возбуждения параметрического распада волны накачки, и развитие теории низкороговых параметрических неустойчивостей.

Цели и задачи диссертационной работы

- 1) Развитие теоретических моделей флуктуационной рефлектометрии, которые позволяют получить адекватную интерпретацию работы диагностики и реконструировать параметры дрейфовой турбулентности.
- 2) Развитие теории линейной трансформации нормальных мод в окрестности критической поверхности в трехмерно-неоднородной плазме с учетом ширя магнитного поля и кривизны магнитной силовой линии. Анализ влияния низкочастотной дрейфовой турбулентности на эффективность линейной трансформации.

- 3) Развитие теории распространения и поглощение электронных бернштейновских волн. Анализ их поведения в двумерно-неоднородной плазме токамаков с малым аспектным отношением с учетом слабых релятивистских эффектов.
- 4) Развитие теории низкороговой параметрической неустойчивости, которая может объяснить аномальное отражение волны накачки и нагрев ионов в экспериментах по ЭЦ нагреву плазмы в тороидальных ловушках.

Научная новизна работы

- 1) Впервые найдены критерии перехода рефлектометрической диагностики из линейного по амплитуде турбулентности режима рассеяния зондирующей волны, описываемого в борновском приближении, в нелинейный режим многократного малоуглового рассеяния и режим сильного рассеяния «назад».
- 2) Впервые развиты корректные теоретические модели различных разновидностей флуктуационной рефлектометрии, применимые при линейном и нелинейном режиме рассеяния зондирующей волны. В линейном режиме работы радиальной корреляционной доплеровской рефлектометрии получено выражение для критического угла наклона зондирования, при котором происходит подавление вклада слабо локализованного малоуглового рассеяния в рефлектометрический сигнал. В нелинейном режиме многократного малоуглового рассеяния продемонстрирована пригодность доплеровской рефлектометрии для определения скорости движения флуктуаций, а также найдена связь длины корреляции сигналов радиальной корреляционной рефлектометрии с радиальной корреляционной длиной и амплитудой флуктуаций плотности.
- 3) На основе развитых теоретических моделей впервые предложены корректные методы реконструкции характеристик флуктуаций плотности из данных флуктуационной рефлектометрии и обоснована схема усиленного рассеяния в рефлектометрической постановке.
- 4) Впервые развита теория линейной трансформации пучков электромагнитных волн в окрестности критической поверхности в реалистичной модели многомерно-неоднородной плазмы, выводы которой подтверждены сравнением с результатами численного моделирования.
- 5) Впервые найден критерий существенного влияния низкочастотной дрейфовой турбулентности на эффективность линейной трансформации в окрестности критической поверхности.
- 6) Впервые получено замкнутое выражение для дисперсионного уравнения электростатичес-

кой электронной бернштейновской волны с учетом слабого релятивизма.

7) Впервые дана интерпретация возбуждения плазменного волновода для электронных бернштейновских волн, распространяющихся в экваториальной плоскости токамака с малым аспектным отношением, а также предсказано появление дополнительных областей прозрачности и заметное отражение падающей электронной бернштейновской волны от поверхности ЭЦ резонанса в случае немоного профиля модуля магнитного поля.

8) Впервые показана возможность низкопорогового возбуждения параметрических распадных неустойчивостей при электронном циклотронном нагреве плазмы необыкновенной волной на второй гармонике резонанса. Теория этих неустойчивостей, развитая при учете реальных особенностей профиля плотности плазмы и магнитного поля в тороидальных ловушках, позволила объяснить аномальные явления, наблюдавшиеся в экспериментах по дополнительному нагреву плазмы в токамаках и стеллараторах.

Научная и практическая значимость

Развитые в главе 1 теоретические модели флуктуационной рефлектометрии позволили впервые объяснить основные закономерности работы данной диагностики. Они используются в настоящее время для интерпретации экспериментов и восстановления параметров турбулентности на токамаках Tore-Supra (Франция), TCV (Швейцария), T-10 (НИЦ «Курчатовский институт»), ФТ-2, Глобус-М (оба - ФТИ им. А.Ф. Иоффе), DIII-D (США), ASDEX-Upgrade (Германия), стеллараторе TJ-II (Испания).

Анализ линейной трансформации пучков электромагнитных волн в окрестности критической поверхности с учетом трехмерной неоднородности плазмы и шира магнитного поля (глава 2) позволил развить существовавшие теоретические представления и заполнить пробел в теории линейной трансформации нормальных мод. Анализ распространения пучков ЭБ волн в двумерно-неоднородной плазме с учетом пространственной дисперсии и слабых релятивистских эффектов (глава 3) позволил развить существовавшие теоретические представления. Результаты этих глав используются для интерпретации (MAST, Великобритания) и планирования (Глобус-М, ФТИ им. А.Ф. Иоффе) экспериментов в токамаках с малым аспектным отношением.

Анализ низкопороговой нелинейной трансформации пучков электромагнитных волн ЭЦ диапазона частот (глава 4) позволил развить существовавшие теоретические представления и объяснить аномальные явления, наблюдавшиеся при ЭЦ нагреве плазмы. Результаты этой

главы используется для интерпретации экспериментов по дополнительному нагреву на токамаках TCV (Швейцария), TEXTOR (Нидерланды), ASDEX–Upgrade (Германия). Они также могут быть использованы для интерпретации экспериментальных данных на токамаке T-10 (НИЦ «Курчатовский институт») и стеллараторе J-2M (ИОФ РАН).

Методы исследования

Аналитическое рассмотрение флуктуационной рефлектометрии в линейном приближении основывается на хорошо обоснованном борновском приближении, широко используемом в задачах квантовой механики. Нелинейный режим рассеяния описывается с помощью хорошо обоснованного приближения геометрической оптики (учитывая то обстоятельство, что в дрейфовой турбулентности магнитных ловушек доминируют флуктуации с пространственным масштабом, существенно превосходящим длину зондирующей волны), которое позволяет описать переход в режим сильной фазовой модуляции (многократное малоугловое рассеяние), а также обобщить полученные результаты на случай реальной равновесной геометрии магнитных поверхностей.

Анализ линейной трансформации нормальных мод в многомерно-неоднородной плазме основывается на традиционном подходе, широко развитом в теории линейной трансформации, в рамках которого полная система уравнений Максвелла сводится к системе укороченных уравнений, применимых в окрестности особых точек задачи. Далее ищется функциональная или интегральная замена искомым функций, позволяющих представить анализируемые уравнения в виде, допускающем разделение переменных. Данный подход хорошо обоснован и широко используется в теории уравнений в частных производных.

Анализ распространения и поглощения электронных бернштейновских волн в промежуточном диапазоне углов с учетом сильной двумерной неоднородности плазмы сферических токамаков основывается на традиционных теоретических подходах. Эти подходы включают в себя поиск малого параметра задачи, редуцирование полной системы волновых уравнений до системы укороченных уравнений, верных в узкой пространственной области, представляющей теоретический интерес, и учитывающих основные физические эффекты. Система укороченных обыкновенных уравнений или уравнений в частных производных решается традиционными математическими методами.

Анализ распространения электронных бернштейновских волн в двумерно-неоднородной плазме осуществляется с использованием формализма интегрирования в функциональных

пространствах. Данный формализм широко применяется в квантовой физике [26, 27] и считается общепринятым.

Анализ трехволнового взаимодействия базируется на теоретической модели, предложенной и развитой в начале 70-х годов прошлого столетия в работах проф. Пилия и проф. Розенблюта [32 - 34]. Модель считается общепринятой и является широко используемой при анализе задач данного класса.

При анализе конвективных и абсолютных неустойчивостей используется метод теории возмущений в форме, предложенной в работе [132], который позволяет провести исследование без чрезмерных упрощений, с учётом реальной геометрии эксперимента и дисперсии возбуждаемых волн.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Формулировка критерия перехода флуктуационной рефлектометрии в нелинейные режимы многократного малоуглового рассеяния и сильного брэгговского рассеяния «назад».
2. Вывод выражения, связывающего длину корреляции сигналов радиальной корреляционной рефлектометрии с радиальной корреляционной длиной и амплитудой флуктуаций плотности при нелинейном режиме рассеяния.
3. Вывод системы уравнений, которые описывают поля электромагнитных волн, распространяющихся под углом к магнитному полю и линейно взаимодействующих в окрестности критической поверхности, полученных с учетом трехмерной неоднородности плазмы, шира магнитного поля и кривизны магнитной силовой линии; решение этой системы и коэффициенты прохождения и отражения.
4. Вывод уравнения для электронной бернштейновской волны в плазме токамака с малым аспектным отношением в окрестности экваториальной плоскости и при наличии немонотонного профиля модуля магнитного поля.
5. Определение параметрических механизмов низкопорогового аномального отражения и поглощения волны накачки в экспериментах по ЭЦ нагреву плазмы в тороидальных ловушках. Вывод выражения для порога и инкремента низкопороговых параметрических неустойчивостей необыкновенной волны, приводящих при учете реальных особенностей профиля плотности плазмы к возбуждению плазменного резонатора ионной бернштейновской волны и отраженной необыкновенной дочерней волны, а также плазменного резонатора электронной бернштейновской волны и ионной бернштейновской волны.

6. Определение механизма трехмерной локализации дочерних верхнегибридных плазмонов в присутствии немонотонного профиля плотности плазмы и пучка накачки, ответственного за возбуждение низкороговой абсолютной параметрической неустойчивости двухплазмонного распада. Вывод выражения для порога и инкремента этой неустойчивости. Определение каскадного механизма её насыщения и уровня аномального поглощения и рассеяния назад волны накачки.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов базируется на использовании методов, хорошо обоснованных математически, а также сравнением их с экспериментальными данными и результатами численного моделирования. Результаты, вошедшие в диссертацию, опубликованы в 31 работе в рецензируемых изданиях, а также неоднократно докладывались на ведущих Совещаниях и Конференциях по тематике работы:

1. Ежегодные Конференции EPS по физике плазмы 2006 – 2015 гг. (2006 – 2014 гг. – стендовые презентации, в 2015 году – устный доклад);
2. Международная конференция "Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность" (MSS – 14), Москва, 24 – 27 ноября 2014 (приглашенный доклад);
3. 23rd и 25th IAEA Fusion Energy Conference (FEC 2010 и FEC 2014) (устные доклады);
4. 9th International Workshop “Strong Microwaves and Terahertz Waves: Sources and Applications”, July 24 – 30, 2014 (приглашенный пленарный доклад);
5. 20th topical conference «Radiofrequency power in plasmas», Sorrento, Italy, 25-28 June 2013 (приглашенный доклад);
6. 17th Joint Workshop on Electron Cyclotron Emission and Electron Cyclotron Resonance Heating, 7 – 10 May 2012, Deurne, The Netherlands (стендовая презентация, приглашенный доклад);
7. 8th - 10th International Reflectometry Workshops 2007, 2009, 2011 (устные доклады);
8. 7th International Workshop “Strong Microwaves: Sources and Applications” July 27 – August 2, 2008 (устный доклад);
9. Ежегодные Международные (Звенигородские) конференции по физике плазмы и УТС (2006, 2008, 2009, гг. - стендовые презентации, 2007 г. – устный доклад, 2011, 2016 гг. – приглашенный пленарный доклад).

Личный вклад

Во всех работах, выполненных в соавторстве, диссертанту принадлежит участие в постановке задачи, аналитическое решение, участие в написании статьи. В работах, вошедших в главу 4, диссертанту принадлежат и численные расчёты.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

- [1a] Gusakov E.Z., Popov A.Yu. Measurements localization in poloidal correlation reflectometry // Nucl. Fusion. - 2006. - Vol. 46. - P.S829.
- [2a] Gusakov E., Irzak M. and Popov A. Radial correlation reflectometry at oblique probing wave incidence (linear scattering theory predictions) // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2014. - Vol. 56. - P.025009.
- [3a] Gusakov E.Z., Popov A.Yu. Non-linear theory of fluctuation reflectometry // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2002. -Vol. 44. - P.2327.
- [4a] Gusakov E.Z., Popov A.Yu. Two-dimensional non-linear theory of radial correlation reflectometry // Plasma Phys. Cont. Fusion. - 2004. - Vol. 46. - P.1393.
- [5a] Leclert G., Heurax S., Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Boucher I. and Vermare L. Full-wave test of the radial correlation reflectometry analytical theory in linear and nonlinear regimes // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2006. - Vol. 48. - P.1389.
- [6a] Gusakov E.Z., Surkov A.V., Popov A.Yu. Multiple scattering effect in Doppler reflectometry // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2005. - Vol. 47. - P.959.
- [7a] da Silva F., Heurax S., Gusakov E.Z., Popov A.Yu. A Numerical Study of Forward- and Backscattering Signatures on Doppler-Reflectometry Signals // Plasma Science, IEEE Transactions. - 2010. - Vol. 38. - P.2144.
- [8a] Gusakov E.Z., Heurax S. and Popov A.Yu. Strong Bragg backscattering in reflectometry // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2009. - Vol.51. - P.065018.
- [9a] Heurax S., Gusakov E., Popov A., da Silva F., Irzak M. Simulations on the Role of the Resonance of the Probing Wave on Reflectometry Measurements in Fluctuating Plasmas // Plasma Science, IEEE Transactions. - 2010. - Vol.38. - P.2150.
- [10a] Gusakov E., Irzak M., Popov A. and Teplova N. Two dimensional modeling of turbulence wave number spectra reconstruction from radial correlation reflectometry data // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2015. - Vol.57. - P.075009.

- [11a] Gusakov E., Heuraux S., Popov A. and Schubert M. Reconstruction of the turbulence radial profile from reflectometry phase root mean square measurements // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2012. - Vol.54. - P.045008.
- [12a] Gusakov E.Z., Heuraux S., Irzak M. and Popov A.Yu. Possibility of the giant scattering enhancement due to wave trapping in the reflectometry experiment // Phys. Scr. - 2011. - Vol.84. - P.045504.
- [13a] Popov A.Yu., Piliya A.D. On O-X mode conversion in a cold magnetized 2D inhomogeneous plasma in the electron cyclotron frequency range // Plasma Phys. Reports. - 2007. - Vol.33. - P.53.
- [14a] Popov A.Yu. On O-X mode conversion in spherical tokamaks // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2007. - Vol.49. - P.1599.
- [15a] Popov A.Yu. On O-X mode conversion in 2D inhomogeneous plasma with a sheared magnetic field // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2010. - Vol.52. - P.035008.
- [16a] Popov A. On O-X mode conversion in a 3D inhomogeneous plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2011. - Vol.53. - P.065016.
- [17a] Irzak M.A., Popov A.Yu. 2D Modeling of the O-X conversion in toroidal plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2008. - Vol.50. - P.025003.
- [18a] Popov A. Anomalous reflection of electromagnetic waves at O-X mode conversion in 2D inhomogeneous turbulent plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2015. - Vol.57. - P.025010.
- [19a] Piliya A.D., Popov A.Yu. and Tregubova E.N. Propagation and damping of electron Bernstein waves with small n_{\parallel} in inhomogeneous plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2003. - Vol.45. - P.1309.
- [20a] Piliya A.D., Popov A.Yu. and Tregubova E.N. Electron Bernstein waves in the mid-plane region of a spherical tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2005. - Vol.47. - P.379.
- [21a] Piliya A.D., Popov A.Yu. and Tregubova E.N. Electron Bernstein waves in a spherical tokamak with a magnetic well // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2005. - Vol.47. - P.2029.
- [22a] Гусаков Е.З., Попов А.Ю. Низкопороговые параметрические распадные неустойчивости в экспериментах по ЭЦ нагреву в тороидальных ловушках // Письма ЖЭТФ. - 2010. - Т.91. - С.724.
- [23a] Gusakov E.Z., Popov A.Yu. Low Threshold Parametric Decay Backscattering Instability in Tokamak Electron Cyclotron Resonance Heating Experiments // Phys. Rev. Lett. - 2010. - Vol.105. - P.115003.
- [24a] Gusakov E.Z., Popov A.Yu. Low Threshold Parametric Decay Instabilities in ECRH experiments at toroidal devices // Nuclear Fusion. - 2011. - Vol.51. - P.073028.
- [25a] Гусаков Е.З., Попов А.Ю. Низкопороговые абсолютные параметрические распадные неустойчивости в экспериментах по электронному циклотронному нагреву в токамаках //

Письма ЖЭТФ. - 2011. - Т.94. - С.301.

[26a] Попов А.Ю., Гусаков Е.З., Савельев А.Н. О низкороговом параметрическом механизме аномального поглощения мощности в экспериментах по ЭЦ нагреву плазмы в тороидальных ловушках // Письма ЖЭТФ. - 2012. - Т.96. - С.178.

[27a] Gusakov E., Popov A. On the possibility of low-threshold anomalous absorption in tokamak 2nd-harmonic electron cyclotron resonance heating experiments // EPL. - 2012. - Vol.99. - P.15001.

[28a] Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Saveliev A.N. Trapping of electron Bernstein waves in drift-wave eddies and parametric decay instability at second harmonic ECRH in toroidal devices // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2014. - Vol.56. - P.015010.

[29a] Попов А.Ю., Гусаков Е.З. О возможности снижения порога неустойчивости параметрического распада необыкновенной волны на две верхнегибридные в неоднородной плазме // ЖЭТФ. - 2015. - Т.147. - С.165.

[30a] Popov A.Yu. and Gusakov E.Z. Low-threshold absolute two-plasmon decay instability in the second harmonic electron cyclotron resonance heating experiments in toroidal devices // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2015. - Vol.57. - P.025022.

[31a] Попов А.Ю., Гусаков Е.З. Насыщение низкороговой двухплазмонной параметрической неустойчивости необыкновенной волны в неоднородной плазме // ЖЭТФ. - 2015. - Т. 148. - С. 415.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка цитируемой литературы из 152 наименований, 116 рисунков. Общий объем диссертации - 264 страницы.

Содержание работы

В главе 1 диссертации изложена теория распространения и трансформации пучков электромагнитных волн в неоднородной турбулентной плазме в условиях сильной рефракции, а также ее применение для описания различных разновидностей флуктуационной рефлектометрии. В этой главе дано описание линейной теории полоидальной корреляционной

рефлектометрии [1а], линейной теории радиальной доплеровской корреляционной рефлектометрии [2а], нелинейной по амплитуде флуктуаций теории радиальной корреляционной рефлектометрии [3а - 5а], нелинейной теории доплеровской рефлектометрии [6а, 7а]. Кроме того, обсуждаются критерий перехода рефлектометрии в режим нелинейного брэгговского рассеяния «назад» [8а, 9а], методы восстановления и интерпретации данных флуктуационной рефлектометрии [10а - 12а].

В главе 2 изложена теория линейной трансформации пучков электромагнитных волн, распространяющихся под углом к магнитному полю в среде с сильной рефракцией. Изложена трехмерная теория линейной трансформации пучков электромагнитных волн в окрестности критической поверхности [13а - 17а]. Анализируется влияния низкочастотной дрейфовой турбулентности на эффективность линейной трансформации пучков электромагнитных волн в окрестности критической поверхности [18а].

В главе 3 изложена линейная теория распространения пучков электронных бернштейновских волн в двумерно-неоднородной плазме с учетом пространственной дисперсии и слабых релятивистских эффектов. Её развитие позволило аналитически описать квазиперпендикулярное распространения и затухание электронных бернштейновских волн в неоднородной плазме [19а], объяснить особенности распространения и затухания ЭБВ в экваториальной плоскости токамаков с малым аспектным отношением [20а] и предсказать новый эффект, связанный с возможностью сильного отражения электронных бернштейновских волн от электронного циклотронного слоя при наличии немонотонного профиля модуля магнитного поля в токамаках с малым аспектным отношением [21а].

В главе 4 изложена теория низкопороговой нелинейной трансформации пучков СВЧ волн. Приводится рассмотрение нескольких сценариев низкопорогового распада электромагнитной волны необыкновенной поляризации в присутствии немонотонного профиля плотности плазмы: индуцированное рассеяние «назад» [22а - 25а], распад на электронную и ионную бернштейновскую волны [26а - 28а], двухплазмонный распад [29а - 31а]. Разработанные теоретические модели позволили интерпретировать аномальные явления, наблюдавшиеся на различных экспериментальных установках [26а, 31а]. В Заключение сформулированы основные результаты и выводы работы.

1. Теория распространения и трансформации пучков электромагнитных волн в неоднородной турбулентной плазме в условиях сильной рефракции и ее применение для описания флуктуационной рефлектометрии

Нелинейная трансформация лежит в основе коллективного рассеяния пучков зондирующих СВЧ волн, которое широко используется как метод диагностики плазмы для получения информации о турбулентности. Для улучшения локализации измерений характеристик турбулентности был предложен новый подход, в рамках которого зондирование осуществляется СВЧ волнами, имеющими в плазме область с сильной рефракцией. Этот подход, по сути, является развитием классической рефлектометрической диагностики, в основе которой лежит физическое явление отражения электромагнитной волны от области непрозрачности. Положение границы области непрозрачности (так называемая поверхность отсечки) зависит от частоты зондирующего сигнала и от параметров плазмы на этой поверхности. Поскольку зондирующий пучок распространяется в плазме, в которой имеются флуктуации, то в регистрируемом сигнале всегда присутствует случайная составляющая, содержащая информацию о флуктуациях плотности плазмы, что может быть использовано для их диагностики.

В настоящее время флуктуационная рефлектометрия (ФР) [1] является одним из самых распространенных активных методов диагностики флуктуации плотности плазмы и скорости полоидального вращения флуктуаций плотности. Эта диагностика привлекла к себе внимание благодаря таким достоинствам, как невысокие требования к организации доступа к плазме и недорогая микроволновая техника. Интерпретация данных измерений основывалась на предположениях о линейном характере рассеяния зондирующей волны и локализации измерений положением отсечки [2 - 4]. Однако подобный интуитивный подход не позволяет объяснить в полном объеме экспериментальные данные, полученные на разных установках. Как было показано в работах [5, 6], интерпретация результатов измерений при линейном характере рассеяния зондирующей волны осложнена из-за доминирующего вклада в рефлектометрический сигнал слабо локализованного малоуглового рассеяния на всей трассе распространения волны, что ведет к существенной переоценке радиальной корреляционной длины турбулентности. В результате, было необходимо развитие математических процедур восстановления спектров и радиальных профилей флуктуаций плотности из экспериментальных данных линейной флуктуационной рефлектометрии.

Во многих случаях длина трассы зондирующей волны и уровень турбулентности (особенно на периферии плазмы) таковы, что рассеяние зондирующей волны переходит в

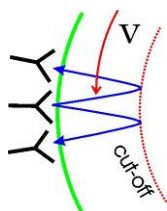


Рисунок 1.1а. Схема ПР.

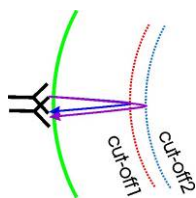


Рисунок 1.1b. Схема РКР.

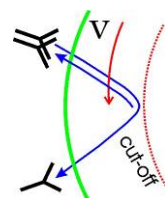


Рисунок 1.1с. Схема ДР.

нелинейный режим. Между тем, вклад многократного малоуглового рассеяния или сильного рассеяния «назад» на коротковолновой компоненте турбулентности учитывался до момента начала работы над диссертацией только при численном моделировании работы диагностики. Поэтому особую актуальность имела разработка теоретической модели, позволяющей учесть нелинейный характер рассеяния зондирующей волны и объяснить наблюдения, интерпретация которых в рамках интуитивной линейной модели рассеяния в окрестности поверхности отсечки невозможна.

Существуют различные разновидности ФР, среди которых полоидальная, радиальная корреляционная и доплеровская рефлектометрия. Принципиальные схемы измерений в этих диагностиках приведены на рисунках 1.1 а-с. В последнее время получила развитие радиальная корреляционная доплеровская рефлектометрия, сочетающая в себе черты радиальной корреляционной и доплеровской рефлектометрии. В настоящей главе приводится теоретический анализ полоидальной (ПР) и радиальной корреляционной доплеровской (РКДР) рефлектометрии, работающих в линейном режиме рассеяния зондирующей волны; развиты теоретические модели, описывающие нелинейный режим радиальной корреляционной (РКР) и доплеровской (ДР). Кроме того, приведен анализ нелинейного режима брэгговского рассеяния зондирующей волны «назад» и ограничений рефлектометрической диагностики профиля плотности плазмы. Поскольку основной проблемой ФР является корректная интерпретация экспериментальных данных, что вызвано влиянием слабо локализованного малоуглового рассеяния в объеме плазмы при формировании регистрируемого сигнала, приводится анализ возможности восстановления спектров турбулентности по радиальным волновым числам для флуктуаций со значительным полоидальным волновым числом по результатам радиальных корреляционных измерений, полученных при наклонном зондировании плазмы; дано описание метода реконструкции радиального профиля флуктуаций плотности на основании измерений зависимости уровня флуктуаций фазы рефлектометрического сигнала от частоты зондирования и схемы усиленного рассеяния флуктуационной рефлектометрии, позволяющей решить проблему локализации измерений.

1.1. Полоидальная корреляционная рефлектометрия

Полоидальная разновидность флуктуационной рефлектометрии (ПР), использующая прием микроволнового зондирующего сигнала двумя антеннами, разнесенными в полоидальном направлении, применяется в настоящее время для измерения скорости полоидального вращения плазмы и анализа турбулентности [4, 7]. Скорость вращения $V(r)$ определяется по времени смещения τ_c максимума взаимной корреляционной функции сигналов в двух каналах $V(r_c) = \mathcal{G}_a r_c / \tau_c$ (см. рисунок 1.1a). Ожидалось, что метод обладает высоким пространственным и временным разрешением, допускает простую интерпретацию экспериментальных результатов. Это точка зрения была связана с предположением, что весь зарегистрированный приемной антенной сигнал генерируется в результате рассеяния на плазменной турбулентности в окрестности поверхности отсечки. К сожалению, слабо локализованное малоугловое рассеяние, которое имеет место на всей трассе волны, может вносить значительный вклад в формирование рефлектометрического сигнала. Несмотря на то, что присутствие отсечки подчеркивает вклад ее окрестности в формирование сигнала рассеяния [5], этого факта может оказаться недостаточным для подавления вклада в этот процесс объема плазмы. Вопрос о локализации измерений долгое время оставался открытым и потребовал подробного анализа, результаты которого приведены в настоящем разделе. Линейная теория диагностики, основные результаты которой изложены в настоящем разделе, развита в цилиндрической геометрии, адекватно отражающей геометрию эксперимента [1a].

1.1.1. Описание модели

Анализ ПР проведен в реалистичной цилиндрической геометрии. Флуктуации плотности $\delta n(\mathbf{r}, t) = n_e(\mathbf{r}, t) - n(r)$, где $\mathbf{r} = (r, \mathcal{G}, z)$, $n_e(r)$ и $n(r)$ - полная и невозмущенная плотность плазмы, описываются корреляционной функцией, учитывающей слабую неоднородность турбулентности:

$$\langle \delta n(\vec{r}, t) \delta n(\vec{r}', t') \rangle = \delta n^2(R) \exp \left[-\frac{(r-r')^2}{l_{cr}^2} - \frac{[(\mathcal{G}-\mathcal{G}')r - V(R)\tau]^2}{l_{c\mathcal{G}}^2} - \frac{\tau^2}{t_c^2} \right] \cos \left\{ q_0 [(\mathcal{G}-\mathcal{G}')r - V(R)\tau] \right\}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r} = (r, \vartheta, z)$, $R = r + r'/2$, $\tau = t - t'$, $V(R)$ - скорость полоидального вращения флуктуаций. Корреляционная функция (1.1) моделирует как квазипериодический ($q_0 \neq 0$), так и широкополосный ($q_0 = 0$) спектр турбулентности. Радиальная корреляционная длина l_{cr} предполагается большой настолько, что выполняется соотношение $l_{cr} > (c^2(a - r_c)/\omega^2)^{1/3}$, позволяющее пренебречь рассеянием «назад» вне ближайшей окрестности отсечки (r_c - радиус поверхности отсечки, a - малый радиус установки, ω - частота волны). Полоидальная корреляционная длина $l_{c\vartheta}$ и корреляционное время t_c считаются произвольными. Уровень флуктуаций полагается малым:

$$\frac{\delta n^2(r_c)}{n_c^2} \ll \left\{ \sqrt{\pi} l_{cr} L \frac{\omega^2}{c^2} \left[\ln \left(\frac{8L}{\pi l_{cr}} \right) + 0.71 \right] \right\}^{-1}, \quad (1.2)$$

где L - масштаб изменения профиля плотности в точке отсечки. В этом случае мы можем использовать борновское приближение при описании рассеяния пучка зондирующих волн, который может быть представлен как суперпозиция геометрико-оптических (ВКБ) мод (для определенности обыкновенной поляризации), распространяющихся под разными углами:

$$E(\vartheta, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_m \int \tilde{E}(m, k_z) \exp(i\phi_r(m, k_z, t)) dk_z, \quad (1.3)$$

где $\phi_r(m, k_z, t) = \phi_0(m, k_z, t) + \delta\varphi$ - ВКБ фаза. Регулярная часть фазы $\phi_0(m, k_z, t)$ в параксиальном приближении может быть представлена в виде:

$$\phi_0(m, k_z, t) = 2 \int_a^{r_c} k(r) dr' - \frac{m^2 d_\vartheta^2(a)}{2a^2} - \frac{k_z^2 d_z^2(a)}{2} + m\vartheta + k_z z - \frac{\pi}{2}, \quad (1.4)$$

$$k(r) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{n(r)}{n_c}}, d_\vartheta^2(r) = 2 \int_r^{r_c} \frac{a^2}{r'^2} \frac{dr'}{k(r')}, d_z^2(r) = \frac{2c^2}{\omega^2} \int_r^{r_c} k(r') dr'.$$

Случайная компонента фазы $\delta\varphi$ волны, вызванная присутствием низкочастотных флуктуаций плотности, имеет вид:

$$\delta\varphi = -\frac{\omega^2}{2c^2} \int_a^{r_c} \left[\frac{\delta n(r', \theta^-, z^-, t)}{n_c} + \frac{\delta n(r', \theta^+, z^+, t)}{n_c} \right] \frac{dr'}{k(r')}, \quad (1.5)$$

и вычислена вдоль невозмущенной траектории, проходящей в точку (ϑ, z) :

$$\theta^\pm = \vartheta - m \left[d_\vartheta^2(a) \pm d_\vartheta^2(r) \right] / 2a^2, \quad z^\pm = z - k_z \left[d_z^2(a) \pm d_z^2(r) \right] / 2.$$

Верхний и нижний знаки соответствуют части траектории волны после и до отражения от поверхности отсечки. Функция $\tilde{E}(m, k_z)$ - Фурье-образ пучка зондирующих волн. Будем считать, что аппаратная функция как зондирующей, так и приемной антенны описывается

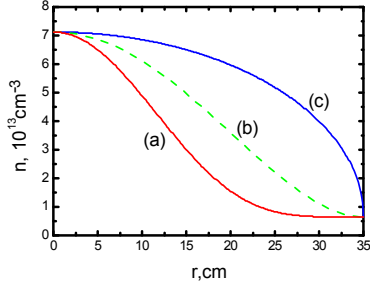


Рисунок 1.2. Невозмущенный профиль плотности: (a) – «вогнутый», (b) – «Г-10» [7] и (c) – «выпуклый».

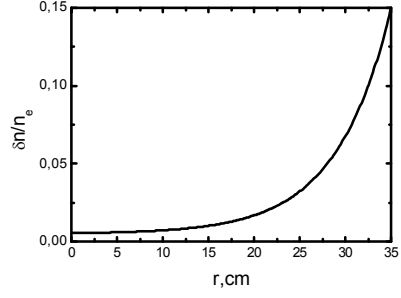


Рисунок 1.3. Радиальный профиль относительной амплитуды флуктуаций [8];
 $l_{cr} = 1$ см, $l_{c\vartheta} = 2$ см, $a\vartheta_a = 4$ см,
 $q_0 = 3$ см⁻¹, $a = 35$ см, $t_c = \infty$.

функцией Гаусса с радиусом w :

$$E_0(\vartheta, z) = \sqrt{\frac{a}{\pi w^2}} \exp\left(-\frac{a^2 \vartheta^2}{2(w^2 + id_0^2)} - \frac{z^2}{2w^2}\right). \quad (1.6)$$

Фурье-образ выражения (1.6) имеет вид:

$$\tilde{E}(m, k_z) = 2\sqrt{\frac{\pi(w^2 + id_0^2)}{a}} \exp\left(-\frac{m^2(w^2 + id_0^2)}{2a^2} - \frac{k_z^2 w^2}{2}\right), \quad (1.7)$$

где параметр d_0^2 описывает отклонение фронта волны от поверхности радиуса a , на которой расположен рупор антенны. Предположим плоский фронт волны, т.е. $d_0^2 = w^4 \omega / ca$. Мощность сигнала, регистрируемого первой антенной можно получить в виде:

$$P_s = P_i \frac{\omega^4 l_{cr}}{4\sqrt{2}c^4} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{l_{c\vartheta}^2 w^2}{w^4 + (d_0^2 + d_g^2(a)/2)^2}} \frac{\sqrt{w^4 + d_0^4}}{\sqrt{4w^4 + d_z^4(a)}} \right) \int_a^{r_c} dr \frac{\delta n^2[r]}{n_c^2} \frac{[(S_p^{++}(r) + S_p^{+-}(r))]}{Q^2(r)}, \quad (1.8)$$

где P_i - мощность зондирующего сигнала. Два члена в квадратных скобках в (1.8) отвечают вкладам от корреляций падающей-падающей (на поверхность отсечки) и отраженной-отраженной волн, S_p^{++} , а также падающей-отраженной и отраженной-падающей волн, S_p^{+-} :

$$S_p^{++}(r) = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{a^2 \vartheta_a^2}{2w^2} \frac{\check{\mu}}{(1+\alpha)\mu} - \frac{q_0^2 l_{c\vartheta}^2}{4} \frac{\bar{\mu}}{\mu}\right) ch\left(q_0 a \vartheta_a \frac{d_g^2(r)}{2w^2} \frac{b}{\mu(1+\alpha)}\right), \quad (1.9)$$

$$S_p^{+-}(r) = \sum_{k=0,1} \frac{1}{\sqrt{\eta_k}} \exp\left[-\frac{a^2 \vartheta_a^2}{2w^2} (1+\alpha) \left(1 + \frac{\eta_k - \check{\eta}_k}{\eta_k}\right) - \frac{q_0^2 l_{c\vartheta}^2}{4} \frac{\bar{\eta}_k}{\eta_k}\right] \cos\left(q_0 a \vartheta_a \frac{d_g^2(r)}{2\rho^2} \frac{b\sqrt{\alpha}}{(1+\alpha)\eta_k}\right), \quad (1.10)$$

где

$$\alpha = \frac{(d_0^2 + d_g^2(a)/2)^2}{w^4}, \quad b = \frac{l_{c9}^2}{2w^2}, \quad \mu = 1 + \frac{l_{c9}^2(r)}{2w^2} + \frac{d_g^4(r)}{4w^4(1+\alpha)}, \quad \bar{\mu} = 1 + \frac{d_g^4(r)}{4w^4(1+\alpha)}, \quad \check{\mu} = 1 + \frac{l_{c9}^2}{2w^2},$$

$$\eta_k = \mu - (-1)^k i \frac{d_g^2(r)}{w^2}, \quad \bar{\eta}_k = \bar{\mu} - (-1)^k i \frac{d_g^2(r)}{w^2}, \quad \check{\eta}_k = \check{\mu} - (-1)^k i \frac{d_g^2(r)}{w^2}.$$

Подынтегральная функция $1/Q^2(r)$ в выражении (1.8) может быть представлена в виде:

$$\frac{1}{Q^2(r)} = \begin{cases} \frac{1}{k^2(r)}, & r - r_c \gg l_{cr} \\ \left[\frac{c^2}{\omega^2} \frac{\sqrt{\pi} L_n}{l_{cr}} \exp\left(-\frac{(r-r_c)^2}{2l_{cr}^2}\right) I_0\left(\frac{(r-r_c)^2}{2l_{cr}^2}\right) \right], & r - r_c \leq l_{cr}, L_n = \left(\frac{d \ln n}{dr}\right)_{r=r_c}^{-1} \end{cases} \quad (1.11)$$

Вторая строка в (1.11) описывает «насыщение» сингулярности в выражении $1/Q^2(r) \sim 1/k^2(r)$ при $|r - r_c| \leq l_{cr}$. В этой области профиль плотности можно аппроксимировать линейной зависимостью [3а, 4а]. Наличие сингулярности приводит к значительному вкладу окрестности отсечки в формирование рассеянной волны. Однако, это не единственный вклад в амплитуду сигнала, регистрируемого приемной антенны. Сравнимый или даже больший вклад обусловлен малоугловым рассеянием в объеме из-за слабого убывания подынтегрального выражения (1.8) при $|r - r_c| \gg l_{cr}$. Вклад локального и нелокального механизма формирования сигнала рассеяния драматически зависит от невозмущенного профиля плотности и профиля флуктуаций плотности. В случае линейного профиля плотности и статистически однородной турбулентности с гауссовским спектром выражение (1.8) при $\mathcal{G}_a = 0$ сводится к виду:

$$P_s = \sqrt{\pi} P_i l_{cr} L_n \frac{\omega^2}{c^2} \left[\ln\left(\frac{8L_n}{\pi l_{cr}}\right) + 0.71 \right] \sqrt{\frac{b}{1+\alpha}} \frac{\sqrt{(w^4 + d_0^4)}}{\sqrt{4w^4 + d_z^4(a)}} \left(\frac{\delta n}{n_c}\right)^2, \quad (1.12)$$

В этом случае мы можем использовать выражение (1.12) для того, чтобы оценить относительную амплитуду флуктуаций из экспериментальных данных, учитывая таким образом вклад объема в формирование рефлектометрического сигнала:

$$\delta n(r_c) = n_c \sqrt{\frac{P_s}{P_i}} \left[\sqrt{\pi} l_{cr} L_n \left[\ln\left(\frac{8L_n}{\pi l_{cr}}\right) + 0.71 \right] \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\frac{b}{1+\alpha}} \frac{\sqrt{(w^4 + d_0^4)}}{\sqrt{4w^4 + d_z^4(a)}} \right]^{-1/2}, \quad (1.13)$$

Точность подобной оценки анализируется в следующей главе для различных профилей невозмущенной плотности плазмы. Кросс-корреляционная функция двух сигналов (CCF) имеет вид:

$$CCF = \frac{\langle A_{s1} A_{s2} \rangle}{\sqrt{P_{s1} P_{s2}}} = \int_a^{r_c} dr \frac{\delta n^2[r] (S_c^{++}(r) + S_c^{+-}(r))}{n_c^2 Q^2(r)} \left[\int_a^{r_c} dr \frac{\delta n^2[r] (S_p^{++}(r) + S_p^{+-}(r))}{n_c^2 Q^2(r)} \right]^{-1}, \quad (1.14)$$

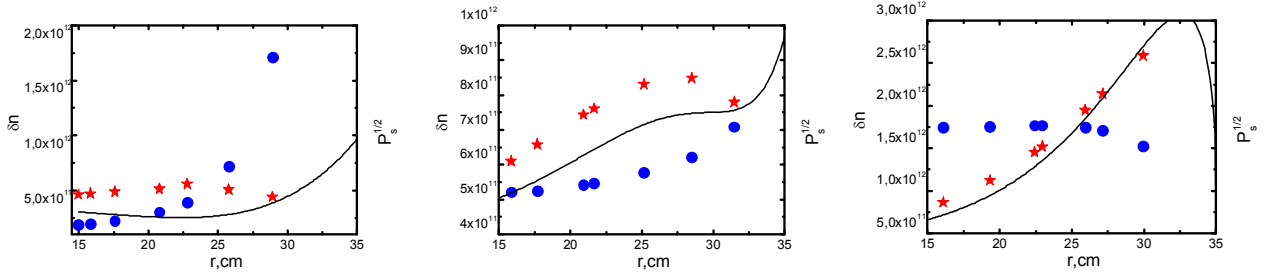


Рисунок 1.4. Результаты реконструкции профиля флуктуаций плотности. Сплошная линия – использованный профиль флуктуаций плотности. Кружки – квадратный корень из мощности рефлектометрического сигнала (1.8), нормированной на мощность зондирующего сигнала. Звезды – выражение (1.13). (левая панель) – «вогнутый» профиль, (центральная панель) – профиль «Т-10» [7] и (правая панель) – «выпуклый» профиль.

где $S_c^{++}(r)$ и $S_c^{+-}(r)$ отвечают вкладам от корреляций падающей-падающей, отраженной-отраженной волн и падающей-отраженной, отраженной-падающей волн:

$$S_c^{+-} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{k=0,1} \exp \left(- \left(a\mathcal{G}_a \left[1 - (-1)^k \frac{d_g^2(r)}{2w^2} \frac{\sqrt{\alpha}}{(1+\alpha)} \right] - V(r)\tau \right)^2 / 2w^2\mu - \frac{(a\mathcal{G}_a)^2}{2w^2(1+\alpha)} - \frac{q_0^2 l_{cg}^2 \bar{\mu}}{4\mu} - \frac{\tau^2}{t_c^2} \right) \times \cos \left\{ \left(a\mathcal{G}_a \left[1 - (-1)^k \frac{d_g^2(r)}{2w^2} \frac{\sqrt{\alpha}}{(1+\alpha)} \right] - V(r)\tau \right) \frac{q_0 b}{\mu} \right\}, \quad (1.15)$$

$$S_c^{++}(r) = \sum_{k=0,1} \left(\frac{1}{\sqrt{\eta_k}} \exp \left(- \frac{q_0^2 l_{cg}^2 \bar{\eta}_k}{4\eta_k} - \frac{a^2 \mathcal{G}_a^2}{2w^2(1+\alpha)\eta_k} - \frac{(a\mathcal{G}_a - V(r)\tau)^2}{2w^2} \frac{1}{\eta_k} - \frac{\tau^2}{t_c^2} \right) \times \left\{ \exp \left(q_0 a \mathcal{G}_a \frac{d_g^2(r)}{2w^2} \frac{b}{(1+\alpha)\eta_k} + i \frac{(a\mathcal{G}_a - V(r)\tau)}{\eta_k} \left(q_0 b + \frac{a\mathcal{G}_a}{w^2} \frac{d_g^2(r)}{2w^2} \frac{1}{(1+\alpha)} \right) \right) + \exp \left(-q_0 a \mathcal{G}_a \frac{d_g^2(r)}{2w^2} \frac{b}{(1+\alpha)\eta_k} + i \frac{(a\mathcal{G}_a - V(r)\tau)}{\eta_k} \left(-q_0 b + \frac{a\mathcal{G}_a}{w^2} \frac{d_g^2(r)}{2w^2} \frac{1}{(1+\alpha)} \right) \right) \right\} \right). \quad (1.16)$$

Подынтегральная функция $1/Q^2(r)$ в выражении (1.14) обеспечивает значительный вклад окрестности отсечки в формирование рассеянной волны. Однако, как и в выражении (1.8), это не единственный вклад в амплитуду рефлектометрического сигнала. Влияние объема плазмы может приводить к ухудшению локальности измерения скорости вращения плазмы. Выражения (1.8) - (1.10) для мощности рефлектометрического сигнала и (1.14) - (1.16) для CCF сигнала могут быть упрощены, когда поверхность отсечки находится в ближней (волновой) зоне $d_g^2(a)/w^2, d_0^2/w^2 \ll 1$. В этом случае:

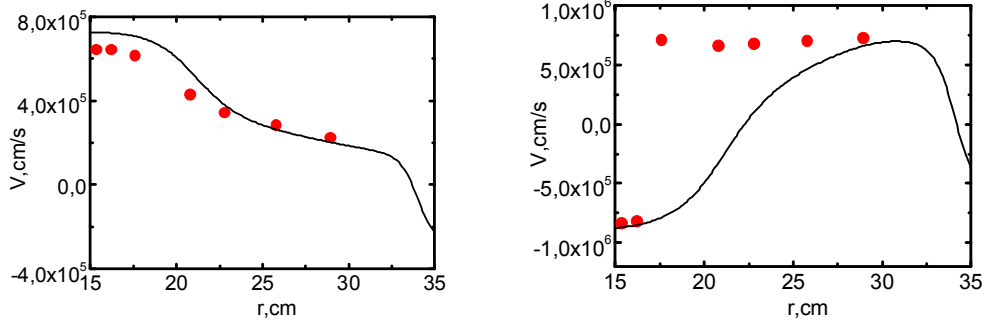


Рисунок 1.5. Два примера восстановления профиля скорости полоидального вращения в случае «вогнутого» профиля плотности. Сплошная линия – профиль вращения, использованный в расчете, кружки – профиль, полученный из корреляционной функции (1.14).

$$S_p^{++}(r) = S_p^{+-}(r) = \frac{2\sqrt{2}w}{\sqrt{2w^2 + l_{c9}^2}} \exp\left(-\frac{a^2 g_a^2}{2w^2} - \frac{q_0^2 w^2}{2} \frac{l_{c9}^2}{l_{c9}^2 + 2w^2}\right), \quad (1.17)$$

$$S_c^{++}(r) = S_c^{+-}(r) = \frac{2\sqrt{2}w}{\sqrt{2w^2 + l_{c9}^2}} \exp\left(-\frac{a^2 g_a^2}{2w^2} - \frac{(a g_a - V(r)\tau)^2}{(2w^2 + l_{c9}^2)} - \frac{q_0^2 w^2}{2} \frac{l_{c9}^2}{l_{c9}^2 + 2w^2} - \frac{\tau^2}{l_c^2}\right) \cos\left\{\frac{(a g_a - V(r)\tau) q_0 l_{c9}^2}{l_{c9}^2 + 2w^2}\right\}. \quad (1.18)$$

Согласно выражениям (1.17) и (1.18) рефлектометрические сигналы ПР оказываются существенными только в случае маленького расстояния между зондирующей антенной и приемником, сопоставимого с радиусом рупора. С ростом размера рупора сигнал становится экспоненциально подавленным $\propto \exp[-q_0^2 w^2 / 2]$ при $2w^2 \ll l_{c9}^2$. Это подавление насыщается на уровне пропорциональном $\propto \exp[-q_0^2 l_{c9}^2 / 4]$, когда регистрируемый сигнал формируется флуктуациями с большими полоидальными масштабами.

1.1.2. Реконструкция профиля турбулентности и скорости полоидального вращения

В этом параграфе мы сравним точность реконструкции радиального профиля флуктуаций плотности из результатов измерений для разных частот зондирующего сигнала с использованием оценки (1.13). При моделировании мы будем использовать 3 различных профиля невозмущенной плазмы, показанных на рисунке 1.2: «вогнутый», «выпуклый» и профиль, характерный для экспериментов на токамаке Т-10 [7]. Кроме того, возьмем

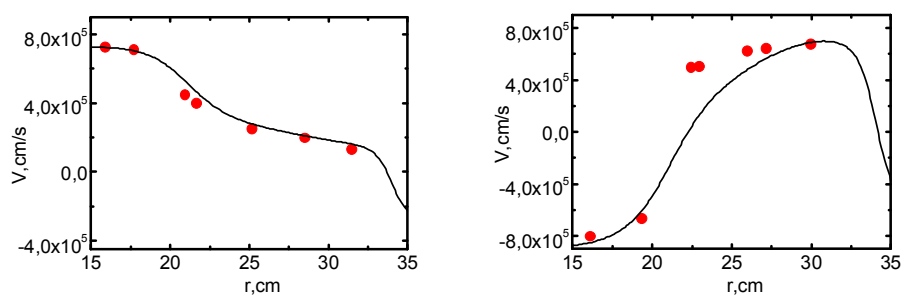


Рисунок 1.6. Два примера восстановления профиля скорости полоидального вращения в случае «выпуклого» профиля плотности. Сплошная линия – профиль вращения, использованный в расчете, кружки – профиль, полученный из выражения (1.14).

реалистичный профиль относительной амплитуды флуктуаций [8] (рисунок 1.3). Как можно видеть на рисунке 1.4, зависимость рефлектометрического сигнала от положения отсечки во всех случаях плохо воспроизводит заложенный в расчет профиль флуктуаций. Напротив, локальное выражение (1.13) с хорошей точностью воспроизводит профиль флуктуаций в случае «выпуклого» невозмущенного профиля плотности. В двух других случаях совпадение оказывается значительно хуже. Профиль полоидального вращения плазмы может быть восстановлен исходя из следующей процедуры. Считая, что максимум $|CCF(\tau)|$ (1.14) отвечает корреляционному времени флуктуаций τ_c и максимальный вклад в рефлектометрический сигнал приходит из окрестности отсечки, мы можем найти скорость полоидального вращения из формулы $V(r_c) = r_c \mathcal{G}_a / \tau_c$. На рисунке 1.5 приведены два примера восстановления профиля скорости полоидального вращения в случае «вогнутого» профиля плотности. Сплошная линия – профиль скорости вращения плазмы, использованный в роли заданного. Кружки – профиль, полученный из анализа корреляционной функции (1.14). Можно видеть, что в случае отсутствия на профиле быстро меняющихся участков и уменьшении абсолютной скорости к границе плазмы (левая панель), реконструкция хорошо согласуется с оригиналом, заложенным в расчет. Это согласие нарушается в случае относительно быстрого изменения профиля к границе и роста величины абсолютной скорости (правая панель). В случае «выпуклого» профиля плотности плазмы (рисунок 1.6) реконструкция профиля скорости оказывается более надежной. Однако, и в этом случае в области с большим широм скорости (рисунок 1.6, правая панель) существует отличие между восстановленным и оригинальным профилями. Наиболее надежной оказывается реконструкция профиля скорости в случае профиля плотности плазмы «Т-10» (рисунок 1.7, правая панель).

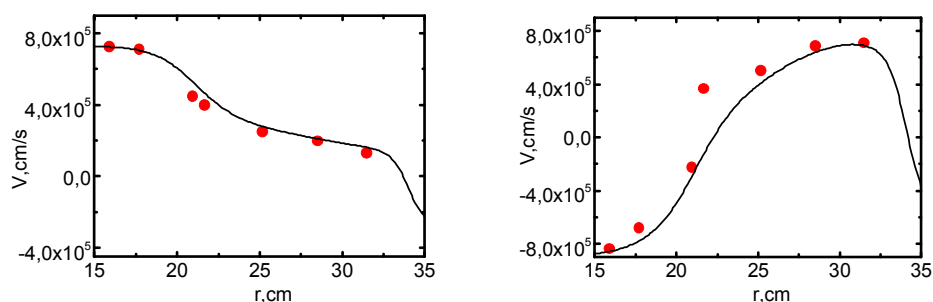


Рисунок 1.7. Два примера восстановления профиля скорости полоидального вращения в случае профиля плотности плазмы «Т-10». Сплошная линия – профиль вращения, использованный в расчете, кружки – профиль, полученный из корреляционной функции (1.14).

1.1.3. Выводы

В данном разделе получены явные аналитические выражения для амплитуды рефлектометрического сигнала и CCF сигналов, зарегистрированных антеннами, разнесенными в полоидальном направлении, в реалистичной геометрии с учетом дифракции зондирующих пучков для произвольного профиля плотности невозмущенной плазмы и турбулентности. Показана сложная зависимость рефлектометрического сигнала от радиуса поверхности отсечки и пространственного распределения турбулентности. Предложен простой метод реконструкции профиля плотности из данных эксперимента (для «вогнутого» профиля невозмущенной плотности его точность падает). Показано, что для некоторых профилей невозмущенной плотности и шира скорости на точность стандартного метода определения скорости полоидального вращения из данных ПР может влиять вклад слабо локализованного малоуглового рассеяния в объеме плазмы. Разработан простой и эффективный теоретический инструмент для интерпретации данных ПР.

Основные публикации

Gusakov E.Z., Popov A.Yu. Measurements localization in poloidal correlation reflectometry // Nucl. Fusion. - 2006. - Vol. 46. - P.S829.

1.2. Радиальная доплеровская корреляционная рефлектометрия

Хорошая локализация доплеровской рефлектометрии (ДР) в линейном режиме рассеяния за счет роста амплитуды поля волны в окрестности отсечки и диаграммы направленности антенны [9] и возможности РКР по измерению радиальной корреляционной длины флуктуаций l_{cx} подтолкнули к идее использования радиальной корреляционной разновидности доплеровской рефлектометрии (РКДР), предполагающей корреляционные измерения при наклонном зондировании плазмы на двух близких частотах. Эта идея была первоначально реализована экспериментально [10]. Ее теоретическое обоснование было получено в работе [2а], основные результаты которой изложены в настоящем разделе.

1.2.1. Амплитуда сигнала рассеяния и кросс-корреляционная функция двух сигналов

Рассмотрим линейный режим рассеяния (1.2) зондирующей волны, который адекватно описывается в рамках борновского приближения. Проанализируем случай нормального зондирования плазмы волной обыкновенной поляризации. Используя теорему взаимности [11], мы можем представить амплитуду рефлектометрического сигнала в виде:

$$A_s(\omega_0 + \Omega) = i \frac{e^2 \sqrt{P_i}}{4m_e(\omega_0 + \Omega)} \int_V \delta n_\Omega(\mathbf{r}) E_a^2(\omega_0, \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (1.19)$$

где P_i - мощность зондирующего сигнала, δn_Ω - флуктуации плотности на частоте Ω , E_a амплитуда зондирующего сигнала на частоте ω_0 , вычисленная в невозмущенной плазме $\delta n_\Omega = 0$, V - объем плазмы. Кросс-корреляционная функция двух сигналов может быть представлена в виде:

$$CCF(\Delta\omega, \Omega) = \frac{\langle A_s(\omega + \Omega) A_s^*(\omega' + \Omega) \rangle}{\sqrt{\langle A_s(\omega + \Omega) A_s^*(\omega + \Omega) \rangle \langle A_s(\omega' + \Omega) A_s^*(\omega' + \Omega) \rangle}}, \quad (1.20)$$

где $\langle \dots \rangle$ - усреднение по ансамблю флуктуаций, $\Delta\omega = \omega' - \omega$, и $\langle A_s(\omega + \Omega) A_s^*(\omega' + \Omega) \rangle$ определена следующим образом:

$$2\pi\delta(\Omega - \Omega') \langle A_s(\omega + \Omega) A_s^*(\omega' + \Omega) \rangle = \frac{e^4 P}{(4m_e \omega)^2} \iint_{VV'} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' E_a^2(\omega, \mathbf{r}) E_a^2(\omega', \mathbf{r}') \langle \delta n_\Omega \delta n_{\Omega'}^* \rangle.$$

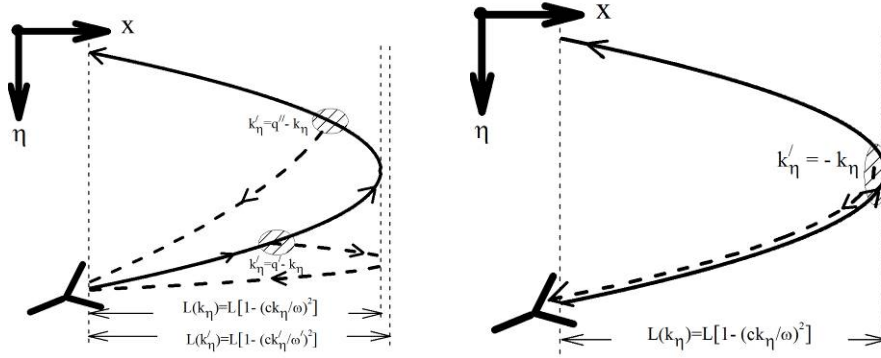


Рисунок 1.8. Лучевые траектории для зондирующей (сплошная линия) и дочерней (пунктир) волны. Левая панель: Рассеяние «вперед» с возбуждением волны, которая может быть зарегистрирована приемной антенной – в заштрихованных областях пространства. Правая панель: рассеяние «назад» имеет место в окрестности отсечки.

В случае статистически однородной и стационарной турбулентности корреляционная функция флуктуаций плотности $\langle \delta n_{\Omega} \delta n_{\Omega'}^* \rangle$ зависит только от разности аргументов $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и может быть представлена в виде:

$$\langle \delta n_{\Omega} \delta n_{\Omega'}^* \rangle = 2\pi \delta(\Omega - \Omega') \int \frac{d\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} \exp[i\mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \delta n_{\Omega, \mathbf{k}_{\perp}}^2, \quad (1.21)$$

где $\delta n_{\Omega, \mathbf{k}_{\perp}}^2$ спектр флуктуаций плотности по частоте и поперечным к внешнему магнитному полю волновым векторам. В следующем параграфе мы проанализируем (1.20) аналитически.

1.2.2. Аналитическая модель РКДР

Проанализируем РКДР в декартовой системе координат, где (x, η) - радиальная и поперечная координаты и ось $O\xi$ направлена вдоль магнитного поля. Рассмотрим случай линейного профиля невозмущенной плазмы $n_e(x) = n_c(1 - x/L)$, где $n_c = m_e \omega_0^2 / 4\pi e^2$, $L^{-1} = \partial \ln n(x) / \partial x|_{x_c}$ и ω_0 - частота зондирующей волны. Следуя работе [5], мы представим поле зондирующей волны E_a в виде:

$$E_a(\mathbf{r}_{\perp}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_{\eta}}{2\pi} f(k_{\eta}) \exp(ik_{\eta}\eta) W(\omega, x, k_{\eta}), \quad (1.22)$$

где $f(k_{\eta})$ - диаграмма направленности антенны по поперечным волновым числам и функция W выражается через функцию Эйри

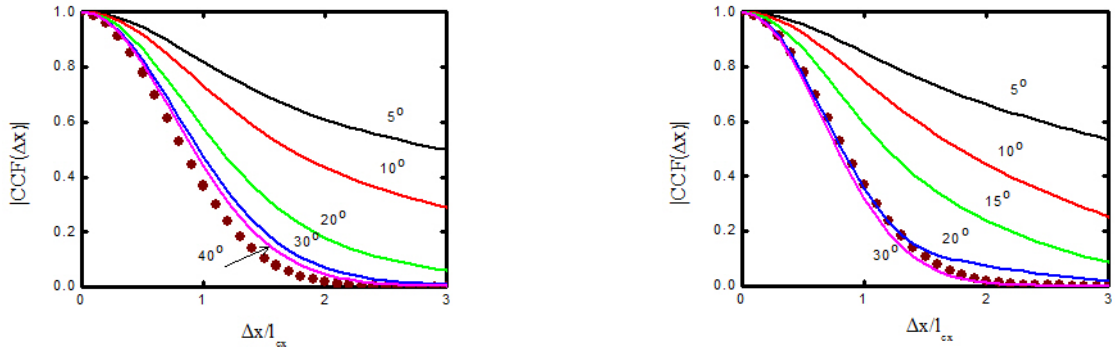


Рисунок 1.9. Зависимость $|CCF|$ (1.30), (1.31) от безразмерного расстояния между отсечками двух сигналов для различных углов наклона антенны. Кружки – корреляционная функция флуктуаций, $l_{cx} = l_{c\eta} = 0.5\text{см}$; левая панель: $w = 4\text{см}$, $\omega / 2\pi = 65\text{ГГц}$, $L = 30\text{см}$, $\vartheta_* = 31^\circ$, $w^2\omega / (2Lc) \simeq 3.63$ (ближняя зона); правая панель: $w = 1\text{см}$, $l_{cx} = l_{c\eta} = 0.5\text{см}$, $\omega / 2\pi = 75\text{ГГц}$, $L = 120\text{см}$, $\vartheta_* = 15^\circ$, $w^2\omega / (2Lc) \simeq 0.065$ (дальняя зона).

$$W(\omega, x, k_y) = \sqrt{\frac{8\omega\ell}{c^2}} \exp\left(i\Phi(k_y) - i\frac{\pi}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\frac{t^3}{3} + i\frac{x - L(k_y)}{\ell}t\right) dt. \quad (1.23)$$

В выражении (1.23) мы ввели обозначения:

$$\Phi(k_\eta) = \frac{\omega}{c} \int_0^{L(k_\eta)} dx \sqrt{(L(k_\eta) - x)/L} = \frac{2}{3} [L(k_\eta)/\ell]^{3/2}$$

- фаза волны при фиксированном значении k_η , набранная на пути до точки отражения

$L(k_\eta) = L(1 - k_\eta^2 c^2 / \omega^2)$, $\ell = (Lc^2 / \omega^2)^{1/3}$ - эйриевский масштаб. Считая диаграмму направленности гауссовской функцией:

$$f(k_\eta) = (2\sqrt{\pi}w)^{1/2} \exp\left[-(k_\eta - K)^2 w^2 / 2\right], \quad (1.24)$$

где $2w$ - ширина зондирующего пучка, $K = \omega / c \cdot \sin \vartheta$, ϑ - угол наклона зондирующей антенны по отношению к градиенту плотности. Далее подставим (1.22) в (1.19) и, используя метод стационарной фазы, получим:

$$A_s = \frac{2e^2 \ell^2}{m_e c^2} \sqrt{P_i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_\eta dq dk_\eta}{(2\pi)^3} \delta n_{\Omega, \kappa, q} f(k_\eta) f(q - k_\eta) \exp(i\Psi(k_\eta, q)) C(\kappa, q, k_\eta), \quad (1.25)$$

где $\Psi(k_\eta, q) = \frac{2}{3} [L(k_\eta)/\ell]^{3/2} + \frac{2}{3} [L(q - k_\eta)/\ell]^{3/2}$ - фаза, которая в параксиальном приближении

(т.е. $|k_\eta|, |q - k_\eta| \ll \omega / c$) имеет вид:

$$\Psi(k_\eta, q) \approx \frac{4L\omega}{3c} - \frac{Lc}{\omega} [k_\eta^2 + (q - k_\eta)^2] + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{\omega}\right)^3 L [k_\eta^4 + (q - k_\eta)^4], \quad (1.26)$$

и $C(\kappa, q, k_\eta)$ - эффективность рассеяния, имеющая следующее интегральное представление [5]:

$$C(\kappa, q, k_\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(i \left(\frac{t^3}{12} + \frac{(q - k_\eta)^2 \ell^2 + k_\eta^2 \ell^2}{2} t - \frac{\ell^4 q^2 (2k_\eta - q)^2}{4t} - \frac{L}{\ell} t \right) \right) \frac{\exp(i3\pi/4) \sqrt{\pi} dt}{(t - \kappa \ell + i\varepsilon) \sqrt{t + i\varepsilon}}, \quad (1.27)$$

где $\varepsilon \rightarrow +0$. В случае, когда расстояние от антенны до отсечки много больше радиальной длины волны флуктуаций ($\kappa L \gg 1$), главный вклад в интеграл (1.27) вносит брэгговский резонанс: $-i\pi\delta(t - \kappa\ell)$. В этом случае, асимптотическое выражение для эффективности рассеяния имеет вид:

$$C(\kappa, q, k_\eta) \approx \pi \sqrt{\frac{i\pi}{\kappa\ell}} \exp \left(i \left(\frac{(\kappa\ell)^3}{12} + \frac{(q - k_\eta)^2 \ell^2 + k_\eta^2 \ell^2 - 2L/\ell}{2} \kappa\ell - \frac{\ell^4 q^2 (2k_\eta - q)^2}{4\kappa\ell} \right) \right). \quad (1.28)$$

Подставляя (1.28) в (1.25) и интегрируя по поперечным волновым векторам зондирующей волны с помощью метода стационарной фазы, получим:

$$A_s(\omega + \Omega) = \frac{e^2 \ell^2}{m_e c^2} \sqrt{P} \sqrt{\frac{i\pi}{\ell}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa dq}{2\pi} \frac{\delta n_{\Omega, \kappa, q}}{\left[\kappa + i \left(\frac{2Lc}{\omega w^2} \kappa + \frac{Lc^2}{\omega^2 w^2} (q^2 - \kappa^2) \right) \right]^{1/2}} \times$$

$$\exp \left(i \frac{(\kappa\ell)^3}{12} - iL\kappa + i \frac{4L\omega}{3c} + i\kappa q^2 \frac{Lc^2}{4\omega^2} - i \frac{Lc}{2\omega} q^2 - \frac{(q - 2K)^2 w^2}{4} \right). \quad (1.29)$$

Подставим (1.29) в (1.20), выполним процедуру усреднения (1.21) и, учитывая соотношение $L(\omega')\omega^2 = L(\omega)(\omega')^2$, получим CCF в виде:

$$CCF(\Delta\omega, \Omega) \approx \exp \left\{ -i4 \frac{L\Delta\omega}{c} \right\} \frac{J(\Delta\omega, \Omega)}{J(0, \Omega)}, \quad (1.30)$$

где

$$J(\Delta\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa dq |\delta n_{\Omega, \kappa, q}^2| \frac{\exp \left(i \frac{\Delta\omega}{\omega} \left[2\kappa L + \frac{q^2 Lc}{2\omega} \right] - \frac{(q - 2K)^2 w^2}{2} \right)}{\left[\kappa^2 w^4 + \left(2Lc\kappa / \omega + Lc^2 q^2 / \omega^2 \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (1.31)$$

В знаменателе подынтегрального выражения в (1.31) мы пренебрегли членом $Lc^2 \kappa^2 / \omega^2$, который в случае длинноволновой турбулентности, $\kappa \ll 2\omega/c$, оказывается много меньше члена $2Lc\kappa/\omega$. В случае $K = 0$ выражение (1.31) сводится к выражению (15) из работы [12]. Важный вклад в интеграл (1.31) вносит точка ветвления, описывающая нелокальное рассеяние вперед (FS):

$$\kappa_{FS} = - \frac{2q^2 c}{\omega \left[1 \pm i w^2 \omega / (2Lc) \right]}. \quad (1.32)$$

В случае $2Lc / \omega \gg w^2$, поверхность отсечки расположена в дальней зоне антенны. Волновой вектор флуктуаций, ответственных за возбуждение дочерних волн, которые могут быть зарегистрированы приемной антенной, удовлетворяет условию:

$$\kappa_{FS} \simeq -\frac{2q^2 c}{\omega}. \quad (1.33)$$

Лучевые траектории зондирующей и дочерней волны, соответствующие этой ситуации показаны на рисунке 1.8 (левая панель). Дальнейшее упрощение выражения (1.31) для CCF РКДР возможно в случае узкой диаграммы направленности. В случае, когда поперечный размер пучка значительно шире поперечной корреляционной длины турбулентности $w \gg l_{cx}$, мы можем рассматривать диаграмму антенны в выражении (1.31) как дельта-функцию. Вычисляя интеграл по поперечным волновым числам, получим:

$$J(\Delta\omega, \Omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{w} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa |\delta n_{\Omega, \kappa, 2K}^2| \frac{\exp\left(i \frac{\Delta\omega}{\omega} \left[2\kappa L + \frac{(2K)^2 Lc}{2\omega}\right]\right)}{\left[\kappa^2 w^4 + \left(2Lc\kappa / \omega + Lc^2 (2K)^2 / \omega^2\right)^2\right]^{1/2}} \quad (1.34)$$

Малоугловое рассеяние (FS) приводит к слабо локализованному вкладу в корреляционную функцию сигналов, который описывается точкой ветвления

$$\kappa_{FS} = -\frac{2(2K)^2 c}{\omega \left[1 \pm iw^2 \omega / (2Lc)\right]}. \quad (1.35)$$

Согласно работе [12], этот вклад приводит к тому, что корреляционная функция сигналов уменьшается логарифмически медленно с увеличением раздвижки между частотами, а значит и между радиальными положениями поверхностей отсечек $\Delta x = 2L_0 \Delta\omega / \omega \gg l_{cx}$. Отметим, что уровень этого вклада пропорционален квадрату амплитуды флуктуаций $\delta n_{\Omega, \kappa_{FS}, 2K}^2$, которые являются ответственными за малоугловое рассеяние. Этот уровень может быть мал, если флуктуации слабо представлены в спектре, т.е. при выполнении условия $\kappa_{FS} l_{cx} > 1$. Принимая во внимание зависимость κ_{FS} от угла зондирования, можно получить критерий, когда паразитный вклад малоуголового рассеяния экспоненциально подавлен:

$$\sin^2 \vartheta > \sin^2 \vartheta_* = \frac{c}{2\omega l_{cx}} \sqrt{1 + \frac{w^4 \omega^2}{(2Lc)^2}}. \quad (1.36)$$

Этот критерий легко выполняется, когда отсечка расположена в волновой (дальней) зоне антенны. Однако для широких пучков, когда отсечка находится в ближней зоне антенны, он становится более строгим. В случае, когда угол зондирования достаточно велик и критерий (1.36) выполняется, спектральная плотность флуктуаций, способных привести к рассеянию

зондирующей волны на малый угол, мала, что позволяет пренебречь зависимостью от радиального волнового вектора флуктуаций под квадратным корнем в выражении (1.34). В этом случае CCF определяется вкладом рассеяния «назад» в окрестности отсечки. Соответствующие лучевые траектории изображены на рисунке 1.8 (правая панель). Используя (1.30) и (1.34), мы получим CCF РКДР в виде:

$$CCF(\Delta\omega, \Omega) \approx \exp\left\{-i4\frac{L\Delta\omega}{c} + i\frac{\Delta\omega}{2\omega^2}(2K)^2 Lc\right\} \frac{\delta n_{\Omega, 2K}^2(\Delta x)}{\delta n_{\Omega, 2K}^2(0)}, \quad (1.37)$$

где $\Delta x = 2\frac{\Delta\omega}{\omega}\kappa L$ - расстояние между отсечками двух волн, имеющих частоты ω и ω' ,

$$\delta n_{\Omega, 2K}^2(\Delta x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa |\delta n_{\Omega, \kappa, 2K}^2| \exp(i\kappa\Delta x) \quad (1.38)$$

- пространственная корреляционная функция флуктуаций. Выражения (1.37) и (1.38) демонстрируют возможность получать локальную информацию о двухточечной корреляционной функции флуктуаций плотности из данных РКДР. Используя этот подход, мы можем оценить спектр турбулентности по радиальным волновым числам и радиальную корреляционную длину при достаточно больших поперечных волновых векторах.

1.2.3. Сравнение теоретических зависимостей с результатами численного моделирования РКДР

В этом параграфе приведено сравнение теоретических зависимостей, полученных в предыдущем параграфе, с результатами численного моделирования CCF РКДР (1.30). Рассмотрим гауссовский спектр флуктуаций:

$$\langle \delta n_{\Omega}(\mathbf{r}_{\perp}) \delta n_{\Omega'}(\mathbf{r}'_{\perp}) \rangle = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') \delta n_0^2 \exp\left[-\frac{(x - x')^2}{l_{cx}^2} - \frac{(\eta - \eta')^2}{l_{c\eta}^2}\right], \quad (1.39)$$

где $\langle \dots \rangle$ - статистическое усреднение по ансамблю флуктуаций, $\delta(\Omega - \Omega')$ - дельта-функция и l_{cx} , $l_{c\eta}$ - радиальная и поперечная корреляционные длины. Соответствующий спектр по волновым числам флуктуаций плотности имеет вид:

$$\delta n_{\Omega}^2(\kappa, q) = \pi l_{cx} l_{c\eta} \delta n_0^2 \exp\left[-\frac{\kappa^2 l_{cx}^2}{4} - \frac{q^2 l_{c\eta}^2}{4}\right]. \quad (1.40)$$

На рисунках 1.9 (лев. и прав. панели) изображены зависимости $|CCF|$ (1.30), полученные в результате численного интегрирования, выполненного соавтором работы [2а] (I.M.), от

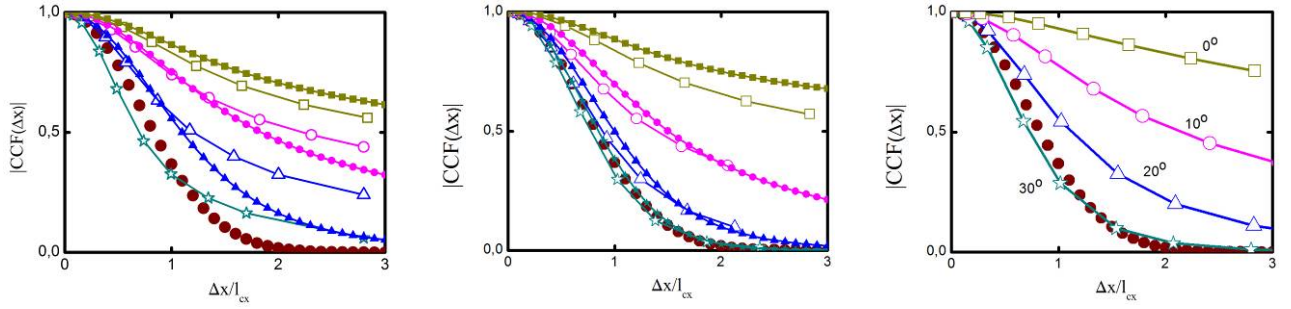


Рисунок 1.10. Зависимости (1.20), открытые символы, и (1.30), (1.31), заштрихованные символы, от расстояния между отсечками двух сигналов для различных углов наклона антенны. Кружки – корреляционная функция флуктуаций, линии с символами: квадраты - $\vartheta = 0^\circ$, кружки - $\vartheta = 10^\circ$, треугольники - $\vartheta = 20^\circ$, звезды - $\vartheta = 30^\circ$. $L = 4\text{см}$, $l_{cx} = l_{cy} = 0.4\text{см}$, $\omega/2\pi = 75\text{ГГц}$; левая панель: $w = 0.4\text{см}$, кружки – гауссовская корреляционная функция флуктуаций (1.40); центральная панель: $w = 0.8\text{см}$, кружки – гауссовская корреляционная функция флуктуаций; правая панель: $w = 0.8\text{см}$, кружки – корреляционная функция флуктуаций – функция Лоренца (1.41).

расстояния между отсечками двух зондирующих волн $\Delta x/l_{cx}$ для двух случаев. Первый случай, при котором поверхность отсечки расположена в ближней зоне антенны, соответствует экспериментальным параметрам на токамаке ASDEX-U для случая зондирующей волны на частоте $\omega/2\pi = 65\text{ГГц}$ [10]: $L = 30\text{см}$, $w = 4\text{см}$, $l_{cx} = l_{cy} = 0.5\text{см}$, $w^2\omega/(2Lc) \simeq 3.63$. Вторым случаем, при котором поверхность отсечки расположена в дальней зоне антенны, соответствует экспериментальным параметрам на токамаке ASDEX-U для случая зондирующей волны на частоте $\omega/2\pi = 75\text{ГГц}$ [10]: $L = 120\text{см}$, $w = 1\text{см}$, $l_{cx} = l_{cy} = 0.5\text{см}$, $w^2\omega/(2Lc) \simeq 0.065$. В первом случае согласно критерию (1.36) $\vartheta_* = 31^\circ$, во втором - $\vartheta_* = 15^\circ$. Как можно видеть на рисунках 1.9, медленное изменение CCF с увеличением расстояния между отсечками при увеличении угла наклона антенны сменяется достаточно быстрым. Поведение корреляционных функций сигналов в целом воспроизводит корреляционную функцию турбулентности (1.39) при углах, превышающих критическое значение, что хорошо согласуется с предсказаниями аналитической модели. Следует отметить, что для случая узкого пучка, когда обоснование перехода от (1.31) к (1.37) не столь надежно, корреляционная длина РКДР при углах наклона, превышающих критическое значение, оказывается даже меньше корреляционной длины турбулентности (рисунок 1.9 (правая панель) при $\vartheta = 30^\circ$), что согласуется с результатами расчетов [13].

В небольших тороидальных установках, где длина траектории зондирующей волны составляет несколько вакуумных длин волн, выражение (1.31), в котором игнорируется «небрэгговский» вклад в корреляционную функцию, перестает быть корректным. В этом случае необходим численный анализ выражения (1.20) в борновском приближении. На рисунке 1.10

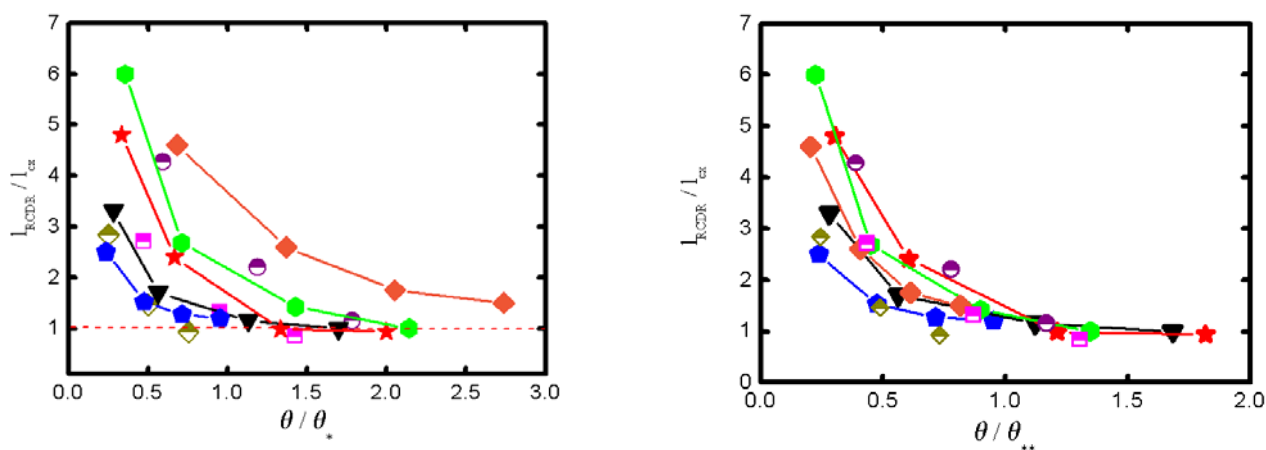


Рисунок 1.11. Зависимость корреляционной длины РКДР, нормированной на корреляционную длину флуктуаций, от угла наклона антенны, нормированной на критический угол. Левая панель: (1.36); правая панель: (1.42). Линии с заштрихованными символами: $l_{cx} = l_{cn} = 0.5\text{см}$, открытые символами: $l_{cx} = l_{cn} = 0.4\text{см}$.

	Пятиугол.	Треугол.	Звезды	Шестиугол.	Ромбы	Откр. ромбы	Откр. квад.	Откр. круги
$\omega / 2\pi$	65ГГц	75ГГц	75ГГц	75ГГц	75ГГц	75ГГц	75ГГц	75ГГц
L	30см	120см	120см	120см	120см	4см	4см	4см
w	4см	4см	1см	0.5см	0.25см	1.6см	0.8см	0.4см
$\rho^2 w / (2Lc)$	3.63	1.04	0.065	0.02	0.004	5	1.26	0.31
\mathcal{G}_*	31°	18°	15°	14.62°	14.6°	40°	21°	16°
\mathcal{G}_{**}	32°	18°	16.5°	22°	49°	41°	24°	25°

(левая панель) и (центральная панель) приведены зависимости $|CCF|$, определяемые выражением (1.20) (открытые символы) и выражением (1.30) (заштрихованные символы), от безразмерного расстояния между отсечками двух зондирующих волн для различных углов наклона антенны и двух наборов параметров. Эти наборы параметров отвечают постановке РКДР эксперимента на токамаке ФТ-2 [14, 15], где отсечка расположена в дальней зоне антенны: $L = 4\text{см}$, $w = 0.4\text{см}$, $l_{cx} = l_{cn} = 0.4\text{см}$, $\omega / 2\pi = 75\text{ГГц}$, $w^2\omega / (2Lc) \simeq 0.31$ и в ближней зоне антенны: $L = 4\text{см}$, $w = 0.8\text{см}$, $l_{cx} = l_{cn} = 0.4\text{см}$, $\omega / 2\pi = 75\text{ГГц}$, $w^2\omega / (2Lc) \simeq 1.26$. В первом случае - $\mathcal{G}_* = 16^\circ$ (1.36), во втором - $\mathcal{G}_* = 21^\circ$. Как можно видеть на рисунке 1.10 (лев. и цен. панель) поведение корреляционных функций (1.20) и (1.30) хотя и совпадает качественно, но существенно отличается в деталях. Изменение $|CCF|$ в зависимости от расстояния между отсечками очень медленное при нормальном зондировании. Оно становится более быстрым при увеличении угла наклона антенны. Это подтверждает тенденцию, обнаруженную аналитически и продемонстрированную для случая большого токамака (рисунок 1.9). Однако, при угле наклона, близком к критическому значению, корреляционная длина РКДР все еще много больше корреляционной длины турбулентности. Этот эффект особенно четко виден в случае

ширины пучка $w = 0.4\text{см}$. Схожее поведение $|CCF|$ можно наблюдать при двухточечной корреляционной функции флуктуаций, описываемых лоренцевским контуром:

$$\langle \delta n_{\Omega}(x, y) \delta n_{\Omega'}(x', y') \rangle = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') \frac{\delta n_0^2}{\left(1 + (x - x')^2 / l_{cx}^2\right) \left(1 + (y - y')^2 / l_{cy}^2\right)}. \quad (1.41)$$

Как можно видеть на рисунке 1.10 (пр. панель), $|CCF|$ уменьшается очень медленно с увеличением расстояния между отсечками при нормальном зондировании плазмы. Далее, как и в случае, проиллюстрированном на рисунке 1.10 (цен. панель), уменьшение $|CCF|$ с увеличением расстояния между отсечками при увеличении угла наклона антенны становится более быстрым. Однако, при достижении критического угла \mathcal{G}_* ($\mathcal{G}_* = 30^\circ$ рисунке 1.10 (правая панель)) корреляционная длина РКДР оказывается меньше корреляционной длины турбулентности (см. также случай $\mathcal{G} = 30^\circ$ на рисунке 1.10 (ц. панель)). Следует отметить, что в случае плазмы маленькой тороидальной установки и/или широкой диаграммы направленности выражение (1.37), строго говоря, неприменимо и эта оценка порогового угла является качественной. Результаты вычисления корреляционной длины РКДР для разных параметров представлены на рисунке 1.11 (лев. панель), где дана зависимость корреляционной длины РКДР, нормированной на корреляционную длину флуктуаций, от угла наклона антенны, нормированной на критический угол (1.36). Линии с заштрихованными символами: $l_{cx} = l_{cy} = 0.5\text{см}$, с символами: $l_{cx} = l_{cy} = 0.4\text{см}$. Как можно видеть из этого рисунка для широкого зондирующего пучка, удовлетворяющему условию $w \gg l_{cy}$, все точки, полученные в результате численного моделирования корреляционной функции как определяемой выражением (1.20), так и выражением (1.30), демонстрируют схожее поведение: нормированная корреляционная длина близка к 1 при нормированном угле наклона антенны больше 1. Однако, для узких пучков с шириной $l_{cy} \geq w$ (шестиугольники и ромбы) сохраняется только тенденция к снижению корреляционной длины РКДР с увеличением угла наклона антенны. Корреляционная длина диагностики приближается к значению корреляционной длины турбулентности только при безразмерном угле много больше 1. Физическая причина этого – плохая селективность доплеровской рефлектометрии по поперечным волновым числам в случае широкой диаграммы направленности антенны, которая не может более предписывать значения поперечных волновых векторов флуктуаций, которые вносят вклад в регистрируемый сигнал. Это значение в данном случае определяется в результате влияния диаграммы антенны и спектра турбулентности по поперечным волновым векторам. В случае гауссовского спектра турбулентности выражение (1.31) можно вычислить методом стационарной фазы с учетом

спектра флуктуаций плотности. В итоге, можно найти условие, определяющее угол, при котором вклад малоуглового рассеяния оказывается подавлен:

$$\sin^2 \vartheta_{**} = \frac{c}{2\omega l_{cx}} \sqrt{1 + \frac{w^4 \omega^2}{(2Lc)^2} \left(\frac{2w^2 + l_{c\eta}^2}{2w^2} \right)^2}. \quad (1.42)$$

Результаты вычисления корреляционной длины РКДР представлены на рисунке 1.11 (пр.панель), где аргументом является угол наклона антенны, нормированный на величину угла (1.42). Видно, что все зависимости, соответствующее разным начальным параметрам, близки друг к другу. Значения корреляционной длины РКДР близки к корреляционной длине турбулентности в случае, когда угол наклона антенны больше, чем критический (1.42). Отметим, что с одной стороны критический угол, определяемый выражением (1.42), увеличивается с уменьшением ширины зондирующего пучка, такого, что $l_{c\eta} \geq w$. Это приводит к подавлению рефлектометрического сигнала и усложнению интерпретации измерений. С другой стороны, критически угол также растет и с ростом ширины зондирующего пучка $w^2 > 2Lc / \omega$, когда поверхность отсечки оказывается в дальней зоне антенны. Поэтому, существует оптимальное значение ширины пучка, при котором возможны прямые измерения радиальной корреляционной длины.

Несмотря на то, что стандартная ДР позволяет проводить измерения полоидальной скорости вращения как в случае линейного, так и нелинейного режима рассеяния зондирующей волны [6а, 7а, 16], схемы стандартной РКР и РКДР не применимы в существующей форме при нелинейном режиме, что связано с большими возмущениями фазы зондирующих волн между их отсечками и приводит к значительному уменьшению корреляционной длины диагностик по сравнению с реальной корреляционной длиной турбулентности [3а - 5а, 16, 17]. Поэтому РКДР наиболее пригодна для исследования турбулентности в больших установках в случае режима улучшенного удержания, когда турбулентность подавлена и диагностика не может перейти в нелинейный режим. РКДР полезна для анализа турбулентности в небольших установках, если траектория зондирующей волны не является слишком длинной, чтобы перевести диагностику в нелинейный режим.

1.4.4. Выводы

В этом разделе развита линейная по амплитуде флуктуаций плотности теория РКДР. Определено аналитически и подтверждено численным анализом критическое значение угла

наклона зондирующей антенны, при котором происходит подавление паразитного вклада нелокального малоуглового рассеяния, и РКДР позволяет получать локальную информацию из окрестности отсечки и прямо измерять двух точечную корреляционную функцию турбулентности и радиальную корреляционную длину.

Основные публикации

- 1) Gusakov E., Irzak M. and Popov A. Radial correlation reflectometry at oblique probing wave incidence (linear scattering theory predictions // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2014. - Vol. 56. - P.025009.
- 2) Gusakov E., Irzak M., Popov A. and Teplova N. Two dimensional modeling of turbulence wave number spectra reconstruction from radial correlation reflectometry data // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2015. - Vol.57. - P.075009.

1.3. Радиальная корреляционная рефлектометрия

Одной из широко используемых разновидностей ФР является радиальная корреляционная рефлектометрия (РКР) [2 - 3]. На рисунке 1.1b. представлена типичная схема РКР. Корреляционный анализ отраженных сигналов, зарегистрированных приемной антенной в двух частотных каналах, позволяет получать информацию о частотном спектре и о спектре в пространстве волновых векторов флуктуаций плотности плазмы. Линейная теория РКР, в рамках которой рассеяние электромагнитной волны на флуктуациях плотности рассматривалось в борновском приближении, была разработана в работе [12]. Однако, предсказания, сделанные в рамках линейной модели РКР, находятся в противоречии с экспериментальными данными, что оставляет открытыми вопросы о локальности измерений и о возможности разрешения измерений по спектрам радиальных волновых векторов флуктуаций плотности. Теория РКР, которая бы учитывала как нелинейные (возможность многократного рассеяния), так и двумерные эффекты, до последнего времени была далека до своего завершения. При интерпретации экспериментальных данных, получаемых РКР, использовали гипотезу, согласно которой рассеянный сигнал генерируется в области отсечки электромагнитной волны при рассеянии на длинноволновых флуктуациях плотности плазмы, доминирующих в спектре. Исходя из этого, радиальную корреляционную длину турбулентности оценивали следующим образом. Поскольку зондирующие сигналы имеют разные частоты, то и положение поверхностей отсечки у них не совпадает. В силу гипотезы, упомянутой выше, корреляция двух отраженных сигналов имеет место пока в радиальном направлении отсечки не разнесены более, чем на радиальную длину корреляции флуктуаций плотности плазмы. Таким образом, расстояние между отсечками, при котором отраженные сигналы перестают коррелировать, считали равным радиальной длине корреляции флуктуаций плотности l_{cx} [2]. Однако, результаты численного моделирования [6] в рамках одномерной модели плазмы в борновском приближении продемонстрировали, что потеря корреляции двух сигналов происходит при раздвижке положений точки отсечки на расстояние сильно превышающее корреляционное. Согласно выводам, сделанным в [6], существенную роль при формировании рассеянного рефлектометрического сигнала играет слабо локализованное малоугловое рассеяние. Однако, это предсказание, сделанное в рамках линейной одномерной модели, не было воспринято всерьез рефлектометрическим сообществом. Строгий анализ флуктуационной рефлектометрии в рамках двумерной теории (линейной по амплитуде флуктуаций плотности плазмы) [5] показал, что сигнал, регистрируемый приемной антенной, формируется при рассеянии на длинноволновых флуктуациях плотности плазмы на всей трассе

распространения, где доминирует малоугловое рассеяние [5, 18]. Как и в одномерной модели, малоугловое рассеяние приводит к очень медленному, логарифмическому, падению корреляции с ростом расстояния между отсечками, что делает практически невозможной оценку пространственного масштаба турбулентности [6, 12, 19, 20]. Однако в эксперименте, наряду с достаточно слабой зависимостью коррелятора двух сигналов от расстояния между отсечками, также наблюдается быстрое падение корреляции [2, 3], происходящее, в частности, при раздвижке поверхностей отсечки на расстояние меньшей вакуумной длины волны зондирующего излучения [3]. Такое поведение не находит объяснения в линейной теории (в рамках которой рассеяние описывается с помощью борновского приближения) и, по-видимому, связано с переходом рассеяния в нелинейный режим. Принимая во внимание, что, согласно [5], эффективность рассеяния максимальна для флуктуаций плотности, обладающих большей по сравнению с корреляционным масштабом длиной волны, и, учитывая, что длинноволновые колебания доминируют в флуктуационном спектре, можно сделать вывод, что переход к нелинейному режиму происходит через многократное малоугловое рассеяние. Малоугловое рассеяние зондирующей волны может быть описано в рамках ВКБ приближения путем учета поправки к ее фазе, которая набирается на всей трассе из-за флуктуаций плотности [21]. Попытки расчета, предпринятые в [2] и в более поздней работе [22] в рамках одномерной модели, основывались как раз на таком подходе. Однако в этих расчетах использовалось предположение, согласно которому спектр флуктуаций плотности плазмы при малых значениях радиальных волновых векторов равен нулю, что не позволило проанализировать локальность РКР и ее разрешение по спектрам радиальных волновых векторов. Более того, некоторые из утверждений, которые были сделаны в работах [2], [22], находятся в глубоком противоречии с результатами линейной теории [5, 6, 18, 19]. Существующие противоречия послужили причиной развития нелинейной теории РКР, речь о которой пойдет в настоящем разделе. В параграфе 1.1 будет изложена одномерная [3а], а затем в параграфе 1.2 - двумерная нелинейная модель РКР [4а – 5а]. Одномерная модель адекватно описывает эксперимент, в котором приемная антенна смещена в поперечном направлении на расстояние, которое много меньше поперечного радиуса корреляции флуктуаций плотности l_{cn} и дифракция зондирующей волны не существенна. Как правило, в эксперименте (особенно на больших установках) дифракционными эффектами пренебречь нельзя. Эти эффекты будут учтены в рамках двумерной модели РКР. Однако уже в рамках одномерной модели удастся продемонстрировать основные закономерности, свойственные РКР.

1.3.1. Одномерная модель радиальной корреляционной рефлектометрии

Рассмотрим случай, когда для диагностики флуктуаций плотности плазмы используется волна обыкновенной (О) поляризации. Будем рассматривать одномерную модель плазмы, когда неоднородность плотности направлена по оси x , а вектор поляризации обыкновенной волны направлен вдоль магнитного поля по оси $O\xi$. Поле зондирующей волны описывается уравнением Гельмгольца:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{n(x) + \delta n(x)}{n_c} \right) \right] E_\xi = 0, \quad (1.43)$$

где $n(x)$ - невозмущенная плотность плазмы, $\delta n(x)$ - флуктуации плотности плазмы, $n_c = m_e \omega / (4\pi e^2)$ - критическая концентрация. Далее будем считать, что профиль невозмущенной плотности плазмы монотонный и гладкий, таким образом, что (а) в объеме плазмы присутствует только одна точка отсечки, (б) ВКБ приближение при описании зондирующей волны является корректным. Будем считать, что временной масштаб, характеризующий флуктуации плотности плазмы, много больше, чем время распространения зондирующего сигнала от зондирующей до приемной антенны и периода зондирующего сигнала. Это предположение позволяет рассматривать плазму как стационарную. Пренебрегая возможностью многократного переотражения зондирующей волны от плазмы и металлических стенок камеры, представим амплитуду волны E_ξ , которая может быть зарегистрирована приемной антенной, в виде

$$E_{\xi r} = E_{\xi i} e^{i\phi_r}, \quad (1.44)$$

где $E_{\xi i}$ - амплитуда волны в зондирующей антенне, $\phi_r = \phi_0 + \delta\phi = 2 \int_0^{x_c} k(x) dx - \frac{\pi}{2} + \delta\phi$ - фаза волны, набранная за проход от зондирующей антенны до отсечки и обратно до приемной антенны, $k(x) = \omega / c \sqrt{1 - n(x) / n_c}$, x_c - точка отсечки, которая является решением уравнения $k(x_c) = 0$ и $n(x_c) = n_c$. Будем считать далее, что флуктуации плотности малы $\delta n / n_c \ll l_{cx} / x_c \ll 1$. В этом случае в турбулентной плазме присутствует только одна точка отсечки. Кроме того, предположим, что радиальная корреляционная длина турбулентности велика $l_{cx} \gg (c^2 x_c / \omega^2)^{1/3}$, так что рассеянием «назад» можно пренебречь везде, кроме окрестности точки отсечки. В окрестности точки отсечки также становится некорректным ВКБ

приближение при описании зондирующей волны. Однако задача состоит в том, чтобы показать, что именно малоугловое рассеяние на всей трассе распространения зондирующего пучка, где ВКБ приближение является корректным и рассеянием «назад» можно пренебречь, играет доминирующую роль при формировании спектров регистрируемого сигнала. Используя сделанные предположения, флуктуирующую часть фазы электромагнитной волны в рупоре приемной антенны можно представить в виде:

$$\delta\varphi(\omega, t) = -\frac{\omega^2}{c^2} \int_0^{x_c} \frac{\delta n(x, t)}{n_c} \frac{dx}{k(x, \omega)}. \quad (1.45)$$

В реальных условиях больших экспериментальных установок корреляционная длина l_{cx} , как правило, много меньше расстояния до отсечки. Поэтому мы можем представить случайную величину $\delta\varphi(\omega, t)$ как сумму независимых случайных событий. В этом случае процесс изменения $\delta\varphi(\omega, t)$ можно считать нормальным случайным процессом, вероятность совместных событий $p[\delta\varphi(\omega_j, t_j), \delta\varphi(\omega_l, t_l)]$ в котором может быть представлена в виде

$$p[\delta\varphi_j, \delta\varphi_l] = \frac{\sqrt{\alpha_{jj}\alpha_{ll} - \alpha_{jl}^2}}{\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{m,n=j}^l \alpha_{mn} \delta\varphi_m \delta\varphi_n\right\}, \quad (1.46)$$

где индекс « j » нумерует переменные (ω_j, η_j, t_j) , $\alpha_{mn} = \sigma_{mn}^{-1}$ и матрица σ_{mn} - корреляционная функция возмущений фазы волны

$$\sigma_{jl} = \langle \delta\varphi_j \delta\varphi_l \rangle = \frac{\omega_j^2 \omega_l^2}{c^4} \int_0^{x_{cj}} \frac{\langle \delta n[x] \delta n[x'] \rangle}{n_{cj} n_{cl}} \frac{dx}{k(x, \omega_j)} \frac{dx'}{k(x', \omega_l)}, \quad (1.47)$$

где $\langle \dots \rangle$ - статистическое усреднение. Используя выражения (1.44) - (1.46), получим выражение для величины средней амплитуды рассеянного сигнала:

$$\langle E_{\xi r}(\omega_k, t) \rangle = E_{\xi i} \exp(i\phi_0(\omega_k) - \sigma_{kk}(\omega_k, t)/2) \quad (1.48)$$

и для корреляционной функции сигналов, зарегистрированных в двух частотных каналах:

$$CCF_{jl} = E_{\xi i}(\omega_j) E_{\xi i}(\omega_l)^* \exp\left\{i[\phi_{0j} - \phi_{0l}] + \sigma_{jl} - (\sigma_{ll} + \sigma_{jj})/2\right\}. \quad (1.49)$$

Символ * означает комплексное сопряжение. В случае статистически стационарной турбулентности элементы корреляционной матрицы удовлетворяют соотношениям $\sigma_{jl} = \sigma_{jl}(\omega_j, \omega_l, t_j - t_l)$, $\sigma_{jj} = \sigma_{jj}(\omega_j, \omega_j, 0)$. Выражения (1.48) и (1.49), описывают поведение амплитуды регистрируемого сигнала в нелинейном режиме, когда $\sigma_{jj}/2 \geq 1$.

Рассмотрим наиболее простой случай линейного профиля концентрации $n(x) = n_c x / x_c$ и статистически однородной турбулентности:

$$\langle \delta n(x'', t'') \delta n(x', t') \rangle = \delta n^2 K_n(x'' - x', t'' - t'),$$

$$K_n(x'' - x', t'' - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} n_\kappa^2(t'' - t') \exp(i\kappa(x'' - x')).$$
(1.50)

На этом примере мы постараемся выявить все закономерности, свойственные нелинейному режиму РКР. После подстановки $\zeta = \sqrt{x_{c2} - x}$, $\zeta' = \sqrt{x_{c1} - x'}$ корреляционная функция (1.47)

может быть записана в виде

$$\sigma_{12} = \frac{4\omega_1\omega_2}{c^2} \frac{\delta n^2}{n_c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{n_\kappa^2(t'' - t')}{|\kappa|} \exp(i\kappa\Delta) F(\sqrt{\kappa x_{c1}}) F^*(\sqrt{\kappa x_{c2}}),$$
(1.51)

где $\Delta = x_{c2} - x_{c1}$, $F(s) = \int_0^s \exp(it^2) dt$ - интеграл Френеля. Асимптотические выражения для

интеграла Френеля при малом и большом аргументе имеют вид:

$$F(s) \approx s, \quad s \ll 1,$$

$$F(s) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right), \quad s \gg 1.$$
(1.52)

Выражение σ_{11} , которое определяет поведение амплитуды регистрируемого сигнала на частоте зондирующего сигнала, может быть получено из выражения (1.51) в виде

$$\sigma_{11} = \frac{4\omega_1^2}{c^2} \frac{\delta n^2}{n_c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{n_\kappa^2}{|\kappa|} \exp(i\kappa\Delta) \left| F(\sqrt{\kappa x_{c1}}) \right|^2.$$
(1.53)

Проанализировав последнее выражение, отметим следующее. Подынтегральное выражение имеет особенность вида $1/|\kappa|$, которая говорит о доминирующей роли рассеяния на длинноволновых флуктуациях. Это приводит к плохой локализации измерений. В случае $x_c \gg l_{cx}$ выражение (1.53) может быть получено с логарифмической точностью в явном виде

$$\sigma_{11} \approx \frac{\omega_1^2 x_{c1} l_{cx}}{c^2} \frac{\delta n^2}{n_c^2} \ln \left[\frac{x_{c1}}{l_{cx}} \right].$$
(1.54)

В случае гауссовского спектра флуктуаций

$$n_\kappa(0) = \sqrt{\pi} l_{cx} \exp \left[-\frac{(\kappa l_{cx})^2}{4} \right]$$
(1.55)

можно получить более аккуратную оценку

$$\sigma_{11} \approx \sqrt{\pi} \frac{\omega_1^2 x_{c1} l_{cx}}{c^2} \frac{\delta n^2}{n_c^2} \ln \left[\frac{8x_{c1}}{\pi l_{cx}} - \frac{\gamma}{2} + 1 \right],$$
(1.56)

где $\gamma = 0,57721$ константа Эйлера. Нелинейный режим рассеяния соответствует ситуации, когда линия на частоте зондирующего сигнала сильно подавлена в частотном спектре

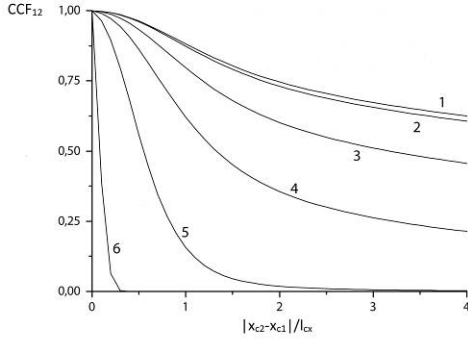


Рисунок 1.12. Зависимость корреляционной функции двух сигналов CCF_{12} от расстояния между отсечками Δ/l_{cx} для различных уровней турбулентности $\delta n/n_c$ (1) 10^{-4} , (2) 10^{-3} , (3) 3×10^{-3} , (4) 5×10^{-3} , (5) 10^{-2} , (6) 5×10^{-2} ; $2\pi c/\omega = 0.52$ см, $l_{cx} = 2$ см, $x_c = 60$ см.

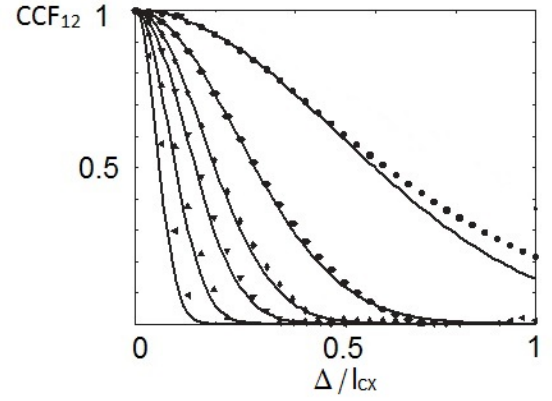


Рисунок 1.13. Зависимость корреляционной функции двух сигналов CCF_{12} от расстояния между отсечками Δ/l_{cx} для различных уровней турбулентности. Символы – результат численного расчета [23] для $\delta n/n_c =$ (кружки) 5×10^{-3} , (квадраты) 10^{-2} , (ромбы) 1.5×10^{-2} , (треугольники, носик вниз) 2×10^{-2} , (треугольники, носик вверх) 3×10^{-2} , (треугольники, носик влево) 5×10^{-2} . Сплошные линии – формула (1.62). $\omega/2\pi = 57.69$ ГГц, $l_{cx} = 4$ см, $x_c = 60$ см.

регистрируемого сигнала. Согласно (1.54), (1.56) критерий перехода в нелинейный режим имеет вид

$$\frac{\delta n^2}{n^2} \frac{\omega^2 x_c l_{cx}}{c^2} \ln \frac{x_c}{l_{cx}} > 1. \quad (1.57)$$

При выполнении обратного условия

$$\frac{\delta n^2}{n^2} \frac{\omega^2 x_c l_{cx}}{c^2} \ln \frac{x_c}{l_{cx}} \ll 1 \quad (1.58)$$

в частотном спектре регистрируемого сигнала доминирует линия на частоте зондирующего сигнала. В этом случае при описании распространения зондирующей волны остается корректным борновское приближение и выражение для корреляционной функции имеет вид

$$CCF_{12} = \sigma_{12} E_{zi}(\omega_1) E_{zi}(\omega_2)^* \exp\{i[\phi_{01} - \phi_{02}]\}. \quad (1.59)$$

В выражении (1.51) подынтегральное выражение сильно возрастает (как $1/|\kappa|$) при малых волновых векторах. Функция $|F[(\kappa x_{c1})^{1/2}]|^2$ при $1/|\kappa| \ll l_{cx}$ ведет себя как $|\kappa|$. При этом

сингулярность "насыщается" и выражение σ_{12} с логарифмической точностью может быть представлено в виде

$$\sigma_{12} = \frac{\omega_1^2 x_{c1} l_{cx}}{c^2} \frac{\delta n^2}{n_c^2} K_n(0, t_2 - t_1) \ln \left[\frac{\Delta}{l_{cx}} \right]. \quad (1.60)$$

Согласно выражению (1.60) корреляция между двумя сигналами при увеличении расстояния между отсеками теряется медленно, согласно логарифмическому закону, что совпадает с предсказанием линейного анализа, как численного [22], так и аналитического (в рамках двумерной модели), в котором не использовалось ВКБ приближение [20]. Таким образом, можно отметить, что, во-первых, именно малоугловое рассеяние приводит к логарифмической зависимости корреляционной функции от расстояния между отсеками и, во-вторых, этот факт не является особенностью использовавшегося ВКБ приближения. Согласно (1.60) при выполнении условия (1.58) РКР не позволяет оценить радиальный корреляционный масштаб флуктуаций плотности.

Поведение корреляционной функции CCF_{12} при переходе из линейного в нелинейный режим в случае, когда турбулентность имеет гауссовский спектр (1.55), показано на рисунке 1.12. Анализ рисунка 1.12 позволяет прийти к выводу, что при сравнительно небольшом уровне турбулентности $\delta n / n_c < 10^{-3}$ корреляционная функция слабо зависит от расстояния между отсеками. При $\delta n / n_c > 2 \cdot 10^{-3}$ выполняется условие (1.57). Потеря корреляции происходит по другому, не логарифмическому закону. При $\delta n / n_c > 2 \cdot 10^{-2}$ корреляция между двумя регистрируемыми сигналами теряется, когда расстояние между отсеками значительно меньше корреляционного масштаба. Рассмотрим далее ситуацию, когда малоугловое рассеяние находится в сильно нелинейном режиме (на рисунке 1.12 $\delta n / n_c > 2 \cdot 10^{-2}$):

$$\frac{\delta n^2}{n^2} \frac{\omega^2 x_c l_{cx}}{c^2} \ln \frac{x_c}{l_{cx}} \gg 1. \quad (1.61)$$

При выполнении условия (1.61), корреляция сигналов, зарегистрированных в двух каналах, сохраняется при $\Delta \ll l_{cx}$ и $\tau \ll t_c$ (t_c - корреляционное время турбулентности). В этом диапазоне параметров мы можем представить CCF в форме

$$CCF_{12} = E_i(\omega_1) E_i(\omega_2)^* \exp \left\{ i[\phi_{01} - \phi_{02}] - \left(\frac{\Delta}{l_{cx}^{ef}} \right)^2 - \left(\frac{\tau}{t_c^{ef}} \right)^2 \right\}, \quad (1.62)$$

где

$$\left(\frac{1}{l_{cx}^{ef}} \right)^2 = \frac{\omega_1^2}{2c^2} \frac{\delta n^2}{n_c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} |\kappa| n_\kappa^2(0) \left| F(\sqrt{\kappa x_{c1}}) \right|^2, \quad (1.63)$$

$$\frac{1}{t_{ef}^2} = \frac{2\omega_1^2}{c^2} \frac{\delta n^2}{n_c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \frac{1}{|\kappa|} \left. \frac{\partial^2 n_\kappa^2(\tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} \left| F(\sqrt{\kappa x_{c1}}) \right|^2. \quad (1.64)$$

В случае, если турбулентность характеризуется гауссовским спектром (1.55), выражения (1.63) и (1.64) сводятся к виду

$$\left(\frac{1}{l_{cx}^{ef}} \right)^2 = 2\sqrt{\pi} \frac{\omega_1^2 x_{c1}}{c^2 l_{cx}} \frac{\delta n^2}{n_c^2} K_n(0), \quad (1.65)$$

$$\frac{1}{t_{ef}^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_1^2 x_{c1} l_{cx}}{c^2} \frac{\delta n^2}{n_c^2} \left. \frac{\partial^2 K_n(\tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} \ln \left[\frac{8x_{c1}}{\pi l_{cx}} - \frac{\gamma}{2} + 1 \right]. \quad (1.66)$$

Согласно выражению (1.64), основной вклад в интеграл вносят волновые вектора, удовлетворяющие соотношению $\kappa < l_{cx}^{-1}$. Интеграл «насыщается» при радиальных волновых числах $|\kappa| \propto l_{cx}^{-1}$ и $F(\kappa) \approx \kappa$. Таким образом, доминирующую роль при формировании частотных спектров регистрируемого сигнала в нелинейном режиме играет малоугловое рассеяние на всей трассе распространения зондирующих пучка, которое можно описать в рамках ВКБ приближения. Измерения при этом не являются локальными. Следует также отметить, что ширина спектра рассеяния в нелинейном режиме существенно превосходит ширину спектра турбулентности. Напротив, при корреляционных измерениях двух сигналов в разных частотных каналах, деструктивная роль малоуглового рассеяния оказывается подавленной. Основной вклад в корреляционные измерения вносит окрестность точки отсечки. При этом, однако, РКР позволяет оценить не l_{cx} , а величину $l_{cx} n_c^2 / \delta n^2$.

На рисунке 1.13 приведена зависимость корреляционной функции двух сигналов CCF_{12} от расстояния между отсечками Δ / l_{cx} для различных уровней турбулентности, отвечающих нелинейному режиму рассеяния. Символы – результат полноволнового одномерного расчета в работе [23], где соавтором был диссертант, для параметров $\omega / 2\pi = 57.69$ ГГц, $l_{cx} = 4$ см, $x_c = 60$ см и статистически однородной турбулентности. Сплошные линии – формула (1.62). Продемонстрировано разумное согласие между аналитическим предсказанием и численным анализом.

Рассмотрим случай статистически неоднородной турбулентности и произвольного профиля плотности. Считая турбулентность слабо неоднородной, зададим корреляционную функцию флуктуаций плотности в виде

$$\langle \delta n(x'', t'') \delta n(x', t') \rangle = \delta n^2 \left(\frac{x' + x''}{2a} \right) K_n(x'' - x', t'' - t'), \quad K_n(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa n_\kappa^2(t) \exp(i\kappa x), \quad (1.67)$$

где $l_{cx} \ll a \ll x_c$. Подставим это выражение в (1.47) и сделаем замену переменных

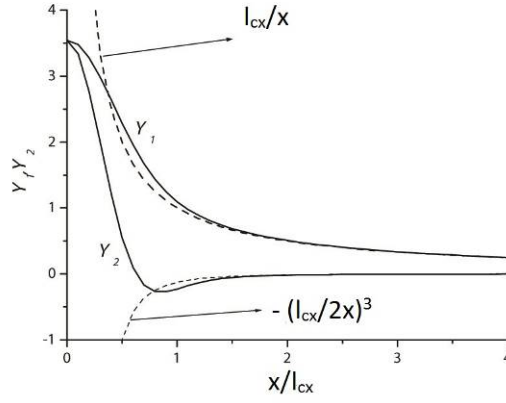


Рисунок 1.14. Зависимость $Y_1 = l_{cx}G(\xi, b)$ и $Y_2 = l_{cx}^2 \partial G(\xi, b) / \partial b$ от ξ / l_{cx} и сравнение их с асимптотическими выражениями (пунктир). Спектр турбулентности гауссовский, $2\pi c / \omega = 0.52$ см, $l_{cx} = 2$ см, $x_c = 60$ см.

$\sqrt{x_{c1} - x} = \sqrt{2\xi} \cos \psi$, $\sqrt{x_{c2} - x'} = \sqrt{2\xi} \sin \psi$. Далее пренебрежем отличием в верхней границе области интегрирования. В декартовых координатах граница области интегрирования - прямоугольник, в полярных - круг. Однако эта разница не является существенной в силу малости параметра $l_{cx} \ll a \ll x_c$. В итоге получим следующее выражение для функции σ_{12} :

$$\sigma_{12} \approx \frac{4\omega_1\omega_2}{c^2} x_c \int_0^\infty d\xi \frac{\delta n^2 [x_{c1} + x_{c2} - 2\xi]}{n_c^2} S_{12}(\xi, \Delta, \tau), \quad (1.68)$$

где функция $S_{12}(\xi, \Delta, \tau)$ определяется спектром флуктуаций

$$S_{12}(\xi, \Delta, \tau) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} n_\kappa^2[\tau] \exp[i\kappa\Delta - 2i\kappa\xi \cos(2\psi)] = \int_0^{\pi/2} d\psi K_n[\Delta - 2\xi \cos(2\psi), \tau]. \quad (1.69)$$

Для того чтобы оценить локальность РКР, рассмотрим асимптотическое поведение функции $S_{12}(\xi, \Delta, \tau)$ при больших значениях аргумента $\xi \gg l_{cx}$. В случае, когда расстояние между двумя точками отсечки много больше корреляционной длины $\Delta \gg l_{cx}$ и $\xi - 2\Delta \gg l_{cx}$, асимптотическое выражение $S_{12}(\xi, \Delta, \tau)$ имеет вид

$$S_{12}(\xi, \Delta, \tau) = \frac{\bar{K}_n[\tau] l_{cx}}{2\sqrt{4\xi^2 - \Delta^2}}, \quad \bar{K}_n[\tau] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{l_{cx}} K_n[s, \tau]. \quad (1.70)$$

При увеличении расстояния от точки отсечки функция $S_{12}(\xi, \Delta, \tau)$ спадает как $1/4\xi$. Поэтому вклад окрестности точки отсечки не превалирует по сравнению с остальной областью интегрирования. Значение корреляционной функции существенно зависит от поведения уровня турбулентности вдали от точки отсечки. В случае, когда выполняется условие (1.61) ситуация

противоположная. Функцию $S_{12}(\xi, \Delta, \tau)$ в этом случае можно разложить в ряд Тейлора по параметрам $\Delta \ll l_{cx}$ и $\tau \ll t_c$, также, как это было сделано в предыдущем параграфе. Оставляя первый неисчезающий член, получим следующие выражения для $1/l_{cx}^{ef}$ и $1/t_{ef}$:

$$\left(\frac{1}{l_{cx}^{ef}}\right)^2 = \frac{2\omega_1\omega_2}{c^2} x_c \int_0^\infty d\xi \frac{\delta n^2[x_{c1} - \xi]}{n_c^2} \left| \frac{\partial^2 S_{12}(\xi, \Delta, 0)}{\partial \Delta^2} \right|_{\Delta=0}, \quad (1.71)$$

$$\frac{1}{t_{ef}^2} = \frac{2\omega_1\omega_2}{c^2} x_c \int_0^\infty d\xi \frac{\delta n^2[x_{c1} - \xi]}{n_c^2} \left| \frac{\partial^2 S_{12}(\xi, 0, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0}. \quad (1.72)$$

При $\xi \gg l_{cx}$ функция $S_{12}(\xi, \Delta, \tau)$ может быть асимптотически представлена в виде

$$S_{12}(\xi, \Delta, \tau) \approx \frac{\bar{K}_n[\tau] l_{cx}}{4\xi} \left[1 + \frac{\Delta^2}{8\xi^2} \right]. \quad (1.73)$$

Первый член в правой части (1.73), - часть аппаратной функции, которая описывает измерения частотного спектра флуктуаций в нелинейном режиме рассеяния, - ведет себя как $S_{12}(\xi, \Delta, \tau) \propto 1/\xi$. Второй член спадает быстрее значительно быстрее - $|S_{12}(\xi, \Delta, \tau)| \propto 1/|\xi|^3$, что гарантирует преимущественный вклад окрестности точки отсечки, $\xi \leq l_{cx}$. Поэтому можно говорить о том, что корреляционные измерения являются локальными. Для гауссовского спектра флуктуаций

$$n_\kappa(\tau) = \sqrt{\pi} l_{cx} \exp \left[-\frac{(\kappa l_{cx})^2}{4} - \frac{\tau^2}{t_c^2} \right] \quad (1.74)$$

выражение для аппаратной функции имеет вид:

$$S_{12}(\xi, \Delta, \tau) \approx \frac{\sqrt{\pi} l_{cx}}{4} \left[G(\xi, b) \left(1 - \frac{\tau^2}{t_c^2} \right) + \frac{\partial G(\xi, b)}{\partial b} \frac{\Delta^2}{2} \right]_{b=l_{cx}^2/4}, \quad G = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp \left(-\frac{\xi^2}{2b} \right) I_0 \left(\frac{\xi^2}{2b} \right). \quad (1.75)$$

Зависимость функций $Y_1 = l_{cx} G(\xi, b)$ и $Y_2 = l_{cx}^2 \frac{\partial G(\xi, b)}{\partial b}$ от пространственной переменной ξ/l_{cx}

приведены на рисунке 1.14. На этом же рисунке показаны асимптотические зависимости $Y_1 \propto l_{cx}/\xi$ и $Y_2 \propto -l_{cx}^3/(2\xi)^3$, полученные в (1.73). Для того, чтобы проиллюстрировать тот

факт, что при корреляционных измерениях доминирующую роль вносит окрестность точки отсечки, рассмотрим простую модель статистически неоднородных флуктуаций (см. рисунок 1.15). Будем считать, что пространственное распределение флуктуаций представляет собой

суперпозицию однородного фона $\delta n_0/n_c = 2 \cdot 10^{-2}$ и неоднородного распределения

$\delta n_a(x)/n_c = \delta_a f(x)$. Неоднородная компонента флуктуаций расположена между границей

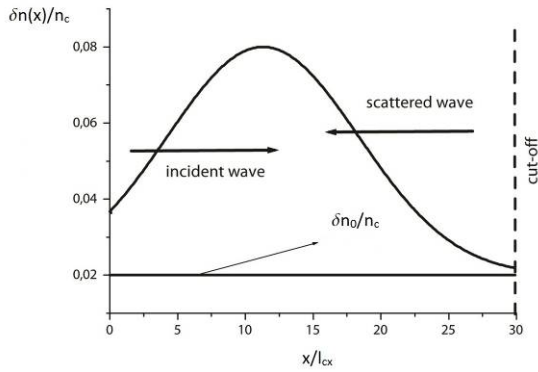


Рисунок 1.15. Вид неоднородного турбулентного слоя $\delta n(x) = \delta n_a(x) + \delta n_0$.

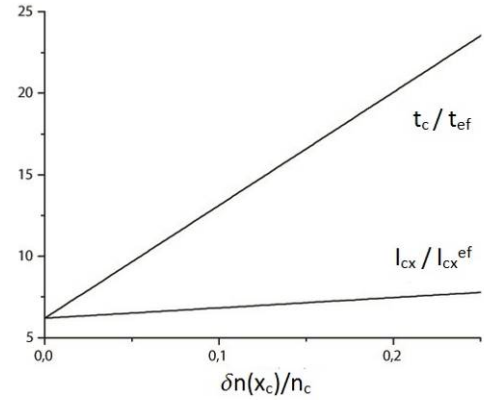


Рисунок 1.16. Зависимость l_{cx}/l_{cx}^{ef} и t_c/t_{ef} от уровня турбулентности в отсечке; $2\pi c/\omega = 0.52$ см, $l_{cx} = 2$ см, $x_c = 60$ см.

плазмы и точкой отсечки. Будем варьировать ее уровень δ_a , не меняя при этом пространственного распределения $f(x)$. Поведение безразмерных параметров l_{cx}/l_{cx}^{ef} и t_c/t_{ef} , согласно выражениям (1.71), (1.72) и (1.75), в зависимости от уровня неоднородной компоненты флуктуаций в точке отсечки приведено на рисунке 1.16. Хорошо видно, что их поведение различно. Параметр t_c/t_{ef} чувствителен к изменению уровня флуктуаций во всем слое, в то время, как l_{cx}/l_{cx}^{ef} меняется незначительно и зависит в основном от уровня флуктуаций в окрестности точки отсечки. Как уже было упомянуто выше, уширение спектра корреляционной рефлектометрии определяется нелокальным малоугловым рассеянием во всей пространственной области, где присутствует турбулентность. Подавление же корреляции сигналов в двух частотных каналах в нелинейном режиме рассеяния чувствительно к уровню флуктуаций в окрестности точки отсечки. Подобная интерпретация наглядно иллюстрируется рисунке 1.16. Следует отметить, что все расчеты, приведенные выше, были сделаны при условии, что в плазме присутствует только одна точка отсечки. Однако, результаты численного моделирования корреляционной функции сигналов в рамках одномерной полноволновой модели РКР [23] продемонстрировали хорошее согласие с теоретическими предсказаниями в широком диапазоне значений $\delta n/n_c$. Согласие имело место даже при тех уровнях турбулентности $\delta n/n_c > l_{cx}/x_c$, при которых аналитические выражения, казалось бы, должны становиться некорректными, поскольку условие отсутствия в плазме дополнительных точек отсечки нарушается. Таким образом, можно надеяться, что для аналитических выражений, полученных выше, условие, ограничивающее их применимость в зависимости от уровня флуктуаций, не является критичным.

1.3.2. Двумерная модель

В предыдущем разделе была рассмотрена одномерная нелинейная модель РКР. Ее применимость в значительной мере ограничена в ситуации, когда поверхность отсечки расположена в дальней волновой зоне. В этом случае пренебрежение дифракцией зондирующей волны и зависимостью положения поверхности отсечки от поперечной к магнитному полю компоненты волнового вектора (в наших обозначениях k_η) зондирующей волны не является корректным. Для того чтобы проверить основные выводы, сделанные в рамках одномерной модели, рассмотрим более физически реалистичную двумерную нелинейную модель РКР.

Будем считать, что сделанные ранее предположения остаются в силе, а именно:

1) рассеяние на малый угол на всей трассе распространения зондирующей волны может быть описано в рамках ВКБ приближения в предположении, что основным физическим эффектом является случайное изменение фазы зондирующей волны при распространении в среде с флуктуациями (в турбулентной среде);

2) при достаточно большой корреляционной длине флуктуаций $l_{cx} \gg (c^2 x_c / \omega_j^2)^{1/3}$, рассеянием «назад» можно пренебречь везде, кроме окрестности точки отсечки.

Рассмотрим случай произвольного (гладкого) профиля плотности плазмы, а также произвольной поляризации (обыкновенной или необыкновенной) зондирующего сигнала. Распространение зондирующей волны будем рассматривать в рамках плоской геометрии, пренебрегая искривлением магнитных поверхностей. При этом флуктуации плотности плазмы будем предполагать двумерно-неоднородными и нестационарными, таким образом, что $n(\mathbf{r}, t) = n_0(x) + \delta n(x, \eta, t)$. При сделанных предположениях зондирующий пучок может быть описан в рамках ВКБ приближения, как суперпозиция геометрико-оптических волн. В рупоре приемной антенны электромагнитное поле зондирующего пучка может быть представлено в виде

$$E_r(\eta, \omega_j, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_\eta}{2\pi} \tilde{E}(k_\eta) \exp[i\phi_r(k_\eta, \eta, \omega_j, t)], \quad (1.76)$$

где:

$$\tilde{E}(k_\eta) = \sqrt{P_j} \int_{-\infty}^{\infty} dy E_0(\eta) \exp(-ik_\eta \eta), \quad (1.77)$$

$$\phi_{r\alpha} = \phi_{0\alpha} + \delta\phi_\alpha = 2 \int_0^{x_c} k_\alpha(x, \omega_j, k_\eta) dx + k_\eta \eta - \frac{\pi}{2} + \delta\phi_\alpha,$$

P_j - мощность зондирующего сигнала и индекс α означает тип зондирующей волны. В случае зондирования плазмы волной обыкновенной поляризации

$$k_o(x, \omega_j, k_\eta) = \sqrt{\frac{\omega_j^2 - \omega_{pe}^2(x)}{c^2} - k_\eta^2}. \quad (1.78)$$

В случае зондирования плазмы волной необыкновенной (X) поляризации

$$k_X(x, \omega_j, k_\eta) = \sqrt{\frac{\left[(\omega + \omega_{ce}(x))\omega - \omega_{pe}^2(x) \right] \left[(\omega - \omega_{ce}(x))\omega - \omega_{pe}^2(x) \right]}{\left[\omega^2 - \omega_{pe}^2(x) - \omega_{ce}^2(x) \right] c^2} - k_\eta^2}. \quad (1.79)$$

Позиция поверхности отсечки $x = x_c(\omega, k_\eta)$ определяется уравнением $k_\alpha(x, \omega, k_\eta) = 0$.

Предположим, что аппаратная функция зондирующей и приемной антенны может быть описана гауссовской функцией:

$$E_0(\eta) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{w}} e^{-\eta^2/2w^2}, \quad (1.80)$$

где w - радиус пучка. Будем считать, что зондирующий пучок широк (что обычно имеет место в экспериментах с использованием РКР) настолько, что выполняется следующее условие $w\omega/c \gg 1$. Воспользовавшись этим условием, запишем регулярную часть фазы зондирующей волны в параксиальном приближении в виде:

$$\phi_{0\alpha}(\omega_j, k_\eta, \eta, t) = 2 \int_0^{x_c} k_\alpha(x, \omega_j, 0) dx + d_j^2(0) \frac{k_\eta^2}{2} + k_\eta \eta - \frac{\pi}{2}, \quad (1.81)$$

где

$$d_j^2(x) = 2 \int_x^{x_c} \frac{dx'}{k_\alpha(x', \omega_j, 0)}. \quad (1.82)$$

Нерегулярную часть фазы волны $\delta\phi_\alpha$, связанную с ее распространением через турбулентную среду, с точностью до членов первого порядка малости можно представить в виде [21]:

$$\delta\phi_\alpha = -\frac{\omega_j^2}{2c^2} \left(\int_0^{x_c} \frac{\left[\delta n(x, \eta_{j-}(x, k_{\eta j}), t) + \delta n(x, \eta_{j+}(x, k_{\eta j}), t) \right] h_\alpha dx}{n_c k_\alpha(x, \omega_j, k_{\eta j})} \right). \quad (1.83)$$

Поправка к фазе (1.83) вычислена вдоль невозмущенной траектории $x(\eta', k_\eta)$, проходящей в точку $(0, \eta)$:

$$\eta_{j\pm}(x, k_{\eta j}, \omega_j) = \eta - \frac{k_{\eta j}}{2} \left[d_j^2(0) \pm d_j^2(x) \right], \quad \eta_0(\omega_j, k_\eta) = \eta - k_\eta d_j^2(0). \quad (1.84)$$

Верхний + и нижний - индекс отвечают частям траектории зондирующей волны после и до точки отсечки, соответственно В случае обыкновенной моды $h_o = 1$, в случае необыкновенной

волны $h_e(x, \omega) = \left[\left[\omega^2 - 2\omega_{pe}^2(x) \right] \left[\omega^2 - \omega_{ce}^2(x) \right] + \omega_{pe}^4(x) \right] \left[\omega^2 - \omega_{pe}^2(x) - \omega_{ce}^2(x) \right]^{-2}$. Выражение для амплитуды сигнала на частоте ω_j может быть получено из выражений (1.76) и (1.84) путем свертки поля отраженной волны с аппаратной функцией приемной антенны $E_0(\eta_j - \eta_r)$, смещенной относительно зондирующей в полоидальном направлении на расстояние $\eta = \eta_r$:

$$A_r(\omega_j, t_j) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_j E_r(\eta_j, \omega_j, t_j) E_0(\eta_j - \eta_r). \quad (1.85)$$

Выражение для амплитуды сигнала, усредненное по ансамблю флуктуаций, также как и выражение для корреляционной функции, может быть получено в виде:

$$\langle A_r(\omega_j, t_j) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_j \langle E_r(\eta_j, \omega_j, t_j) \rangle E_0(\eta_j - \eta_r), \quad (1.86)$$

$$(CCF)_{jl} = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_j d\eta_l K_{jl}(\eta_j, \eta_l, \omega_j, \omega_l, t_j - t_l) E_0(\eta_j - \eta_r) E_0^*(\eta_l - \eta_r),$$

где

$$K_{jl} = \left\langle \left[E_r(\eta_j, \omega_j, t_j) - \langle E_r(\eta_j, \omega_j, t_j) \rangle \right] \left[E_r(\eta_l, \omega_l, t_l) - \langle E_r(\eta_l, \omega_l, t_l) \rangle \right]^* \right\rangle. \quad (1.87)$$

Также, как и в случае одномерной модели РКР, в силу условия $l_{cx} \ll x_c$ поправку к фазе сигнала $\delta\varphi_\alpha(\omega, \eta, t)$ (1.83) можно представить как сумму независимых вкладов и рассматривать эволюцию фазы как нормальный случайный процесс, функция вероятности $p[\delta\varphi(\omega_j, \eta_j, t_j), \delta\varphi(\omega_l, \eta_l, t_l)]$ которого имеет вид:

$$p[\delta\varphi_j, \delta\varphi_l] = \frac{\sqrt{\alpha_{jj}\alpha_{ll} - \alpha_{jl}^2}}{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{m,n=j}^l \alpha_{mn} \delta\varphi_m \delta\varphi_n \right\}, \quad (1.88)$$

где индекс "j" нумерует переменные (ω_j, η_j, t_j) , $\alpha_{mn} = \sigma_{mn}^{-1}$ и матрица σ_{mn} - корреляционная функция возмущений фазы волны

$$\sigma_{jl} = \langle \delta\varphi_j \delta\varphi_l \rangle = \frac{\omega_j^2 \omega_l^2}{4c^4} \frac{1}{k_{\eta l} k_{\eta j}} \int_{\eta_0(k_{\eta j})}^{\eta_j} d\eta' \int_{\eta_0(k_{\eta l})}^{\eta_l} d\eta'' \frac{\langle \delta n[x(\eta', k_{\eta l}), \eta'] \delta n[x(\eta'', k_{\eta j}), \eta''] \rangle}{n_{ej} n_{el}} h_{\alpha j} h_{\alpha l}, \quad (1.89)$$

где $\langle \dots \rangle$ - статистическое усреднение. Воспользовавшись (1.76), (1.77), (1.83), (1.87) и (1.88), мы получим выражение для среднего значения поля волны

$$\langle E_r(\omega_j, t_j, \eta_j) \rangle = \int E(k_{\eta j}) \exp \left(i\phi_0(\omega_j, k_{\eta j}) - \frac{\sigma_{jj}}{2} \right) \frac{dk_{\eta j}}{2\pi} \quad (1.90)$$

и кросс-корреляционную функцию полей в двух частотных каналах $j \neq l$:

$$K_{jl} = \iint \tilde{E}(k_{\eta j}) \tilde{E}^*(k_{\eta l}) \exp \left\{ i \left[\phi_{0j} - \phi_{0l} \right] - \frac{\sigma_{ll} + \sigma_{jj}}{2} \right\} \left\{ \exp \left[\sigma_{jl} \right] - 1 \right\} \frac{dk_{\eta j}}{2\pi} \frac{dk_{\eta l}}{2\pi}, \quad (1.91)$$

где * - комплексное сопряжение. Мы будем считать турбулентность статистически стационарной и однородной в перпендикулярном направлении (η) и слабо неоднородной в радиальном направлении:

$$\langle \delta n(x(\eta''), \eta'', t'') \delta n(x(\eta'), \eta', t') \rangle = \delta n^2 \left(\frac{x(\eta'') + x(\eta')}{2} \right) K_n(x(\eta'') - x(\eta'); \eta'' - \eta'; t'' - t'), \quad (1.92)$$

В выражении (1.92) предполагается нормировка $K_n(0; 0; 0) = 1$. Корреляционные длины определены согласно выражениям:

$$\int K_n(x; \eta; t) dx = l_{cx} \bar{K}_n(\eta; t); \quad \bar{K}_n(0; 0) = 1; \quad \iint K_n(x; \eta; t) dx d\eta = l_{cx} l_{c\eta} \bar{K}_n(t); \quad \bar{K}_n(0) = 1.$$

В этом случае фазовая корреляционная матрица имеет вид:

$$\sigma_{jl} = \frac{\omega_j^2 \omega_l^2}{4c^4} \frac{1}{k_{\eta j} k_{\eta l}} \times \int_{\eta_0(k_{\eta j})}^{\eta_j} d\eta' \frac{\delta n_\alpha^2[x(\eta', k_{\eta j})]}{n_{cj} n_{cl}} \int_{\eta_0(k_{\eta l})}^{\eta_l} d\eta'' K_n(x(\eta'', k_{\eta l}) - x(\eta', k_{\eta j}); \eta'' - \eta'; t_j - t_l), \quad (1.93)$$

где $\frac{\delta n_\alpha^2[x(\eta', k_{\eta j})]}{n_{cj} n_{cl}} = h_\alpha^2 \frac{\delta n^2[x(\eta', k_{\eta j})]}{n_{cj} n_{cl}}$. Далее, мы будем опускать индекс α , имея, однако, в

виду, что невозмущенные фазы и волновые вектора для обыкновенной и необыкновенной волны разные. Введем понятие эффективности рассеяния, с учетом которого фазовая матрица имеет вид:

$$\sigma_{jl} = \frac{\omega_j \omega_l}{c^2} l_{cx} \int_0^{x_{cj}} dx \frac{\delta n^2[x]}{n_c^2} S_{jl}(x). \quad (1.94)$$

Матрица $S_{jl}(x)$, по сути, является аппаратной функцией обсуждаемой диагностики. Ее поведение определяет переход РКР из линейного режима, в котором в регистрируемом спектре наблюдается частотная линия зондирующей волны, в нелинейный режим, где фазовая модуляция приводит к существенным искажениям ее спектра. В случае, когда регистрирующая антенна расположена в полоидальном направлении относительно зондирующей таким образом, что выполняется неравенство $\eta_r \ll \sqrt{l_{c\eta} x_c}$, при интегрировании в выражении (1.93) достаточно учитывать зависимость K_n от первого аргумента. При этом далеко от отсечки $|x - x_c| \gg l_{cx}$ это интегрирование дает:

$$S_{jj}(x) \approx \frac{\omega_j^2}{2c^2} \frac{[1 + \bar{K}_n(k_{\eta_j} d_j^2(x); 0)]}{k^2(x, \omega_j, 0)} \quad (1.95)$$

и

$$S_{jl} \approx \frac{\omega_l \omega_j}{4c^2} l_{cx} \frac{[\bar{K}_n(\eta_{l+} - \eta_{j+}; \tau) + \bar{K}_n(\eta_{l-} - \eta_{j-}; \tau) + \bar{K}_n(\eta_{l-} - \eta_{j+}; \tau) + \bar{K}_n(\eta_{l+} - \eta_{j-}; \tau)]}{k(x, \omega_j, 0)k(x, \omega_l, 0)}, \quad (1.96)$$

где $\tau = t_j - t_l$. При выводе этих выражений предполагалось, что спектр флуктуаций по волновым векторам является симметричным.

1.3.2.1. Случай слабой дифракции рассеянных волн

При анализе выражений (1.90) - (1.94) можно рассмотреть два предельных случая, в каждом из которых могут быть получены аналитически асимптотические выражения. Первый случай отвечает ситуации, когда уровень флуктуаций низок

$$\frac{\delta n^2}{n^2} \frac{\omega^2 x_c l_{cx}}{c^2} \ln \frac{x_c}{l_{cx}} \ll 1, \quad (1.97)$$

а значит фронт зондирующего пучка искажается слабо и дифракция рассеянных волн несущественна. В противоположном случае, когда уровень турбулентности достаточно высок, так что выполняется предельное соотношение

$$\frac{\delta n^2}{n^2} \frac{\omega^2 x_c l_{cx}}{c^2} \gg 1, \quad (1.98)$$

фронт зондирующего пучка искажается сильно. Этот предельный случай будет рассмотрен в следующем параграфе. В случае, когда турбулентность характеризуется большим полоидальным корреляционным масштабом

$$d_j^2(0) \ll l_{c\eta}^2, \quad (1.99)$$

и уровень турбулентности такой, что выполняется соотношение

$$\frac{\delta n^2}{n^2} \frac{\omega^2 x_c l_{cx}}{c^2} \frac{d_j^2(0)}{l_{c\eta}^2} \ll 1. \quad (1.100)$$

дифракция рассеянных волн не является существенной как в линейном, так и в нелинейном режиме. В случае, когда отсечка находится в волновой зоне, т.е. выполняется соотношение

$w^2 \ll d^2(0)$, интегралы в выражениях (1.90) и (1.91) могут быть вычислены методом стационарной фазы

$$\langle E_r(\omega_j, t_j, \eta_j) \rangle = \frac{E(k_{\eta j})}{\sqrt{2\pi d_j(0)}} \exp\left(i\phi_0(\omega_j, k_{\eta j}) - \frac{\sigma_{jj}}{2} - i\frac{\pi}{4}\right) \Big|_{k_{\eta j} = \hat{k}_{\eta j}} \quad (1.101)$$

и

$$K_{jl} = \frac{\tilde{E}(k_{\eta j})\tilde{E}^*(k_{\eta l})}{2\pi d_j(0)d_l(0)} \exp\left\{i\left[\phi_{0j} - \phi_{0l}\right] - \frac{\sigma_{ll} + \sigma_{jj}}{2}\right\} \left\{\exp[\sigma_{jl}] - 1\right\} \Big|_{k_{\eta l} = \hat{k}_{\eta l}; k_{\eta j} = \hat{k}_{\eta j}}, \quad (1.102)$$

где стационарная траектория при пренебрежении слагаемым, описывающим диаграмму направленности зондирующей антенны и изменением случайной компоненты фазы волны, определяется следующим простым выражением:

$$\hat{k}_{\eta m} = \eta_m / d_m^2(0), \quad m = l, j. \quad (1.103)$$

Поскольку в обсуждаемом случае радиус зондирующей и приемной антенны много меньше, чем поперечная корреляционная длина турбулентности $w \ll l_{c\eta}$, подынтегральные выражения в (1.86) имеют резкий максимум в точках с поперечной координатой зондирующей и приемной антенн. В итоге выражения для амплитуды и корреляционной функции двух сигналов имеют вид:

$$\langle A_r(\omega_j) \rangle = \frac{\sqrt{2P_j}w}{d_j(0)} \exp\left\{i\left[2\int_0^{x_c} k_\alpha(x, \omega_j, 0)dx - \frac{\eta_r^2}{2d_j^2(0)} - \pi\right] - \frac{\eta_r^2 w^2}{d_j^4(0)} - \frac{\sigma_{jj}}{2}\right\} \quad (1.104)$$

и

$$(CCF)_{jl} = \frac{2\sqrt{P_j P_l} w^2}{d_j(0)d_l(0)} \exp\left\{i\left[\phi_{0jl} - \frac{2\eta_r^2 w^2}{d_j^4(0)} - \frac{\sigma_{jj} + \sigma_{ll}}{2}\right]\right\} \left[\exp(\sigma_{jl}) - 1\right] \Big|_{k_{\eta l} = k_{\eta j} = \eta_r / d_j^2(0)}, \quad (1.105)$$

где $\phi_{0jl} = 2\int_0^{x_c} k_\alpha(x, \omega_j, 0)dx - 2\int_0^{x_c} k_\alpha(x, \omega_l, 0)dx$. В диапазоне радиальных координат $|x - x_c| \gg l_{cx}$

эффективность рассеяния можно представить в виде:

$$S_{jj} \approx \frac{\omega_j^2}{2c^2} \frac{\left[1 + \bar{K}_n(\eta_r d_j^2(x) / d_j^2(0); 0)\right]}{k^2(x, \omega_j, 0)}, \quad (1.106)$$

$$S_{jl} \approx \frac{\omega_l \omega_j}{2c^2} \frac{\left[\bar{K}_n(0; \tau) + \bar{K}_n(\eta_r d_j^2(x) / d_j^2(0); \tau)\right]}{k(x, \omega_j, 0)k(x, \omega_l, 0)}, \quad (1.107)$$

где два члена в скобках описывают корреляцию между одинаковыми частями траектории зондирующих волн ($\bar{K}_n(0; \tau)$) и между частями траектории до отсечки и после отсечки, после отсечки и до отсечки - $\bar{K}_n(\eta_r d_j^2(x)/d_j^2(0); \tau)$. В окрестности отсечки, где выполняется неравенство $\eta_r d_j^2(x)/d_j^2(0) \ll l_{cy}$, эти вклады равны и матрица сводится к виду, полученному в рамках одномерной модели:

$$S_{jl} \approx \frac{\omega_l \omega_j}{c^2} \frac{\bar{K}_n(0; \tau)}{k(x, \omega_j, 0)k(x, \omega_l, 0)}. \quad (1.108)$$

В случае, когда зондирующая и приемная антенны сильно разнесены, т.е. $\eta_r \gg l_{cy}$, вторые слагаемые в квадратных скобках в (1.106) и (1.107) стремятся к нулю при удалении от точки отсечки. Этими вкладами можно пренебречь, начиная с координаты, определяемой соотношением $\eta_r d_j^2(x)/d_j^2(0) > l_{cy}$. В этом предельном случае прямую и отраженную ветвь траектории зондирующего сигнала можно считать практически полностью независимыми (за исключением ближайшей окрестности отсечки). Эффективность рассеяния при удалении от точки отсечки убывает как $1/k(x, \omega_j, 0)$, однако медленная скорость этого убывания не позволяет "подчеркнуть" окрестность точки отсечки. В окрестности точки отсечки $|x - x_c| \leq l_{cx}$ эффективность рассеяния S_{jl} насыщается на уровне, который можно оценить:

$$S_{jl}(\xi, \Delta, \tau) = \frac{4L}{l_{cx}} \int_0^{\pi/2} K_n(\Delta - 2\xi \cos 2\varphi, 0, \tau) d\varphi \quad (1.109)$$

где

$$\xi = \frac{x_c(\omega_l) + x_c(\omega_j)}{2} - x; \quad \Delta = x_c(\omega_j) - x_c(\omega_l); \quad L^{-1} = \frac{1}{n_c} \frac{dn(x)}{dx} \Big|_{x=x_c}.$$

Отметим, что в случае $\eta_r \ll l_{cy}$, анализ σ_{jl} , проведенный в рамках одномерной модели, является исчерпывающим. В случае слабых возмущений плотности плазмы, удовлетворяющих неравенству (1.97), все компоненты фазовой корреляционной матрицы малы, экстинкция спектра зондирующей волны пренебрежимо мала и корреляционная функция двух сигналов дается выражением:

$$(CCF)_{jl} = \frac{2\sqrt{P_j P_l} w^2}{d_j(0) d_l(0)} \exp\left(i\phi_{0jl} - \frac{\eta_r^2 w^2}{d_j^4(0)}\right) \sigma_{jl} \quad (1.110)$$

В случае, когда профиль флуктуаций плотности имеет выраженный максимум, расположенный

далеко от отсечки $x = x_0 < x_c$, элементы фазовой корреляционной матрицы имеют два вклада

$\sigma_{jl} = \sigma_{jl}^{(1)}(x_c) + \sigma_{jl}^{(2)}(x_0)$. Первый из них формируется в окрестности точки отсечки

$$\sigma_{jl}^{(1)}(x_c) \approx \frac{\omega_j \omega_l}{c^2} \frac{\delta n^2[x_c]}{n_{cj} n_{cl}} l_{cx} L \bar{K}_n(0; \tau) \ln\left(\frac{4L}{\Delta}\right). \quad (1.111)$$

Второй, -

$$\sigma_{jl}^{(2)} \approx \frac{\omega_j^2 \omega_l^2}{2c^4} \frac{l_{cx} a}{k^2(x_0, \omega_j, 0) k^2(x_0, \omega_l, 0)} \frac{\delta n^2(x_0)}{n_{cj} n_{cl}} \left[\bar{K}_n(0; \tau) + \bar{K}_n(\eta_r d_j^2(x_0)/d_j^2(0); \tau) \right], \quad (1.112)$$

- в турбулентном слое. В выражении (1.112) a – ширина турбулентного слоя. Кросс - корреляционная функция CCF (см. (1.110) и (1.111)) совпадает с выражением, найденным в рамках линейной двумерной модели [20] в борновском приближении в предположении о статистически однородной турбулентности и линейном профиле плотности плазмы. Корреляционная функция двух сигналов CCF , согласно (1.110) и (1.111), имеет логарифмический характер зависимости от раздвижки между двумя точками отсечки, которые соответствуют двум частотам, на которых ведется зондирование плазмы. Подобное поведение CCF вызвано превалирующим вкладом нелокального рассеяния на длинноволновых флуктуациях. Вклад в корреляционную функцию, обусловленный максимумом турбулентности (1.112), также слабо зависит от раздвижки частот зондирующих сигналов. При высоком уровне турбулентности, что соответствует условию

$$\frac{\delta n^2}{n^2} \frac{\omega^2 x_c l_{cx}}{c^2} \ln \frac{x_c}{l_{cx}} > 1,$$

имеет место сильная экстинкция зондирующего сигнала. Основной вклад в CCF дают параметры, при которых

$$\sigma = (\sigma_{jj}(y_r) + \sigma_{ll}(y_r)) / 2 - \sigma_{jl}(y_r) \leq 1. \quad (1.113)$$

Рассмотрим предельный случай, когда рассеяние происходит в сильно нелинейном режиме (1.61). В этом случае условие (1.113) выполняется, если $\Delta \ll l_{cx}$ и $\tau \ll t_c$ (t_c корреляционное время турбулентности). В этом диапазоне параметров мы можем представить σ в форме

$$\sigma = -\left(\Delta / l_{cx}^{ef}\right)^2 - \left(\tau / t_{ef}\right)^2, \quad (1.114)$$

где эффективный радиус и время корреляции определяются выражениями

$$\left(\frac{1}{l_{cx}^{ef}}\right)^2 = \frac{\omega_j^2 l_{cx}}{c^2} \int_0^{x_{ci}} dx \frac{\delta n^2(x)}{n_c^2} S_x(x), \quad (1.115)$$

$$\frac{1}{t_{ef}^2} = \frac{\omega_j^2 l_{cx}}{c^2} \int_0^{x_{ci}} dx \frac{\delta n^2(x)}{n_c^2} S_\tau(x). \quad (1.116)$$

Далеко от точки отсечки $|x - x_c| \gg l_{cx}$ функции $S_m(x)$ имеют вид:

$$S_x(x) = \frac{\omega_j^4}{16c^2 L^2} \frac{1}{k^4(x, \omega_j, 0)} \left(\frac{\partial k(x, \omega_j, 0)}{\partial \omega_j} \right)^2 \left(1 + \bar{K}_n \left(\eta_r \frac{d_j^2(x)}{d_j^2(0)}; 0 \right) \right), \quad (1.117)$$

$$S_\tau(x) = \frac{\omega_j^2}{4c^2} \frac{1}{k^2(x, \omega_j, 0)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\bar{K}_n(0; \tau) + \bar{K}_n \left(\eta_r \frac{d_j^2(x)}{d_j^2(0)}; \tau \right) \right) \Big|_{\tau=0}. \quad (1.118)$$

Как видно из выражений (1.117) и (1.118), $S_x(x)$ убывает существенно быстрее при удалении от точки отсечки, чем $S_\tau(x)$. Это позволяет прийти к выводу, что в сильно нелинейном режиме основной вклад в корреляционную функцию двух сигналов набирается из пространственной области в окрестности точки отсечки. Следовательно, можно говорить о том, что в нелинейном режиме возможны локальные измерения, однако, поскольку характерный масштаб l_{cx}^{ef} , на котором спадает CCF , как функция расстояния между положениями точек отсечки, много меньше корреляционного масштаба флуктуаций плотности l_{cx} , это измерения скорее уровня флуктуаций, нежели корреляционного радиуса. Напротив, измерения, направленные на определения частотного спектра флуктуаций, являются нелокальными. Таким образом, подтверждаются выводы, сделанные в рамках одномерной модели. В частности при гауссовском спектре флуктуаций

$$K_{\kappa, q}(\tau) = l_{cx} l_{c\eta} \tilde{K}(\tau) \exp \left[-(\kappa l_{cx})^2 / 4 - (q l_{c\eta})^2 / 4 \right] \quad (1.119)$$

мы можем получить при $|x - x_c| \ll x_c$ следующие выражения:

$$S_x = \frac{L}{2l_{cx}} \frac{\partial}{\partial b} G(\zeta, b) \Big|_{b=\frac{l_{cx}^2}{4}}, S_\tau = \frac{L}{l_c^2 l_{cx}} G(\zeta, b) \Big|_{b=\frac{l_{cx}^2}{4}}, G(\zeta, b) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\zeta^2}{2b}} I_0 \left(\frac{\zeta^2}{2b} \right), \zeta = x_c(\omega_j) - x. \quad (1.120)$$

В общем случае эффективность рассеяния $S_x(x)$ велика в области $|x - x_c| < l_{cx}$, где она может быть оценена как $S_x \simeq L / l_{cx}^3$. Используя эту оценку и (1.115), получим

$$\left(\frac{1}{l_{cx}^{ef}} \right)^2 \simeq \frac{\omega_j^2}{c^2} \frac{L}{l_{cx}} \frac{\delta n^2(x_c)}{n_c^2} \quad (1.121)$$

Таким образом, мы можем сделать вывод, что РКР дает информацию не о радиальной длине флуктуаций плотности, а квадратном корне из корреляционной длины флуктуаций, деленном на относительную амплитуду флуктуаций плотности, как было предсказано в рамках одномерной модели.

1.3.2.2. Случай сильной дифракции рассеянных волн

Выражения для усредненной амплитуды и корреляционной функции двух сигналов, полученные в предыдущем параграфе, верны в случае, когда искажение волнового фронта зондирующей волны, связанное с распространением в турбулентной среде, не приводит к сильной дифракции. Последнее справедливо при выполнении условия (1.100). В сильно нелинейном режиме рассеяния это условие выполняется только в случае большого поперечного корреляционного радиуса турбулентности, $d_j^2(0)/l_{cn}^2 \ll 1$. Если последнее соотношение нарушается, то в нелинейном режиме имеет место сильное искажение фронта зондирующего пучка, т.е. становятся существенными эффекты дифракции рассеянных волн. Несмотря на то, что при этом формирование сигнала, регистрируемого приемной антенной, обусловлено сложными физическими механизмами, явное выражение для корреляционной функции двух сигналов CCF может быть получено аналитически. Аналогично случаю, рассмотренному в предыдущем параграфе, основной вклад в формирование CCF (1.86), (1.87) в сильно нелинейном режиме вносит область параметров, для которых выполняется следующее условие

$$\sigma = \frac{\sigma_{jj} + \sigma_{ll}}{2} - \sigma_{jl} \leq 1. \quad (1.122)$$

В последнем выражении элементы матрицы σ даются выражениями (1.94) - (1.96). Поскольку $\sigma = 0$ при $\{\eta_j = \eta_l, k_{\eta j} = k_{\eta l}, \omega_j = \omega_l, t_j = t_l\}$ и, с другой стороны $\sigma_{jl} \gg 1$, можно прийти к выводу, что условие (1.122) выполняется в диапазоне параметров, определяемом условиями $|k_{\eta l} - k_{\eta j}| \ll l_{cn}/d_j^2(0)$, $|\eta_l - \eta_j| \ll l_{cn}$, $\Delta \ll l_x$, $\tau \ll t_c$, что позволяет представить σ в виде:

$$\sigma = -\left(\frac{\Delta}{l_{cx}^{ef}(K)}\right)^2 - \left(\frac{\tau}{t_{ef}(K)}\right)^2 - \frac{[(\eta_j - \eta_l) + kd_j^2(0)]^2}{\rho_{ef1}^2(K)} - \frac{k^2 d_j^4(0)}{\rho_{ef2}^2(K)}, \quad (1.123)$$

где $K = (k_{\eta j} + k_{\eta l})/2$, $k = k_{\eta j} - k_{\eta l}$, $l_{cx}^{ef}(K)$ и $t_{ef}(K)$ даются выражениями (1.115) и (1.116), в которых переменная $\eta_r/d_j^2(0)$ заменена на K . Эффективные радиусы $\rho_{ef1,2}$ определяются согласно выражениям:

$$\rho_{ef1}^{-2}(K) = \frac{\omega_j^2 l_{cx}^2}{4c^2} \left(\int_0^{x_j} dx \frac{\delta n^2(x)}{n_c^2} S_{\rho_1}(x, K) \right); \quad \rho_{ef2}^{-2}(K) = \frac{\omega_j^2 l_{cx}^2}{4c^2} \left(\int_0^{x_j} dx \frac{\delta n^2(x)}{n_c^2} S_{\rho_2}(x, K) \right) \quad (1.124)$$

Далеко от точки отсечки $|x - x_c| \gg l_{cx}$ функции $S_{\rho_1}(x, K)$ и $S_{\rho_2}(x, K)$ могут быть представлены в виде

$$S_{\rho_1}(x, K) = \frac{\omega_j^2}{4c^2 k^2(x, \omega_j, 0)} \left(\partial_{\eta\eta} \bar{K}_n(0; \eta; 0) \Big|_{y=0} + \partial_{\eta\eta} \bar{K}_n(0; \eta; 0) \Big|_{\eta=Kd_j^2(x)} \right), \quad (1.125)$$

$$S_{\rho_2}(x, K) = \frac{\omega_j^2}{4c^2 k^2(x, \omega_j, 0)} \frac{d_j^4(x)}{d_j^4(0)} \left(\partial_{\eta\eta} \bar{K}_n(\eta; 0) \Big|_{y=0} - \partial_{\eta\eta} \bar{K}_n(\eta; 0) \Big|_{\eta=Kd_j^2(x)} \right)$$

Сингулярность в точке $x \rightarrow x_c$, которая имеет место в для функции $S_{\rho_1}(x, K)$, "насыщается" в окрестности точки отсечки при $|x - x_c| \leq l_{cx}$ на уровне $S_{\rho_1}(x, K) \approx \frac{\omega_j^2}{2c^2 k^2(x_{cj} - l_{cx}, \omega_j, 0)} \partial_{\eta\eta} \bar{K}_n(0; \eta; 0) \Big|_{y=0}$. В этой

пространственной области функция $S_{\rho_1}(x, K)$ может быть представлена следующим асимптотическим выражением:

$$S_{\rho_1}(x, K) = \frac{2L}{l_{cx}} \int_0^{\pi/2} \partial_{\eta\eta} \bar{K}_n(\Delta - 2\zeta \cos 2\varphi, \eta, 0) \Big|_{\eta=0} d\varphi; \quad (1.126)$$

где $\zeta = x_c(\omega_j) - x$. В частном случае гауссовского спектра флуктуаций мы можем получить приближенное выражение функции S_{ρ_1} в виде:

$$S_{\rho_1} \approx \frac{L}{l_{cx}} G(\zeta, b) \Big|_{b=\frac{l_{cx}^2}{4}} \partial_{\eta\eta} \bar{K}(\eta, 0) \Big|_{\eta=0}, \quad (1.127)$$

где функция $G(\zeta, b)$ определена в (1.120). Выражение (1.125) для функции $S_{\rho_2}(x, K)$ остается верным и в окрестности точки отсечки. Интегрируя по переменным $k = k_{\eta j} - k_{\eta l}$, $\eta = \eta_j - \eta_l$ и $Y = (\eta_j + \eta_l) / 2 - \eta_r$ в (1.86), в итоге получим

$$(CCF)_{jl} = \frac{\sqrt{2P_j P_l}}{\sqrt{\pi}} e^{i\phi_{0,jl}} w \int dK e^{-2K^2 w^2 - \left(\frac{\Delta}{l_{cx}^{ef}(K)}\right)^2 - \left(\frac{\tau}{t_{ef}(K)}\right)^2 - \frac{(K - \eta_r / d_j^2(0))^2}{2w^2 / d_j^4(0) + 4 / \rho_{ef}^2(K)}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2d_j^4(0) / (w^2 \rho_{ef}^2(K))}}, \quad (1.128)$$

где $\rho_{ef}^{-2}(K) = \rho_{ef1}^{-2}(K) + \rho_{ef2}^{-2}(K)$. Поскольку в сильно нелинейном режиме поведение l_{cx}^{ef} определяется окрестностью точки отсечки, то при выполнении условия $Kd_j^2(x_c - l_{cx}) \ll l_{c\eta}$, этот корреляционный масштаб можно считать величиной, которая не зависит от переменной K , и переписать (1.128) в виде:

$$(CCF)_{jl} = \frac{\sqrt{2P_j P_l}}{\sqrt{\pi}} \int \frac{wdK}{\sqrt{1 + \frac{2d_j^4(0)}{w^2 \rho_{ef}^2(K)}}} \times \exp \left[i\phi_{0,jl} - \left(\frac{\Delta}{l_{cx}^{ef}(0)}\right)^2 - 2K^2 w^2 - \left(\frac{\tau}{t_{ef}(K)}\right)^2 - \frac{(K - \eta_r / d_j^2(0))^2}{2w^2 / d_j^4(0) + 4 / \rho_{ef}^2(K)} \right]. \quad (1.129)$$

Можно видеть, что зависимость корреляционной функции CCF от расстояния между отсечками правильно описывается в рамках одномерной модели. Интеграл по переменной K можно взять методом стационарной фазы:

$$(CCF)_{jl} = \frac{\sqrt{P_j P_l} \exp \left\{ i\phi_{0jl} - \frac{\eta_r^2}{2} \left(w^2 + \frac{d_j^4(0)}{4w^2} + 2 \frac{d_j^4(0)}{\rho_{ef}^2(K_*)} \right)^{-1} - \left(\frac{\Delta}{l_{cx}^{ef}(0)} \right)^2 - \left(\frac{\tau}{t_{ef}(K_*)} \right)^2 \right\}}{\sqrt{\left(1 + \frac{d_j^4(0)}{4w^4} + 2 \frac{d_j^4(0)}{w^2 \rho_{ef}^2(K_*)} \right)}}, \quad (1.130)$$

где K_* - решение уравнения $K_* \left(1 + 4w^4 / d_j^4(0) + 8w^2 / \rho_{ef}^2(K_*) \right) = \eta_r / d_j^2(0)$. В случае, когда выполняются условия $d_j^2(0) \ll wl_{c\eta}$ and $\eta_r \ll l_{c\eta}$, зависимость $t_{ef}(K)$ и эффективных радиусов от переменной K можно пренебречь. В этом случае корреляционная функция CCF может быть получена в явном виде:

$$(CCF)_{jl} = \frac{\sqrt{P_j P_l} \exp(i\phi_{0jl})}{\sqrt{\left(1 + \frac{d_j^4(0)}{4w^4} + 2 \frac{d_j^4(0)}{w^2 \rho_{ef}^2(0)} \right)}} \exp \left\{ - \frac{\eta_r^2}{2 \left(w^2 + \frac{d_j^4(0)}{4w^2} + 2 \frac{d_j^4(0)}{\rho_{ef}^2(0)} \right)} - \left(\frac{\Delta}{l_{cx}^{ef}(0)} \right)^2 - \left(\frac{\tau}{t_{ef}(0)} \right)^2 \right\}. \quad (1.131)$$

Выражения (1.130) и (1.131), которые учитывают искажение из-за дифракции рассеянных волн фронта зондирующего пучка, верны как в ситуации, когда отсечка находится в ближней, так и в дальней зоне. Дифракция рассеянных волн зондирующего пучка зависит от уровня турбулентности. Например, в случае $d_j(0) \ll w$, когда отсечка находится в ближней зоне, и уровень турбулентности низок настолько, что выполняется неравенство $2d_j^2(0) \ll \rho_{ef}w$, корреляционная функция при $\eta_r \gg w$ экспоненциально мала:

$$(CCF)_{jl} = \sqrt{P_j P_l} \exp \left\{ i\phi_{0jl} - \frac{\eta_r^2}{2w^2} - \left(\frac{\Delta}{l_{cx}^{ef}(0)} \right)^2 - \left(\frac{\tau}{t_{ef}(K_*)} \right)^2 \right\}. \quad (1.132)$$

В случае, когда выполняется противоположное предельное условие $2d_j^2(0) \gg \rho_{ef}w$, выражение для CCF имеет вид:

$$(CCF)_{jl} = \sqrt{P_j P_l} \frac{w \rho_{ef}(K_*)}{\sqrt{2d_j^2(0)}} \exp \left\{ i\phi_{0jl} - \frac{\eta_r^2 \rho_{ef}^2(K_*)}{4d_j^4(0)} - \left(\frac{\Delta}{l_{cx}^{ef}(0)} \right)^2 - \left(\frac{\tau}{t_{ef}(K_*)} \right)^2 \right\}. \quad (1.133)$$

В случае $2d_j^2(0) > \rho_{ef}\eta_r$ выражение для CCF достигает уровня

$$(CCF)_{jl} = \sqrt{P_j P_l} \frac{w \rho_{ef}(K_*)}{\sqrt{2d_j^2(0)}} \exp \left\{ i\phi_{0jl} - \left(\frac{\Delta}{l_{cx}^{ef}(0)} \right)^2 - \left(\frac{\tau}{t_{ef}(K_*)} \right)^2 \right\}. \quad (1.134)$$

Как видно из приведенного выше анализа, дифракция рассеянных волн влияет только на амплитуду зондирующей волны. Она не меняет таких свойств РКР, как уширение спектра зондирующего сигнала и особенностей подавления корреляции сигналов в двух частотных каналах, которые с хорошей точностью описываются в рамках одномерной нелинейной модели РКР, что позволяет объяснить сходство результатов численного моделирования CCF , полученных в рамках одномерной и двумерной модели РКР [24].

1.3.3. Выводы

В настоящем разделе в рамках одномерной и двумерной моделей развита теория радиальной корреляционной рефлектометрии. Выражения для амплитуды регистрируемого сигнала и корреляционной функции двух сигналов, полученные в рамках двумерной модели, подтверждают основные выводы, сделанные в результате рассмотрения РКР в рамках одномерной модели.

В линейном режиме рассеяния (условие определяется выражением (1.97)) локальность измерений корреляционной функции сигналов в двух частотных каналах и частотного спектра турбулентности невысока и существенно зависит от формы профиля плотности плазмы. Корреляционная функция CCF убывает по логарифмическому закону, что согласуется с результатами, полученными, как аналитически, так и численно без использования ВКБ приближения [5, 6].

Переход от линейного к нелинейному режиму рассеяния зависит от размера трассы зондирующей волны, радиального корреляционного масштаба турбулентности и уровня турбулентности. При выполнении условия (1.57) рассеяние находится в нелинейном режиме.

В сильно нелинейном режиме, когда выполняется условие (1.61), измерения корреляционной функции сигналов в двух частотных каналах являются локальными, однако они позволяют оценить скорее уровень турбулентности, нежели радиальный радиус корреляции флуктуаций плотности. Измерения частотного спектра турбулентности в сильно нелинейном режиме отличаются, как и в линейном режиме, невысокой локальностью. Учет дифракции рассеянных волн сказывается только на амплитуде CCF и не меняет выводов, которые перечислены выше.

Аналитические результаты, полученные в рамках одномерной нелинейной модели РКР, хорошо согласуются с результатами численного моделирования [23], проведенного в рамках одномерной волновой модели РКР. Результаты численного моделирования показали, что

условие $|\delta n / n_c| \ll l_{cx} / x_c$, ограничивающее применимость полученных аналитических выражений при больших относительных уровнях турбулентности, по всей видимости, не является критичным.

Основные публикации

- 1) Gusakov E.Z., Popov A.Yu. Non-linear theory of fluctuation reflectometry // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2002. - Vol. 44. - P.2327.
- 2) Gusakov E.Z., Popov A.Yu. Two-dimensional non-linear theory of radial correlation reflectometry // Plasma Phys. Cont. Fusion. - 2004. - Vol. 46. - P.1393.
- 3) Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Yakovlev B.O. Microwave fluctuation reflectometry (a theoretical view) // Questions of Atomic Science and Technique (Plasma Physics). - 2003. - P.1.
- 4) Leclert G., Heuroux S., Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Boucher I. and Vermare L. Full-wave test of the radial correlation reflectometry analytical theory in linear and nonlinear regimes // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2006. - Vol. 48. - P.1389.

1.4. Допплеровская рефлектометрия

Допплеровская разновидность флукуационной рефлектометрии (ДР) широко используется в настоящее время для изучения как полоидального вращения плазмы токамака, так и для анализа флукуаций плотности [10, 25]. При исследованиях этим методом зондирующая волна, для которой в плазме имеется поверхность отсечки, вводится наклонно по отношению к направлению градиента плотности в полоидальном сечении токамака. Регистрируется сигнал рассеяния «назад», имеющий частоту отличную от зондирующей (рисунок 1.1с). Смещение частотного спектра регистрируемого сигнала обычно интерпретируется как возникшее при однократном рассеянии в результате эффекта Допплера за счет полоидального вращения плазменной турбулентности. Изначально ожидалось, что метод обладает высоким пространственным и временным разрешением, допускает простую интерпретацию экспериментальных результатов. Это ожидание было связано с предположением, что весь зарегистрированный приемной антенной сигнал - результат рассеяния на флукуациях плотности в окрестности поверхности отсечки. Данное предположение основано на физическом эффекте увеличения амплитуды зондирующей волны в этой области. Кроме того, длина зондирующей волны с приближением к поверхности отсечки уменьшается, что дополнительно увеличивает вклад этой области в рассеянный сигнал благодаря тому, что длинноволновая компонента доминирует в спектре турбулентности.

Однако, с увеличением амплитуды турбулентности или длины траектории зондирующей волны, что имеет место в больших плазменных установках, диагностика в результате многократного малоуглового рассеяния переходит в нелинейный режим формирования регистрируемого сигнала. При этом распространение зондирующей волны становится нерегулярным, а интерпретация данных диагностики, справедливая в линейном режиме, оказывается неприменимой. Нелинейный по амплитуде флукуаций эффект может играть важную роль в больших установках или атмосферных экспериментах, где длина лучевой траектории велика.

В настоящем разделе развита нелинейная теория доплеровской рефлектометрии свободная от ограничений борновского приближения. Предполагается, что турбулентность является длинноволновой. Данная модель является разумным приближением для параметров плазмы токамака и стелларатора. Влияние турбулентности на распространении зондирующей волны в основном сводится к случайной модуляции фазы зондирующего сигнала, причем в рассматриваемом случае многократного рассеяния эта модуляция по величине превосходит π . Здесь мы во многом следуем подходу [21], применявшемуся для построения нелинейной теории

обычной рефлектометрии [3а, 4а]. В разделе анализируется пространственное разрешение метода в предположении плоскостлой геометрии плазмы [6а, 7а].

1.4.1. Нелинейный режим доплеровской рефлектометрии

Рассмотрим случай произвольного профиля плотности плазмы, а также произвольной поляризации (обыкновенной или необыкновенной) зондирующего сигнала. Распространение зондирующей волны будем рассматривать в рамках плоской геометрии, пренебрегая искривлением магнитных поверхностей. При этом флуктуации плотности плазмы будем предполагать двумерно-неоднородными и нестационарными. Таким образом, профиль плотности плазмы можно представить в виде: $n(\mathbf{r}, t) = n_0(x) + \delta n(x, \eta, t)$. В рупоре приемной антенны электромагнитное поле зондирующего пучка в ВКБ приближении может быть представлено в виде:

$$E_r(\eta, \omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_\eta}{2\pi} \tilde{E}(k_\eta) \exp[i\phi_r(k_\eta, \eta, \omega, t)], \quad (1.135)$$

$$\text{где } \tilde{E}(k_\eta) = \sqrt{P_i} \int_{-\infty}^{\infty} dy E_0(\eta) \exp(-ik_\eta \eta), \quad \phi_{r\alpha} = \phi_{0\alpha} + \delta\phi_\alpha = 2 \int_0^{x_c} k_\alpha(x, \omega, k_\eta) dx + k_\eta \eta - \frac{\pi}{2} + \delta\phi_\alpha, \quad P_i -$$

мощность зондирующего сигнала, индекс α означает тип зондирующей волны, $k_\alpha(x, \omega, k_\eta)$ даются выражениями (1.78) и (1.79).

Далее, проанализируем наиболее распространенный экспериментальный случай, когда приемная антенная находится рядом с зондирующей и их углы наклона ϑ по отношению к градиенту плотности совпадают. В этом случае для статистически стационарной турбулентности мощность и автокорреляционная функция, которая необходимая для вычисления частотного спектра сигнала, имеют вид:

$$P_s = \left\langle \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 (E_r(\eta) - \langle E_r(\eta) \rangle) E_0(\eta) \right]^2 \right\rangle,$$

$$CF(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 d\eta_1 [\langle E_r(\eta_2, t_2) E_r^*(\eta_1, t_1) \rangle - \langle E_r^*(\eta_1, t_1) \rangle \langle E_r(\eta_2, t_2) \rangle] E_0(\eta_2) E_0^*(\eta_1)}{\sqrt{\left\langle \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 (E_r(\eta_1) - \langle E_r(\eta_1) \rangle) E_0(\eta_1) \right]^2 \right\rangle \left\langle \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 (E_r(\eta_2) - \langle E_r(\eta_2) \rangle) E_0(\eta_2) \right]^2 \right\rangle}}, \quad (1.136)$$

где $\langle \dots \rangle$ - усреднение по ансамблю флуктуаций плотности с помощью функции вероятности реализации случайных событий (1.88). Будем считать, что диаграмма направленности как

зондирующей, так и приемной антенны таковы, что, когда они работают в режиме излучения, распределение поля в их раскрыве имеет вид:

$$E_0(\eta) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{w}} \exp\left(-\eta^2/2w^2 + iK\eta\right), \quad (1.137)$$

w - радиус пучка, $K = \omega/c \sin \vartheta$. Будем считать, что зондирующий пучок широк настолько, что выполняются следующие условия:

$$w\omega/c \gg 1, \quad wK \gg 1. \quad (1.138)$$

Воспользовавшись первым из этих условий, запишем регулярную часть фазы зондирующей волны в параксиальном приближении в виде:

$$\phi_{0\alpha}(k_\eta, \eta, t) = 2 \int_0^{x_c} k_\alpha(x, K) dx + d^2(0) \frac{K^2 - k_\eta^2}{2} + k_\eta \eta - \frac{\pi}{2}, \quad (1.139)$$

где

$$d^2(x) = 2 \int_x^{x_c} \frac{dx'}{k_\alpha(x', K)}. \quad (1.140)$$

С точностью до членов первого порядка малости по относительной амплитуде флуктуаций плотности плазмы нерегулярную часть фазы волны $\delta\varphi_\alpha$, связанную с ее распространением через турбулентную среду, можно представить в виде:

$$\delta\varphi_\alpha(k_\eta, \eta, t) = -\frac{\omega^2}{2c^2} \left(\int_0^{x_c} \frac{\delta n(x, \eta_-(x), t)}{n_c} \frac{h_\alpha dx}{k_\alpha(x, K)} + \int_0^{x_c} \frac{\delta n(x, \eta_+(x), t)}{n_c} \frac{h_\alpha dx}{k_\alpha(x, K)} \right). \quad (1.141)$$

Поправка к фазе вычислена вдоль невозмущенной траектории $x(\eta', k_\eta)$, проходящей в точку $(0, \eta)$:

$$\eta_\pm(x) = \eta - \frac{K}{2} \left[d^2(0) \pm d^2(x) \right]. \quad (1.142)$$

Верхний + и нижний - индекс отвечают частям траектории зондирующей волны после и до точки отсечки, соответственно. В случае обыкновенной моды $h_o = 1$, в случае необыкновенной

$$\text{волны } h_e(x, \omega) = \left[\left[\omega^2 - 2\omega_{pe}^2(x) \right] \left[\omega^2 - \omega_{ce}^2(x) \right] + \omega_{pe}^4(x) \right] \left[\omega^2 - \omega_{pe}^2(x) - \omega_{ce}^2(x) \right]^{-2}.$$

Для оценки пространственного разрешения диагностики мы рассмотрим неоднородное распределение скорости полоидального вращения плазмы и предположим слабую статистическую неоднородность турбулентности в радиальном направлении, что является типичным для экспериментов на токамаках и стеллараторах. Учитывая полоидальное вращение плазмы, представим возмущение плотности в виде $\delta n(\mathbf{r}, t) = \delta n(x, \eta - \nu(x)t, t)$. Это выражение

связывает возмущение плотности в лабораторной системе отсчета с возмущением в собственной системе отсчета, вращающейся вместе с плазмой в полоидальном направлении. Это позволяет нам представить корреляционную функцию флуктуаций плотности в следующем виде:

$$\langle \delta n(x, \eta; t_1) \delta n(x', \eta'; t_2) \rangle = \delta n^2 \left(\frac{x+x'}{2} \right) K_n \left(x-x'; \eta-\eta' - v \left(\frac{x+x'}{2} \right) (t_1-t_2); t_1-t_2 \right), \quad (1.143)$$

В выражении (1.143) предполагается нормировка $K_n(0;0;0) = 1$. Корреляционные длины, как и в предыдущем разделе, определены согласно выражениям: $\int K_n(x; \eta; \tau) dx = l_{cx} \bar{K}_n(\eta; \tau)$; $\bar{K}_n(0;0) = 1$; $\iint K_n(x; \eta; \tau) dx d\eta = l_{cx} l_{c\eta} \bar{K}_n(\tau)$; $\bar{K}_n(0) = 1$. Фурье-преобразование зависимости корреляционной функции флуктуаций плотности от времени $\tau = t_1 - t_2$ описывает частотный спектр турбулентности. Слабая неоднородность спектральных свойств турбулентности отражена в зависимости подынтегральной функции от аргумента $(x+x')/2$.

Как было уже отмечено в разделе 1.3 сильно нелинейный режим ФР реализуется при выполнении соотношения (1.61). В этом случае в спектре волны происходит подавление линии, соответствующей зондирующей частоте, что является экспериментальным критерием появления нелинейного режима рассеяния. Кроме того, корреляционное время и поперечная корреляционная длина, которые определяются корреляционной функцией (1.136), много меньше корреляционного времени и корреляционной длины турбулентности, которые определяются выражением (1.143). В этом случае мощность сигнала и корреляционная функция двух сигналов могут быть представлены в виде:

$$P_s = P_i \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 d\eta_2 dk_{\eta_1} dk_{\eta_2} \exp(i\Psi(\eta_1, \eta_2, k_{\eta_1}, k_{\eta_2}) - \sigma(0)),$$

$$CF(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 d\eta_2 dk_{\eta_1} dk_{\eta_2} \exp(i\Psi(\eta_1, \eta_2, k_{\eta_1}, k_{\eta_2}) - \sigma(\tau))}{\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 d\eta_2 dk_{\eta_1} dk_{\eta_2} \exp(i\Psi(\eta_1, \eta_2, k_{\eta_1}, k_{\eta_2}) - \sigma(0))}, \quad (1.144)$$

где

$$\Psi(Y, y, Q, q) = i \frac{Y^2 + y^2/4}{w^2} + Ky + d^2(0)qQ + qY + Qy + i(Q-K)^2 w^2 + i \frac{q^2 w^2}{4}, \quad (1.145)$$

$$\sigma(\tau) = \frac{\tau^2}{t_{ef}^2} + \frac{[y + qd^2(0) - \langle V \rangle \tau]^2}{\rho_{ef1}^2} + \frac{(\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2) \tau^2}{\rho_{ef1}^2} + \frac{q^2 d^4(0)}{\rho_{ef2}^2},$$

где $Q = (k_{\eta_1} + k_{\eta_2})/2$, $q = k_{\eta_1} - k_{\eta_2}$, $Y = (\eta_1 + \eta_2)/2$, $y = \eta_1 - \eta_2$, t_{ef} дается выражением (1.116), в котором переменная $\eta_r / d_j^2(0)$ заменена на K . Эффективные радиусы и скорости определяются согласно выражениям:

$$\begin{aligned} \rho_{ef1}^{-2}(Q) &= \frac{\omega^2 l_{cx}}{4c^2} \left(\int_0^{x_{cj}} dx \frac{\delta n^2(x)}{n_c^2} S_{\rho_1}(x) \right), \\ \rho_{ef2}^{-2}(Q) &= \frac{\omega^2 l_{cx}}{4c^2} \left(\int_0^{x_{cj}} dx \frac{\delta n^2(x)}{n_c^2} S_{\rho_2}(x) \right), \\ \langle V \rangle &= \frac{\omega^2 l_{cx}}{4c^2} \left(\int_0^{x_{cj}} dx \frac{\delta n^2(x)}{n_c^2} v(x) S_{\rho_1}(x) \right), \\ \langle V^2 \rangle &= \frac{\omega^2 l_{cx} \rho_{ef1}^2}{4c^2} \left(\int_0^{x_{cj}} dx \frac{\delta n^2(x)}{n_c^2} v^2(x) S_{\rho_1}(x) \right) \end{aligned} \quad (1.146)$$

Кроме того, $\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2 > 0$ в силу неравенства Коши — Буняковского (Шварца). Далеко от точки отсечки $|x - x_c(K)| \gg l_{cx}$ функции $S_{\rho_1}(x, K)$ и $S_{\rho_2}(x, K)$ могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} S_{\rho_1}(x) &= \frac{\omega^2}{4c^2} \frac{h_\alpha}{k_\alpha^2(x, K)} \left(\partial_{\eta\eta} K_n(0; \eta; 0) \Big|_{y=0} + \partial_{\eta\eta} K_n(0; \eta; 0) \Big|_{\eta=Kd^2(x)} \right), \\ S_{\rho_2}(x) &= \frac{\omega^2}{4c^2} \frac{h_\alpha}{k_\alpha^2(x, K)} \frac{d^4(x)}{d^4(0)} \left(\partial_{\eta\eta} \bar{K}_n(\eta; 0) \Big|_{y=0} - \partial_{\eta\eta} \bar{K}_n(\eta; 0) \Big|_{\eta=Kd^2(x)} \right). \end{aligned} \quad (1.147)$$

Сингулярность в точке $x \rightarrow x_c$, которая имеет место для функции $S_{\rho_1}(x)$, "насыщается" в окрестности точки отсечки при $|x - x_c| \leq l_{cx}$ на уровне

$$S_{\rho_1}(x, Q) \approx \frac{\omega^2}{2c^2} \frac{h_\alpha}{k_\alpha^2(x_c(K) - l_{cx}, K)} \partial_{\eta\eta} \bar{K}_n(0; \eta; 0) \Big|_{y=0}.$$

В этой пространственной области функция $S_{\rho_1}(x, K)$ может быть представлена следующим асимптотическим выражением:

$$S_{\rho_1}(x, K) = \frac{2L}{l_{cx}} \int_0^{\pi/2} \partial_{\eta\eta} \bar{K}_n(\Delta - 2\zeta \cos 2\varphi, \eta, K) \Big|_{\eta=0} d\varphi; \quad (1.148)$$

где $\zeta = x_c(\omega, K) - x$. В частном случае гауссовского спектра флуктуаций мы можем получить приближенное выражение функции S_{ρ_1} в виде:

$$S_{\rho_1} \approx \frac{L}{l_{cx}} G(\zeta, b) \Big|_{b=\frac{l_{cx}}{4}} \partial_{\eta\eta} \bar{K}_n(\eta, K) \Big|_{\eta=0}, \quad (1.149)$$

где функция $G(\zeta, b)$ определена в (1.120). Выражение (1.147) для функции S_{ρ_2} остается верным и в окрестности точки отсечки.

Далее, интегрируя по переменным Q , Y , q и y в выражениях (1.144), в итоге получим мощность сигнала:

$$P_s = \frac{P_i}{\sqrt{1 + \frac{2w^2}{\rho_{ef1}^2}} \sqrt{4 + \frac{8d^4(0)}{\rho_{ef2}^2 w^2} + \frac{d^4(0)}{w^4} + \frac{8d^4(0)}{2w^4 + \rho_{ef1}^2 w^2}}} \times \exp \left(-\frac{2w^2 \rho_{ef1}^2}{2w^2 + \rho_{ef1}^2} K^2 - \frac{\left(\frac{w^2 + \rho_{ef1}^2 / 4}{w^2 + \rho_{ef1}^2 / 2} \right)^2}{\frac{w^2}{2d^4(0)} + \frac{1}{\rho_{ef2}^2} + \frac{1}{8w^2} + \frac{1}{2w^2 + \rho_{ef1}^2}} K^2 \right) \quad (1.150)$$

и автокорреляционную функцию двух сигналов:

$$CF(\tau) = \exp \left(i \left[1 - \frac{4w^2 + \rho_{ef1}^2}{2w^2 + \rho_{ef1}^2} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2w^4}{d^4(0)} + \frac{4w^2}{\rho_{ef2}^2} + \frac{4w^2}{2w^2 + \rho_{ef1}^2}} \frac{2K \langle V \rangle \tau}{1 + \rho_{ef1}^2 / (2w^2)} \right] \times \exp \left(-\frac{\tau^2}{t_c^2} - \frac{\tau^2}{t_c^{ef2}} - \frac{(\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2) \tau^2}{\rho_{ef1}^2} - \frac{1}{\left(2w^2 + \rho_{ef1}^2 + \frac{1}{\frac{w^2}{2d^4(0)} + \frac{1}{\rho_{ef2}^2} + \frac{1}{8w^2}} \right)} \langle V \rangle^2 \tau^2 \right) \right) \quad (1.151)$$

1.4.2. Свойства мощности принятого сигнала

Рассмотрим зависимость мощности принятого сигнала (1.150) от параметров задачи. Прежде всего, можно легко видеть, что сигнал подавлен экспоненциально в случае, когда диаграмма направленности достаточно узка по углам, а рассеяние зондирующей волны находится в линейном режиме:

$$P_s \propto \exp(-2w^2 K^2), \quad (1.152)$$

т.е. при выполнении условий $wK \gg 1$, $\rho_{ef1}^2 \gg w^2$, $\rho_{ef2}^2 \gg w^2$, $w^2 \gg d^2(0)$. Подавление сигнала можно объяснить тем фактом, что в случае неоптимального приема, он принимается периферией диаграммы направленности соответствующей антенны. Влияние этого эффекта может быть уменьшено или даже устранено многократным малоугловым рассеянием, ведущим к искажению фронта зондирующей волны, и, таким образом, генерации волн, которые после отражения от отсечки не подавлены диаграммой направленности приемной антенны. Этот эффект имеет место в сильно нелинейном режиме рассеяния и в дальней зоне, когда выполнены условия $\rho_{ef1}^2 \ll w^2$, $\rho_{ef2}^2 \ll 2d^4(0)/w^2$, w^2 , а выражение для мощности сигнала принимает вид:

$$P_s = P_i \frac{\rho_{ef1} \rho_{ef2}}{4d^2(0)} \exp\left(-(\rho_{ef1}^2 + \rho_{ef2}^2)K^2\right). \quad (1.153)$$

Выражение (1.153) свидетельствует, что в случае $(\rho_{ef1}^2 + \rho_{ef2}^2)K^2 < 1$ возможно существенное изменение поперечного волнового числа зондирующей волны при многократном малоугловом рассеянии и разворот зондирующей волны в направлении приемной антенны.

1.4.3. Спектр рефлектометрического сигнала

Проанализируем спектр сигнала доплеровской рефлектометрии в случае доминирующего многократного малоуглового рассеяния. Преобразование Фурье автокорреляционной функции (1.151) приводит к выражению:

$$S(\omega) = \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{t_c^2} + \frac{1}{t_c^{ef2}} + \frac{(\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2)}{\rho_{ef1}^2} + \left(2w^2 + \rho_{ef1}^2 + \frac{1}{\frac{w^2}{2d^4(0)} + \frac{1}{\rho_{ef2}^2} + \frac{1}{8w^2}} \right)^{-1} \right]^{-1/2} \times \quad (1.154)$$

$$\exp \left(\frac{\left(\omega - \left[1 - \frac{4w^2 + \rho_{ef1}^2}{2w^2 + \rho_{ef1}^2} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2w^4}{d^4(0)} + \frac{4w^2}{\rho_{ef2}^2} + \frac{4w^2}{2w^2 + \rho_{ef1}^2}} \right] \frac{2K \langle V \rangle}{1 + \rho_{ef1}^2 / (2w^2)} \right)^2}{\frac{4}{t_{ef}^2} + \frac{4(\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2)}{\rho_{ef1}^2} + \frac{4}{\left(2w^2 + \rho_{ef1}^2 + \frac{1}{\frac{w^2}{2d^4(0)} + \frac{1}{\rho_{ef2}^2} + \frac{1}{8w^2}} \right)^2}} V_1^2} \right).$$

Вначале рассмотрим случай однородного полоидального вращения плазмы $v(x) = v$. В этом случае $\langle V \rangle = v, \langle V^2 \rangle = v^2$. В сильно нелинейном режиме, когда расходимость антенного пучка полностью определяется турбулентностью $t_{ef} \ll t_c, w/v$, из выражения (1.154) можно видеть, что сдвиг частотного спектра определяется обычным (линейным) эффектом Допплера

$$\bar{\omega}_{\max} = 2Kv. \quad (1.155)$$

Однако, ширина частотного спектра

$$\Delta\bar{\omega} = 2/t_{ef}, \quad (1.156)$$

зависит от амплитуды турбулентности и отличается от ширины частотного спектра при линейном режиме рассеяния t_c^{-1} . Это отличие определяется коэффициентом, который можно оценить как $t_c/t_{ef} \sim \Gamma$, где Γ - есть левая часть неравенства (1.61). Таким образом, в случае нелинейного режима рассеяния ширина частотного спектра может быть значительно больше, чем в случае линейного режима рассеяния, когда выполняется неравенство $\Gamma \leq 1$. В случае неоднородного полоидального вращения плазмы сдвиг частотного спектра определяется средним произведением амплитуды турбулентности и скорости вращения

$$\bar{\omega}_{\max} = 2K \langle V \rangle. \quad (1.157)$$

Это означает, что основной сдвиг частотного спектра может быть произведен как областью с высокой амплитудой турбулентности, так и областью с высокой скоростью полоидального вращения. На уширение частотного спектра оказывает влияние дополнительный фактор, связанный с широм полоидальной скорости вращения плазмы:

$$\Delta\omega \approx 2\sqrt{1/t_{ef}^2 + (\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2)/\rho_{ef1}^2}. \quad (1.158)$$

Таким образом, мы показали, что сдвиг и ширина частотного спектра в случае наличия шири скорости полоидального вращения плазмы в нелинейном режиме рассеяния отличаются от выражений, свойственных линейному режиму рассеяния зондирующей волны.

1.4.5. Выводы

В разделе рассмотрен нелинейный режим доплеровской рефлектометрической диагностики, когда многократное малоугловое рассеяние играет определяющую роль в формировании спектра регистрируемого сигнала.

В приближении геометрической оптики в плоскостой геометрии плазмы получены выражения для мощности сигнала и его спектра в условиях доминирующего многократного

малоуглового рассеяния в зависимости от профиля плотности и скорости полоидального вращения плазмы.

Показано, что сдвиг частотного спектра регистрируемого сигнала определяется специфическим образом усредненной по области распространения волны скоростью полоидального вращения, а ширина спектра пропорциональна амплитуде турбулентности, длине лучевой траектории зондирующей волны и определяется как частотным спектром флуктуаций, так и неоднородностью скорости полоидального вращения.

Основные публикации

- 1) Gusakov E.Z., Surkov A.V., Popov A.Yu. Multiple scattering effect in Doppler reflectometry // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2005. - Vol. 47. - P.959.
- 2) da Silva F., Heuraux S., Gusakov E.Z., Popov A.Yu. A Numerical Study of Forward- and Backscattering Signatures on Doppler-Reflectometry Signals // Plasma Science, IEEE Transactions. - 2010. - Vol. 38. - P.2144 – 2149.

1.5. Нелинейный режим брэгговского рассеяния и ограничения рефлектометрической диагностики профиля плотности плазмы

Радарная модификация рефлектометрической диагностики (РР), использующая частотную или амплитудную модуляцию зондирующей волны, позволяет получать информацию о профиле невозмущенной плотности и турбулентности независимо. Несмотря на то, что радарная рефлектометрия давно и успешно используется для восстановления профиля плотности плазмы [29], в некоторых режимах ее работы наблюдаются аномальные эффекты, такие как скачки времени задержки зондирующей волны, фазы рассеянной волны и запираание зондирующей волны в плазме. Объяснение этих эффектов в рамках традиционной модели распространения зондирующей волны от антенны до поверхности отсечки и обратно возможно только в предположении быстрого и сильного изменения профиля плотности плазмы, которое приводит к появлению дополнительных поверхностей отсечки для зондирующей волны. Существует альтернативная интерпретация, которая базируется на предположении, что их причиной является сильно нелинейный режим брэгговского рассеяния «назад» (БРН). До сих пор в силу математической сложности описания нелинейного режима БРН, эти эффекты анализировались только численно [30].

В настоящем разделе приводится аналитическая модель [8а, 9а], позволяющая описать в рамках модели одномерно-неоднородной плазмы трехволновое взаимодействие в области, где для зондирующей волны выполняется условие БРН. Получена система уравнений, которая описывает связь амплитуды зондирующей и рассеянной волны, что позволило получить матрицу рассеяния в явном виде. Найдены условия перехода в сильно нелинейный режим БРН, сопровождающийся скачком времени задержки зондирующей волны. Получено разумное соответствие результатов численного расчета и предсказаний аналитической модели. Также показано, что многократное БРН при некоторых частотах зондирующей волны, приводит к ее значительному усилению между брэгговским резонансом и отсечкой или между двумя брэгговскими резонансами. В результате анализа получены условия, когда возможно эффективное запираание зондирующей волны, которые хорошо согласуются с результатами расчета.

Рассмотрим распространение волны обыкновенной или необыкновенной поляризации перпендикулярно внешнему магнитному полю в направлении неоднородности плотности плоскостойкой плазмы. Поле этой волны описывается уравнением Гельмгольца:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_\alpha^2(x) + \delta k_\alpha^2(x) \right\} E_\alpha(x) = 0, \quad (1.159)$$

где индекс $\alpha = o$ или $\alpha = e$ указывает на тип моды $E_o \equiv E_z$, $E_e \equiv E_y$ и $k_o^2 = \frac{\omega^2}{c^2}[1-\nu]$,

$$k_e^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{[(1-\nu)^2 - u]}{1-u-\nu}, \quad \nu = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad u = \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}, \quad \delta k_\alpha^2 = h_\alpha \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\delta n(x)}{n_c}, \quad h_o = 1, h_e = \frac{[1-2\nu][1-u] + \nu^2}{[1-u-\nu]^2}$$

[31]. Пусть возмущение плотности $\bar{n}(x)$ описывается функцией $\delta n(x) = \sum_{j=1}^m \delta n_j(x) \cos(\kappa_j x)$,

$\delta n_j(x) = \delta_j n_c \exp\left[-(x-x_j)^2/L^2\right]$, которая моделирует квазикогерентные флуктуации плотности,

расположенные в области, где выполняется резонансное условие Брэгга $\kappa_j = 2k(x_j)$ для

зондирующей волны, δ_j - относительная амплитуда флуктуаций, L - ширина области

локализации флуктуаций. Считая плазму слабо неоднородной $\kappa_j x_c \gg 1$, будем искать решение

(1.159) в форме суперпозиции падающей и отраженной ВКБ волн, распространяющихся в

разных направлениях:

$$E_\alpha(x) = \frac{a_i(x)}{\sqrt{k_\alpha(x)}} \exp\left(i \int^x k_\alpha(x') dx'\right) + \frac{a_r(x)}{\sqrt{k_\alpha(x)}} \exp\left(-i \int^x k_\alpha(x') dx'\right). \quad (1.160)$$

Амплитуды a_i и a_r являются константами везде за исключением узкой окрестности точки

брэгговского резонанса, где из-за нелинейного взаимодействия они становятся функциями

координаты. Характерный масштаб их изменения $l_j = |dk_\alpha/dx|_{x_j}^{-1/2}$ много больше длины волны

зондирующей волны и много меньше характерного размера плазменной неоднородности.

Поскольку выполняется условие $|k_\alpha(x_j)l_j| \gg 1$, мы можем получить систему уравнений,

описывающих амплитуды взаимодействующих волн:

$$\begin{cases} il_j \frac{d}{dx} a_i + \sqrt{Z} a_r \exp(i\Phi) = 0, \\ -il_j \frac{d}{dx} a_r + \sqrt{Z} a_i \exp(-i\Phi) = 0, \end{cases} \quad (1.161)$$

где

$$Z = \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \left[h_\alpha \frac{\delta n_j(x) l_j}{n_c \kappa} \right]^2$$

- слабо меняющаяся функция координаты и $\Phi(x) = \int_{x_j}^x [2k_\alpha(x') - \kappa] dx'$ - расстройка фазы из-за

неоднородности плазмы, которая в окрестности брэгговского резонанса может быть

представлена в виде $\Phi(\xi) = \xi^2$, $\xi = (x-x_j)/l_j$. Система уравнений (1.161) была детально

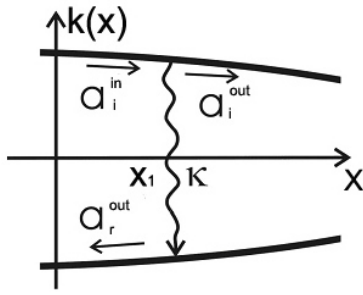


Рисунок 1.17. Дисперсионные кривые, иллюстрирующие брэгговское рассеяние.

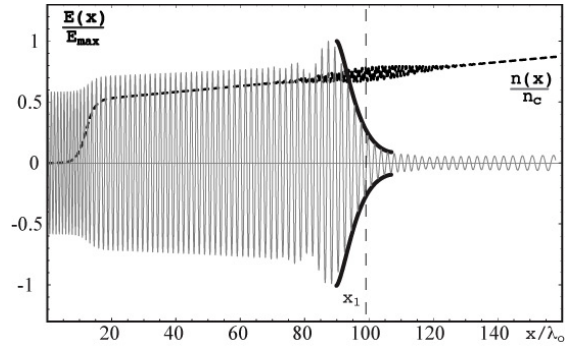


Рисунок 1.18. Распределение электрических полей (серые кривые, сплошные линии) и плотности (черная штрихованная линия) единственной локализованной квази-когерентной флуктуации, расположенной в точке БР $x_j = x_1$. Черная сплошная линия – огибающая (1.166). Характерная длина изменения профиля невозмущенной плотности $390\lambda_0$, $\delta_1=7.5\%$.

проанализирована в работах [32 – 34]. В случае нелокализованного возмущения ($L \rightarrow \infty$) решение этих уравнений имеет вид:

$$a_i = \exp\left(i\frac{\xi^2}{2}\right)\left(D_{iZ/2}\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}\xi\right)+D_{-iZ/2-1}\left(-\sqrt{2}\cdot e^{-i\pi/4}\xi\right)\right), \quad (1.162)$$

$$a_r = \exp\left(i\frac{\pi}{4}-i\frac{\xi^2}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{Z}{2}}D_{iZ/2-1}\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}\xi\right)-\sqrt{\frac{2}{Z}}D_{-iZ/2}\left(-\sqrt{2}\cdot e^{-i\pi/4}\xi\right)\right). \quad (1.163)$$

Решения (1.162) и (1.163) описывают нелинейную связь падающей и отраженной волны в окрестности точки брэгговского резонанса (БР). Характеристики брэгговского рассеяния «назад» – коэффициенты отражения S_{ri} , S_{ir} и прохождения S_{ii} , S_{rr} для падающей волны через резонансный слой. К примеру, в случае падения на этот слой волны с амплитудой a_i^{in} , ее электрическое поле по обе стороны от точки БР (x_1) имеет вид:

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{k_\alpha(x)}}\left[a_i^{in}\exp\left(i\int_{x_1}^x k_\alpha(x')dx'\right)+S_{ri}a_i^{in}\exp\left(-i\int_{x_1}^x k_\alpha(x')dx'\right)\right], x_1 - x \gg l; \quad (1.164)$$

$$E_\alpha(x) = \frac{S_{ii}a_i^{in}}{\sqrt{k_\alpha(x)}}\exp\left(i\int_{x_1}^x k_\alpha(x')dx'\right), x - x_1 \gg l.$$

Рассмотрим асимптотические выражения функций параболического цилиндра в (1.162) и (1.163) при $\xi \rightarrow -\infty$ и $\xi \rightarrow \infty$ [35]:

$$D_{iZ/2}\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}\xi\right)\Big|_{\xi \rightarrow -\infty} \approx \exp\left(\frac{3\pi}{8}Z\right)\exp\left(-i\frac{\xi^2}{2}+i\frac{Z}{2}\ln(\sqrt{2}\xi)\right) \quad (1.165)$$

$$D_{iZ/2}(\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} \xi) \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \approx \exp\left(-\frac{\pi}{8} Z\right) \exp\left(-i\frac{\xi^2}{2} + i\frac{Z}{2} \ln(\sqrt{2}\xi)\right)$$

$$D_{iZ/2-1}(\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4} \xi) \Big|_{\xi \rightarrow -\infty} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1-iZ/2)} \exp\left(\frac{\pi}{8} Z\right) \exp\left(i\frac{\xi^2}{2} - i \ln(\sqrt{2}\xi)\right)$$

Первые две функции в выражении (1.165) описывают ВКБ волну $\exp(-i\xi^2/2)$, распространяющуюся вдоль оси координат в положительном направлении (падающая и прошедшая волны), последняя функция описывает ВКБ волну $\exp(i\xi^2/2)$, распространяющуюся вдоль оси координат в противоположном направлении (отраженная волна). Сравнивая коэффициенты при функциях $\exp(-i\xi^2/2)$ и $\exp(i\xi^2/2)$, получим компоненты S матрицы (матрицы рассеяния):

$$S_{ii,rr} = \exp\left(-\frac{\pi Z}{2}\right), \quad S_{ri,ir} = \mp \exp\left(\pm i\frac{\pi}{4}\right) 2\sqrt{\frac{\pi}{Z}} \frac{\exp(-\pi Z/4)}{\Gamma(\mp iZ/2)} \quad (1.166)$$

В случае локализованного возмущения с конечной, но такой широкой огибающей, что выполняется неравенство $l_j/L \ll 1$, можно получить элементы S матрицы аналитически, используя перенормировку коэффициента Z : $Z_* = Z|_{\xi=0} / \sqrt{1+l_j^2/L^2 \cdot Z|_{\xi=0}}$. Эта процедура оказывается корректной, пока выполняется соотношение $L \gg l_j \sqrt{Z|_{\xi=0}/2}$. Для произвольной длины огибающей L эффективность трансформации через можно оценить, используя ВКБ решение системы уравнений (1.161):

$$a_i = a_i^{in} \exp\left[-\int_{\xi_1}^{\xi} \sqrt{|Z(\zeta)| - \zeta^2} d\zeta\right].$$

В этом случае коэффициент трансформации имеет вид:

$$S_{ii} = \exp\left[-\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{|Z(\xi)| - \xi^2} d\xi\right], \quad (1.167)$$

где ξ_1 и ξ_2 - корни трансцендентного уравнения $|Z(\xi)| - \xi^2 = 0$.

1.5.1. Сильное отражение зондирующей волны в результате брэгговского рассеяния

«назад»

Рассмотрим нелинейное брэгговское рассеяние. Будем считать, что в плазме присутствует только одна локализованная квазикогерентная флуктуация ($j=1$) и отсутствует точка отсечки.

Дисперсионные кривые взаимодействующих волн $k(x)$ в этом случае показаны на рисунке 1.17. Распределение электрических полей, полученных в результате численного решения уравнения (1.159), приведены на рисунке 1.18 серыми линиями. Соответствующее возмущение плотности показано на рисунке черной штрихованной линией. Несмотря на то, что относительная амплитуда возмущения плотности мала, имеет место сильное подавление прохождения падающей волны через резонансный слой. Этот сильный эффект может быть интерпретирован как брэгговское рассеяние падающей волны «назад» (1.162) - (1.166). В частности, зависимость (1.166) адекватно описывает уменьшение амплитуды электрического поля (черная сплошная линия). На рисунке 1.19 приведено сравнение коэффициента прохождения, предсказанного выражением (1.166) и найденного численно. Следует отметить, что выражение (1.166), скорректированное с учетом конечной длины огибающей $Z \rightarrow Z_*$, хорошо описывает коэффициент прохождения даже для узкого слоя локализации возмущения плотности ($L/l_1 = 1.4$), что продемонстрировано на рисунке 1.20 вместе с ВКБ оценкой (1.167). Важная особенность коэффициента прохождения – его экспоненциальная зависимость от параметра Z , а значит от квадрата амплитуды флуктуации. В случае $Z \gg 1$ (т.е. $S_{ii}|_{Z \gg 1} \rightarrow 0$, $S_{ir,ri}|_{Z \gg 1} \approx 1$) эта зависимость приводит к 100% отражению падающей волны из-за брэгговского рассеяния «назад» с дополнительной фазой $\varphi_r = Z/2(\ln(Z/2) - 1) - \pi/4$, навязанной рассеянием. Временная задержка отраженной волны может существенно отличаться от времени распространения зондирующей волны до отсечки и обратно, что было показано в численных расчетах [36]. Критерий на уровень возмущения плотности, при котором отражение от резонансного слоя становится существенным, имеет вид:

$$\left. \frac{\delta n}{n_c} \right|_{x=x_j} \geq \left. \frac{\delta n_{th}}{n_c} = \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\kappa}{h_\alpha l_j} \right|_{x=x_j}. \quad (1.168)$$

В случае зондирования плазмы электромагнитной волной обыкновенной поляризации этот критерий может быть существенно упрощен. Полагая $\bar{n}(x_c) = n_c$, мы получим его в виде:

$$\frac{\delta n}{n_c} > \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{\kappa}{x_c}}. \quad (1.169)$$

Стоит отметить, что выражение (1.166) также описывает и линейный режим брэгговского рассеяния «назад» $Z < 1$. В этом пределе коэффициент отражения имеет вид $S_{ri} = \exp(i3\pi/4)\sqrt{\pi Z}$. Критерии (1.168) и (1.169) верны в том случае, если БР находится далеко от поверхности отсечки, т.е. когда остается корректным ВКБ представление (1.160) решения уравнения (1.159). Поэтому проведенный анализ остается корректным для волновых

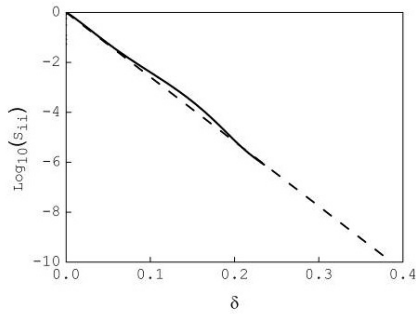


Рисунок 1.19. Зависимость коэффициента прохождения от относительной амплитуды возмущения: аналитическая зависимость (1.166) (штрихованная линия), результат численного моделирования (сплошная линия). (Характерная длина изменения профиля невозмущенной плотности $52\lambda_0$.)

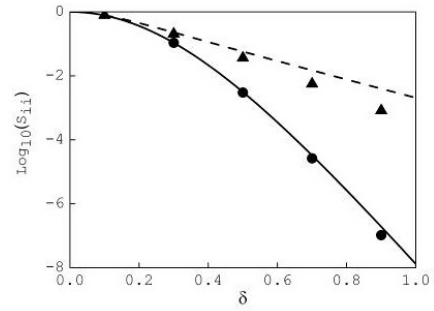


Рисунок 1.20. Сравнение коэффициента прохождения через слой БР, вычисленного по формуле (1.166) и (1.167). Сплошная линия – (1.166), кружки – (1.167) для случая $L/l_1 = 5.6$; штрихованная линия – (1.166), треугольники – (1.167) для случая $L/l_1 = 1.4$.

векторов флуктуаций, удовлетворяющих неравенству $\kappa > \kappa_{Ai} = (\omega^2 / (c^2 x_c))^{1/3}$. В случае минимального значения радиального волнового вектора, брэгговское рассеяние «назад» имеет место в окрестности поверхности отсечки и критерий (1.169) принимает вид $\delta n / n_c \geq (c / (\omega x_c))^{2/3}$. В то же время этот критерий свидетельствует о нарушении применимости борновского приближения для брэгговского рассеяния «назад» [37]. Для меньших радиальных волновых векторов $\kappa \leq (\omega^2 / (c^2 x_c))^{1/3}$ рассеяние «назад» становится невозможным и имеет место рассеяние вперед. Критерий применимости борновского приближения в этом случае также дается выражением (1.169). Критерий сильного рассеяния «назад» (1.168) в больших установках может быть выполнено даже при низком уровне флуктуаций. К примеру, в случае зондирования плазмы обыкновенной волной на частоте $f = 85,90$ ГГц со стороны слабого магнитного поля в токамаке ITER (сценарий с плоским профилем плотности плазмы $n_0 = 1.2 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$, $n_{edge} = 0.8 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$, $B_0 = 5 \text{ Т}$ [38]) оценка порога дает значение 0.5% – 1%, что показано на рисунке 1.21 (лев. панель). При зондировании плазмы необыкновенной волной как со стороны слабого, так и со стороны сильного магнитного поля порог оказывается чуть выше (1% - 3%, см. рисунок 1.21 (цен. панель) для частот $f = 40,45$ ГГц и $f = 180,190$ ГГц). В случае абсолютно плоского профиля плотности ($n_0 = 1.0 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$, $n_{edge} = 0.95 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$, $B_0 = 5 \text{ Т}$) порог сильного брэгговского рассеяния «назад» меньше 1.5% при зондировании необыкновенной волной на частотах $f = 40,45$ ГГц и $f = 170,175$ ГГц (см. рисунок 1.21 (п.п.))

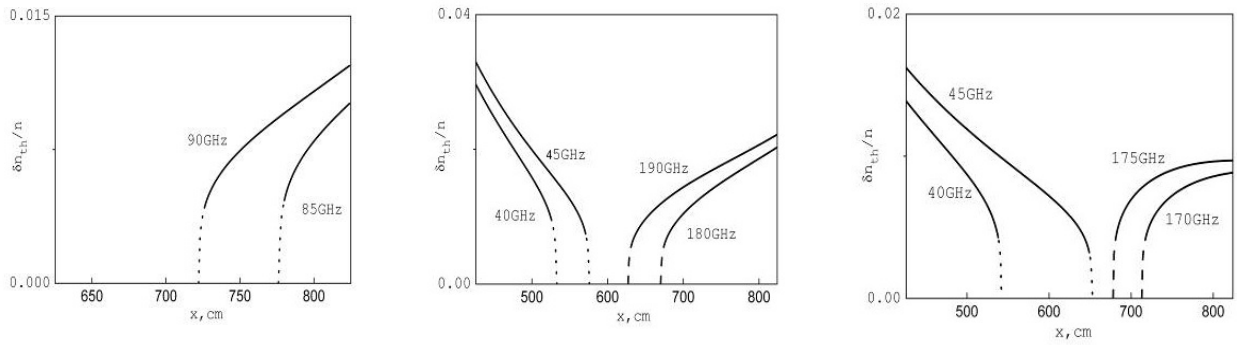


Рисунок 1.21. Зависимость порога брэгговского рассеяния «назад» для условий токамака ITER от положения БР. Сплошные линии отвечают пространственной области вне окрестности отсечки, где критерий (1.168) корректен. Левая панель: зондирование обыкновенной волной со стороны слабого магнитного поля $f = 85, 90$ ГГц, умеренно плоский профиль плотности; центр. панель: зондирование необыкновенной волной со стороны слабого и сильного магнитного поля $f = 40, 45, 180, 190$ ГГц, умеренно плоский профиль плотности; правая панель: зондирование необыкновенной волной со стороны слабого и сильного магнитного поля $f = 40, 45, 170, 175$ ГГц, абсолютно плоский профиль плотности.

В этом случае эффект отражения зондирующей волны от турбулентного слоя может значительно изменить время задержки сигнала. Это приводит к тому, что рутинные измерения профиля плотности оказываются сомнительными с точки зрения достоверности результатов. Отметим, что критерий перехода рассеяния «назад» в сильно нелинейный режим был получен в специфической модели квазикогерентного возмущения плотности. Он может немного измениться для различных моделей турбулентности, однако основные закономерности, предсказанные полученным условием для порога (1.168), как мы полагаем, сохранятся.

1.5.2. Запирание СВЧ волны в результате сильного брэгговского рассеяния «назад»

В этом параграфе мы проанализируем эффект запирания СВЧ волны из-за эффекта сильного рассеяния «назад». Этот эффект может приводить к значительному возрастанию амплитуды волны в области ее пленения. Он часто наблюдался при численном моделировании флуктуационной рефлектометрии в реалистичной геометрии при высоком уровне турбулентности (см. [39] и ссылки в этой работе).

Дисперсионные кривые взаимодействующих волн и результаты численного моделирования (1.159) приведены на рисунках 1.22 и 1.23. Рассмотрим зондирующую волну

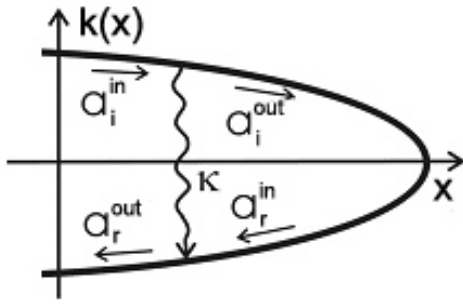


Рисунок 1.22. Дисперсионные кривые взаимодействующих волн в присутствии отсечки.

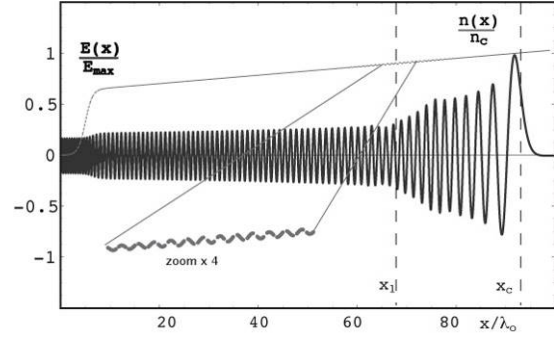


Рисунок 1.23. Профиль плотности плазмы, нормированный на величину плотности в отсечке (серая пунктирная кривая) и распределение электрического поля волны (черная сплошная кривая) в случае присутствия квазикогерентной флуктуации и отсечки. Характерная длина градиента плотности - $390\lambda_0$, $\delta_l = 1\%$.

единичной амплитуды, которая падает со стороны меньшей плотности на турбулентный слой, где присутствует квазикогерентное возмущение плотности. Волновой вектор возмущения плотности удовлетворяет БР условию. Турбулентный слой расположен между границей плазмы и поверхностью отсечки. Поле зондирующей волны, которое описывается уравнением (1.159), может быть представлено в виде:

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{k_\alpha(x)}} \left[\exp\left(i \int_0^x k_\alpha(x') dx'\right) + a_r^{out} \exp\left(-i \int_{x_1}^x k_\alpha(x') dx'\right) \right], \quad x_1 - x \gg l; \quad (1.170)$$

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{k_\alpha(x)}} \left[a_i^{out} \exp\left(i \int_0^x k_\alpha(x') dx'\right) + a_r^{in} \exp\left(-i \int_{x_1}^x k_\alpha(x') dx'\right) \right], \quad x - x_1 \gg l,$$

где a_r^{in} - амплитуда волны, отраженной от отсечки и падающей на слой со стороны большей плотности, a_i^{out} и a_r^{out} - амплитуды волн, распространяющихся от слоя к отсечке и к границе, соответственно. Эти амплитуды связаны из-за брэгговского рассеяния «назад» матрицей рассеяния (1.166):

$$\begin{aligned} a_i^{out} &= S_{ii} + S_{ir} a_r^{in}, \\ a_r^{out} &= S_{ri} + S_{rr} a_r^{in}. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Кроме того, из-за отражения в отсечке амплитуды a_r^{in} и a_i^{out} различаются только фазой:

$$a_r^{in} = a_i^{out} \exp(-i2\varphi_0), \quad (1.172)$$

где $\varphi_0 = \int_{x_1}^{x_c} k(x') dx' + \delta\varphi(\delta n) + i\pi/4$ - полная фаза, включающая в себя регулярную ВКБ часть и

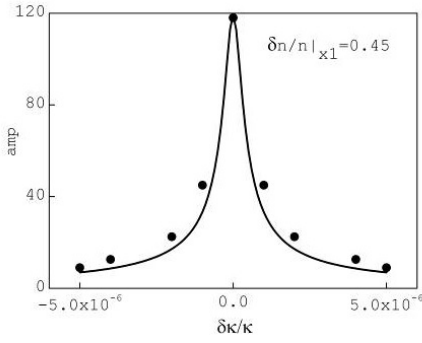


Рисунок 1.24. Зависимость коэффициента усиления от δk . Сплошная кривая – (1.173), кружки – результат расчета. Характерная длина градиента плотности – $390 \lambda_0$.

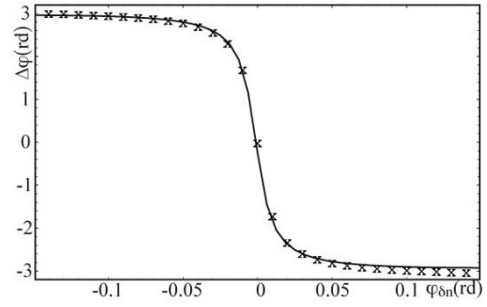


Рисунок 1.25. Зависимость фазы отраженной волны от фазы флуктуации плотности. Сплошная линия - (1.173), кресты – численное моделирование.

поправку $\delta\varphi(\delta n) = \int_{x_1}^{x_c} dx \sqrt{(2k(x) - \kappa_j)^2 / 4 - |Z(x)|} - \int_{x_1}^{x_c} dx (2k(x) - \kappa_j) / 2$, связанную с модификацией дисперсионного уравнения волны из-за присутствия возмущения плотности. Эта поправка играет существенную роль в случае, когда выполняется неравенство $Z > 1$. Подставляя (1.172) в (1.171), получим:

$$a_i^{out} = \frac{S_{ii}}{1 - S_{ri} \exp(-i2\varphi_0)}. \quad (1.173)$$

Согласно (1.173) и (1.166), прохождение волны через резонансный слой при $Z_* > 1$ является экспоненциально малым. В случае, когда частота волны удовлетворяет резонансному соотношению $2\varphi_0 + \varphi_\Gamma(\delta n_0) = 2\pi n$, $n \in Z$, волна начинает циркулировать между БР и отсечкой и ее амплитуда становится экспоненциально велика $a_i^{out} \approx \exp(\pi Z_*/2) a_i^{in}$. Эффект захвата волны четко виден на рисунке 1.23. Качество запирания определяется экспоненциально малыми потерями из этой области. Поэтому при $Z_* > 1$ «ширина» линии резонанса очень узкая, что видно на рисунке 1.24, где изображена зависимость коэффициента усиления $amp = a_i^{out} / a_i^{in}$ от возмущения волнового вектора δk флуктуации плотности, вычисленная по аналитической формуле (1.173) и полученная численно. Эффект пленения волны в подобной специфической каверне можно диагностировать по быстрому скачку фазы отраженной волны и усиленному рассеянию запертой волны, о чем пойдет речь в последующих разделах. На рисунке 1.25 показана зависимость фазы отраженной волны от фазы флуктуации плотности, вычисленные по формуле (1.173) и численно (сплошная линия и кресты, соответственно). Можно видеть, разумное согласие между аналитической моделью и численным моделированием уравнения (1.159).

1.5.4. Выводы

В результате анализа брэгговского рассеяния «назад» в рамках модели плоскостлой одномерно-неоднородной плазмы в случае квазикогерентной флуктуации плотности получен порог перехода в сильно нелинейный режим рассеяния (1.168). Для предполагаемых условий токамака ITER этот порог оказывается на уровне 1% от уровня невозмущенной плазмы. Нелинейный режим брэгговского рассеяния «назад» приводит к значительному нерегулярному изменению времени задержки зондирующей волны, что создает существенные проблемы при интерпретации измерения профиля плотности методом рефлектометрии.

Эффект пленения волны из-за нелинейного режима брэгговского рассеяния «назад» может объяснить быстрое изменение фазы зондирующей волны, наблюдавшееся экспериментально.

Основные публикации

- 1) Gusakov E.Z., Heuraux S. and Popov A.Yu. Strong Bragg backscattering in reflectometry // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2009. - Vol.51. - P.065018.
- 2) Heuraux S., Gusakov E., Popov A., da Silva F., Irzak M. Simulations on the Role of the Resonance of the Probing Wave on Reflectometry Measurements in Fluctuating Plasmas // Plasma Science, IEEE Transactions. - 2010. - Vol.38. - P.2150 – 2158.
- 3) Gusakov E.Z., Heuraux S., Irzak M. and Popov A.Yu. Possibility of the giant scattering enhancement due to wave trapping in the reflectometry experiment // Phys. Scr. - 2011. - Vol.84. - P.045504.

1.6. Методы восстановления и интерпретации данных флуктуационной рефлектометрии

Основной проблемой ФР является корректная интерпретация экспериментальных данных, что вызвано влиянием на формирование регистрируемого сигнала слабо локализованного малоуглового рассеяния в объеме плазмы. В настоящем разделе:

- 1) приводится анализ возможности восстановления спектров турбулентности по радиальным волновым числам по результатам радиальных корреляционных измерений, полученных при наклонном зондировании плазмы [2а, 10а];
- 2) дано описание метода реконструкции радиального профиля флуктуаций плотности по результатам измерений зависимости уровня флуктуаций фазы рефлектометрического сигнала от частоты зондирования [11а];
- 3) дано описание схемы усиленного рассеяния флуктуационной рефлектометрии [12а], позволяющей решить проблему локализации измерений.

1.6.1. Анализ возможности восстановления спектров турбулентности по радиальным волновым числам для флуктуаций со значительным поперечным волновым числом по результатам радиальных корреляционных измерений с наклонным зондированием

Как уже было отмечено в разделе 1.3, радиальная корреляционная рефлектометрия активно используется для изучения флуктуаций плотности в тороидальных установках [2, 3]. Основными привлекательными чертами этой диагностики является техническая простота и удобство доступа к плазме. Однако, интерпретация результатов, полученных с ее помощью, осложнена из-за доминирующего вклада в рефлектометрический сигнал слабо локализованного малоуглового рассеяния на всей трассе распространения волны [3а - 5а], ведущего к существенной переоценке радиальной корреляционной длины турбулентности [5, 6, 40].

Недавно, было предложено два подхода, позволяющие подавить вклад паразитного малоуглового рассеяния. Первый подход - использование схемы радиальной корреляционной доплеровской рефлектометрии, рассмотренной в разделе 1.2. Второй подход базируется на использовании математической процедуры реконструкции спектра турбулентности по радиальным волновым числам, предложенной и строго обоснованной математически в одномерной модели плазмы [40 – 42]. Однако эта процедура игнорирует эффекты двумерности

при описании распространения зондирующей волны и спектра турбулентности, что является не вполне корректным. По этой причине в настоящем разделе одномерная процедура восстановления спектра из данных ДР обобщена на реалистичный случай двумерной геометрии реального эксперимента.

Рассмотрим линейный режим ФР, который адекватно описывается в рамках борновского приближения. Ограничения этого подхода, связанные с малоугловым рассеянием на длинноволновых флуктуациях плотности, доминирующим в спектре турбулентности, обсуждаются в разделе 1.3. Поскольку флуктуации плотности сильно вытянуты вдоль магнитного поля, мы рассмотрим двумерную плоскостойкую модель плазмы. Будем считать, что зондирование плазмы осуществляется пучком волн обыкновенной поляризации в экваториальной плоскости поперек магнитного поля, направленного по оси ξ . Поле зондирующей волны в этом случае описывается уравнением Гельмгольца:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{n(x)}{n_c} \right) \right\} E_\xi = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\delta n(x, \eta)}{n_c} E_\xi, \quad (1.174)$$

где $\delta n(x, \eta)$ - флуктуации плотности, x, η - радиальная и поперечная координаты. Используя теорему взаимности [11], найдем амплитуду рефлектометрического сигнала в борновском

$$A_s(\omega) = i \frac{e^2 \sqrt{P_i}}{4m_e \omega S} \int \delta n(x, \eta) E_a^2(\omega, x, \eta) dx d\eta, \quad (1.175)$$

где P_i - мощность пучка, усредненная в тороидальном направлении, $E_a(\omega, \mathbf{r})$ - амплитуда зондирующей волны на частоте ω , вычисленная в невозмущенной плазме ($\delta n = 0$), S - площадь полоидального сечения плазмы. Поле зондирующей волны E_a может быть представлено в следующем виде:

$$E_a(\omega, x, k_\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_\eta}{2\pi} f(k_\eta, \omega) \exp(ik_\eta \eta) W(\omega, x, k_\eta), \quad (1.176)$$

где $|f(k_\eta)|^2 = 2\sqrt{\pi} w \exp\left[-(k_\eta - \omega \sin \vartheta / c)^2 w^2\right]$ - диаграмма направленности антенны, w - ширина пучка, ϑ угол наклона зондирующей антенны по отношению к градиенту плотности, и функция $W(\omega, x, k_\eta)$ определяет радиальную структуру парциальной (k_η) зондирующей волны.

В случае линейного профиля плотности $n_c(x) = n_c(1 + x/L_\omega)$, где $L_\omega^{-1} = \partial \ln n(x) / \partial x|_{L_\omega}$ функция $W(\omega, x, k_\eta)$ может быть выражена через функцию Эйри:

$$W(\omega, x, k_\eta) = \sqrt{\frac{8\omega\ell}{c^2}} \exp\left(i\Phi(k_\eta) - i\Phi\left(\frac{\omega}{c} \sin \vartheta\right) - i\frac{\pi}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\frac{t^3}{3} + i\frac{x - L(k_\eta)}{\ell} t\right) dt, \quad (1.177)$$

где $\Phi(k_\eta) = \frac{\omega}{c} \int_0^{L(k_\eta)} dx \sqrt{(L(k_\eta) - x) / L_\omega}$ - фаза парциальной волны, имеющей поперечный волновой вектор k_η , набранная на пути от антенны до поверхности отсечки и обратно до приемной антенны; $L(k_\eta) = L_\omega (1 - k_\eta^2 c^2 / \omega^2)$, $\ell = (L_\omega c^2 / \omega^2)^{1/3}$ - эйриевский масштаб. В статистически однородной турбулентности двухточечная кросс-корреляционная функция зависит только от разности координат $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Будем считать, что флуктуации плотности описываются двухточечной кросс-корреляционной функцией:

$$\langle \delta n(x, \eta) \delta n(x', \eta') \rangle = \delta n^2 \exp\left\{-\left[(x - x')^2 + (\eta - \eta')^2\right] / \ell^2\right\}. \quad (1.178)$$

Эта корреляционная функция отвечает гауссовскому спектру по волновым числам, являющемуся разумной моделью для описания турбулентности, в которой доминируют длинные пространственные масштабы. Далее рассмотрим кросс - корреляционную функцию (CCF) рефлектометрических сигналов $A_s(\omega)$ и $A_s(\omega_1)$:

$$CCF(\omega_1, \omega) = \left\langle \left(A_s(\omega) - \langle A_s(\omega) \rangle \right) \left(A_s(\omega_1) - \langle A_s(\omega_1) \rangle \right)^* \right\rangle. \quad (1.179)$$

В разделе 1.2. показано, что в случае линейного режима рассеяния зондирующей волны и линейного профиля плотности плазмы CCF может быть представлена в виде двукратного интеграла от спектра флуктуаций $\delta n_{\kappa, q}^2$ по радиальным и полоидальным волновым векторам (см. (1.30), (1.31)):

$$CCF(\Delta\omega) = \exp\left\{-i4 \frac{L\Delta\omega}{c}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa dq |\delta n_{\Omega, \kappa, q}^2| \frac{\exp\left(i \frac{\Delta\omega}{\omega} \left[2\kappa L + \frac{q^2 Lc}{2\omega}\right] - \frac{(q - 2K)^2 w^2}{2}\right)}{\left[\kappa^2 w^4 + (2Lc\kappa / \omega + Lc^2 q^2 / \omega^2)^2\right]^{1/2}}, \quad (1.180)$$

В случае широкого пучка, такого, что выполняется неравенство $w^2 \gg \max\{\ell_c^2, \ell_c c / 4\omega\}$, основной вклад в интеграл по полоидальным волновым векторам определяется диаграммой направленности. В итоге, двукратный интеграл (1.180) редуцируется до однократного интеграла

$$CCF(\Delta\omega) = \exp\left\{-i4 \frac{L\Delta\omega}{c} \left[1 - \frac{K^2 c^2}{2\omega^2}\right]\right\} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa |\delta n_{\Omega, \kappa, 2K}^2| \frac{\exp\left(i \frac{\Delta\omega}{\omega} 2\kappa L\right)}{\left[\kappa^2 w^4 + (2Lc\kappa / \omega + 4Lc^2 K^2 / \omega^2)^2\right]^{1/2}}, \quad (1.181)$$

который напоминает преобразование Фурье от произведения спектра флуктуаций по радиальным волновым векторам и дополнительной весовой функции. Используя преобразование Фурье, можно получить следующее интегральное представление для спектра флуктуаций плотности через измеренную экспериментально CCF двух сигналов:

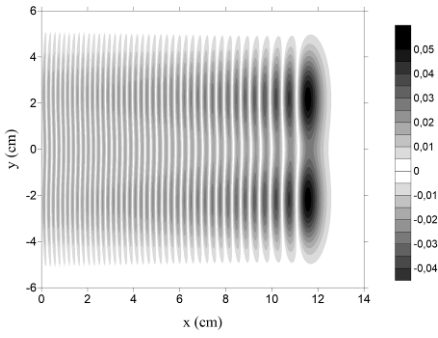


Рисунок 1.26. Распределение поля зондирующей волны для зондирующего пучка $w = 1.6$ см, $\theta = 0^\circ$

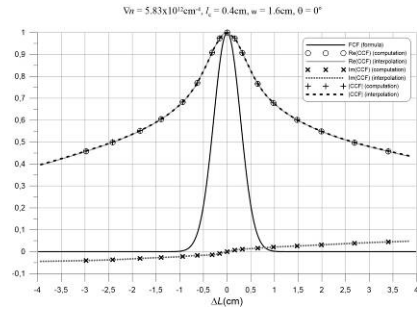


Рисунок 1.27. CCF РКР. Сплошная серая линия – $\text{Re}(CCF)$, короткий пунктир серый – $\text{Im}(CCF)$, длинный пунктир черный - $|CCF|$, сплошная черная – CCF флуктуаций, $w = 1.6$ см, $\theta = 0^\circ$.

$$|\delta n|_{\Omega, \kappa, 2K}^2 = \left[\kappa^2 w^4 + \left(2Lc\kappa / \omega + 4Lc^2 K^2 / \omega^2 \right)^2 \right]^{1/2} \times \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) CCF(\Delta\omega) \exp \left\{ 4i \frac{L\Delta\omega}{c} \left[1 - \frac{K^2 c^2}{2\omega^2} \right] - i \frac{\Delta\omega}{\omega} 2\kappa L \right\}. \quad (1.182)$$

Далее, используя результаты численного моделирования РКР при наклонном зондировании, выполненного с помощью двумерного полноволнового кода Ирзаком М.А. (соавтор работы [10а]), покажем работоспособность процедуры восстановления спектра. Рассмотрим результат вычисления CCF РКР при нормальном падении ($\theta = 0$) широкого пучка ($w = 1.6$ см) зондирующих волн на частоте $\omega / 2\pi = 75$ ГГц. Расстояние от антенны до отсечки в этом случае ($L = 12$ см). Распределение поля волны $\text{Re}(E_\xi)$ в этом случае показано на рисунке 1.26. Дифракция для выбранных параметров мала. Поверхность отсечки находится в ближней зоне антенны. Корреляционная длина турбулентности выбрана равной $l_c = 0.4$ см. Однако, как можно видеть на рисунке 1.27, характерная ширина CCF РКР много больше, чем корреляционная длина турбулентности $l_c = 0.4$ см. Соответственно, преобразование Фурье CCF РКР приводит к спектру CCF RCR (кривая $\text{Re}(\text{DFT}(CCF))$) на рисунке 1.28), который значительно уже, чем спектр турбулентности, отмеченный на рисунке 1.28 как $\text{DFT}(FCF)$. После применения одномерной процедуры восстановления, в соответствии с выражением (1.182), мы получили спектр CCF RCR схожий со спектром турбулентности (см. рисунок 1.27). Небольшое отличие при малых волновых числах и наличие осцилляций с малой амплитудой имеет место из-за экстраполяции вычисленной CCF при больших ΔL во время процедуры Фурье-преобразования. Далее, обратное преобразование Фурье приводит к восстановлению двухточечной CCF турбулентности с хорошей точностью (см. рисунок 1.29).

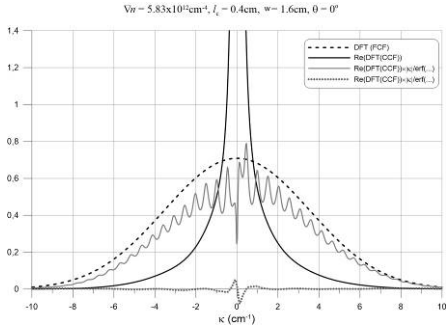


Рисунок 1.28. Спектр CCF РКР и турбулентности для небольшого градиента невозмущенной плотности плазмы. Сплошная черная - действительная часть спектра CCF , длинный пунктир черный - спектр турбулентности, сплошная и короткий пунктир серый - восстановленный спектр турбулентности (Re и Im части), $w = 1.6$ см, $\theta = 0^\circ$.

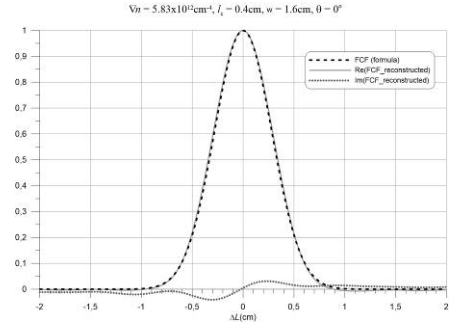


Рисунок 1.29. Реконструкция CCF РКР для небольшого градиента невозмущенной плотности плазмы. Сплошная серая линия – $Re(CCF)$, короткий пунктир серый – $Im(CCF)$, длинный пунктир черный - CCF флуктуаций, $w = 1.6$ см, $\theta = 0^\circ$.

Применим развитую процедуру при интерпретации данных при наклонном зондировании плазмы ($\vartheta = 10^\circ$). Будем рассматривать те же плазменные параметры и частоту рефлектометра. Как можно видеть на рисунке 1.30, ширина CCF РКР становится более узкой, чем в предыдущем случае, из-за частичного подавления вклада малоуглового рассеяния в амплитуду рефлектометрического сигнала, оставаясь, однако, много больше, чем ширина CCF турбулентности. Несмотря на это, последовательное применение интегрального преобразования (1.182), приводит к спектру CCF РКР, напоминающий гауссовский спектр турбулентности (рисунок 1.31). Окончательно, мы можем получить двухточечную CCF , которая оказывается в согласии с CCF турбулентности (рисунок 1.32).

Остановимся на обсуждении применимости борновского приближения, т.е. линейной теории рассеяния. В случае рассеяния «назад», критерий применимости теории дается неравенством:

$$\frac{\omega^2 l_c L}{c^2} \frac{\delta n^2}{n_c^2} \ll 1. \quad (1.183)$$

Этот критерий был получен в работах [8а, 45] (см. также раздел 1.5 настоящей главы). В случае малоуглового рассеяния этот критерий более строгий

$$\frac{\omega^2 l_c L}{c^2} \frac{\delta n^2}{n_c^2} \ln \frac{L}{l_c} \ll 1 \quad (1.184)$$

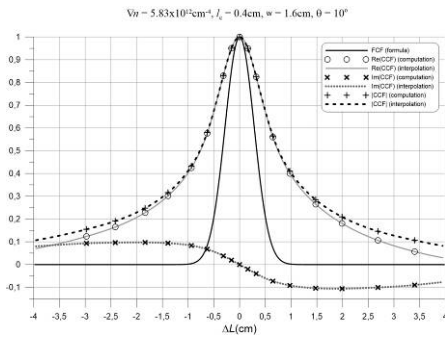


Рисунок 1.30. РКР. Сплошная серая линия – $\text{Re}(CCF)$, короткий пунктир серый – $\text{Im}(CCF)$, длинный пунктир черный – $|CCF|$, сплошная черная – CCF флуктуаций, $w = 1.6$ см, $\theta = 10^\circ$.

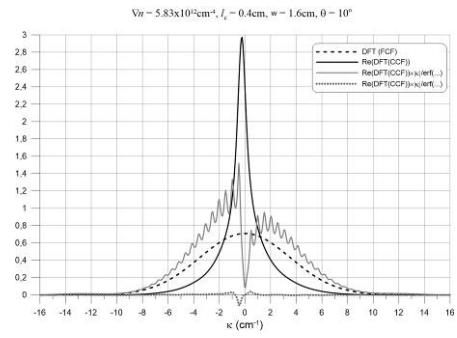


Рисунок 1.31. Спектр CCF РКР и турбулентности. Сплошная черная – действительная часть спектра CCF , длинный пунктир черный – спектр турбулентности, сплошная и короткий пунктир серый - восстановленный спектр турбулентности (Re и Im части), $w = 1.6$ см, $\theta = 10^\circ$.

(см. [3а, 4а] и раздел 1.3 настоящей главы). Причиной этого служит появление в фазе зондирующей волны нерегулярной компоненты при распространении в турбулентной среде. Соответственно переход диагностики в нелинейный режим имеет место, когда величина нерегулярной части фазы порядка π и имеет место подавление линии в частотном спектре рефлектометрического сигнала на частоте зондирующей волны. В случае, когда критерий (1.184) нарушается, интегральное преобразование (1.182) перестает быть применимым. При этом, как было показано в [3а, 4а] и разделе 1.3 настоящей главы, данные РКР могут быть использованы для получения информации о величине $L\delta n^2 / (l_c n_c^2)$.

1.6.2. Метод реконструкции радиального профиля турбулентности на основании результатов измерений зависимости уровня флуктуаций фазы рефлектометрического сигнала от частоты зондирования

Как было отмечено в предыдущих разделах, малоугловое рассеяние на всей трассе распространения зондирующей волны приводит к появлению у рефлектометрического сигнала нерегулярной компоненты фазы $\delta\phi = \phi - \langle \phi \rangle$, ϕ и $\langle \phi \rangle$ - полная и усредненная фазы. Эта нерегулярная компонента носит случайный характер и содержит интегральную информацию о

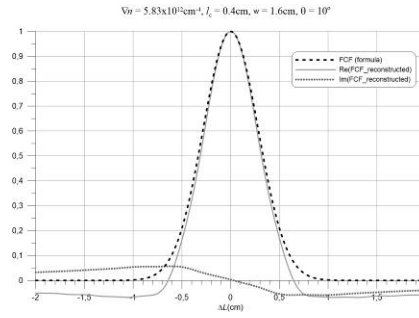


Рисунок 1.32. Реконструкция – CCF РКР. Сплошная серая линия – $Re(CCF)$, короткий пунктир серый – $Im(CCF)$, длинный пунктир черный – CCF флуктуаций, $w = 1.6$ см, $\theta = 10^\circ$.

радиальном профиле флуктуаций плотности плазмы. До настоящего времени считалось, что рефлектометрический сигнал формируется в результате рассеяния зондирующей волны в окрестности отсечки, т.е. $\sqrt{\langle \delta\phi^2 \rangle} \propto \langle \delta n^2 \rangle^{1/2} \Big|_{cutoff}$. Однако подобная интерпретация не учитывает вклада рассеяния зондирующей волны в объеме плазмы, что может приводить к значительным ошибкам при восстановлении радиального профиля флуктуаций. В настоящем разделе предложена численная процедура, позволяющая аппроксимировать решение математически некорректной проблемы восстановления функции по интегральным данным. Эта процедура применима как в случае зондирования плазмы обыкновенной, так и необыкновенной волной. Численная проверка выполнена с помощью одномерного полноволнового кода для гауссовского и экспоненциального спектра турбулентности по радиальным волновым векторам. Эти спектры являются разумной аппроксимацией экспериментальных данных как о больших, так и о малых масштабах турбулентности [14, 15, 46].

Рассмотрим одномерную плоскоструйную модель плазмы, параметры которой изменяются вдоль координаты x , а координаты η, ξ направлены поперек и вдоль магнитного поля. Предположим, что выполняется условие $|\delta n / n_c| \ll l_c / x_c$, обеспечивающее присутствие только одной поверхности отсечки в точке с координатой $x = x_c$, соответствующей критической плотности $n(x_c) = n_c$. Считая, что корреляционная длина флуктуаций l_c много больше эйриевского масштаба $l_a = (c^2 x_c / \omega^2)^{1/3}$, т.е. $l_c \gg l_a$, мы обеспечим отсутствие рассеяния «назад» далеко от отсечки. В рамках данной модели фаза рефлектометрического сигнала может быть найдена явно и представлена как сумма регулярной

$$\langle \phi \rangle = 2 \int_0^{x_c} k_j(x) dx - \frac{\pi}{2} \quad (1.185)$$

и нерегулярной

$$\delta\phi = -\frac{\omega^2}{c^2} \int_0^{x_c} \frac{\delta n(x)}{n_c} \frac{h_j dx}{k_j(x)} \quad (1.186)$$

частей. В выражениях (1.185) и (1.186) волновой вектор $k_j(x)$ и коэффициент h_j для обыкновенной волны ($j = O$) и необыкновенной волны ($j = X$) имеют вид:

$$k_O = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}, \quad k_X = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_{pe}^2)^2 / \omega^2 - \omega_{ce}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2 - \omega_{pe}^2}}, \quad h_O = 1, \quad h_X = \frac{[\omega^2 - 2\omega_{pe}^2][\omega^2 - \omega_{ce}^2] + \omega_{pe}^4}{[\omega^2 - \omega_{ce}^2 - \omega_{pe}^2]^2}. \quad (1.187)$$

Средний квадрат возмущения фазы имеет вид:

$$\langle \delta\phi^2 \rangle = \frac{\omega^4}{c^4} \int_0^{x_c} \int_0^{x_c} dx' dx'' \frac{h_j(x') h_j(x'')}{k_j(x') k_j(x'')} \frac{\langle \delta n(x') \delta n(x'') \rangle}{n_c^2}, \quad (1.188)$$

где $\langle \dots \rangle$ - статистическое усреднение. Это выражение подробно анализировалось в [3а, 4а] и в разделе 1.3 настоящей главы, посвященном нелинейному режиму РКР, где, напомним, флуктуации плотности предполагались статистически неоднородными, но характерный масштаб этой неоднородности полагался много большим, чем корреляционная длина турбулентности l_c , т.е. $l_c \ll L$. В этом случае мы можем представить коррелятор флуктуаций плотности в виде:

$$\langle \delta n(x') \delta n(x'') \rangle = \delta n_0^2 (x' + x'') K(x' - x'', x' + x''),$$

где δn_0^2 определяет уровень турбулентности,

$$K\left(x' - x'', \frac{x' + x''}{2}\right) = l_c \left(\frac{x' + x''}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \tilde{K}\left(\kappa, \frac{x' + x''}{2}\right) \exp[i\kappa(x'' - x')], \quad (1.189)$$

$$l_c^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \tilde{K}(\kappa, x' + x''), \quad \tilde{K}(0, x' + x'') = 1, \quad \tilde{K}(\kappa, x) - \text{спектр флуктуаций плотности, } \kappa -$$

радиальный волновой вектор. Как это было показано в [3а, 4а], при слабой неоднородности флуктуаций плотности выражение (1.188) сводится к виду:

$$\langle \delta\phi^2 \rangle = \frac{\omega^2}{c^2 n_c^2} \int_0^{x_c} d\xi l_c \delta n_j^2(x_c - \xi) S(\xi), \quad (1.190)$$

где введены новые обозначения: $\xi = x_c - x'$, $\delta n_j^2 = h_j^2 \delta n_0^2$ и функция $S(\xi)$ - эффективность рассеяния, которая характеризует вклад разных пространственных областей в фазу волны. Далеко от отсечки, т.е. при $x_c - x' \gg l_c$, мы можем положить $l_c = 0$ и, рассматривая коррелятор $K(x' - x'', x' + x'')$ в выражении (1.188) как дельта-функцию ($K(x' - x'', x' + x'') \propto \delta(x' - x'')$), представить эффективность рассеяния в этой области в виде:

$$S(\xi) \approx \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{k_j^2(\xi)}. \quad (1.191)$$

Видно, что эта функция растет при приближении к отсечке, тем самым подчеркивая вклад этой пространственной области. Формально, выражение (1.191) имеет особенность в точке отсечки. Однако это лишь следствие того, что в окрестности отсечки, $|x_c - x| \leq l_c$, эффективность рассеяния $S(\xi)$ имеет другое представление, которое описывает «насыщение» этой формальной особенности:

$$S(\xi) \approx \frac{L_j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \tilde{K}(\kappa, x_c - \xi) J_0(\kappa \xi), \quad (1.192)$$

где $L_j = \omega^2 / c^2 \cdot \partial k_j^2 / dx|_{x_c}^{-1}$ и $J_0(\kappa \xi)$ - функция Бесселя. В случае линейного профиля невозмущенной плазмы выражение (1.191) является точной математической асимптотикой (1.192) при $\xi \gg l_c$. Выражение (1.192) может быть существенно упрощено в случае гауссовского и экспоненциального спектра турбулентности по радиальным волновым векторам, являющимся разумной аппроксимацией экспериментальных данных о больших и малых масштабах турбулентности [14, 15, 46]. Начнем с обсуждения гауссовского спектра турбулентности $\tilde{K}(\kappa) = \exp[-\kappa^2 / \kappa_0^2]$, где $l_c = 2\sqrt{\pi} \kappa_0^{-1}$. В этом случае (1.192) сводится к выражению:

$$S(\xi) = \sqrt{\pi} \frac{L_j \kappa_0}{2} \exp\left(-\frac{\xi^2 \kappa_0^2}{8}\right) I_0\left(\frac{\xi^2 \kappa_0^2}{8}\right), \quad (1.193)$$

где $I_0(\dots)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода. Используя (1.193) и (1.190), в случае линейного профиля плотности и однородной турбулентности получим [5a]:

$$\langle \delta\phi^2 \rangle \approx \frac{\omega^2 L_j l_c}{c^2} \frac{\delta n_j^2}{n_c^2} \Big|_{x_c} \left[\ln\left(\frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{L_j}{l_c}\right) + 0.71 \right]. \quad (1.194)$$

В этом случае мы можем получить зависимость уровня флуктуаций от частоты сигнала ω :

$$\frac{\delta n_j}{n_c} \Big|_{x_c(\omega)} \approx \frac{\sqrt{\langle \delta\phi^2(\omega) \rangle}}{\sqrt{\frac{\omega^2 L_j(\omega) l_c}{c^2} \left[\ln\left(\frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{L_j(\omega)}{l_c}\right) + 0.71 \right]}}. \quad (1.195)$$

Далее, мы обсудим экспоненциальный спектр флуктуаций плотности $K(\kappa) = \exp[-|\kappa| / \kappa_0]$, $l_c = \pi \kappa_0^{-1}$. В этом случае (1.192) имеет явный вид:

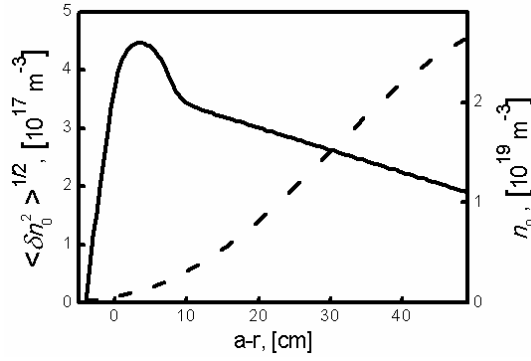


Рисунок 1.33. Профили невозмущенной плотности (прерывистая линия) и флуктуаций плотности (сплошная линия); $x_c = a$.

$$S(\xi) = \frac{L_j}{\sqrt{\xi^2 + \kappa_0^{-2}}} \quad (1.196)$$

и (1.190) сводится к выражению:

$$\langle \delta \phi^2 \rangle \approx \frac{\omega^2}{c^2} L_j l_c \frac{\delta n_j^2}{n_c^2} \Big|_{x_c} \left[\ln \left(\frac{\pi L_j}{l_c} \right) + 2 \ln 2 \right]. \quad (1.197)$$

Таким образом, зависимость уровня флуктуаций от частоты сигнала ω имеет вид:

$$\frac{\delta n_j}{n_c} \Big|_{x_c(\omega)} \approx \sqrt{\langle \delta \phi^2(\omega) \rangle} / \sqrt{\frac{\omega^2 L_j(\omega) l_c}{c^2} \left[\ln \left(\frac{\pi L_j(\omega)}{l_c} \right) + 2 \ln 2 \right]}. \quad (1.198)$$

В случае произвольного спектра флуктуаций плотности, как было показано в [3а], выражение (1.190) может быть представлено в виде:

$$\langle \delta \phi^2 \rangle \approx \frac{\omega^2}{c^2} L_j l_c \frac{\delta n_j^2}{n_c^2} \Big|_{x_c} \left[\ln \left(\frac{L_j}{l_c} \right) + \alpha \right],$$

что отличается от (1.194) и (1.197) только членом α , который определяется видом спектра. Выражения (1.194), (1.195) и (1.197), (1.198) дают общее соотношение между возмущением фазы и амплитудой флуктуаций. В случае однородной турбулентности выражения (1.195) и (1.198) восстанавливают уровень флуктуаций плотности. Далее мы будем использовать (1.195) и (1.198) как нулевое приближение для численной итерационной процедуры восстановления радиального профиля флуктуаций плотности из экспериментальных данных: $\langle \delta \phi_{\text{exp}}^2 \rangle [x_c(\omega)]$. Итак, на первом шаге, используя локальное выражение (1.195), можно восстановить из экспериментальных данных радиальное распределение флуктуаций плотности: $\sqrt{\langle \delta n_0^2(x_c) \rangle}$. Далее, подстановка этого распределения в выражение (1.190), где эффективность рассеяния определена в (1.191) и (1.193), дает величину $\langle \delta \phi_0^2 \rangle$. Поскольку на первом шаге при

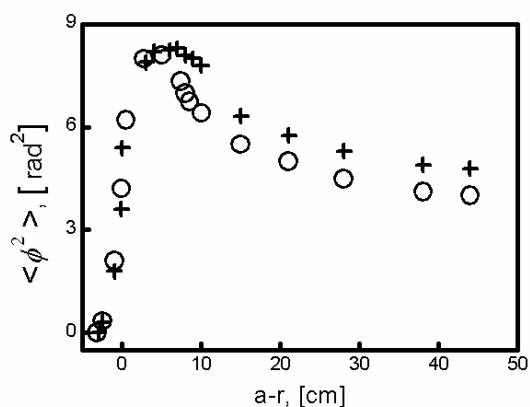


Рисунок 1.34. Пространственное распределение $\langle \delta\phi^2 \rangle$ от координаты (17 частот зондирующей волны). Кружки - результат численного моделирования для профилей, показанных на рисунке 1.33, кресты – выражение (1.190).

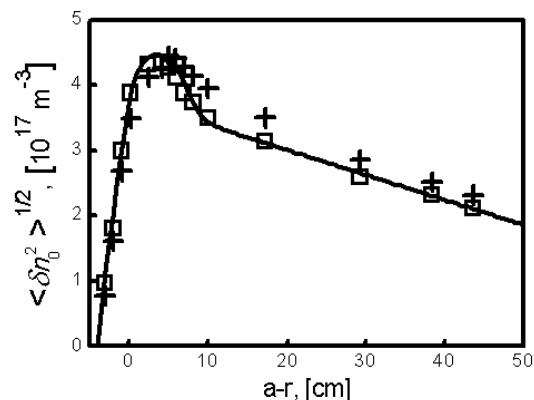


Рисунок 1.35. Пространственное распределение $\langle \delta n_0^2 \rangle^{1/2}$ от координаты отсечки (17 частот зондирующей волны). Сплошная линия – заданный профиль флуктуаций, кресты – нулевое приближение (1.195), квадраты – результат итерационной процедуры.

восстановлении профиля $\sqrt{\langle \delta n_0^2(x) \rangle}$ были проигнорированы нелокальные эффекты, вычисленная фаза $\langle \delta\phi_0^2[x_c(\omega)] \rangle$ для каждой из частот отличается от величины $\langle \delta\phi_{\text{exp}}^2 \rangle[x_c(\omega)]$, полученной в результате численного эксперимента. Однако отличие между $\langle \delta\phi_0^2(x_c) \rangle$ и $\langle \delta\phi_{\text{exp}}^2 \rangle$ может быть использовано в итерационной процедуре, основанной на методе наименьших квадратов. Эта итерационная процедура позволяет скорректировать нулевое приближение профиля плотности $\sqrt{\langle \delta n_0^2(x) \rangle}$. Ключевой момент данного подхода заключается в том, что нелокальность является слабой и основной вклад в фазу связан с рассеянием в окрестности отсечки.

Для того, чтобы проиллюстрировать предложенную процедуру, воспользуемся результатами одномерного полноволнового моделирования О - модовой рефлектометрии для гауссовского спектра флуктуаций $K(\kappa) = \exp(-\kappa^2 / \kappa_0^2)$, выполненного соавторами работы [11a] (H.S., S.M.). В рамках этого моделирования с помощью разностной схемы, описанной в [47], численно решалось уравнение Гельмгольца для профилей невозмущенной плотности и флуктуаций, изображенных на рисунке 1.33. Зависимость величин $\langle \delta\phi_{\text{exp}}^2 \rangle$ от координаты отсечки (17 частот зондирующей волны), полученных в результате численного моделирования уравнения Гельмгольца, показано на рисунке 1.34 кружками. На первом шаге итерационной

процедуры получим профиль флуктуаций $\sqrt{\langle \delta n_0^2(x_c) \rangle}$, используя локальное приближение (1.195). Соответствующее распределение приведено на рисунке 1.35. Стоит отметить, что уже нулевое приближение дает оценку профиля флуктуаций плотности в пределах 15% точности по сравнению с заданным профилем (сплошная линия). Используя это распределение $\sqrt{\langle \delta n_0^2(x_c) \rangle}$, получим среднее значение квадрата возмущения фазы (1.190) и сравним его с профилем $\langle \delta \phi_{\text{exp}}^2 \rangle$, полученным численно (см. рисунок 1.34, кресты и кружки). Используя далее нелинейный метод наименьших квадратов, который базируется на численном квазиньютоновском методе [48], получим окончательное распределение флуктуаций плотности (показаны на рисунке 1.35 квадратами). Можно видеть, что реконструированный профиль флуктуаций плотности в деталях воспроизводит заданный.

Обсуждая ограничения предложенной процедуры, которые связаны с двумерной геометрией эксперимента (кривизна магнитных поверхностей, конечные размеры зондирующего пучка), отметим, что измерения фазы малочувствительны к двумерным эффектам и могут быть описаны в рамках одномерной модели [49]. Схожий вывод был сделан в работе [50], где представлены результаты восстановления спектра турбулентности по радиальным волновым числам из данных о флуктуациях фазы рефлектометрического сигнала. Отметим также, что предложенный метод может быть дополнением к данным рефлектометра, использующего быстрое свипирование частоты [51, 52].

1.6.3. Схема усиленного рассеяния флуктуационной рефлектометрии

В настоящем разделе описан метод усиленного рассеяния (УР), предложенный в работе [12a]. Его реализация позволяет решить проблему отсутствия достаточной локальности измерений, свойственную различным модификациям ФР. Ключевым элементом метода УР является возбуждение искусственного резонатора между поверхностью отсечки волны и квазикогерентным возмущением плотности, создаваемым внешними источниками. Метод основывается на предсказании А.Д. Пилия о возможности одновременного локального усиления зондирующей и рассеянной волны в окрестности плазменного резонанса [53]. Возможность усиления сигналов в окрестности верхнего гибридного резонанса было проанализировано в работах [54, 55]. Подобный обзор экспериментальных и теоретических достижений в развитии диагностик, основанных на усиленном рассеянии зондирующих пучков, приведен в работе [56].

1.6.3.1. Анализ усиленного рассеяния (УР) в одномерной модели плазмы

В этом параграфе в рамках одномерной модели плазмы в простейшей плоскостной геометрии мы проанализируем схему УР в флуктуационной рефлектометрии. Рассмотрим зондирование плазмы волной обыкновенной поляризации перпендикулярно направлению внешнего магнитного поля, направленному по оси ξ , в направлении градиента плотности вдоль оси x . В этом случае поле волны, имеющей вектор поляризации вдоль магнитного поля, описывается уравнением Гельмгольца:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_o^2(x) \right\} E_\xi(x) = 0, \quad (1.199)$$

где $k_o^2 = \omega^2 / c^2 (1 - (n + \delta n) / n_c)$, n - невозмущенная плотность плазмы и $\delta n(x)$ - суперпозиция квазикогерентных мод $\delta n_q(x) \cos(\kappa_q x)$, $\delta n_q(x) = \delta_q n_c \exp[-(x - x_q)^2 / L_q^2]$ и низкочастотных флуктуаций $\delta n_f(x) \cos(\kappa_f x) \exp(-i\Omega_f t)$, $\delta n_f(x) = \delta_f n_c \exp[-(x - x_f)^2 / L_f^2]$. Здесь δ_q , δ_f , L_q , L_f - относительные амплитуды возмущения плотности и размеры слоя локализации соответствующего возмущения. Рассмотрим случай, когда $\delta n_q(x)$ и $\delta n_f(x)$ локализованы в окрестности точек брэгговского резонанса (БР), где выполняются следующие резонансные условия $\kappa_q = 2k_o(x_q)$ и $\kappa_f = 2k_o(x_f)$. Будем считать, что координаты x_f , x_q и положение отсечки x_c находятся настолько далеко друг от друга, что резонансные слои и эйриевский слой не перекрываются, что позволяет использовать ВКБ приближение при описании зондирующих и дочерних волн. Поскольку частота флуктуаций Ω_f много меньше, чем частота зондирующей волны ω и обратное время распространения зондирующего сигнала от границы плазмы до поверхности отсечки и обратно, мы можем пренебречь изменением частоты дочерней волны $\omega_s = \omega - \Omega_f \approx \omega$. Будем искать решение уравнения (1.199) в виде:

$$E_\xi(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_o(x_j)}{k_o(x)}} \left[a_{ij}^{in} \exp\left(i \int_{x_j}^x k_o(x') dx'\right) + a_{rj}^{out} \exp\left(-i \int_{x_j}^x k_o(x') dx'\right) \right], \quad x_j - x \gg l_j, \quad (1.200)$$

$$E_\xi(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_o(x_j)}{k_o(x)}} \left[a_{ij}^{out} \exp\left(i \int_{x_j}^x k_o(x') dx'\right) + a_{rj}^{in} \exp\left(-i \int_{x_j}^x k_o(x') dx'\right) \right], \quad x - x_j \gg l_j,$$

где медленно меняющиеся амплитуды a_{ij}^{in} , a_{rj}^{in} и a_{ij}^{out} , a_{rj}^{out} (см. рисунок 1.43) отвечают волнам, падающим на БР и уходящим от БР, $l_j = |dk_o / dx|_{x_j}^{-1/2}$ - длина соответствующего резонансного

слоя. Амплитуды в выражениях (1.200) не являются независимыми. Они связаны из-за брэгговского рассеяния через компоненты матрицы рассеяния (см раздел 1.5):

$$a_{ij}^{out} = S_{ii}^{(j)} a_{ij}^{in} + S_{ir}^{(j)} a_{rj}^{in}, a_{rj}^{out} = S_{ri}^{(j)} a_{ij}^{in} + S_{rr}^{(j)} a_{rj}^{in}. \quad (1.201)$$

Компоненты матрицы рассеяния могут быть представлены в явном виде:

$$S_{ri,ir}^{(j)} = \mp 2 \sqrt{\frac{\pi}{Z_j}} \frac{\exp(\mp i\pi/4)}{\Gamma(\mp iZ_j/2)} \exp\left(-\frac{\pi Z_j}{4}\right), S_{ii,rr}^{(j)} = \exp\left(-\frac{\pi Z_j}{2}\right), Z_j = \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \left[\frac{\delta n_j(x) l_j}{2n_c \kappa_j}\right]^2. \quad (1.202)$$

В случае конечного возмущения, имеющего огибающую с характерным размером L_j , таким что выполняется неравенство $l_j/L_j \ll 1$, вид компонент матрицы рассеяния остается таким же, но коэффициент Z требует перенормировки $Z_* = L_j Z|_{x_{BBS}} / \sqrt{L_j^2 + l_j^2 Z|_{x_{BBS}}}$ [8a]. Амплитуда волны

a_{if}^{out} отличается от a_{rf}^{in} только дополнительной фазой $2\varphi_{fc}$, т.е.

$$a_{rf}^{in} = a_{if}^{out} \exp(-i2\varphi_{fc}), \quad (1.203)$$

которая набирается падающей волной в петле между возмущением δn_f и отсечкой:

$$\varphi_{fc} = -\int_{x_f}^{x_c} k_o(x') dx' + i\pi/4 + \int_{x_f}^{x_c} dx \left\{ \sqrt{(k_o(x) - \kappa_f/2)^2 - |Z_f(x)|/l_f^2} - (k_o(x) - \kappa_f/2) \right\}.$$

Эта фаза состоит из ВКБ фазы (первый член), вклада отсечки (второй член) и поправки к дисперсионному соотношению из-за брэгговского рассеяния (последний член). Используя (1.201) и (1.203), мы можем получить амплитуду отраженной волны a_{rf}^{in} , падающей на δn_f в петле между δn_f и отсечкой, как функцию a_{if}^{in} :

$$a_{rf}^{in} = \frac{S_{ii}^{(f)} \exp(-i2\varphi_{fc})}{1 - S_{ir}^{(f)} \exp(-i2\varphi_{fc})} a_{if}^{in}. \quad (1.204)$$

Во второй петле (рисунок 1.36) между возмущениями плотности δn_q и δn_f мы можем выразить амплитуды a_{if}^{in} , a_{rf}^{out} , a_{rq}^{in} через амплитуду a_{iq}^{out} :

$$\begin{aligned} a_{if}^{in} &= a_{iq}^{out} \exp(-i\varphi_{qf}), \\ a_{rf}^{out} &= a_{if}^{in} \exp(-i2\{\varphi_{fc} + \delta\varphi_{fc}\}), \\ a_{rq}^{in} &= a_{iq}^{out} \exp(-i2\{\varphi_{qc} + \delta\varphi_{fc}\}), \end{aligned} \quad (1.205)$$

где $\delta\varphi_{fc} = \arctan\left[\frac{|S_{ir}^{(f)}| \sin(2\varphi_{fc} + \varphi_\Gamma)}{1 - |S_{ir}^{(f)}| \cos(2\varphi_{fc} + \varphi_\Gamma)}\right]$ - фаза, набранная волной после взаимодействия с флуктуацией δn_f , $\varphi_\Gamma = \arg\left[\Gamma(iZ_f/2)\right]$, $\varphi_{qc} = \varphi_{qf} + \varphi_{fc}$ - полная фаза, набранная между возмущением плотности δn_q и отсечкой, $2\varphi_{qf}$ - полная фаза, набранная во второй петле:

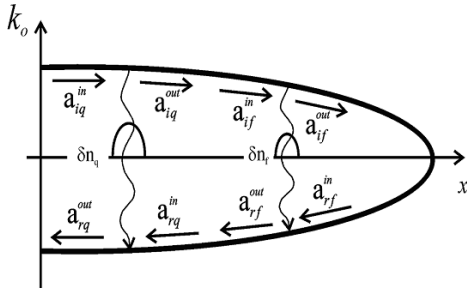


Рисунок 1.36. Дисперсионные кривые, иллюстрирующие брэгговское рассеяния «назад» в случае присутствия двух флуктуаций, расположенных в точках БР, и отсечки.

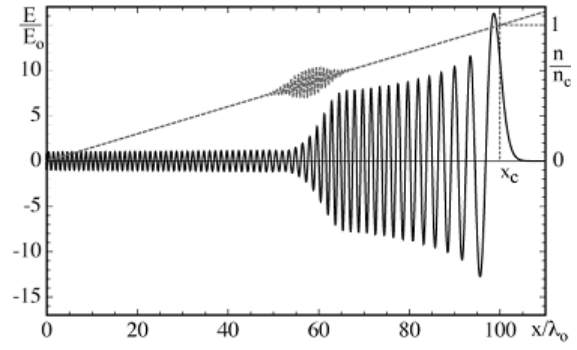


Рисунок 1.37. Профиль плотности плазмы, нормированный на плотность в отсечке (серая пунктирная линия) и распределение электрического поля волны (черная сплошная линия) в случае одного БР и отсечки. Характерная длина градиента плотности $100 \lambda_0$, $\delta n_q/n_c=10\%$.

$$\varphi_{qf} = -\int_{x_q}^{x_f} k_o(x') dx' + \int_{x_q}^{x_f} dx \left\{ \sqrt{(k_o(x) - \kappa_q/2)^2 - |Z_q(x)|/l_q^2} - (k_o(x) - \kappa_q/2) \right\} + \int_{x_q}^{x_f} dx \left\{ \sqrt{(k_o(x) - \kappa_f/2)^2 - |Z_f(x)|/l_f^2} - (k_o(x) - \kappa_f/2) \right\}.$$

Далее, предположим $a_{iq}^{in} = 1$. Используя (1.201), получим:

$$a_{iq}^{out} = \frac{S_{ii}^{(q)}}{1 - S_{ir}^{(q)} \exp(-i2\{\varphi_{qc} + \delta\varphi_{fc}\})}, \quad a_{rq}^{in} = \frac{S_{ii}^{(q)} \exp(-i2\{\varphi_{qc} + \delta\varphi_{fc}\})}{1 - S_{ir}^{(q)} \exp(-i2\{\varphi_{qc} + \delta\varphi_{fc}\})}.$$

В случае отсутствия флуктуации δn_f , коэффициент усиления зондирующей волны между δn_q и отсечкой дается выражением [8a]:

$$A_{qc} = \left| S_{ii}^{(q)} / (1 - S_{ir}^{(q)} \exp(-i2\varphi_{qc})) \right|. \quad (1.206)$$

В результате можно найти амплитуду волны a_{rq}^{out} вне резонансной петли:

$$a_{rq}^{out} = S_{ri}^{(q)} + \frac{S_{ii}^{(q)} S_{rr}^{(q)} \exp(-i2\{\varphi_{qc} + \delta\varphi_{fc}\})}{1 - S_{ir}^{(q)} \exp(-i2\{\varphi_{qc} + \delta\varphi_{fc}\})} \equiv \exp(-i2\{\varphi_{qc} + \delta\varphi_{fc} + \delta\varphi_{qf}\}), \quad (1.207)$$

где

$$\delta\varphi_{qf} = \arctan \left[\frac{|S_{ir}^{(q)}| \sin(2\varphi_{qc} + 2\delta\varphi_{fc} + \varphi_{\Gamma})}{1 - |S_{ir}^{(q)}| \cos(2\varphi_{qc} + 2\delta\varphi_{fc} + \varphi_{\Gamma})} \right]$$

- возмущение фазы из-за взаимодействия волны с флуктуацией плотности δn_q . В случае стандартной рефлектометрии, т.е. при $\delta n_q = 0$ и $Z_q = 0$ можно выделить часть амплитуды, связанную с флуктуациями $\delta a_{BBS} \doteq a_{rf}^{out} - a_{rf}^{out} \Big|_{Z_f=0}$. Данный подход применим при малых амплитудах флуктуаций. Используя вторую строку в (1.205), мы получим амплитуду рефлектометрического сигнала в виде:

$$|\delta a_{BBS}| = 2 \sin(\delta \varphi_{fc}). \quad (1.208)$$

В случае присутствия возмущения конечной амплитуды δn_q вклад δn_f в амплитуду рассеянного сигнала равен $\delta a_{rq}^{out} \doteq a_{rq}^{out} - a_{rq}^{out} \Big|_{Z_f=0}$. Введем понятие коэффициента усиления A_f

согласно выражению:

$$|\delta a_{rq}^{out}| = A_f(\delta n_f) |\delta a_{BBS}|. \quad (1.209)$$

В результате, получим:

$$A_f(\delta n_f) = \left| \frac{S_{ii}^{(q)} S_{rr}^{(q)}}{\left[1 - S_{ir}^{(q)} \exp(-i2\{\varphi_{qc} + \delta \varphi_{fc}\})\right] \left[1 - S_{ir}^{(q)} \exp(-i2\varphi_{qc})\right]} \right|. \quad (1.210)$$

Выражения (1.209) и (1.210) описывают амплитуду рассеянной волны в общем случае, когда амплитуды δn_q и δn_f произвольны. Далее сфокусируемся на случае схемы усиленного рассеяния, т.е. будем считать, что имеется сильное возмущение плотности δn_q , приводящее к неравенству $Z_q \gg 1$, и флуктуация с малой амплитудой δn_f . Предположим, что выполнено резонансное условие:

$$\arg(S_{ir}^{(q)}) - 2\varphi_{qc} \Big|_{\delta n_f=0} = \frac{Z_q}{2} \left(1 - \ln\left(\frac{Z_q}{2}\right)\right) - 2\varphi_{qc} \Big|_{\delta n_f=0} = 2\pi m, \quad m \in Z. \quad (1.211)$$

В этом случае компоненты матрицы рассеяния (1.202), соответствующие δn_q , могут быть представлены в виде:

$$S_{ii}^{(q)} = S_{rr}^{(q)} \approx \exp\left(-\frac{\pi Z_q}{2}\right), \quad S_{ri,ir}^{(q)} \approx \mp \left(1 - \frac{\exp(-\pi Z_q)}{2}\right) \exp\left[\mp i \frac{Z_q}{2} \left(1 - \ln\left(\frac{Z_q}{2}\right)\right)\right]. \quad (1.212)$$

Коэффициент усиления (1.206) между δn_q и отсечкой в этом случае сводится к выражению:

$$A_{qc} \approx 2 \exp\left(\frac{\pi Z_q}{2}\right). \quad (1.213)$$

Поскольку коэффициент усиления (1.210) имеет вид

$$A_f(\delta n_f) = \left| \frac{4}{2 - [2 - \exp(-\pi Z_q)] \exp(-i2\{\varphi_{qc} + \delta\varphi_{fc}\} - i\varphi_\Gamma)} \right|, \quad (1.214)$$

выражение (1.214) может быть упрощено далее в двух предельных случаях. В первом случае, когда амплитуда флуктуации δn_f мала настолько, что выполняется следующее неравенство:

$$\delta\varphi_{fc}(\delta n_f) \ll \frac{\exp(-\pi Z_q)}{4} \ll \pi, \quad Z_f(\delta n_f) \ll 1, \quad (1.215)$$

Компоненты матрицы рассеяния (1.202), соответствующей флуктуации δn_f , имеют вид:

$$S_{ii}^{(f)} = S_{rr}^{(f)} \approx 1, \quad S_{ri,ir}^{(f)} \approx \mp \sqrt{\pi Z_f} \exp(\mp i\pi/4). \quad \text{Коэффициент усиления в этом случае сводится к выражению:}$$

$$A_f(\delta n_f) \approx 4 \exp(\pi Z_q) = A_{qc}^2 \quad (1.216)$$

Этот случай соответствует линейному режиму брэгговского рассеяния «назад», который может быть описан в борновском приближении. Согласно (1.216) амплитуда рассеянной волны в этом случае усилена на величину квадрата коэффициента усиления. Во втором предельном случае, когда амплитуда δn_f такова, что выполняется неравенство

$$\frac{\exp(-\pi Z_q)}{4} \leq \delta\varphi_{fc}(\delta n_f) < \pi, \quad (1.217)$$

брэгговское рассеяние «назад» переходит в сильно нелинейный режим, в котором флуктуация δn_f влияет на характеристики искусственного резонатора. В этом случае коэффициент усиления диагностики (1.214) редуцируется до уровня:

$$A_f(\delta n_f) \approx \frac{1}{\sin(\delta\varphi_{fc})}. \quad (1.218)$$

Подставляя выражение (1.218) и $|\delta a_{ref}|$ из выражения (1.208) в выражение (1.209), получим уровень насыщения амплитуды рассеянного сигнала $|\delta a_{rq}^{out}| \simeq 2$.

Далее, проведем сравнение предсказаний аналитического анализа с результатами численного моделирования, выполненного одним из соавторов работы [12a] (H.S.) для линейного профиля плотности плазмы, когда поверхность отсечки для обыкновенной волны находится в точке $x_c = 100 \lambda_o$, $\lambda_o = 2\pi c/\omega$ и максимумы распределения возмущения $\delta n_q = 0.1 n_c$ и флуктуаций δn_f находятся в точках $x_q = 60 \lambda_o$ и $x_f = 80 \lambda_o$, соответственно. На рисунке 1.37 изображены профиль плотности и распределение поля обыкновенной волны, вычисленное для этого профиля. На рисунках 1.38 и 1.39 показан коэффициент усиления A_f рассеянной волны для разных уровней флуктуаций плотности. Можно видеть, что для очень маленьких

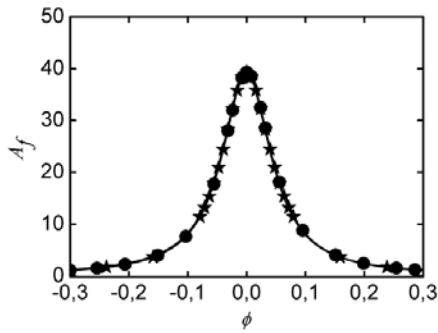


Рисунок 1.38. Зависимость коэффициента усиления (кружки), квадрата коэффициента усиления (звезды) и выражения (1.216) от фазы флуктуации плотности δn_q при $\delta n_f / n_c = 3.3 \cdot 10^{-5}$.

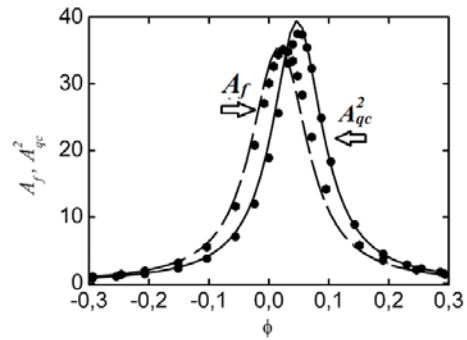


Рисунок 1.39. Зависимость коэффициента усиления (шестигранники – результат моделирования, пунктирная линия - (1.216)) и квадрата коэффициента усиления зондирующей волны в резонаторе (кружки - моделирование, сплошная линия - (1.206)) от фазы флуктуации плотности δn_q при $\delta n_f / n_c = 0.001666$.

флуктуаций $\delta n_f / n_c = 3.3 \times 10^{-5}$ коэффициент усиления хорошо описывается аналитическим выражением $A_f \approx A_{qc}^2$, где A_{qc} определен в (1.206). При увеличении амплитуды флуктуаций ($\delta n_f / n_c = 0.001666$, рисунок 1.39) простое аналитическое выражение, описывающее A_f , перестает работать. Несмотря на это, выражение (1.210) является корректным для произвольной амплитуды δn_f и дает разумное согласие с результатами моделирования (рисунок 1.39). Дальнейшее увеличение амплитуды δn_f влияет на характеристики искусственного резонатора, что приводит к деградации эффективности предложенной схемы и ведет к насыщению линейного роста амплитуды рассеянной волны (рисунок 1.40). Как можно видеть на рисунке 1.40, предложенная схема позволяет получить усиление сигнала рассеяния в широком диапазоне амплитуд флуктуаций плотности. Результаты численного моделирования находятся в разумном согласии с предсказаниями аналитической модели, ключевой элемент которой – усиление зондирующей волны в искусственном резонаторе. Нужно подчеркнуть, что использованный подход к вычислению амплитуды волны, рассеянной «назад», строго говоря, неприменим в сильно нелинейном режиме и дает только качественную оценку.

До сих пор мы анализировали схему усиленного рассеяния в одномерно-неоднородной плазме, полагая, что основные выводы найдут подтверждение и в более реалистичном случае двумерно-неоднородной плазмы. Краеугольным элементом схемы усиленного рассеяния является локализация и усиление зондирующей волны в области между поверхностью отсечки и квазикогерентным возмущением плотности. В следующем параграфе мы сопоставим

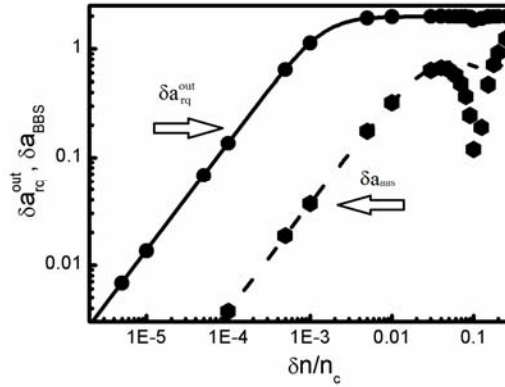


Рисунок 1.40. Результаты численного моделирования в модели одномерной плазмы.

результаты одномерной аналитической модели, предсказывающей возможность возбуждения искусственного резонатора из-за сильного брэгговского рассеяния «назад», с результатами полноволнового моделирования уравнений Максвелла в двумерной модели плазмы.

1.6.3.2. Сопоставление с результатами полноволнового моделирования усиления зондирующей волны в двумерно-неоднородной плазме

Как было показано в предыдущем параграфе в рамках одномерной модели и плоскостойкой геометрии, УР зондирующего сигнала реализуется в стандартной схеме ФР в том случае, если возможно возбуждение искусственного резонатора между отсечкой и квази-когерентным возмущением, которое возбуждается внешними источниками. В настоящем параграфе мы продемонстрируем принципиальную возможность реализации данной схемы в реалистичной геометрии токамака (с учетом тороидальности и 2D неоднородности). С этой целью мы проанализируем результаты двумерного полноволнового моделирования уравнений Максвелла, выполненного Ирзаком М.А. (соавтор работы [12a]), для следующих параметров установки: большой радиус $R_0 = 96$ см, малый радиус $a_0 = 24$ см, вытянутость $l = 2$, параболический профиль плотности с плотностью плазмы на границе $n_{eb} = 3.51 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и в центре - $n_{e0} = 4.63 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Будем считать, что возмущение плотности является однородным в полоидальном направлении и локализованным в радиальном направлении $\delta n_e(x-x_{ofluc}) = \delta n_{e0} \exp(-[(x-x_{ofluc})/\delta x_{fluc}]^2) \cdot \sin[2\pi(x-x_{ofluc})/\lambda_{fluc}]$; расстояние от границы плазмы до максимума флуктуаций плотности $x_{ofluc} = 6.24$ см, $\delta x_{fluc} = 1.2$ см, $\delta n_{e0} = 3.1 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $\lambda_{fluc} = 0.776$ см. Частота зондирующей волны - $f_0 = 60$ ГГц. Рассмотрим эффект усиления запертой волны в одномерной и двумерной геометрии. Для одномерного случая воспользуемся плоскостойкой моделью

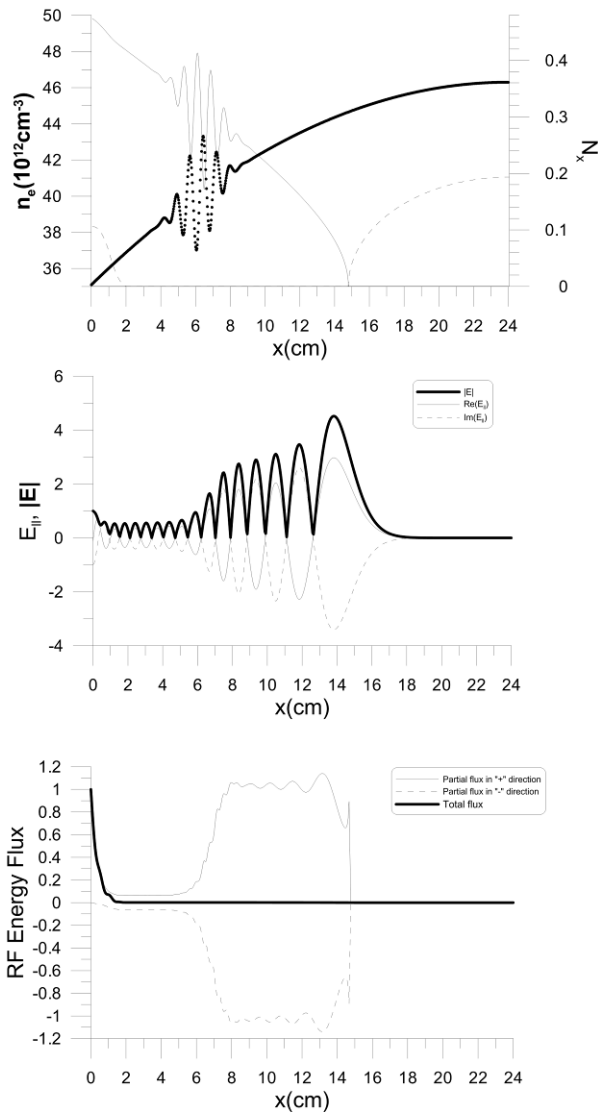


Рисунок 1.41. Моделирование в рамках одномерной плоскостлой модели плазмы.

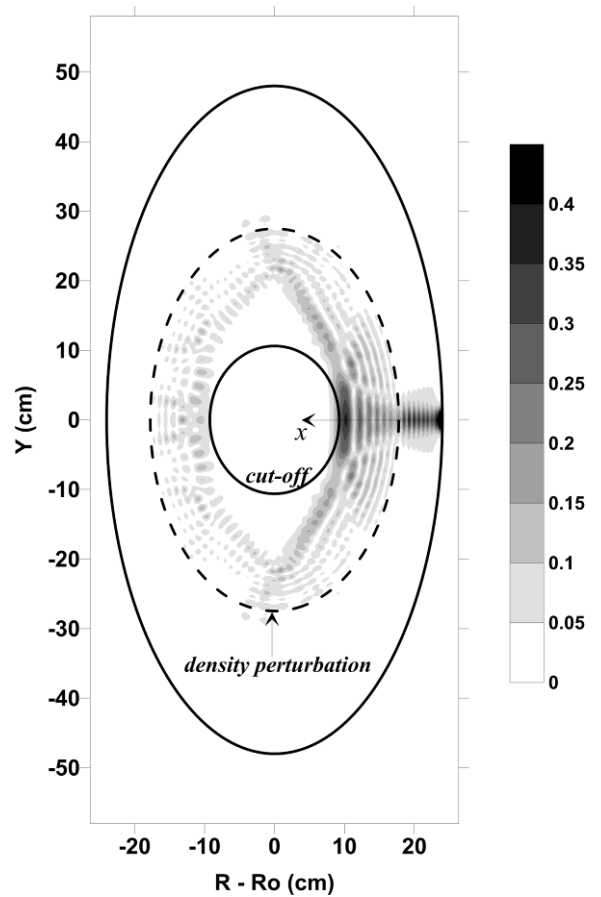


Рисунок 1.42. Двумерное распределение $|E|$ в полоидальном сечении токамака.

плазмы с параметрами, воспроизводящими параметры двумерного случая в экваториальной плоскости.

Уравнения Максвелла с холодным тензором диэлектрической проницаемости решались численно с помощью метода конечных элементов [57, 58]. Граничные условия ставились на обеих границах области, где проводилось моделирование. При $x = 0$ (поверхность плазмы) задавались тангенциальные компоненты электрического поля; в рассматриваемом случае выбиралась обыкновенная поляризация волны с $k_{\eta} = 0$, $k_{\xi} = 0$. При $x = x_{\text{WKB}} = 24$ см (далеко за точкой отсечки) ставилось специальное условие, которое позволяло существовать только уходящим волнам (в положительном направлении оси x). На верхней панели рисунка 1.41 изображены профиль плотности (короткий штрих) и коэффициент преломления обыкновенной

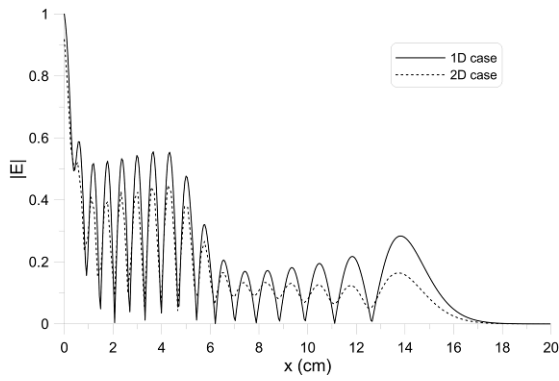


Рисунок 1.43. Сравнение профиля $|E|$, вычисленного в рамках модели одномерно и двумерно-неоднородной плазмы (экваториальное сечение), $x_{0\text{fluc}} = 5.8$ см.

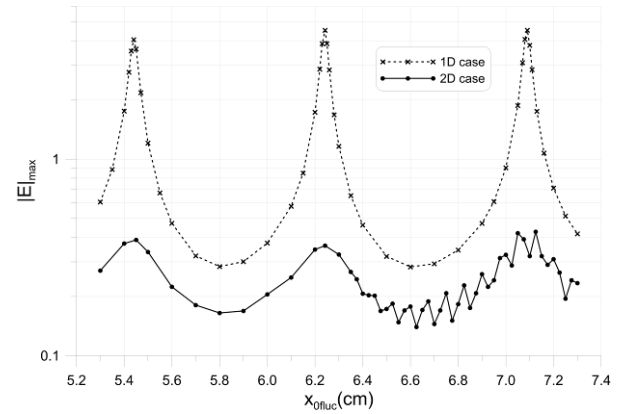


Рисунок 1.44. Зависимость $|E|_{\text{max}}$ от места локализации возмущения плотности.

волны (сплошная линия - $\text{Re}(N_x)$, штрихованная линия - $\text{Im}(N_x)$). На центральной панели рисунка 1.41 изображена волновая структура (тонкая сплошная линия — $\text{Re}(E_{\parallel})$, прерывистая линия - $\text{Im}(E_{\parallel})$, толстая сплошная линия — $|E|$). Можно видеть наличие искусственного резонатора между областью с возмущением плотности ($x \approx 5.0 - 7.5$ см) и отсечкой ($x \approx 15$ см) и усиление поля волны в этой области (фактор 5 - 6). Этот эффект проиллюстрирован на нижней панели рисунка 1.41, где изображен поток энергии для волн, распространяющихся в положительном и в отрицательном направлении вдоль оси x . Показана также полная энергия (толстая сплошная линия). Можно видеть, что энергия зондирующей волны поглощается на периферии, где введено искусственное столкновительное поглощение, чтобы избежать образования стоячих волн.

Двумерное моделирование было выполнено с помощью полноволнового кода WAVETOP2D, развитого ранее для моделирования нижнегибридных волн в двумерно-неоднородной плазме токамака с произвольными магнитными поверхностями [58, 59], заимствовавшего основные идеи от кода TORIC [60]. В тороидальном и полоидальном направлениях искомое поле представлялось как суперпозиция соответствующих мод; в радиальном направлении использовался метод конечных элементов. Результаты моделирования представлены на рисунке 1.42 для гауссовского пучка волн обыкновенной поляризации, падающей на плазму в экваториальной плоскости (показано распределение $|E|$ в полоидальном сечении токамака; $x = R_0 + a_0 - R$). На рисунка 1.43 приведено сравнение профилей $|E|$ вдоль x для одномерного и двумерного случаев для нерезонансного расположения возмущения плотности ($x_{0\text{fluc}} = 5.8$ см). Ясно видно, что хотя амплитуда волн чуть ниже в двумерном случае, их общая структура выглядит схожим образом. На рисунке

1.44 дано сравнение максимальных амплитуд $|E|$ волн в зависимости от положения флуктуации плотности. В резонансном случае фактор усиления волны в искусственном резонаторе в двумерном случае оказывается ниже, чем в одномерном, что вызвано потерями энергии в поперечном направлении. Более мелкая структура, которая видна на зависимости в двумерном случае, возникает из-за появления дополнительных резонансов в двумерном резонаторе.

Таким образом, результаты полноволнового моделирования уравнений Максвелла в реалистичной геометрии с холодным тензором диэлектрической проницаемости подтверждают возможность возбуждения искусственного резонатора между возмущением плотности плазмы и поверхностью отсечки, что является ключевым элементом схемы усиленного брэгговского рассеяния «назад».

1.6.4. Выводы

В данном разделе:

- 1) Развита процедура реконструкции спектра турбулентности по радиальным волновым числам на основании данных РКР с учетом двумерных эффектов, которая оказалась эффективной для интерпретации данных в реалистичной двумерной модели плазмы.
- 2) Предложено простое выражение, позволяющее оценить амплитуду флуктуаций плотности плазмы в точке отсечки зондирующей волны из данных о среднем значении квадрата амплитуды возмущения фазы рефлектометрического сигнала. Развита численная процедура реконструкции радиального профиля флуктуаций плотности плазмы, в которой амплитуда флуктуаций плотности плазмы в точке отсечки зондирующей волны используется как нулевое приближение для дальнейшего итерационного процесса.
- 3) Аналитически и численно показана возможность усиленного брэгговского рассеяния «назад» в рамках ФР. Ключевым элементом метода является возбуждение искусственного резонатора между поверхностью отсечки волны и квазикогерентным возмущением плотности, создаваемым внешними источниками. Возбуждение сильного квазикогерентного возмущения плотности в низкотемпературной плазме возможно с использованием внешнего электрода, а в высокотемпературной плазме при помощи взаимодействующих пучков СВЧ волн или лазерных пучков. Результаты полноволнового моделирования уравнений Максвелла в реалистичной геометрии рефлектометрического эксперимента подтвердили возможность возбуждения подобного искусственного резонатора.

Основные публикации

- 1) Gusakov E., Irzak M. and Popov A. Radial correlation reflectometry at oblique probing wave incidence (linear scattering theory predictions // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2014. - Vol. 56. - P.025009.
- 2) Gusakov E., Irzak M., Popov A. and Teplova N. Two dimensional modeling of turbulence wave number spectra reconstruction from radial correlation reflectometry data // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2015. - Vol.57. - P.075009.
- 3) Gusakov E., Heuraux S., Popov A. and Schubert M. Reconstruction of the turbulence radial profile from reflectometry phase root mean square measurements // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2012. - Vol.54. - P.045008.
- 4) Gusakov E.Z., Heuraux S., Irzak M. and Popov A.Yu. Possibility of the giant scattering enhancement due to wave trapping in the reflectometry experiment // Phys. Scr. - 2011. - Vol.84. - P.045504.

2. Теория линейной трансформации пучков электромагнитных волн, распространяющихся под углом к магнитному полю в турбулентной среде с сильной рефракцией

В настоящее время в ряде лабораторий мира развернуты исследования на крутых токамаках с аспектным отношением $R_0/a \approx 1.5$, где R_0 , a - большой и малый радиус установки. Их целью является изучение возможных преимуществ токамаков с малым аспектным отношением при работе с плазмой, имеющей термоядерные параметры, по сравнению с обычными токамаками, у которых аспектное отношение $R_0/a = 3 \div 4$. К важнейшим преимуществам данных установок следует отнести сильное уменьшение тороидального магнитного поля, что позволяет добиться более устойчивого удержания плазмы того же давления. Однако при этом резко изменяются условия распространения волн в плазме, поскольку плазменная частота оказывается больше, чем электронная циклотронная. Поэтому стандартные методы СВЧ - диагностики и электронного циклотронного (ЭЦ) нагрева, использующие обыкновенную (О) и необыкновенную (Х) волны для связи с плазмой, разработанные для обычных установок, оказываются неприменимы, что делает актуальным использование электронной бернштейновской (ЭБ) ветви колебаний, не имеющей в плазме ограничений по плотности и магнитному полю, но не существующей в вакууме. Перспективы и особенности нагрева плазмы с помощью ЭБ волн и генерация с их помощью токов увлечения широко обсуждаются в литературе [61 - 65]. Ключевым элементом этой схемы является возбуждение ЭБВ в результате линейной трансформации электромагнитных волн (ЭМВ) в окрестности верхнего гибридного резонанса (ВГР). Однако, между ВГР и границей плазмы со стороны слабого магнитного поля в окрестности критической поверхности (КП) расположена зона непрозрачности. Процессы туннелирования ЭМВ сквозь эту область начали изучаться еще 70 лет назад применительно к задачам, возникающим в атмосферной плазме. Было установлено [66], что область непрозрачности исчезает для ЭМ волн, падающих на КП под определенным углом к магнитному полю. Такие волны свободно проходят в этом, так называемом, «радио окне». Далее они трансформируются в окрестности ВГР в ЭБ волны, которые затем эффективно поглощаются электронами плазмы. В работах [67, 68] была изложена последовательная теория трансформации ЭМВ в ЭБВ, причем, в последней работе был рассмотрен случай сильно неоднородной плазмы. Применительно к тороидальным магнитным ловушкам эта схема нагрева плазмы была предложена в работах [69, 70]. Использование на практике этой схемы нагрева оказалось затруднительным вследствие спектральной узости «радио-окна». Однако в последнее время в связи с экспериментами на сферических токамаках к этому варианту нагрева,

а также к обратному процессу, – диагностике электронной температуры по излучению ЭБВ, – интерес снова возродился.

Поскольку эффективность трансформации пучка X волн в пучок ЭВ волн в окрестности ВГР в современных тороидальных магнитных ловушках всегда близка к единице [70], то эффективность всего процесса определяется в основном эффективностью трансформации пучка волн обыкновенной поляризации в пучок волн необыкновенной поляризации (т.н. процесс линейной $O-X$ трансформации). Большинство ранее опубликованных теоретических работ, описывающих линейную трансформацию пучков электромагнитных волн ЭЦ диапазона частот в окрестности критической поверхности, были сделаны в рамках приближения одномерно-неоднородной плазмы, а также в модели внешнего магнитного поля с прямолинейными силовыми линиями и без шира. В частности, в этих работах предполагалось, что плотность плазмы и магнитное поле изменяются вдоль одного выделенного направления [71 - 76]. В рамках этого приближения были найдены коэффициенты линейной трансформации и законы преобразования проходящих через эту область волновых полей.

Однако в последнее время возникло понимание, что в реальных установках одномерное приближение [77], также как и игнорирование шира внешнего магнитного поля [78], может оказаться недостаточным для корректного описания $O-X$ трансформации. Автором настоящей диссертации и группой из ИПФ РАН (Н.-Новгород) независимо была развита теория линейной $O-X$ трансформации с учетом эффектов двумерной (трехмерной – в стеллараторе) неоднородности плазмы [13а, 14а, 17а, 79 - 84], шира магнитного поля [15а, 85], кривизны магнитных силовых линий [16а] и магнитных поверхностей [86]. Было также проанализировано влияние низкочастотных флуктуаций на эффективность линейной трансформации [18а, 87]. Подход, который использовался автором диссертационной работы, - обобщение процедуры поиска функциональной подстановки, развитой в одномерном случае в работах [75, 76] и сводящей в трехмерном случае систему дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных к уравнению второго порядка в частных производных, допускающему разделение переменных, - кардинально отличался от подхода группы из ИПФ РАН, анализировавших модельную задачу и искавших ее частное решение. Несмотря на это, окончательные выражения для коэффициентов трансформации, найденных разными путями, совпали.

В данной главе приводятся результаты исследований [13а – 18а, 79] процесса линейной трансформации пучка O волн в пучок X волн с учетом трехмерных эффектов, главный из которых - отсутствие коллинеарности градиентов модуля магнитного поля и плотности плазмы. Кроме того, приводится анализ влияния шира магнитного поля и кривизны магнитной силовой линии на эффективность линейной трансформации пучков электромагнитных волн в

окрестности критической поверхности и анализ влияния низкочастотной дрейфовой турбулентности на эффективность линейной трансформации пучков электромагнитных волн в окрестности критической поверхности.

2.1. Система укороченных уравнений, описывающая линейную трансформацию пучков электромагнитных волн в окрестности критической поверхности в трехмерно - неоднородной плазме без учета магнитного шира и кривизны магнитной силовой линии

Анализируя волны в замагниченной плазме, представляется естественным выразить перпендикулярную к внешнему магнитному полю компоненту переменного электрического поля в виде суммы циркулярно поляризованных полей $E_{\pm} = (E_x \pm iE_{\eta}) / \sqrt{2}$, где E_x , E_{η} - компоненты электрического поля в декартовой системе координат, оси \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_{ξ} которой направлены вдоль градиента плотности плазмы и магнитного поля, $\mathbf{e}_{\eta} = \mathbf{e}_{\xi} \times \mathbf{e}_x$. Представим далее магнитное поле в виде

$$\mathbf{B} = B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z, \quad (2.1)$$

где орты $\mathbf{e}_y = \cos \theta \mathbf{e}_{\eta} + \sin \theta \mathbf{e}_{\xi}$ и $\mathbf{e}_z = -\sin \theta \mathbf{e}_{\eta} + \cos \theta \mathbf{e}_{\xi}$ имитируют в декартовой системе координат (x, y, z) полоидальное и тороидальное направления, θ - локальный угол наклона магнитной силовой линии по отношению к тороидальному направлению, который считается в данном разделе постоянным. При временной зависимости $\mathbf{E} \propto \exp(-i\omega t)$, компоненты E_+ , E_- описывают электрические поля, вращающиеся в сторону вращения ионов и электронов, соответственно. Систему уравнений Максвелла для однородной холодной плазмы и компонент электрического поля E_{\pm} , E_{ξ} можно представить в виде [75]:

$$\begin{pmatrix} \hat{N}_{\xi}^2 + \hat{N}_+ \hat{N}_- - \varepsilon_+(x, y) & -\hat{N}_+^2 & -\hat{N}_{\xi} \hat{N}_+ \\ -\hat{N}_-^2 & \hat{N}_{\xi}^2 + \hat{N}_+ \hat{N}_- - \varepsilon_-(x, y) & -\hat{N}_{\xi} \hat{N}_- \\ -\hat{N}_{\xi} \hat{N}_- & -\hat{N}_{\xi} \hat{N}_+ & 2\hat{N}_+ \hat{N}_- - \varepsilon_{\xi}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \\ E_{\xi} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.2)$$

где $\hat{N}_{\pm} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{c}{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial \eta} \right]$, $\hat{N}_{\xi} = -i \frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial \xi}$ - дифференциальные операторы, которые в однородной плазме для волн, меняющихся в пространстве по гармоническому закону, приводят к появлению коэффициентов преломления, и $\varepsilon_{\pm} = 1 - \omega_{pe}^2 / [\omega(\omega \pm \omega_{ce})]$, $\varepsilon_{\xi} = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$ -

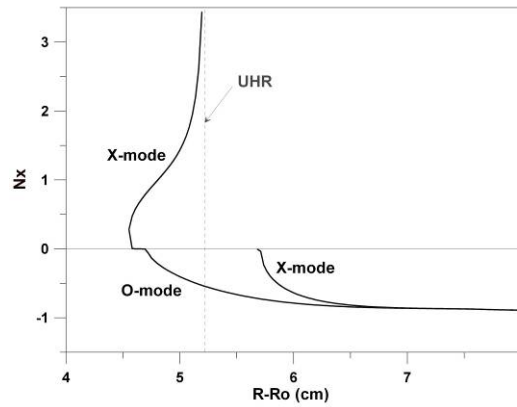


Рисунок 2.1. Дисперсионные кривые обыкновенной и необыкновенной волны при распространении в экваториальной плоскости под углом к внешнему магнитному полю.

компоненты тензора диэлектрической проницаемости, полученные в приближении «холодной» плазмы.

Линейную трансформацию волн в замагниченной плазме часто связывают с нарушением приближения геометрической оптики, которое имеет место в слабо неоднородных средах в тех областях пространства, где показатели преломления двух различных мод и их поляризация становятся близкими. Физически это явление напоминает адиабатические переходы в квантовой механике, возникающие при пересечении или близком расположении термов. Математически, в окрестности области трансформации, где возникает «связь» между различными модами, приближение геометрической оптики становится некорректным и требуется анализ системы волновых уравнений. Таким образом, для описания линейной трансформации необходимо, во-первых, исследовать особенности решения волновых уравнений и, во-вторых, в окрестности этих особенностей найти решение точного волнового уравнения, переходящее асимптотически в суперпозицию падающих, отраженных и прошедших геометрико оптических мод. Соотношение между потоками энергий различных мод в таких решениях и будет определять эффективность трансформации.

В однородной плазме линейная трансформация волны обыкновенной и необыкновенной поляризации имеет место при их распространении под определенным углом к внешнему магнитному полю, когда поверхности критической концентрации ($\varepsilon_z = 0$) и отсечка медленной X волны ($\varepsilon_+ - N_z^2 = 0$, N_z - продольный показатель преломления) совпадают [75]. В одномерно-неоднородной плазме, когда направление неоднородности перпендикулярно внешнему магнитному полю, отсечки O волны ($\varepsilon_z(x_c) = 0$) и медленной X волны ($\varepsilon_+ - N_z^2 = 0$) представляют собой плоско параллельные поверхности. Поэтому возможен выбор таких компонент показателя преломления [75] взаимодействующих мод

$$N_{\eta 0} = 0, \quad N_{\xi 0} = \sqrt{\varepsilon_+(x_c)} = \sqrt{\omega_{ce} / (\omega + \omega_{ce})} \Big|_{x_c}, \quad (2.3)$$

при котором критическая поверхность и поверхность отсечки медленной X волны совпадают, что соответствует полной трансформации одной волны в другую. При произвольном угле наклона направления распространения волн по отношению к внешнему магнитному полю между вышеуказанными поверхностями существует область непрозрачности, отделяющая области распространения обыкновенной и необыкновенной волны, что проиллюстрировано на рисунке 2.1., где изображены дисперсионные кривые этих волн. В этом случае трансформация одной моды в другую носит характер туннелирования через область непрозрачности, в окрестности которой компонента электрического поля волны $|E_-|$ много меньше двух других компонент электрического поля $|E_+|, |E_\xi|$ и выполняются следующие неравенства:

$$N_\pm \ll N_\xi, \quad |\varepsilon_+ - N_\xi^2| \ll 1, \quad |\varepsilon_\xi| \ll 1, \quad 1 \leq |\varepsilon_\pm|, \quad (2.4)$$

где $N_\pm = (N_x \pm iN_\eta) / \sqrt{2}$ - компоненты показателя преломления. Упрощение системы уравнений Максвелла возможно, когда среда является плавно неоднородной:

$$\delta = \lambda / L_n \ll 1, \quad (2.5)$$

где λ - локальная длина волны, $L_n = \partial \ln(n) / \partial x|_0^{-1}$ - характерный масштаб неоднородности плазмы. С учетом неравенств (2.4) и (2.5) система уравнений (2.2) может быть существенно упрощена с использованием процедуры укорачивания [75]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_+(x) - N_\xi^2 & N_\xi N_+ \\ N_\xi N_- & \varepsilon_\xi(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_\xi \end{pmatrix} = 0. \quad (2.6)$$

В случае, когда учитывается эффект трехмерной неоднородности модуля магнитного поля на магнитной поверхности ($\varepsilon_+ = \varepsilon_+(\mathbf{r}), \varepsilon_\xi = \varepsilon_\xi(x)$), продольная N_ξ и поперечная N_η компоненты показателя преломления не сохраняются. Кроме того, отсечки O волны и медленной X волны перестают быть плоскопараллельными поверхностями. Ясно, что при этом ожидать максимально эффективной трансформации обыкновенных волн в необыкновенные можно при падении центра пучка первых на критическую поверхность под оптимальным углом, определяемом выражением (2.3). В этом случае, решение системы уравнений (2.2) следует искать в виде:

$$(E_+, E_\xi) = (E_{+0}, E_{\xi 0}) \exp\left(i \frac{\omega}{c} N_{\xi 0} \xi\right). \quad (2.7)$$

Используя процедуру укорачивания, получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_+(\mathbf{r}) - \hat{N}_\xi^2 & \hat{N}_\xi \hat{N}_+ \\ \hat{N}_\xi \hat{N}_- & \varepsilon_\xi(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_+ \\ E_\xi \end{pmatrix} = 0, \quad (2.8)$$

где учтены только члены первого порядка малости по параметрам, определяемым неравенствами, аналогичным неравенствам (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{c}{\omega} \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln(E_{+, \xi}) \right| \ll N_{\xi 0}, \quad \frac{c}{\omega} \left| \frac{\partial}{\partial y} \ln(E_{+, \xi}) \right| \ll N_{\xi 0}, \quad \frac{c}{\omega} \left| \frac{\partial}{\partial z} \ln(E_{+, \xi}) \right| \ll N_{\xi 0}, \\ \left| \varepsilon_+(x, y) - N_{\xi 0}^2 \right| \ll 1, \quad \left| \varepsilon_\xi(x) \right| \ll 1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

и полностью пренебрегается компонентой поля E_- . Последние два неравенства (2.9) ограничивают рассматриваемую область пространства малой окрестностью точки трансформации: $\varepsilon_+(\mathbf{r}) - N_{\xi 0}^2 = 0$, $\varepsilon_\xi(x) = 0$. Считая, что системы координат (x, y, z) , (x, η, ξ) привязаны к критической поверхности и центру падающего пучка, и взаимодействие мод имеет место вне экваториальной плоскости установки, разложим в ряд компоненты тензора диэлектрической проницаемости в окрестности начала координат с точностью до первого неисчезающего (линейного) члена. В итоге получим

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{L_{\perp x}} + \frac{\eta}{L_{\perp \eta}} + \frac{\xi}{L_{\perp \xi}} - i 2 N_{\xi 0} \frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) E_{+0} + \frac{N_{\xi 0}}{\sqrt{2}} \frac{c}{\omega} \left[i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right] E_{\xi 0} = 0, \\ \frac{N_{\xi 0}}{\sqrt{2}} \frac{c}{\omega} \left[i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right] E_{+0} + \frac{x}{L_{\parallel}} E_{\xi 0} = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

где $L_{\perp x}^{-1} = \left| \frac{\partial \ln(\varepsilon_+)}{\partial x} \right|_0$, $L_{\perp \eta}^{-1} = \left| \frac{\partial \ln(\varepsilon_+)}{\partial \eta} \right|_0$, $L_{\perp \xi}^{-1} = \left| \frac{\partial \ln(\varepsilon_+)}{\partial \xi} \right|_0$, $L_{\parallel}^{-1} = \left| \frac{\partial \ln(\varepsilon_\xi)}{\partial x} \right|_0$. Введем новые искомые функции

$$\{E_{+0}, E_{\xi 0}\}(x, \eta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_\xi}{2\pi} \left\{ \sqrt[4]{\frac{L_{\perp x}}{L_{\parallel}}} A_+, \sqrt[4]{\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp x}}} A_\xi \right\} (x, \eta, k_\xi) \exp \left[-i \frac{\xi^2}{4 L_{\perp \xi} N_{\xi 0}} \frac{\omega}{c} + i k_\xi \xi \right] \quad (2.11)$$

и безразмерные переменные

$$x' = x/l, \quad \eta' = \left(\eta + 2 N_{\xi 0} L_{\perp \eta} \frac{c k_\xi}{\omega} \right) / l, \quad (2.12)$$

где $l^2 = \frac{N_{\xi 0}}{\sqrt{2}} \frac{c}{\omega} \sqrt{L_{\perp x} L_{\parallel}}$, $k_\xi = const$. В новых переменных система уравнений (2.10) принимает

вид:

$$\begin{cases} (x' + \tan(2\alpha)\eta') A_+ + \left[i \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial \eta'} \right] A_\xi = 0, \\ \left[i \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial \eta'} \right] A_+ + x' A_\xi = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

где $\tan(2\alpha) = L_{\perp x} / L_{\perp \eta}$ и 2α - угол между критической поверхностью и поверхностью отсечки необыкновенной волны (считается положительным, если отсчитывается по часовой стрелке). В итоге, мы получили систему укороченных уравнений, описывающих амплитуды полей взаимодействующих ЭМ волн в области трансформации. Далее, сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{\cos(2\alpha)} [\cos \alpha u - \sin \alpha v] \\ \eta' &= \sqrt{\cos(2\alpha)} [\sin \alpha u + \cos \alpha v] \end{aligned} \quad (2.14)$$

что в результате приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} (\cos(\alpha)u + \sin(\alpha)v) \tilde{A}_+ + \left[i \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \right] A_\xi = 0 \\ \left[i \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right] \tilde{A}_+ + (\cos(\alpha)u - \sin(\alpha)v) A_\xi = 0 \end{cases}, \quad (2.15)$$

где

$$\tilde{A}_+ = (\cos(2\alpha))^{-1/2} \exp(-i\alpha) A_+. \quad (2.16)$$

Аналитические решения системы уравнений (2.15), описывающей O - X трансформацию в трехмерно-неоднородной плазме, будут найдены в следующей главе.

2.1.1. Решение системы укороченных волновых уравнений

Исследованию трансформации нормальных волн в области критической плотности в рамках модели одномерно-неоднородной плоскостной плазмы посвящен ряд работ [73 - 76], где с помощью функционального преобразования система уравнений, описывающая взаимодействующие электромагнитных волн в области трансформации, сводилась к уравнению параболического цилиндра и могла быть точно проинтегрирована. Обобщим подход, использованный в работе [75] для поиска функциональной замены в исходной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, на случай трехмерно-неоднородной плазмы, который отвечает условиям экспериментов в стеллараторе. Полученные далее выражения для амплитуд взаимодействующих полей и коэффициентов трансформации позволяют также описать случай двумерно-неоднородной плазмы токамака. Покажем, что система уравнений в частных производных первого порядка (2.15) допускает строгое аналитическое решение и может быть сведена к уравнению в частных производных второго порядка. Сделаем функциональное преобразование искомых функций

$$\begin{aligned} \tilde{A}_+ &= I + R, \quad A_- = -I + R \\ I &= i \left(\frac{\partial}{\partial v} - \sin(\alpha) v \right) F(u, v), \quad R = \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \cos(\alpha) u \right) F(u, v). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Подстановка (2.17) в систему уравнений (2.15) приводит к уравнению в частных производных второго порядка:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \left(\cos(\alpha)^2 u^2 - \sin(\alpha)^2 v^2 + i \exp(i\alpha) \right) \right] F = 0, \quad (2.18)$$

которое допускает разделение переменных. Будем искать его решение в виде

$$F(u, v) = \sum_p F_p(u) \phi_p(v), \quad (2.19)$$

где

$$\phi_p(v) = \frac{1}{\sqrt{2^p p!}} \left(\frac{|\sin(\alpha)|}{\pi} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{|\sin(\alpha)|}{2} v^2 \right) H_p\left(\sqrt{|\sin(\alpha)|} v \right), \quad (2.20)$$

- решение уравнения для гармонического осциллятора, и функция $F_p(u)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка (уравнение параболического цилиндра [35])

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \left(\cos(\alpha)^2 u^2 - 2\gamma_p^{\text{sign}(\alpha)} + \cos(\alpha) + i \cos(\alpha) \right) \right] F_p(u) = 0, \quad (2.21)$$

где $\gamma_p^{\text{sign}(\alpha)} = |\tan(\alpha)| \left(p + \frac{1}{2} + \text{sign}(\alpha) \frac{1}{2} \right)$. Частное решение этого уравнения

$$D_{i\gamma_p^{\text{sign}(\alpha)}/\pi} \left(\sqrt{2 \cos(\alpha)} \exp\left(i \frac{\pi}{4} \right) u \right) \quad (2.22)$$

- есть функция параболического цилиндра [35]. Подставим (2.19) в (2.17), что в результате приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(v) D_{i\gamma_n^-} \left(\sqrt{2 \cos(\alpha)} \exp\left(i \frac{\pi}{4} \right) u \right), \\ R &= \sqrt{|\tan(\alpha)|/2} \exp\left(i \frac{\pi}{4} \right) \sum_{n=0}^{\infty} C_n 2n \phi_{n-1}(v) D_{i\gamma_{n-1}^-} \left(\sqrt{2 \cos(\alpha)} \exp\left(i \frac{\pi}{4} \right) u \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

при $\alpha > 0$ и

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n D_{i\gamma_n^+} \left(\sqrt{2 \cos(\alpha)} \exp\left(i \frac{\pi}{4} \right) u \right) \phi_n(v), \\ R &= \sqrt{|\tan(\alpha)|/2} \exp\left(i \frac{\pi}{4} \right) \sum_{n=0}^{\infty} C_n D_{i\gamma_{n-1}^+} \left(\sqrt{2 \cos(\alpha)} \exp\left(i \frac{\pi}{4} \right) u \right) \phi_{n+1}(v). \end{aligned} \quad (2.24)$$

при $\alpha < 0$. Знак α указывает на область, где происходит О-Х трансформация ($\alpha > 0$ - выше, $\alpha < 0$ - ниже экваториальной плоскости тороидальной установки). Коэффициенты C_n в (2.23) и

(2.24) определяются граничными условиями. Рассмотрим асимптотики функций параболического цилиндра $D_{i\gamma_n^\pm}$ и $D_{i\gamma_{n-1}^\pm}$ [35]:

$$\begin{aligned} D_{i\gamma_n^\pm} \left(\exp \left(i \frac{\pi}{4} \right) u' \right) &\approx u'^{i\gamma_n^\pm} \exp \left(-\frac{\pi}{4} \gamma_n^\pm - i \frac{u'^2}{4} \right), \quad u' \rightarrow \infty, \\ D_{i\gamma_n^\pm} \left(\exp \left(i \frac{\pi}{4} \right) u' \right) &\approx u'^{i\gamma_n^\pm} \exp \left(\frac{3\pi}{4} \gamma_n^\pm - i \frac{u'^2}{4} \right) + O \left(\frac{1}{|u'|} \right), \quad u' \rightarrow -\infty; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} D_{i\gamma_n^\pm} \left(\exp \left(i \frac{\pi}{4} \right) u' \right) &\approx O \left(\frac{1}{|u'|} \right), \quad u' \rightarrow \infty, \\ D_{i\gamma_n^\pm} \left(\exp \left(i \frac{\pi}{4} \right) u' \right) &\approx \frac{2\pi}{\Gamma(1-i\gamma_n^\pm) u'^{i\gamma_n^\pm}} \exp \left(\frac{\pi}{4} \gamma_n^\pm + i \frac{u'^2}{4} \right) + O \left(\frac{1}{|u'|} \right), \quad u' \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Анализируя выражения (2.25) можно отметить, что функция $D_{i\gamma_n^\pm}$ описывает волну, распространяющуюся вдоль оси \mathbf{e}_u , т.е. при $u' \rightarrow -\infty$ - падающую обыкновенную волну и при $u' \rightarrow \infty$ - прошедшую необыкновенную волну. Функция $D_{i\gamma_{n-1}^\pm}$ описывает волну, распространяющуюся от начала координат против оси \mathbf{e}_u , т.е. отраженную от области непрозрачности обыкновенную волну. Размер области непрозрачности определяется номером собственной поперечной моды и зависит от знака угла α

$$\gamma_p^- = |\tan(\alpha)|p, \quad \alpha > 0; \quad \gamma_p^+ = |\tan(\alpha)|(p+1), \quad \alpha < 0. \quad (2.27)$$

Это свойство асимметрии приводит к особенностям коэффициента линейной трансформации и является следствием гиротропии плазмы. Соотношение между первыми слагаемыми асимптотики функции $D_{i\gamma_n^\pm}$ (2.25) при $u' \rightarrow -\infty$ и $u' \rightarrow \infty$, а также между первыми слагаемыми асимптотик функции $D_{i\gamma_n^\pm}$ (2.25) и $D_{i\gamma_{n-1}^\pm}$ (2.26) при $u' \rightarrow -\infty$ позволяют найти коэффициент трансформации и отражения (по мощности) для каждой спектральной компоненты k_ξ и поперечной моды ϕ_n

$$T = \exp(-2\pi\gamma_p^\pm), \quad R = 1 - T = 1 - \exp(-2\pi\gamma_p^\pm). \quad (2.28)$$

При выводе коэффициента отражения R мы воспользовались свойством гамма-функции [35]:

$$|\Gamma(i\gamma)|^2 = \gamma \sinh(\pi\gamma) / \pi. \quad (2.29)$$

Коэффициенты трансформации удовлетворяют закону сохранения энергии $R + T = 1$ и обладают свойством асимметрии, впервые отмеченным в работе [80]:

$$T(\alpha > 0) / T(\alpha < 0) = \exp(-2\pi |\tan \alpha|). \quad (2.30)$$

Итак, вдоль оси u структура падающей O и прошедшей X волны определяется функциями параболического цилиндра. Поперечная структура падающего поля определяется собственными функциями $\phi_p(\nu)$, которые при фиксированном значении k_ξ образуют полный ортогональный базис

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_p(\nu) \phi_m(\nu) d\nu = \delta_{pm}, \quad (2.31)$$

что позволяет в итоге определить коэффициенты C_n в (2.23) и (2.24) в ВКБ области $u \rightarrow -\infty$, где справедливо асимптотическое представления для функции $D_{i\gamma_n^\pm}$ (2.25) и найденное решение (2.17), (2.23) и (2.24) можно интерпретировать как падающую ВКБ волну, поперечная структура которой определяется собственными функциями $\phi_p(\nu)$. Полагая, что поперечное распределение падающей волны $A_0(\nu, z)$, коэффициенты C_n можно представить в виде:

$$C_n(k_\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\nu A_0 \left(\nu - \frac{\cos \alpha}{\sqrt[4]{\cos(2\alpha)}} 2N_{\xi 0} L_{\perp \eta} \frac{ck_\xi}{\omega}, \xi \right) \exp \left[i \frac{\xi^2}{4L_{\perp \xi} N_{\xi 0}} \frac{\omega}{c} - ik_\xi \xi \right] \phi_p(\nu) \quad (2.32)$$

Аналогично процессу O - X трансформации, можно описать X - O трансформацию волн, т.е. выход излучения из области, где плотность больше критической, через «радио окно». В этом случае, мы в системе уравнений (2.13) сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt[4]{\cos(2\alpha)} [-\cos \alpha u + \sin \alpha \nu], \\ \eta' &= \sqrt[4]{\cos(2\alpha)} [-\sin \alpha u - \cos \alpha \nu]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Используя далее преобразования аналогичные тем, что применялись в случае O - X трансформации, приходим к уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + (\cos(\alpha)^2 u^2 - \sin(\alpha)^2 \nu^2 + i \exp(-i\alpha)) \right] F = 0, \quad (2.34)$$

которое описывает трансформацию необыкновенной волны в обыкновенную. Это уравнение совпадает с уравнением (2.18) с точностью до знака угла α . Его решение дается выражениями (2.23) и (2.24), в которых меняются индексы функций параболического цилиндра: $\gamma_n^- \rightarrow \gamma_n^+$ при $\alpha > 0$ и $\gamma_n^+ \rightarrow \gamma_n^-$ при $\alpha < 0$. В итоге, выполняются следующие свойства для коэффициентов трансформации

$$T(\alpha > 0; OX) = T(\alpha < 0, XO), T(\alpha < 0, OX) = T(\alpha > 0, XO). \quad (2.35)$$

Выражения для коэффициентов трансформации (2.28) совпадают с выражениями, которые были получены независимо в работах [80, 81]. Надо отметить, что диссертантом было впервые получено укороченное уравнение для взаимодействующих полей, найдено его решение

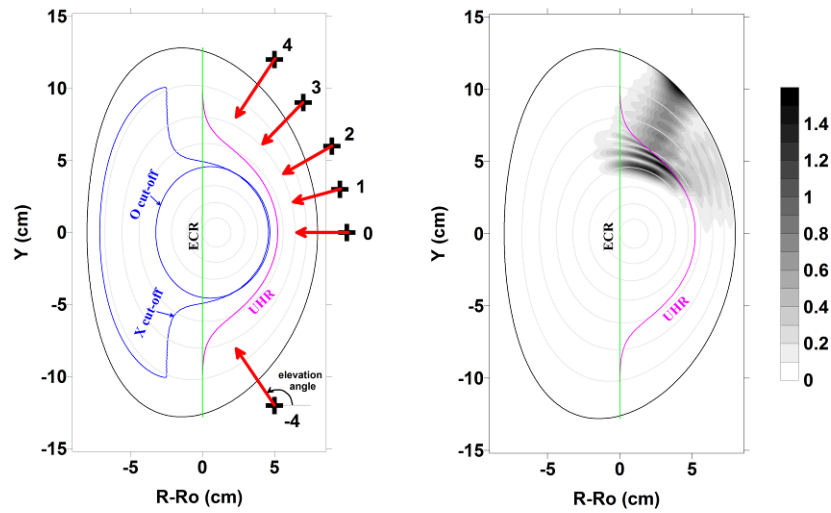


Рисунок 2.2. Схема ввода ВЧ мощности (левая панель) и двумерное распределение модуля электрического поля $|E|$ (правая панель) в полоидальном сечении токамака.

и выражения для коэффициентов трансформации в случае реалистичной модели магнитного поля, но для фиксированного знака угла α , о чем было доложено на Звенигородской конференции по физике плазмы 2006 г. [79]. На этой же Звенигородской конференции по физике плазмы 2006 г. [80] были представлены результаты решения модельной задачи для случая магнитного поля без полоидальной компоненты: получено укороченное уравнение для взаимодействующих полей, найдено его решение и коэффициенты трансформации, указано на наличие асимметрии (2.30).

2.1.2. Предельный переход к случаю одномерно-неоднородной плазмы

Покажем, что полученное выражение для коэффициента линейной трансформации (2.28) в предельном случае одномерно-неоднородной плазмы сводится к известному выражению, полученному в работах [73] – [76]. Рассмотрим случай фиксированной компоненты $k_\xi = 0$. В этом случае полный коэффициент трансформации падающей обыкновенной волны в необыкновенную волну дается выражением

$$T_{full} = \sum_{p=0}^{\infty} |C_p|^2 \exp(-2\pi\gamma_p^\pm), \quad (2.36)$$

где C_p определяется выражением (2.32). Далее, воспользуемся известной формулой теории полиномов Эрмита [35]

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{H_p(x)H_p(y)}{2^p p!} t^p = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left[\frac{2xyt - (x^2 + y^2)t^2}{1-t^2}\right], \quad |t| < 1 \quad (2.37)$$

и интегральной формулой для полиномов Эрмита

$$\phi_p(v) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp(iqv) \phi_p(q). \quad (2.38)$$

Найдем предел выражения (2.36) при $\alpha \rightarrow 0$:

$$T_{full} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} |C(q)|^2 \exp\left(-\pi \frac{N_{\xi 0}}{\sqrt{2}} \frac{c}{\omega} \sqrt{L_{\perp x} L_{\parallel}} q^2\right). \quad (2.39)$$

Выражение (2.39) совпадает с коэффициентом трансформации, найденным в одномерной теории [73] – [76].

2.2. Сравнение аналитических формул с результатами численного моделирования линейной трансформации пучков электромагнитных волн

Для проверки результатов анализа трансформации волн в окрестности критической поверхности в трехмерно-неоднородной замагниченной плазме и выяснения границы применимости теоретической модели диссертантом был предложен численный эксперимент с использованием полноволнового кода. Численное моделирование было проведено М.А. Ирзаком. Его основные результаты были представлены в совместной работе [17a]. В основе использованного кода лежит численное решение уравнений Максвелла с «холодным» тензором диэлектрической проницаемости. В окрестности верхнего гибридного резонанса (ВГР) введено искусственное «столкновительное» затухание, которое позволяет без учета пространственной дисперсии определить мощность, которая вкладывается в электронную бернштейновскую волну. В данной задаче часть ВЧ мощности, соответствующей обыкновенной волне, оказывается отраженной от поверхности критической поверхности назад на периферию плазмы. Для того, чтобы избежать многократных отражений от стенки токамака, в ее окрестности также было введено искусственное столкновительное затухание, что позволяло обеспечить на одном проходе 80–90% поглощение. Поскольку обыкновенная и необыкновенная волна в рамках этой модели описываются адекватно, отношение мощности, поглощаемой в окрестности ВГР, к мощности, вводимой в плазму со стороны слабого магнитного поля, позволяет найти коэффициент трансформации волн в окрестности критической поверхности. Далее, будем использовать систему координат (ρ, θ, φ) , где ρ - потоковая координата, θ, φ - полоидальный и тороидальный угол. При описании конфигурации магнитных поверхностей будем учитывать

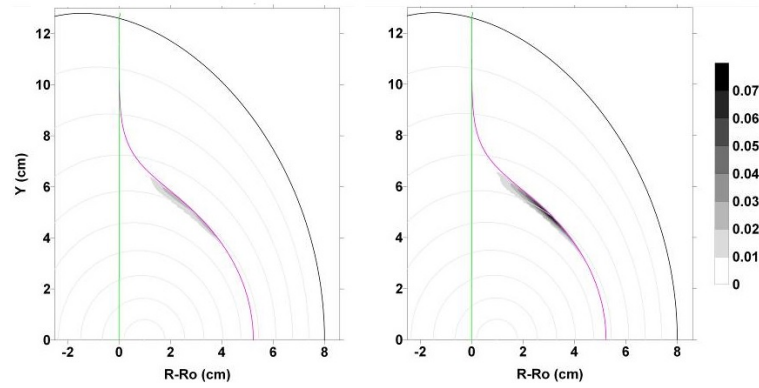


Рисунок 2.3. Распределение мощности, поглощаемой в окрестности ВГР: левая панель – $V_\varphi > 0$, правая панель – $V_\varphi < 0$.

шафрановский сдвиг $\Delta(\rho)$, эллиптичность $\Lambda(\rho)$ и треугольность $\gamma(\rho)$. Решение уравнений Максвелла будем искать в виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{n_\varphi=-\infty}^{+\infty} e^{in_\varphi\varphi} \sum_{m_\theta=-\infty}^{+\infty} e^{im_\theta\theta} \mathbf{E}^{m_\theta n_\varphi}(\rho). \quad (2.40)$$

В токамаке, обладающем аксиальной симметрией, параметры плазмы не зависят от тороидальной координаты φ . При подстановке (2.40) в уравнения Максвелла, получим систему связанных уравнений по полоидальным модам (m_θ), что вызвано полоидальной неоднородностью магнитного поля. В то же время тороидальные моды оказываются (n_φ) не связанными, что позволяет искать решение для каждой моды n_φ независимо. В радиальном направлении ρ (поточковая координата) решение ищется методом конечных элементов (Галеркина) [89] с использованием в качестве базисных функций полиномов Лежандра. Тангенциальная компонента электрического поля на поверхности плазменного шнура используется для определения граничных условий. Кроме того, ищется такое решение, которое является регулярным на магнитной оси. Для того, чтобы подчеркнуть особенности О - X трансформации в двумерно-неоднородной плазме и минимизировать роль шира магнитного поля и кривизны магнитной силовой линии, была использована специальная модель - гипотетический токамак с параметрами $R_0 = 12\text{см}$, $a_0 = 8\text{см}$, $\Lambda = 1.6$, $\gamma = 0.18$, $I_p = 20\text{kA}$, $B_0 = 10.7\text{kГс}$, $n_{e0} = 6 \times 10^{13}\text{см}^{-3}$, пикированным профилем плотности плазмы $n_e \propto (1 - (\rho/a_0)^2)^6$ и малой плотностью. Был рассмотрен специальный случай $f_0 = 30\text{ ГГц}$ и $\delta = 0.33 \ll 1$ (2.5), при котором теоретическая модель оказывается в рамках границ ее применимости. Было проведено моделирование для одной тороидальной моды $n_\varphi = 60$, что позволяло получить ближайший к оптимальному значению тороидальный угол распространения. Дисперсионные кривые, соответствующие этому случаю при распространении волны в экваториальной плоскости

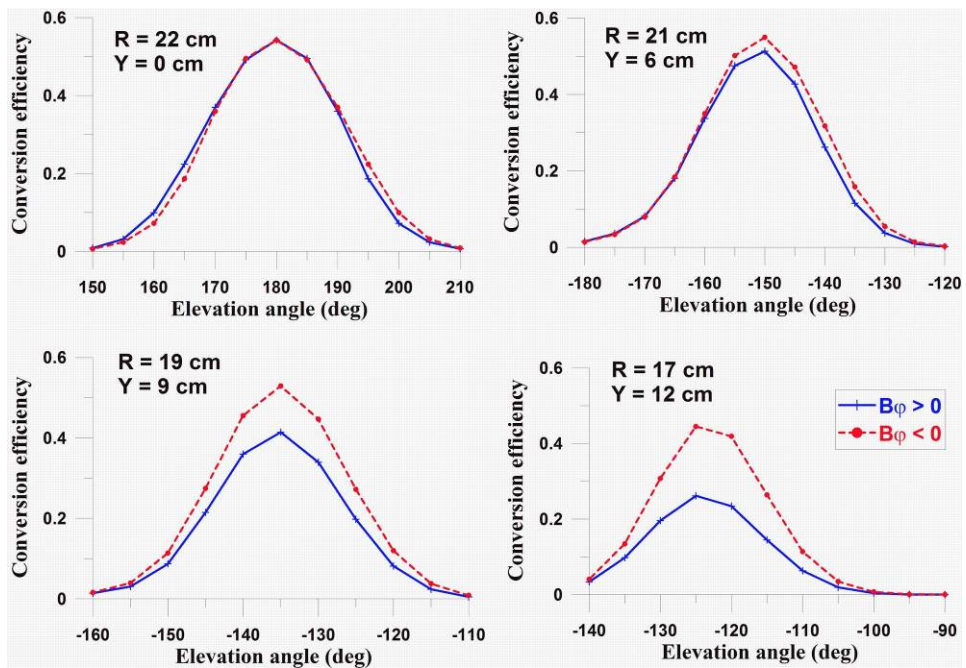


Рисунок 2.4. Эффективность О–Х трансформации в зависимости от полоидального угла ввода мощности для 4 стартовых позиций (R, Y) пучка. Сплошная линия – $B_\phi > 0$; пунктирная линия – $B_\phi < 0$.

приведены на рисунке 2.1. Гауссовской пучок волн обыкновенной поляризации с шириной $w = 3$ см запускался со стороны слабого магнитного поля с разных стартовых позиций (см. рисунок 2.2, левая панель). Изменение полоидального угла стартовой позиции пучка моделировалось с помощью выбора спектра по полоидальным модам для граничных электрических полей. На этом же рисунке показаны отсечки О и Х волны, положение ЭЦР и ВГР. Пример двумерного распределения модуля электрического поля в полоидальном сечении токамака приведен на рисунке 2.2, правая панель (случай позиции 4). Изначально, пучок волн обыкновенной поляризации распространяется внутрь. Далее, часть мощности пучка отражается от отсечки О волны, а часть мощности проходит далее внутрь, где волны имеют необыкновенную поляризацию. Прошедшие необыкновенные волны поглощаются в окрестности ВГР, в то время как отраженные обыкновенные волны поглощаются у стенки. Важный эффект, связанный с двумерной неоднородностью плазмы, – зависимость эффективности трансформации от направления тороидального магнитного поля (см. предыдущий раздел). На рисунке 2.3 поглощение необыкновенной волны в окрестности ВГР показано для двух разных направлений магнитного поля B_ϕ . Можно видеть, что в случае $B_\phi < 0$ поглощаемая мощность, а значит и эффективность трансформации значительно больше, чем при $B_\phi > 0$. Детальная зависимость эффективности О - Х трансформации от стартовой позиции пучка показана на рисунке 2.4. При вводе пучка в экваториальной плоскости ($Y = 0$ см,

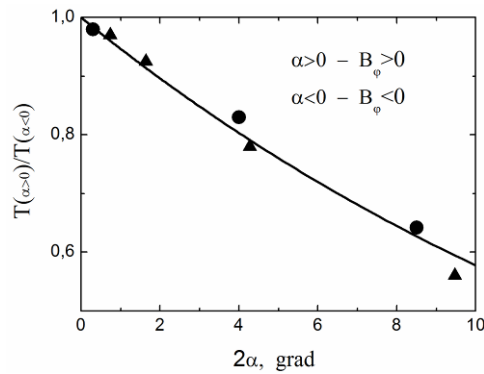


Рисунок 2.5. Отношение коэффициентов трансформации для противоположных направлений тороидального поля B_φ в зависимости от угла между поверхностями отсечек X и O волн. Численное моделирование – 15 ГГц (кружки) и 30 ГГц (треугольники). Сплошная кривая – выражение (2.30).

случай описываемый моделью одномерно-неоднородной плазмы) эффективности трансформации при $B_\varphi < 0$ и $B_\varphi > 0$ равны. При ($Y = 9$ и 12 см, случай сильной двумерной неоднородности) разница между этими двумя случаями явно выражена. Изменение направления магнитного поля B_φ идентично смене стартовой позиции с положения «выше» на положение «ниже» экваториальной плоскости, что является численным подтверждением асимметрии коэффициента трансформации. Рассмотрены два случая: волны с частотой 15 ГГц и 30 ГГц. В первом случае параметр $\delta = 0.66 \leq 1$ (см. (2.5)), т.е. теоретическая модель на границе применимости. Во втором случае $\delta = 0.33 \ll 1$ теоретическая модель применима полностью. На рисунке 2.5. приведена зависимость отношения коэффициентов трансформации T , вычисленных численно и аналитически для разных направлений B_φ , от абсолютного значения угла 2α между поверхностями отсечек. Можно видеть разумное согласие между теоретическим предсказанием (2.30) и результатом численного анализа независимо от частоты волны. На рисунках 2.6. и 2.7. приведено сравнение распределений профилей электрических полей на магнитной поверхности в окрестности области трансформации, полученных численно и аналитически. Показано, что для волны с частотой 30 ГГц имеет место разумное согласие между этими распределениями. Для волны с частотой 15 ГГц имеет место плохое согласие между результатами численного моделирования и теоретическим предсказанием. Таким образом, можно сделать вывод, что полученное выражение для амплитуды полей (2.7) и свойство асимметрии коэффициентов трансформации (2.30) с хорошей точностью воспроизводят результаты численного моделирования в случае, когда теоретическая модель полностью применима. Напротив, когда теоретическая модель близка к границе применимости, распределение амплитуды поля (2.7) не вполне воспроизводит результаты моделирования.

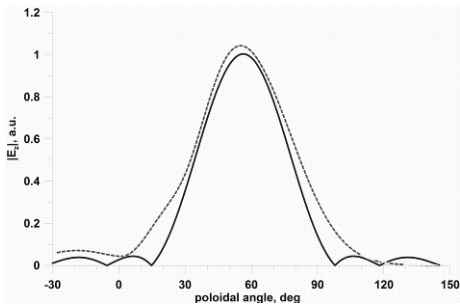


Рисунок 2.6. Полоидальное распределение $|E_\xi|$ для случая 30 ГГц. Пунктирная кривая – результат численного расчета, сплошная линия – выражение (2.7) с учетом (2.11), (2.17).

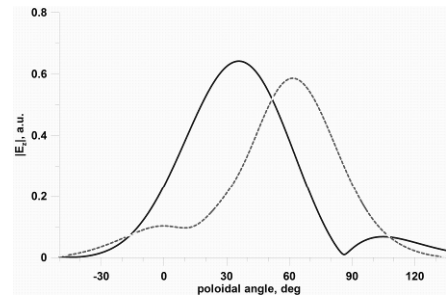


Рисунок 2.7. Полоидальное распределение $|E_\xi|$ для случая 15 ГГц. Пунктирная кривая – результат численного расчета, сплошная линия – выражение (7) с учетом (2.11), (2.17).

Однако свойство асимметрии коэффициентов трансформации при этом сохраняется и с разумной точностью описывается выражением (2.30).

2.3. Анализ влияния шира магнитного поля и кривизны магнитной силовых линий на эффективность линейной трансформации пучков электромагнитных волн в окрестности критической поверхности

В реальных установках существенное влияние на эффективность О-Х трансформации может оказать кривизна магнитных силовых линий, лежащих на вложенных магнитных поверхностях, и шир магнитного поля. Последний эффект анализировался в рамках модели одномерно-неоднородной плазмы [78]. В частности, было показано, что учет шира магнитного поля приводит к количественной деградации коэффициента трансформации. В данном параграфе мы проанализируем роль этих эффектов в модели трехмерно-неоднородной плазмы. Принимая во внимание, что на установках, использующих О-Х-В схему дополнительного нагрева, имеет место сильная вытянутость магнитных поверхностей, мы будем пренебрегать кривизной магнитной поверхности в области взаимодействия мод в отличие от работы [88], где анализировался случай круглых магнитных поверхностей, для которых кривизна может быть существенна, и рассмотрим модель плоскостной плазмы. Введем две системы координат: декартову (x, y, z) , как в первом параграфе настоящей главы, и цилиндрическую $(\eta, \xi = \rho_0 \varphi, x)$, привязанные к критической поверхности и центру падающего пучка (рисунок 2.8). В цилиндри-

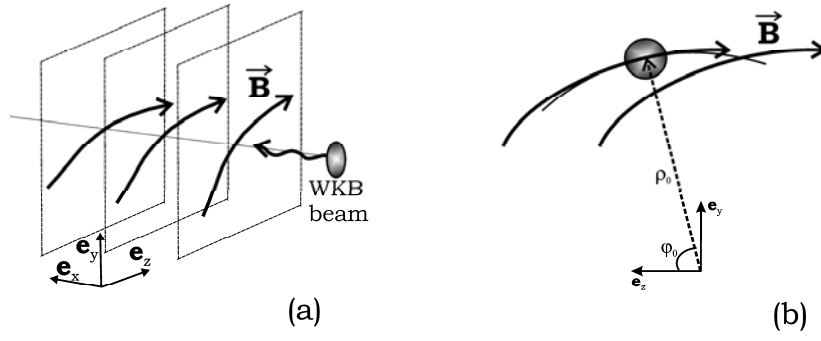


Рисунок 2.8. (a) Плоскостроистая геометрия, в рамках которой рассматривается О-Х трансформация в магнитном поле с широм и учетом кривизны магнитных силовых линий; (b) Магнитная поверхность: цилиндрическая система координат, используемая для описания кривизны магнитных силовых линий.

ческой системе координат η - радиус, ξ - координата вдоль магнитной силовой линии, x - играет роль координаты вдоль оси симметрии цилиндрической геометрии. Орты \mathbf{e}_η и \mathbf{e}_ξ совпадают с нормалью и касательной к магнитной силовой линии, $\eta = \rho_0 = |(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{b}|_0^{-1}$, где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/|B|$, - радиус кривизны магнитной силовой линии, который много больше радиуса падающего пучка w . Локально в окрестности начала координат равновесное магнитное поле с широм можно представить в виде

$$\mathbf{B} = B_0 \left[(1 + \theta_\xi) \mathbf{e}_\xi + \theta_\eta \mathbf{e}_\eta \right], \quad (2.41)$$

$$\theta_\xi = \kappa_{\xi x} x + \kappa_{\xi \eta} \rho + \kappa_{\xi \xi} \xi, \quad \theta_\eta = -\frac{\rho_0}{\eta} \left[\kappa_{\eta x} x + \kappa_{\eta \eta} \rho + \kappa_{\eta \xi} \xi \right], \quad (2.42)$$

$\rho = (\eta - \rho_0)$ и $\kappa_{\eta \eta} = \kappa_{\xi \xi}$, что обеспечивает выполнение теоремы Гаусса для магнитной индукции $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Используя (2.41) и (2.42), получим в явном виде выражения модуля магнитного поля и единичного вектора с точностью до членов первого порядка малости

$$|\mathbf{B}| \approx B_0 (1 + \theta_\xi), \quad \mathbf{b} \approx \mathbf{e}_\xi + \theta_\eta \mathbf{e}_\eta. \quad (2.43)$$

Таким образом, можно видеть, что слагаемые, составляющие коэффициент θ_ξ , описывают зависимость модуля магнитного поля от координат x и y . Первое слагаемое в θ_η , которое пропорционально x , описывает шир магнитного поля, в то время как два других - кривизну магнитных силовых линий на вложенных магнитных поверхностях (рисунок 2.9). Представляя решение уравнений Максвелла в виде

$$\{E_+, E_\xi\}(x, \rho, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_\xi}{2\pi} \left\{ \sqrt{\frac{L_{\perp x}}{L_{\parallel}}} A_+, \sqrt{\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp x}}} A_\xi \right\} (x, \rho, k_\xi) \exp[i\Psi(x, \rho, \xi)], \quad (2.44)$$

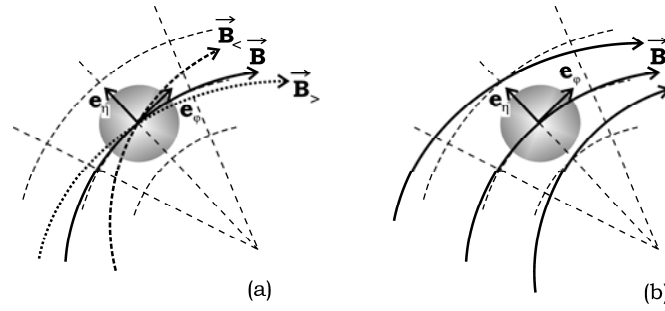


Рисунок 2.9. (а) Иллюстрация шира магнитного поля: магнитные силовые линии $\mathbf{B}_>$, \mathbf{B} и $\mathbf{B}_<$, лежащие на соседних магнитных поверхностях; (б) изменение угла наклона магнитных силовых линий, лежащих на одной магнитной поверхности.

$$\Psi(x, \rho, \xi) = \frac{x}{\rho_0} + i \frac{N_{\xi 0}}{\rho_0} \left(\frac{\kappa_{\eta\eta} \rho^2}{2} + \kappa_{\eta\xi} \rho \xi \right) - i \frac{\xi^2}{4L_{\perp\eta} N_{\xi 0}} \frac{\omega}{c} + i \left(\frac{\omega}{c} N_{\xi 0} + k_\xi \right) \xi,$$

используя процедуру укорачивания, безразмерные переменные (2.12) и выражения (2.43), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (x' + \tan(2\alpha) \rho') A_+ + \left[i \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial \rho'} + igx' \right] A_\xi = 0, \\ \left[i \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial \rho'} - igx' \right] A_+ + x' A_\xi = 0, \end{cases} \quad (2.45)$$

где учтены только члены первого порядка малости по параметрам, определяемым неравенствами (2.9). Система уравнений (2.45) отличается от системы уравнений (2.13) наличием члена $g = N_{\xi 0} \kappa_{\eta\xi} I$, который описывает шир магнитного поля. В случае одномерно-неоднородной плазмы (т.е. при $\alpha = 0$) система (2.45) сводится к уравнениям, которые были проанализированы в статье [13а, 14а]. Кривизна магнитных силовых линий приводит к появлению в решении дополнительной фазы (первые три члена в аргументе экспоненты в выражении (2.44)). Представив компоненты электрического поля в виде:

$$\begin{aligned} A_+ &= \beta \left[\left(\frac{\partial}{\partial x'} + i \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) + i \left(\frac{1}{\beta} - ig \right) x' \right] \Phi, \quad A_\xi = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x'} - i \frac{\partial}{\partial \rho'} \right) - i(\beta + ig)x' - i\beta \tan(2\alpha) \rho' \right] \Phi, \\ \beta &= \left((1 - g^2 + i \tan(2\alpha))^{1/2} + ig \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

получим уравнение второго порядка в частных производных для неизвестной функции Φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \Phi + \frac{\partial^2}{\partial \rho'^2} \Phi - i2gx' \frac{\partial}{\partial \rho'} \Phi + \\ \left[(1 - g^2) x'^2 + \tan(2\alpha) x' \rho' + i \left[1 - g^2 + i \tan(2\alpha) \right]^{1/2} \right] \Phi = 0, \end{aligned} \quad (2.47)$$

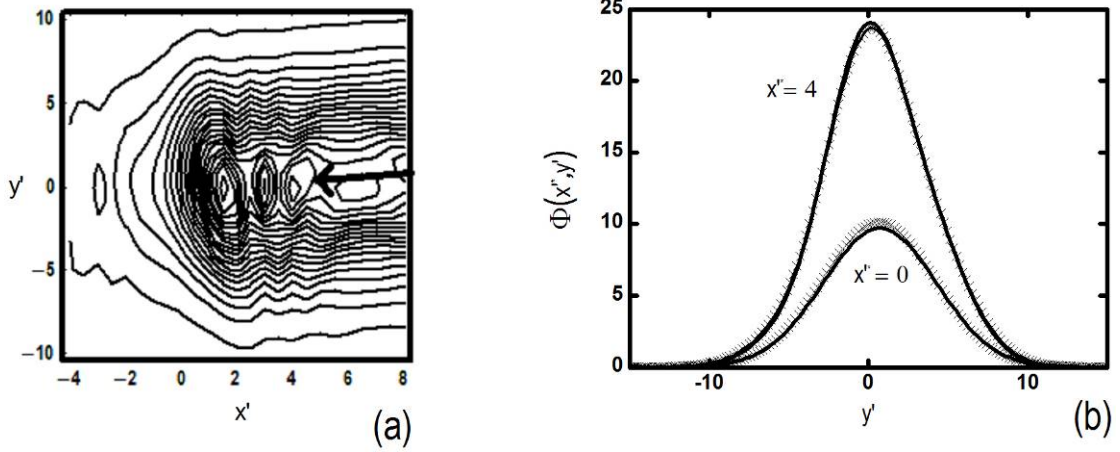


Рисунок 2.10. (a) двумерное распределение численного решения $|\Phi|$ (2.47) для параметров $(2\alpha = 10^\circ, g = 0.04)$; (b) профиль функции $\Phi(x', y')$, сплошная кривая аналитическое решение (2.55), кресты – численное решение (2.47) при $x'^* = 0$, $x'^* = 4$.

переменные в котором на первый взгляд не разделяются. Будем искать решение уравнения (2.47) в виде:

$$\Phi = \exp\left[-i \frac{\tan(2\alpha)}{4g} \rho'^2\right] \bar{\Phi}. \quad (2.48)$$

Подставим (2.48) в (2.47) и проанализируем получившееся уравнение с помощью метода лучевых траекторий волны с амплитудой $\bar{\Phi}$. Рассмотрим уравнения Гамильтона

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = -\frac{dD}{d\mathbf{Q}} \left| \frac{dD}{d\mathbf{Q}} \right|^{-1}, \quad \frac{d\mathbf{Q}}{ds} = \frac{dD}{d\mathbf{R}} \left| \frac{dD}{d\mathbf{Q}} \right|^{-1}, \quad (2.49)$$

где $\mathbf{R} = (x', \rho')$, $\mathbf{Q} = (q_x, q_\rho)$, s - длина дуги вдоль траектории и

$$D = q_x^2 + \left(q_\rho + \frac{\tan(2\alpha)}{2g} \rho' - gx' \right)^2 - (x'^2 + \tan(2\alpha) x' \rho') \quad (2.50)$$

- дисперсионная функция. Четыре уравнения первого порядка (2.49) эквивалентны системе из двух связанных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'}{ds^2} &= 4x'(1 - g^2) - 2\tilde{q}_\rho \tan(2\alpha), \\ \frac{d^2 \tilde{q}_\rho}{ds^2} &= -2x' \tan(2\alpha), \end{aligned} \quad (2.51)$$

где $\tilde{q}_\rho = -q_\rho 2g / \tan(2\alpha)$. Замена переменных

$$x' = \sqrt[4]{\frac{\cos(2\alpha)}{1 - g^2}} [\cos \alpha u - \sin \alpha v], \quad \tilde{q}_\rho = \sqrt[4]{\frac{\cos(2\alpha)}{1 - g^2}} [\sin \alpha u + \cos \alpha v] \quad (2.52)$$

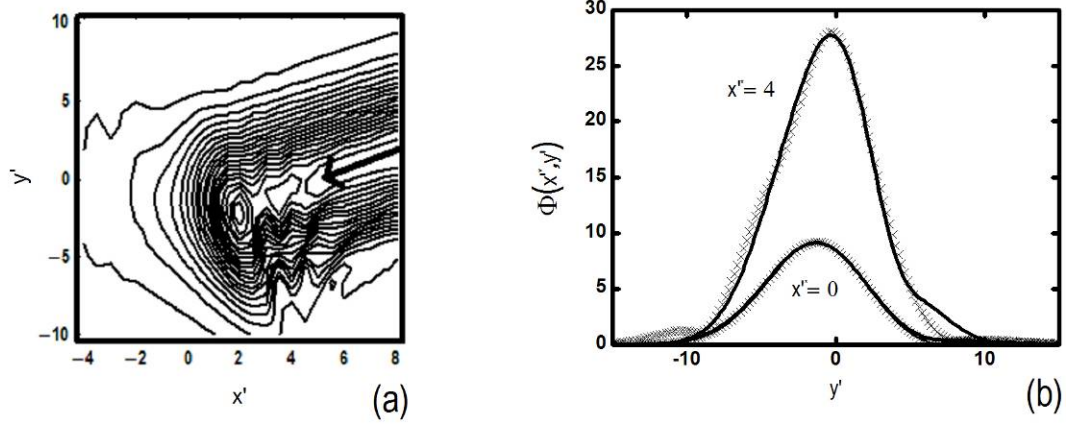


Рисунок 2.11. (a) двумерное распределение численного решения $|\Phi|$ (2.47) для параметров ($2\alpha = 10^\circ, g = 0.4$); (b) профиль функции $\Phi(x'^*, y')$, сплошная кривая аналитическое решение (2.55), кресты – численное решение (2.47) при $x'^* = 0$, $x'^* = 4$.

сводит систему связанных уравнений (2.51) к двум независимым:

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = 4 \cos(\psi) u, \quad \frac{d^2 v}{ds^2} = -4 \sin(\psi) v, \quad (2.53)$$

где

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{\tan(2\alpha)}{1 - g^2} \right]. \quad (2.54)$$

Решения уравнений (2.53) имеют вид $u \propto \exp[\pm 2 |\cos \psi|^{1/2} s]$, $v \propto \exp[\pm i 2 |\sin \psi|^{1/2} s]$. Таким образом, в направлении v траектория ведет себя как гармонический осциллятор, в то время как в направлении u испытывает действие тормозящей (ускоряющей) силы. Подобное поведение означает, что в функциональном пространстве в координатах u и v решение уравнения (2.47) будет представлять собой произведение функции параболического цилиндра и полиномов Эрмита. Замены переменных при анализе лучевых траекторий, которые в итоге привели к системе уравнений (2.53), эквивалентны некоторому интегральному преобразованию этого произведения при поиске амплитуд полей. Итак, будем искать решение уравнения (2.47) в интегральной форме:

$$\Phi(x', \rho') = \exp \left[-i \frac{\tan(2\alpha)}{4g} \rho'^2 \right] \int_C dq_\rho \exp \left[i q_\rho \rho' - i \frac{g}{\tan(2\alpha)} q_\rho^2 \right] \Phi_1(x', q_\rho), \quad (2.55)$$

где функция Φ_1 является решением уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \Phi_1 + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{q}_\rho^2} \Phi_1 + \left[(1 - g^2) x'^2 + \tan(2\alpha) x' \tilde{q}_\rho + i \left[(1 - g^2)^2 + \tan(2\alpha)^2 \right]^{1/4} \exp(i\psi) \right] \Phi_1 = 0, \quad (2.56)$$

и контур C выбирается так, чтобы подынтегральное выражение стремилось к нулю на его концах или на бесконечности. Далее, сделаем замену переменных (2.52) и, в результате, получим уравнение аналогичное уравнению (2.18):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \left(\cos(\psi)^2 u^2 - \sin(\psi)^2 v^2 + i \exp(i\psi) \right) \right] \Phi_1 = 0. \quad (2.57)$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде:

$$\Phi_1(u, v) = \sum_p D_{i\gamma_p^{\text{sign}(\psi)/\pi}}(u) \phi_p(v), \quad (2.58)$$

где функции $\phi_p(v)$ и $D_{i\gamma_p^{\text{sign}(\psi)/\pi}}$ определены выражениями (2.20) и (2.22). В результате, искомые функции A_+ , A_\pm можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_\pm \end{pmatrix} = \exp(i\psi) \sqrt{\frac{\tan(2\alpha)}{4\pi g}} \int_C d\tilde{\rho}' \exp \left[-i \frac{\tan(2\alpha)}{4g} (\rho' - \tilde{\rho}')^2 \right] \begin{pmatrix} R + I \\ \alpha_+ R - \alpha_- I \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

где $\alpha_\pm = \left[\cos(2\alpha)^2 (1 - g^2)^2 + \sin(2\alpha)^2 \right]^{1/2} \exp(-i\psi) \pm ig$. Функции $I = I(u(x', \tilde{\rho}'), v(x', \tilde{\rho}'))$ и $R = R(u(x', \tilde{\rho}'), v(x', \tilde{\rho}'))$ определены выражениями (2.23) и (2.24), где дополнительно необходимо поменять угол α на угол ψ . Контур интегрирования в (2.59) можно выбрать вдоль действительной оси, повернутой на угол $\pi/4$, т.е. $C \rightarrow \exp(i\pi/4)(-\infty, \infty)$. Данный выбор обеспечивает отсутствие точек особенностей вдоль пути интегрирования и быстрое убывание подынтегральных функций при $|\tilde{\rho}'| \rightarrow \infty$. На рисунках 2.10 и 2.11 приведено сравнение результатов численного и аналитического (2.55) решений уравнения (2.47). В качестве функции Φ_1 было взято численное решение уравнения (2.56). Проанализировано распространение и трансформация в окрестности критической поверхности ($x' = 0$) пучка, имевшего на границе гауссовское распределение с радиусом $w/l = 3$ для двух случаев: ($2\alpha = 10^0, g = 0.04$) и ($2\alpha = 10^0, g = 0.4$). В обоих случаях продемонстрировано полное согласие результатов численного и аналитического решения, что подтверждает правильность последнего и корректность выбора контура интегрирования. Преобразование (2.59) является разновидностью преобразования Габора, которое, в частности, встречается при решении уравнений магнитной гидродинамики при наличии шира магнитного поля [99, 100].

Полученное интегральное представление для амплитуд взаимодействующих волн является точным решением уравнения (2.47). Впервые оно было получено в работе диссертанта [15a] для случая двумерно-неоднородной плазмы в пренебрежении кривизной магнитных силовых линий. Несколько позже по времени в работе группы ИПФ РАН [85] было найдено

приближенное решение для амплитуд волн при малом шире магнитного поля, но для более общего случая трехмерно-неоднородной плазмы. Затем, в работе диссертанта [16а] была решена общая задача О-Х трансформации в трехмерно-неоднородной плазме с учетом шири магнитного поля и кривизны магнитной силовой линии на магнитной поверхности и получены выражения для взаимодействующих полей в том виде, в котором они приведены в диссертационной работе.

В случае магнитного поля без шири $g \rightarrow 0$: $\psi = \alpha$, функция $\sqrt{\tan(2\alpha)/(4\pi g)} \exp\left[-i(\rho' - \tilde{\rho}')^2 \tan(2\alpha)/(4g)\right]$ ведет себя как дельта - функция и полученное решение совпадает с (2.17):

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(i\alpha)(\cos(2\alpha))^{1/2}(R+I) \\ R-I \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

В силу того, что для существующих тороидальных установок $g \ll 1$ и угол между поверхностями отсечек мал, $\alpha \ll \pi$, выражение (2.59) можно приближенно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_\xi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \bar{R} + \bar{I} \\ \bar{R} - \bar{I} \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

где операция усреднения действует только на функцию аргумента ν :

$$\begin{pmatrix} \bar{I}(x', \rho') \\ \bar{R}(x', \rho') \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\tan(2\alpha)}{4\pi g}} \int_c d\tilde{\rho}' \exp\left[-i \frac{\tan(2\alpha)}{4g} \delta\rho'^2\right] \begin{pmatrix} I(u(x', \rho'), \nu(x', \rho' + \delta\rho')) \\ R(u(x', \rho'), \nu(x', \rho' + \delta\rho')) \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Физически операция (2.62) является отражением нелокальности, т.е. описывает поворот поперечной компоненты волнового вектора волны в области трансформации из-за наличия шири магнитного поля. Функция \bar{I} , как и в случае магнитного поля без шири, соответствует падающей обыкновенной волне, что видно из асимптотики функции параболического цилиндра (2.25). Тогда, полагая, что поперечное распределение падающей волны $A_0(\nu, z)$, коэффициенты

C_n можно представить в виде:

$$C_n(k_\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\nu d\nu' A_0 \left(\nu - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos(2\alpha)}} 2N_{\xi 0} L_{\perp \eta} \frac{ck_\xi}{\omega}, \xi \right) \times \exp\left[-i\Psi(x(\nu), \rho(\nu), \xi) + i \frac{\tan(2\alpha)}{4g} \frac{[\rho(\nu) - \rho(\nu')]^2}{l^2}\right] \phi_n(\nu'), \quad (2.63)$$

где фаза Ψ определена в выражении (2.44). В этом случае можно ввести коэффициенты трансформации:

$$T = \exp(-2\pi\gamma_p^\pm). \quad (2.64)$$

Коэффициенты γ_p^\pm определены в (2.27), где $\alpha \rightarrow \psi$. Коэффициенты трансформации, как и в случае магнитного поля без шира, обладают свойством асимметрии (2.30), где $\alpha \rightarrow \psi$.

Анализируя полученные результаты, можно отметить, что шир магнитного поля приводит к изменению структуры взаимодействующих полей. Однако его влияние на ширину области непрозрачности приводит к эффекту, имеющему второй порядок малости $\psi \approx \alpha + O(g^2)$. Значительно большее влияние на эффективность О-Х трансформации может оказать геометрический фактор. Если падающий на критическую поверхность пучок обыкновенных волн имеет угол наклона по отношению к магнитному полю, соответствующий оптимальному углу наклона центрального луча, который определяется выражением (2.3), то в силу кривизны магнитной силовой линии, разные области пучка имеют угол наклона по отношению к магнитной силовой линии, отличающийся от оптимального значения. В случае пучка обыкновенных волн радиуса w , наличие кривизны магнитной силовой линии эквивалентно уменьшению его радиуса в $\sqrt{1 + \omega^2 N_{\xi_0}^2 w^4 / (c^2 \rho_0^2)}$ раз, что приводит к деградации коэффициента трансформации.

2.4. Анализ влияния низкочастотной дрейфовой турбулентности на эффективность линейной трансформации пучков электромагнитных волн в окрестности критической поверхности

В этой главе приводится анализ влияния рассеяния электромагнитных волн в окрестности критической поверхности на низкочастотных флуктуациях плотности плазмы на эффективность трансформации мод. Будем считать невозмущенные параметры плазмы одномерно-неоднородными

$$n = n(x), B = B(x), \quad (2.65)$$

в то время как флуктуации плотности плазмы двумерно-неоднородными

$$\delta n = \delta n(x, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{q} \exp(iq_x x + iq_\eta \eta) \delta n(\mathbf{q}), \quad (2.66)$$

где x, η - «радиальная» и «поперечная» координаты декартовой системы координат (x, η, ξ) , привязанной к критической поверхности и центру падающего на нее пучка электромагнитных волн обыкновенной поляризации. Координата ξ направлена вдоль магнитной силовой линии.

Далее будем пренебрегать широм магнитного поля и кривизной магнитных силовых линий. Рассмотрим случай статистически однородных низкочастотных дрейфовых колебаний

$$\langle \delta n(\mathbf{q}) \delta n^*(\mathbf{q}') \rangle = (2\pi)^2 \langle \delta n(\mathbf{q})^2 \rangle \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \quad (2.67)$$

которые имеют гауссовский спектр по волновым числам

$$\langle \delta n(\mathbf{q})^2 \rangle = \frac{l_c}{4\pi} \langle \delta n_0^2 \rangle \exp\left(-\frac{q_x^2 l_c^2 + q_\eta^2 l_c^2}{4}\right), \quad (2.68)$$

где $\langle \dots \rangle$ - усреднение по ансамблю, l_c - корреляционная длина флуктуаций плотности, $\sqrt{\langle \delta n_0^2 \rangle}$ - амплитуда колебаний. Таким образом, как и в предыдущих параграфах, мы анализируем проблему О-Х трансформации в двумерно-неоднородной плазме. Только в данном случае неоднородность в направлении η вызвана наличием флуктуаций плотности. В рамках этой модели трансформация электромагнитных волн обыкновенной и необыкновенной поляризации в окрестности критической поверхности имеет место при выполнении условий (2.9) и описывается уравнением (2.8). Решение последнего мы будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} E_+ \\ E_\xi \end{pmatrix}(\mathbf{r}) = \int dk_\eta \begin{pmatrix} E_{+0} \\ E_{\xi 0} \end{pmatrix}(x, k_\eta) \exp\left(ik_\eta \eta + i\frac{\omega}{c} N_{\xi 0} \xi\right). \quad (2.69)$$

В окрестности критической поверхности $n(x) \approx n_c(1 + x/L_n)$, где n_c - критическая концентрация. Пренебрегая зависимостью магнитного поля от координаты и с учетом выражений (2.65) и (2.66), приведем уравнение (2.8) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{x}{L_n} E_{+0}(x, k_\eta) + i \frac{\omega + \omega_{ce}(0)}{\omega} \frac{c}{\omega} \frac{N_{\xi 0}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial}{\partial x} - k_\eta \right] E_{\xi 0}(x, k_\eta) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_\eta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta n(x, q_\eta)}{n_c} E_{+0}(x, k_\eta - q_\eta), \\ i \frac{c}{\omega} \frac{N_{\xi 0}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial}{\partial x} + k_\eta \right] E_{+0}(x, k_\eta) + \frac{x}{L_n} E_{\xi 0}(x, k_\eta) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_\eta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta n(x, q_\eta)}{n_c} E_{\xi 0}(x, k_\eta - q_\eta). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Сделаем функциональную замену

$$\begin{aligned} a_i &= \left(\frac{\omega}{\omega + \omega_{ce}(0)} \right)^{1/4} E_{+0} + \left(\frac{\omega + \omega_{ce}(0)}{\omega} \right)^{1/4} E_{\xi 0}, \\ a_r &= \left(\frac{\omega}{\omega + \omega_{ce}(0)} \right)^{1/4} E_{+0} - \left(\frac{\omega + \omega_{ce}(0)}{\omega} \right)^{1/4} E_{\xi 0}, \end{aligned} \quad (2.71)$$

где a_i и a_r - амплитуды волн, распространяющихся вдоль оси x в положительном и отрицательном направлениях. Используя подстановку (2.71), представим систему уравнений (2.70) в следующем виде:

$$\left[i \frac{\partial}{\partial x'} - x' \right] a_i(x', k) + i q a_r(x', k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} \delta \tilde{n}(x', q) a_i(x, k - q), \quad (2.72)$$

$$\left[i \frac{\partial}{\partial x'} + x' \right] a_r(x', k) + i q a_i(x', k) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} \delta \tilde{n}(x', q) a_r(x, k - q),$$

где $(k, q) = (k_\eta, q_\eta) l$, $x' = x/l$, $\delta \tilde{n} = \frac{\delta n(x, q_\eta) L_n}{n_c l}$, $l = \left(\frac{L_n c}{\omega} \right)^{1/2} \left(\frac{\omega_{ce}(0)}{2\omega} \right)^{1/4}$. В отсутствие

флуктуаций $\delta \tilde{n} = 0$ система (2.72) распадается на два независимых уравнения для амплитуд a_i и a_r . В случае $\delta \tilde{n} \neq 0$ уравнения являются связанными. Будем считать, что флуктуации малы $\delta \tilde{n} \ll 1$, что позволяет рассматривать правые части уравнений как малые поправки и искать решение системы уравнений (2.72) по теории возмущений:

$$a_{i,r} = a_{i,r}^{(0)} + a_{i,r}^{(1)} + a_{i,r}^{(2)} + \dots, \quad (2.73)$$

т.е. на первом шаге найти решение для не взаимодействующих волн $a_{i,r}^{(0)}$, далее, подставляя найденное решение в правую часть уравнений, найти поправки к амплитудам волн $a_{i,r}^{(1)}$ и т.д.

Решение невозмущенных уравнений можно представить в виде:

$$a_i^{(0)} = \exp\left(-i \frac{x'^2}{2}\right), \quad (2.74)$$

$$a_r^{(0)} = 0.$$

Выражения (2.74) описывают амплитуды взаимодействующих волн, распространяющихся под оптимальным углом (2.3). Подставляя (2.73) в (2.72), получим уравнения для следующих порядков теории возмущений:

$$\left[i \frac{\partial}{\partial x'} - x' \right] a_i^{(j+1)}(x', k) + i q a_r^{(j+1)}(x', k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} \delta \tilde{n}(x', q) a_i^{(j)}(x, k - q), \quad (2.75)$$

$$\left[i \frac{\partial}{\partial x'} + x' \right] a_r^{(j+1)}(x', k) + i q a_i^{(j+1)}(x', k) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} \delta \tilde{n}(x', q) a_r^{(j)}(x, k - q),$$

где $j = 0, 1, \dots$. Будем считать, что фазы разных гармоник флуктуаций плотности распределены по случайному закону. Произведем усреднение по этим фазам и получим:

$$\langle |a_i|^2 \rangle = \langle |a_i^{(0)}|^2 \rangle + \langle |a_i^{(1)}|^2 \rangle + \langle a_i^{(0)} a_i^{(2)*} \rangle + \langle a_i^{(2)} a_i^{(0)*} \rangle + \dots, \quad (2.76)$$

$$\langle |a_r|^2 \rangle = \langle |a_r^{(1)}|^2 \rangle + \dots$$

В этом случае коэффициент отражения можно определить следующим образом:

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta d\xi \langle |a_r^{(1)}(\eta, \xi)|^2 \rangle_{x \rightarrow -\infty}. \quad (2.77)$$

Для того чтобы получить поправки первого порядка малости к амплитудам волн, подставим амплитуды нулевого порядка (2.74) в правую часть уравнений (2.75). Выразим из второго

уравнения $a_i^{(1)}$ через амплитуду $a_r^{(1)}$ и в результате получим уравнение, описывающее амплитуду волны $a_r^{(1)}$, распространяющейся вдоль оси x в обратном направлении:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + x'^2 - k^2 - i \right] a_r^{(1)}(x', k) = ik \delta \tilde{n}(x', k) \exp\left(-i \frac{x'^2}{2}\right). \quad (2.78)$$

Правая часть уравнения (2.78) описывает рассеяние обыкновенной волны (2.74), которое приводит к возбуждению волны с конечным полоидальным числом. Решение однородного уравнения (2.78) может быть выражено через функции параболического цилиндра $D_{-ik^2/2}(-\sqrt{2} \exp(-i\pi/4)x')$ и $D_{ik^2/2-1}(\sqrt{2} \exp(i\pi/4)x')$. Метод вариации произвольной постоянной позволяет получить решение неоднородного уравнения:

$$a_r^{(1)}(x', k) = \frac{\sqrt{2} \exp(-i3\pi/4 - \pi k^2/2)}{4\pi} k \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \delta \tilde{n}(\kappa, k) \times \left[D_{-ik^2/2}(-\sqrt{2} \exp(-i\pi/4)x') \int_{x'}^{\infty} d\tau D_{ik^2/2-1}(\sqrt{2} \exp(i\pi/4)\tau) \exp\left(ik\tau - i \frac{\tau^2}{2}\right) + D_{ik^2/2-1}(\sqrt{2} \exp(i\pi/4)x') \int_{-\infty}^{x'} d\tau D_{-ik^2/2}(-\sqrt{2} \exp(-i\pi/4)\tau) \exp\left(ik\tau - i \frac{\tau^2}{2}\right) \right], \quad (2.79)$$

которое отвечает граничным условиям $\left[i \frac{\partial}{\partial x'} + x' \right] a_r^{(1)} \Big|_{x' \rightarrow -\infty} = 0$, $a_r^{(1)} \Big|_{x' \rightarrow \infty} = 0$. Распределение

электрического поля электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси x в обратном направлении, можно вычислить приближенно, используя асимптотические выражения для функций параболического цилиндра $D_{-ik^2/2}(-\sqrt{2} \exp(-i\pi/4)x')$ и $D_{ik^2/2-1}(\sqrt{2} \exp(i\pi/4)x')$ [35]:

$$a_r^{(1)}(\mathbf{r}) \Big|_{x' \rightarrow -\infty} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \exp\left(i \frac{x'^2}{2} + i \frac{\omega}{c} N_{\xi 0} \xi - i \frac{3\pi}{4} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa d\kappa \tilde{a}_r(\kappa, k) \exp\left(ik\eta' - i \frac{k^2}{2} \ln(\sqrt{2}|x'|) \right), \quad (2.80)$$

$$\tilde{a}_r(\kappa, k) = k \delta \tilde{n}(\kappa, k) [FS(\kappa, k) + BS(\kappa, k)],$$

где введены следующие обозначения

$$FS(\kappa, k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1 - ik^2/2)} \exp\left(-\frac{\pi k^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp\left(ik\tau - i \frac{k^2}{2} \ln|\tau|\right), \quad (2.81)$$

$$BS(\kappa, k) = \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi k^2}{2}\right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp\left(ik\tau + i \frac{k^2}{2} \ln|\tau| - i\tau^2\right) \quad (2.82)$$

- вклады малоуглового рассеяния вперед и рассеяния назад в амплитуду рассеянной волны и $\Gamma(1 - ik^2/2)$ - гамма функция. Рассеяние вперед приводит к возбуждению обыкновенной волны с конечным значением полоидального волнового числа k , которая распространяется от точки Брэгговского резонанса внутрь плазмы. В силу конечного k , падающая на критическую

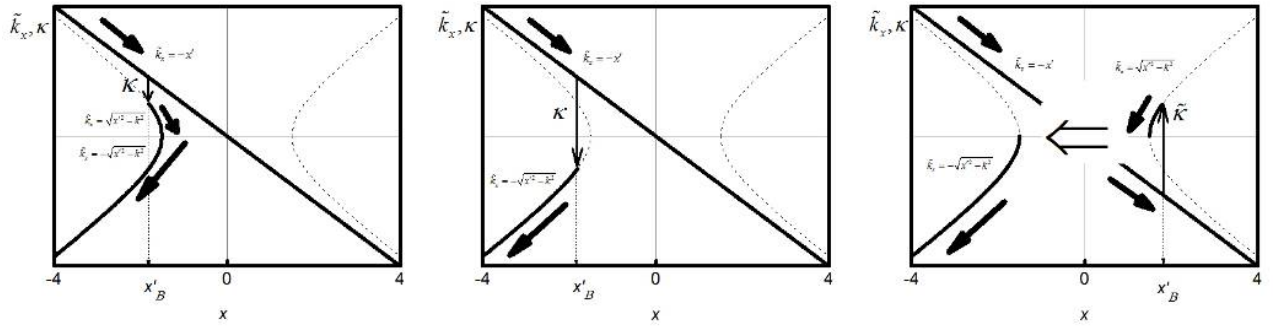


Рисунок 2.12. Безразмерный радиальный волновой вектор падающей $\tilde{k}_x(x', 0) = x'$ и дочерней волны $\tilde{k}_x(x', k) = \pm(x'^2 - k^2)^{1/2}$ в окрестности критической поверхности ($x' = 0$). Левая панель иллюстрирует рассеяние вперед в точке, где выполняются резонансные условия $\kappa = \tilde{k}_x(x'_B, 0) - \tilde{k}_x(x'_B, k)$ для флуктуаций с фиксированным значением радиального κ и полоидального k волновых векторов. Центральная и правая панели иллюстрируют рассеяние назад в точке, где выполняются резонансные условия $\kappa = \tilde{k}_x(x'_B, 0) + \tilde{k}_x(x'_B, k)$ для флуктуаций с фиксированным значением радиального κ и полоидального k волновых векторов. Двойная стрелка на правой панели – туннелирование необыкновенной волны с конечным значением полоидального k волнового вектора через область непрозрачности.

поверхность O волна частично отражается от области непрозрачности, что дает вклад в амплитуду сигнала, выходящего наружу (2.81). Этот процесс проиллюстрирован на рисунке 2.12, левая панель, где изображены локальные безразмерные волновые вектора падающей $\tilde{k}_x(x', 0) = x'$ и дочерней волны $\tilde{k}_x(x', k) = \pm\sqrt{x'^2 - k^2}$. Знак $+$ отвечает волне, распространяющейся от точки Брэгговского резонанса x'_B внутрь, знак $-$ - в обратном направлении. Брэгговское рассеяние имеет место в точке, где выполняется резонансное условие $\kappa = \tilde{k}_x(x'_B, 0) - \tilde{k}_x(x'_B, k)$ для заданных значений радиального κ и полоидального k волновых векторов флуктуаций. Рассеяние назад падающей обыкновенной волны приводит к возбуждению обыкновенной волны с конечным поперечным волновым вектором и дает вклад в амплитуду сигнала, выходящего наружу (выражение (2.82), первый член в квадратной скобке). Кроме того, рассеянной назад может быть необыкновенная волна. В этом случае, в силу конечного поперечного волнового вектора k она лишь частично пройдет через область непрозрачности и трансформируется в обыкновенную волну, что вносит вклад в амплитуду сигнала, распространяющегося наружу (выражение (2.82), второй член в квадратных скобках). Процесс рассеяния назад проиллюстрирован на рисунке 2.12., центральная и правая панели.

Рассеяние происходит в точках, где выполнено резонансное условие $\kappa = \tilde{k}_x(x'_B, 0) + \tilde{k}_x(x'_B, k)$.

Выполняя интегрирование в выражениях (2.81), (2.82) методом стационарной фазы, получим:

$$\begin{aligned} FS(\kappa, k) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{|\Gamma(1 - ik^2/2)|} \exp\left(-\frac{\pi k^2}{4}\right) \frac{k}{\kappa} H(\kappa - \kappa_{\min}), \\ BS(\kappa, k) &= \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{2}} \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi k^2}{2}\right)\right] \frac{\sqrt{2\pi}\kappa}{\sqrt{(\kappa^2 + k^2)^2 + \kappa^2 k^2}} H(\kappa), \end{aligned} \quad (2.83)$$

где $H(\kappa)$ - функция Хевисайда, $\kappa_{\min} = k^2 l^2 / (2L_n)$ - минимальное значение безразмерного радиального волнового числа флуктуаций, которое может обеспечить рассеяние вперед с возбуждением дочерней волны с поперечным волновым вектором k . Подставляя (2.68), (2.80) в (2.77) и используя свойство гамма-функции (2.29), получим выражение для коэффициента отражения:

$$\begin{aligned} R &= R_{FS} + R_{BS}, \\ R_{FS} &= \sqrt{\pi} \alpha_{FS}(l_c) \frac{l_c L_n}{l^2} \frac{\langle \delta n_0^2 \rangle}{n_c^2}, \quad R_{BS} = \pi \alpha_{BS}(l_c) \frac{L_n}{l^2} \frac{\langle \delta n_0^2 \rangle}{n_c^2}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

где

$$\alpha_{FS}(l_c) = 1 - \frac{l_c}{\sqrt{l_c^2 + 4\pi l^2}}, \quad \alpha_{BS}(l_c) = 2 - \frac{4}{\sqrt{5}} + 2f\left(\frac{2\pi l^2}{l_c^2}\right) + f\left(\frac{4\pi l^2}{l_c^2}\right), \quad (2.85)$$

$$f(s) = \frac{4\sqrt{5} + (\sqrt{10} + 5\sqrt{2})\sqrt{3 - \sqrt{5}} - 20\sqrt{1+s} + 2s(5 + \sqrt{5} - \sqrt{10}\sqrt{3 - \sqrt{5}})}{10(s^2 - s - 1)}. \quad (2.86)$$

Зависимость коэффициентов α_{FS} (пунктир) и α_{BS} (сплошная линия) от безразмерного параметра l/l_c приведены на рисунке 2.13. Далее, будем считать, что значение коэффициента отражения $R = 1$ является верхней границей применимости борновского приближения, в рамках которого правые части уравнений (2.75) можно считать возмущением. Тогда мы можем получить критерии на уровень флуктуаций, при превышении которых рассеяние переходит в нелинейный режим:

$$\sqrt{\frac{\langle \delta n_0^2 \rangle}{n_c^2}} \Big|_{FS} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi} \alpha_{FS}(l_c)}} \frac{l}{\sqrt{l_c L_n}}, \quad \sqrt{\frac{\langle \delta n_0^2 \rangle}{n_c^2}} \Big|_{BS} = \sqrt{\frac{1}{\pi \alpha_{BS}(l_c)}} \frac{l}{L_n}. \quad (2.87)$$

Для типичных условий экспериментов по дополнительному нагреву с помощью О-Х-В схемы линейной трансформации на сферическом токамаке MAST ($\omega/2\pi = 28$ ГГц, $L_n = 6.5$ см, $l_c = 0.5$ см):

$$\sqrt{\frac{\langle \delta n_0^2 \rangle}{n_c^2}} \Big|_{FS} = 0.03, \quad \sqrt{\frac{\langle \delta n_0^2 \rangle}{n_c^2}} \Big|_{BS} = 0.13. \quad (2.88)$$

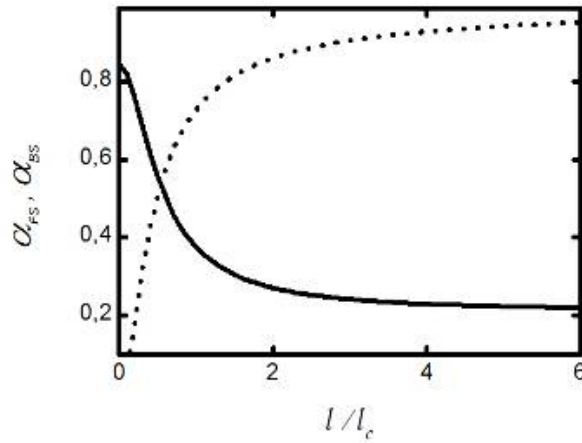


Рисунок 2.13. Зависимость коэффициентов α_{FS} (пунктир) и α_{BS} (сплошная линия) от безразмерного параметра l/l_c .

Для условий токамака TCV ($\omega/2\pi = 80$ ГГц, $L_n = 7$ см, $l_c = 0.5$ см):

$$\sqrt{\frac{\langle \delta n_0^2 \rangle}{n_c^2}} \Big|_{FS} = 0.01, \sqrt{\frac{\langle \delta n_0^2 \rangle}{n_c^2}} \Big|_{BS} = 0.053. \quad (2.89)$$

Таким образом, видно, что в обеих установках малоугловое рассеяние переходит в нелинейный режим, что может приводить к сильному отражению падающей волны от критической поверхности. В то же время, рассеяние назад может приводить к этому же эффекту только для условий токамака TCV. Количественное описание нелинейного режима рассеяния возможно с использованием методов, развитых в первой главе диссертации.

Итак, в настоящем разделе получен критерий на относительную амплитуду флуктуаций плотности, при превышении которого рассеяние на низкочастотных флуктуациях плотности дрейфового типа может приводить к значительной деградации коэффициента трансформации обыкновенной волны, которая в невозмущенной плазме полностью трансформируется в необыкновенную волну. Надо отметить, что в работе [87] были опубликованы результаты исследования влияния квазикогерентного возмущения плотности на эффективность О-Х трансформации. Главный эффект, который анализировался в этом труде - влияние квазикогерентного возмущения на размер области непрозрачности. В тоже время, в работе [18a] был исследован брэгговский режим рассеяния падающей обыкновенной и возбужденной необыкновенной волны на низкочастотных флуктуациях плотности с учетом их случайного характера.

2.5. Выводы

В настоящей главе решена задача линейной трансформации нормальных мод в окрестности критической поверхности в трехмерно-неоднородной плазме. Получены уравнения, описывающие электрические поля взаимодействующих волн с учетом шара магнитного поля и кривизны магнитной силовой линии. В результате решения этих уравнений получены интегральные выражения для амплитуд взаимодействующих полей, коэффициенты трансформации и отражения. Основные предсказания теоретической модели подтверждены сравнением с результатами полноволнового моделирования. Получен критерий на относительную амплитуду флуктуаций, когда рассеяние взаимодействующих волн переходит в нелинейный режим, что приводит к деградации эффективности трансформации.

Основные публикации

- 1) Popov A.Yu., Piliya A.D. On O-X mode conversion in a cold magnetized 2D inhomogeneous plasma in the electron cyclotron frequency range // Plasma Phys. Reports. - 2007. - Vol.33. - P.53.
- 2) Popov A.Yu. On O-X mode conversion in spherical tokamaks // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2007. - Vol.49. - P.1599.
- 3) Popov A.Yu. On O-X mode conversion in 2D inhomogeneous plasma with a sheared magnetic field // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2010. - Vol.52. - P.035008.
- 4) Popov A. On O-X mode conversion in a 3D inhomogeneous plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2011. - Vol.53. - P.065016.
- 5) Irzak M.A., Popov A.Yu. 2D Modeling of the O-X conversion in toroidal plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2008. - Vol.50. - P.025003.
- 6) Popov A. Anomalous reflection of electromagnetic waves at O-X mode conversion in 2D inhomogeneous turbulent plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2015. - Vol.57. - P.025010.

3. Линейная теория распространения пучков электронных бернштейновских волн в двумерно-неоднородной плазме с учетом пространственной дисперсии и слабых релятивистских эффектов

Электронные бернштейновские волны являются сильно замедленными коротковолновыми плазменными колебаниями, которые не имеют ограничений по плотности и магнитному полю в плазме, но не существуют в вакууме. Для их описания обычно вполне достаточно ограничиться потенциальным приближением вместо гораздо более сложного полноволнового дисперсионного соотношения. К сожалению, точное потенциальное релятивистское дисперсионное уравнение в ЭЦ диапазоне частот все еще слишком громоздкое для эффективного применения в теоретическом анализе. Именно по этой причине в рамках работы над диссертацией было получено приближенное дисперсионное уравнение ЭБ волн [19a], учитывающее эффекты слабого релятивизма.

При распространении ЭБ волн в экваториальной плоскости токамака с малым аспектным отношением в силу специфической двумерной неоднородности системы и наличия вогнутых магнитных поверхностей обычно имеет место возбуждение плазменного волновода, параметры которого слабо меняются вдоль большого радиуса. В работах диссертанта было показано, что в этом случае ЭБ волны распространяются в форме дискретных собственных мод, электронное циклотронное затухание которых существенно отличается от предсказаний, полученных в рамках традиционного ВКБ приближения [20a].

В дополнении к традиционным режимам с монотонно изменяющимся магнитным полем, в токамаке с малым аспектным отношением часто реализуются режимы равновесия с немонотонным профилем модуля магнитного поля. В этом случае существует область прозрачности для ЭБ волн между поверхностью верхнего гибридного резонанса и поверхностью гармоники электронного циклотронного резонанса. При этом в окрестности гармоники ЭЦ резонанса поведение ЭБ волн существенно меняется. В частности, при приближении к поверхности ЭЦ резонанса начинает уменьшаться поперечная компонента волнового вектора. Было показано, что в этом случае происходит нарушение ВКБ приближения, которое обычно используется при описании ЭБ волн, и имеет место частичное их отражение от ЭЦ слоя [21a].

Рассмотренные в настоящей главе задачи развивают традиционные представления о поведении ЭБ волн [92 - 95]. Полученные результаты имеют значение для оценки эффективности нагрева плазмы и локализации энерговыделения.

3.1. Теория квазиперпендикулярного по отношению к внешнему магнитному полю распространения электронных бернштейнских волн в неоднородной плазме

Поскольку ЭБВ является сильно замедленной плазменной волной с весьма маленькой поперечной длиной волны, для ее описания обычно вполне достаточно ограничиться потенциальным приближением и представить дисперсионное уравнение в виде:

$$k^2 + \chi_e = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\chi_e = \frac{2\omega_{pe}^2}{\nu_{te}^2} \left[1 - \int_0^\infty \nu_\perp d\nu_\perp \int_{-\infty}^\infty d\nu_\parallel \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{\omega}{\omega - k_\parallel \nu_\parallel - n\omega_{ce}} J_n^2 \left(\frac{k_\perp \nu_\perp}{\omega_{ce}} \right) f_0(\nu) \right], \quad (3.2)$$

- электронная восприимчивость, J_n - функция Бесселя, $k_\parallel, k_\perp, \nu_\parallel, \nu_\perp$ - продольная и поперечная компоненты волнового вектора и скорости, $\omega_{pe}^2 = 4\pi n_e e^2 / m_e$, $\nu_{te}^2 = 2T_e / m_e$. Для того, чтобы корректно описать ЭЦ затухание ЭБВ волн, распространяющихся поперечно к магнитному полю, мы учтем релятивистскую поправку к циклотронной частоте $\omega_{ce} \approx \omega_{ce} \left[1 - \nu^2 / (2c^2) \right]$. В случае Максвелловской функции распределения f_0 с учетом релятивистской поправки выражение (3.2) имеет вид:

$$\chi_e = \frac{2\omega_{pe}^2}{\nu_{te}^2} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u du \int_{-\infty}^\infty dw G \exp(-u^2 - w^2) \right], \quad (3.3)$$

где $u = \nu_\perp / \nu_{te}$, $w = \nu_\parallel / \nu_{te}$ и

$$G(z, p) = q \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{J_n^2(z)}{p - n}. \quad (3.4)$$

В выражении (3.4) введены следующие обозначения:

$$p = q \left[1 - \beta n_\parallel w + \frac{\beta^2}{2} (u^2 + w^2) \right], \quad (3.5)$$

$z = k_\perp \nu_\perp / \omega_{ce}$, $q = \omega / \omega_{ce}$, $n_\parallel = k_\parallel c / \omega$ - продольный коэффициент преломления, $\beta = \nu_{te} / c$, $q = \omega / \omega_{ce}$. Последний член в квадратной скобке в выражении (3.5) играет важную роль при квазиперпендикулярном распространении волны, т.е. при $n_\parallel \leq \beta$ и $|q - n| / q \leq \beta^2$. В этом случае переменные интегрирования в выражении (3.3) не разделяются и вычисление интеграла становится трудной математической задачей [93 - 95]. В случае безразмерный параметр $\lambda = (k_\perp \nu_\perp / \sqrt{2}\omega_{ce})^2$ много меньше единицы, $\lambda \ll 1$, и этот интеграл выражается через функции

Шкарковского [96]. В интересующем нас случае ЭБВ выполняется другое предельное соотношение $\lambda \gg 1$, что позволяет получить сравнительно простое выражения для электронной восприимчивости.

Выполним аналитически суммирование в выражении (3.4), что дает:

$$G(z, p) = -iq \int_0^{\infty} ds e^{ips} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(z) e^{-ins} = -iq \int_0^{\infty} ds e^{ips} J_0 \left[z \sqrt{2(1 - \cos s)} \right]. \quad (3.6)$$

Введем в (3.6) новую переменную интегрирования $x = (s - \pi) / 2$ и получим:

$$G(z, p) = \frac{q}{\sin \pi p} J(z, p), \quad (3.7)$$

где

$$J(z, p) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2ipx} J_0(2z \cos x) dx = \pi J_p(z) J_{-p}(z). \quad (3.8)$$

Подобное представление было впервые предложено в работах [97, 98]. Используя в выражении (3.8) соотношение

$$J_{-p}(z) = \cos \pi p J_p(z) - \sin \pi p N_p(z) \quad (3.9)$$

(см. [99]), где $N_p(z)$ - функция Неймана, в результате получим

$$G(z, p) = \pi q \left[\cot(\pi p) J_p^2(z) - J_p(z) N_p(z) \right]. \quad (3.10)$$

Воспользуемся асимптотическими выражениями функций J_p , N_p при большом аргументе $z \gg 1$:

$$J_p(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \Phi(z)}{(z^2 - p^2)^{1/4}}, \quad N_p(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \Phi(z)}{(z^2 - p^2)^{1/4}}, \quad \Phi(z) = \sqrt{z^2 - p^2} - p \cos^{-1}(p/z) - \pi/4.$$

Отметим, что функции $\cos \Phi$ и $\sin \Phi$ - это быстро осциллирующие функции переменной $z = z(\nu_{\perp})$. Далее мы учтем наличие в (3.3) интегрирования по аргументу $z = z(\nu_{\perp})$ и явные выражения для квадрата функции Бесселя:

$$J_p^2(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{z^2 - q^2}}, \quad J_p(z) N_p(z) = 0 \quad \text{при } z > q, \quad (3.11)$$

$$J_p^2(z) = 0, \quad J_p(z) N_p(z) = -\frac{1}{\pi \sqrt{q^2 - z^2}} \quad \text{при } z < q, \quad (3.12)$$

где сделана подстановка $p \rightarrow q$ в нерезонансном члене. Подставим (3.10) - (3.12) в (3.3) и выполним интегрирование, что позволяет получить искомое выражение для дисперсионной функции ЭБВ:

$$1 + \frac{2\omega_{pe}^2}{k_{\perp}^2 v_{te}^2} \left[1 - X\left(\frac{\omega}{k_{\perp} v_{te}}\right) - Y\left(\frac{\omega}{k_{\perp} v_{te}}\right) \langle \cot \rangle \right] = 0, \quad (3.13)$$

Где функции $X(\xi)$, $Y(\xi)$ связаны с действительной и реальной частью плазменной

дисперсионной функции $Z(\xi) = \frac{X(\xi) - iY(\xi)}{\xi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t^2)}{\xi - t} dt$ [92], $\langle \cot \rangle \equiv \langle \cot(\pi p) \rangle$,

$p = q[1 - \beta n_{\parallel} w + \beta^2(u^2 + w^2 + \delta^2)/2]$, $\delta = qx^2/2$ и $\langle \dots \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \exp[-u^2 - w^2] u du dw$. Далее,

для численного моделирования удобно воспользоваться следующим представлением функции

$\langle \cot \rangle$:

$$\cot(\pi z) = i \left[1 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} e^{-i2\pi sz} \right]. \quad (3.14)$$

Для аналитического анализа более пригодно другое представление этой функции в виде:

$$\langle \cot(\pi z) \rangle = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} \left\langle \frac{1}{z-s} \right\rangle. \quad (3.15)$$

Для того, чтобы вычислить двукратный интеграл

$$\left\langle \frac{1}{p-s} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int \frac{\exp(-u^2 - w^2) du dw}{p(u, w) - s},$$

воспользуемся заменой переменных $u, w \rightarrow \rho, \varphi$, где $u = \rho \sin \varphi$, $w = \rho \cos \varphi$. Далее, выполним

интегрирование по углам φ и введем новую переменную $\tau = \rho^2$. В итоге, получим следующее

выражение $\langle 1/(p-s) \rangle = \tilde{Z}(\Delta^{(s)}, N) / (q\beta^2 \Delta^{(s)})$, где аргумент $\Delta^{(s)} = (q + \beta^2 \delta - s) / q\beta^2$ имеет

малую мнимую часть и

$$\tilde{Z}(\Delta, N) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\exp(-\tau)}{\sqrt{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)}} d\tau, \tau_{1,2} = 2 \left(N^2 - \Delta \mp N \sqrt{N^2 - 2\Delta} \right), N = \frac{n_{\parallel}}{\beta}. \quad (3.16)$$

Выражение (3.16) определяет обобщенную дисперсионную функцию, которая является

комплексной аналитической функцией аргумента Δ : $\tilde{Z} = \tilde{X} - i\tilde{Y}$. Основные свойства $\tilde{Z}(\Delta, N)$

перечислены ниже. При $\Delta > \Delta^* = N^2/2$ мнимая часть \tilde{Z} равна нулю $\tilde{Y} \equiv 0$. При $\Delta < \Delta^*$:

$\tilde{Y}(\Delta, N) = -2\pi \exp(-2|N^2 - \Delta|) I_0(2N\sqrt{N^2 - 2\Delta})$, где $I_0(z)$ - модифицированная функция

Бесселя. В точке $\Delta = \Delta^*$ функция \tilde{Y} имеет скачок: $\tilde{Y}(\Delta^* - 0, N) - \tilde{Y}(\Delta^* + 0, N) = -\pi N^2 \exp[-N^2]$,

а действительная часть этой функции при $\Delta = \Delta^*$ имеет логарифмическую особенность:

$\tilde{X} \sim N \exp(-N^2) \ln |\Delta - \Delta^*|$, $\Delta \rightarrow \Delta^*$. В предельном случае $N \gg 1$, т.е. при $n_{\parallel} \gg \beta$, функция

\tilde{Z} сводится к плазменной дисперсионной функции:

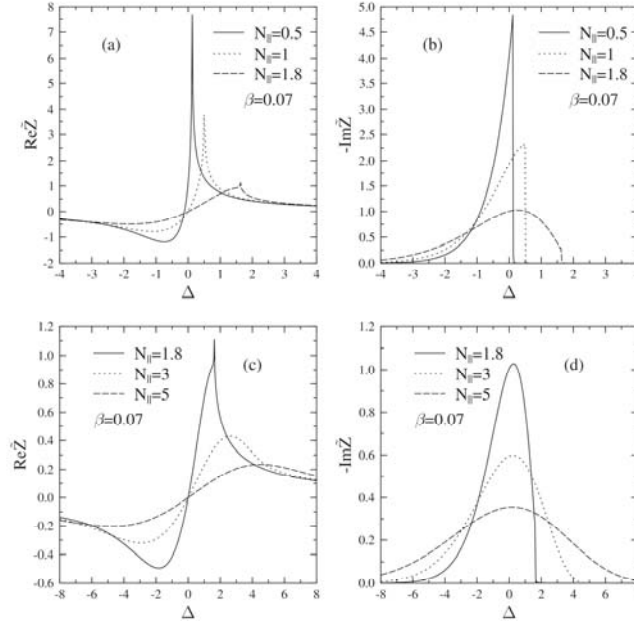


Рисунок 3.1. Функции $\text{Re}(\tilde{Z})$ и $\text{Im}(\tilde{Z})$ в релятивистском и нерелятивистском случаях.

$$\tilde{Z}(\Delta, N) \rightarrow Z(\Delta/N)/N, \quad (3.17)$$

которая в отличие от $\tilde{Z}(\Delta, N)$ не имеет особенностей при $\Delta = \Delta^*$. Сингулярность $\tilde{Z}(\Delta, N)$ при $\Delta = \Delta^*$ и $N \gg 1$ имеет экспоненциальную малость $\exp(-N^2)$. При $|N| \leq 1$, $1 \ll \Delta$: $\tilde{Z} \rightarrow 1/\Delta$.

Итак, по аналогии со случаем электромагнитных волн ЭБ волны могут быть описаны в рамках нерелятивистского приближения, если одновременно выполняются два условия:

$$n_{\parallel} > \beta, \quad |q - s| > s\beta^2. \quad (3.18)$$

В случае, когда одно (или оба) из неравенств (3.18) нарушается, то релятивистские эффекты играют важную роль и необходимо выполнить замену $Z \rightarrow \tilde{Z}$. Поведение $\tilde{Z}(\Delta)$ проиллюстрировано на рисунке 3.1 для разных значений безразмерного продольного волнового вектора N . Возвращаясь к функции $\langle \cot \rangle$, отметим, что она может быть представлена в виде:

$$\langle \cot \rangle = \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} \frac{\tilde{Z}(\Delta^{(s)}, N)}{\pi q \beta^2}. \quad (3.19)$$

Если $\Delta^{(s)} \gg 1$, т.е. при $1 - s/q \gg \beta^2$, для произвольной гармоники s $\langle \cot \rangle$ имеет вид:

$$\langle \cot \rangle = \frac{1}{\pi q \beta n_{\parallel}} \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} Z \left[\frac{q-s}{q \beta n_{\parallel}} \right]. \quad (3.20)$$

Вдали от резонанса, где выполняется неравенство $|1 - s/q| \gg \beta n_{\parallel}$, мы получим для произвольной гармоники s :

$$\langle \cot \rangle \rightarrow \cot(\pi q). \quad (3.21)$$

Рассмотрим поведение волны в окрестности ЭЦ резонансной поверхности $q = n$, $q - n \ll n$. В этом случае мы можем удерживать в (3.19) только один резонансный член $s = n$, что позволяет получить:

$$\langle \cot \rangle = \frac{1}{\pi q \beta^2} \tilde{Z}(\Delta^{(n)}, N). \quad (3.22)$$

Поскольку $|\langle \cot \rangle| \gg 1$, опустим член $1 - X(x)$ в (3.13) и будем использовать асимптотическое выражение для функции $Y(x)$, что приводит к дисперсионному уравнению:

$$k_{\perp} = \frac{1}{v_{te}} \left(\frac{2\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/3} \frac{\tilde{Z}^{1/3}(\Delta^{(n)}, N)}{\beta^{2/3}}. \quad (3.23)$$

Обычно для условий экспериментов на токамаках с малым аспектным отношением выполняется неравенство $(2\omega_{pe}^2 \omega_{ce} / \sqrt{\pi})^{1/3} \geq \omega$. В силу этого неравенства, во-первых, аргумент дисперсионной функции (3.13) мал и ведет себя как $x \sim \beta^{2/3}$, во-вторых, релятивистская поправка $\beta^2 \delta$, где $\delta = qx^2 / 2$, в функции $\Delta^{(n)}$, описывающей расстройку частоты, мала по сравнению с шириной резонанса. В этом случае (3.23) – решение дисперсионного уравнения в явном виде. Функция $\tilde{Z}^{1/3}$ – универсальная функция, зависящая от параметров плазмы. Ее реальная и действительная части показаны на рисунке 3.2 для разных значений аргумента N . В случае слабого затухания мнимую часть волнового вектора $\text{Im}(k_{\perp})$ можно выразить по теории возмущений через мнимую часть дисперсионной функции. В рассматриваемом случае действительная и мнимая часть обобщенной плазменной дисперсионной функции одного порядка $\text{Re}(\tilde{Z}) \sim \text{Im}(\tilde{Z})$, поэтому подход теории возмущений не применим. Для иллюстрации ЭЦ затухания в неоднородной плазме рассмотрим случай плоскостной плазмы, моделирующей плазменную конфигурацию в экваториальной плоскости токамака. Предположим, что плазменные параметры зависят от координаты x , имитирующей большой радиус токамака. В ЭЦ слое все параметры плазмы кроме магнитного поля могут считаться постоянными величинами. Положим $q = nx / R_{ecr}$, где n – номер ЭЦ гармоники, R_{ecr} – координата ЭЦ резонанса $q = n$, причем $R_{ecr} \approx R_0$, где R_0 – большой радиус токамака. В результате, в релятивистском случае получим $\Delta^{(n)}(x) = (x - R_{ecr}) / (\beta^2 R_{ecr})$, т.е. $L_{ECR} = \beta^2 R_n$ – размер резонансного слоя в случае $n_{\parallel} \leq \beta$. В нерелятивистском случае, $n_{\parallel} \geq \beta$, размер резонансного слоя равен $L_{ECR} = \beta n_{\parallel} R_n$. Отметим, что в обоих случаях размер слоя не зависит от номера ЭЦ гармоники. При этом расстояние между ближайшими ЭЦ резонансами

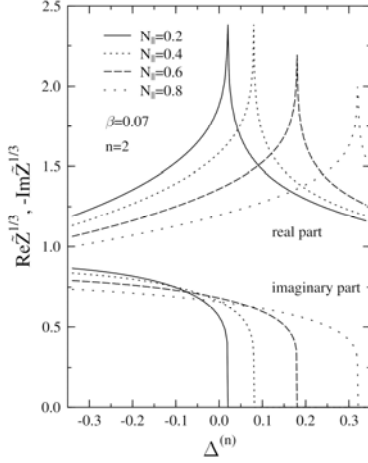


Рисунок 3.2. Зависимость функций $\text{Re}(\tilde{Z}^{1/3})$ и $\text{Im}(\tilde{Z}^{1/3})$ от аргумента $\Delta^{(n)}$ при $n = 2$.

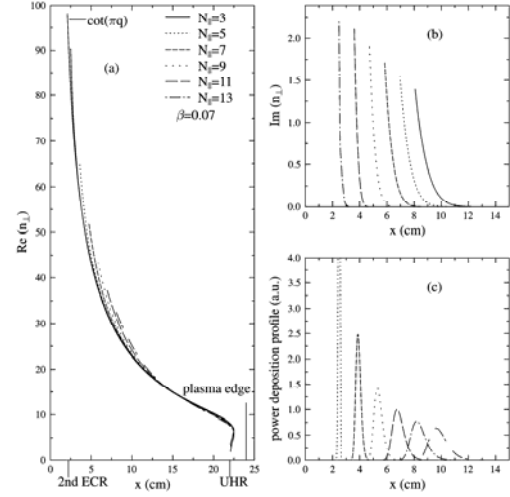


Рисунок 3.3. Решение уравнения (3.13). Профиль энерговыведения в нерелятивистском случае. Дисперсионные кривые оборваны, когда 0.999 мощности поглощено.

$q = n, q = n + 1$ уменьшается с номером гармоники n по закону $\sim R_0 / n$. При больших n резонансы начинают «перекрываться». Далее, мы остановимся на случае «перекрывающихся» ЭЦ резонансов $L_{ECR} \ll R_0 / n$. Оптическая толщина ЭЦ резонансного слоя в этом случае имеет вид:

$$\Gamma = 2L_{ECR} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im}[k_{\perp}(\Delta)] d\Delta \sim \frac{\omega}{c} R_0 \left(\frac{\beta}{n} \right)^{1/3}. \quad (3.24)$$

Видно, что эта величина слабо зависит от номера гармоники и значения β . К примеру, для условий экспериментов на токамаке MAST ($T_e = 1\text{кэВ}$, $R_0 = 0.9\text{м}$, $n = 5$, $\omega / 2\pi = 60\text{ГГц}$, $\omega_{pe}^2 / \omega_{ce}^2 |_{x=R_0} = 1$) оптическая толщина $\Gamma = 400$. Таким образом, (3.23) предсказывает полное локальное затухание при квазипоперечном распространении ЭБВ в непосредственной близости от резонансной поверхности в точке $\Delta = \Delta^*$. С практической точки зрения профиль энерговыведения можно рассматривать в этом случае как дельта-функцию аргумента $\Delta = \Delta^*$. В нерелятивистском случае $N \gg 1$ выражение для оптической толщины ЭЦ резонансного слоя имеет вид:

$$\Gamma \sim \frac{\omega}{c} R_0 \left(\frac{n_{\parallel}^2}{n\beta} \right)^{1/3}. \quad (3.25)$$

В этом случае ЭЦ затухание «включается» постепенно по мере приближения ЭБВ к поверхности ЭЦ резонанса, в области, где выполняется неравенство $\text{Im}(\tilde{Z}) \ll \text{Re}(\tilde{Z})$. Это

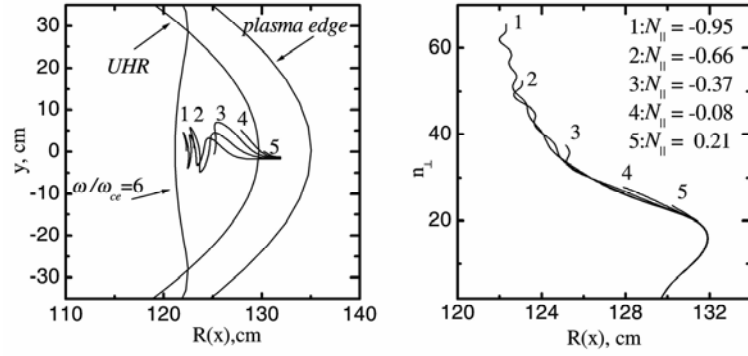


Рисунок 3.4. Лучевые траектории ЭБВ, вычисленные для характерных условий эксперимента и реальной конфигурации токамака MAST ($n_0 = 7 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $H = 0.36 \text{ Т}$, $f = 60 \text{ ГГц}$). Левая панель – проекция лучевых траекторий на полоидальное сечение токамака; правая панель – зависимость $n_{\perp}(x, n_{\parallel})$ от координаты вдоль большого радиуса.

позволяет искать мнимую часть волнового вектора по теории возмущений. Решение уравнения (3.13), полученное этим путем, приведено на рисунке 3.3 вместе профилем энерговыведения для разных значений $N \gg 1$. Можно видеть, что поведение $n_{\perp}(x, n_{\parallel})$ с хорошей точностью описывается функцией $n_{\perp}(x, 0)$. Функция $n_{\perp}(x, 0)$ является решением дисперсионного уравнения

$$1 + \frac{2\omega_{pe}^2}{k_{\perp}^2 v_{te}^2} \left[1 - X\left(\frac{\omega}{k_{\perp} v_{te}}\right) - Y\left(\frac{\omega}{k_{\perp} v_{te}}\right) \cot(\pi q) \right] = 0, \quad (3.26)$$

которое не учитывает продольную пространственную дисперсию. Слабая зависимость поперечного коэффициента преломления n_{\perp} от продольного коэффициента преломления n_{\parallel} не связана с использованием плоскостной модели плазмы. На рисунке 3.4 приведена эволюция $n_{\perp}(x, n_{\parallel})$, вычисленная для характерных условий эксперимента и реальной конфигурации токамака MAST. Хотя лучи, выпущенные из одной точки с разными начальными продольными показателями преломления n_{\parallel} , слегка расходятся в пространстве (левая панель), зависимость $n_{\perp}(x, n_{\parallel})$ неплохо описывается универсальной зависимостью (правая панель). Приведенные примеры показывают, что для волн с умеренными значениями продольного показателя преломления $n_{\parallel} \leq \beta$, профиль энерговыведения может быть найден с использованием теории возмущений. Пределы применимости уравнения (3.26) показаны на рисунке 3.5, где решение уравнения (3.26) дано вместе с решением точного уравнения (3.1) с электронной восприимчивостью (3.2) при $n_{\parallel} = 0$. Видно, что номере гармоники $n > 3$ решение уравнения

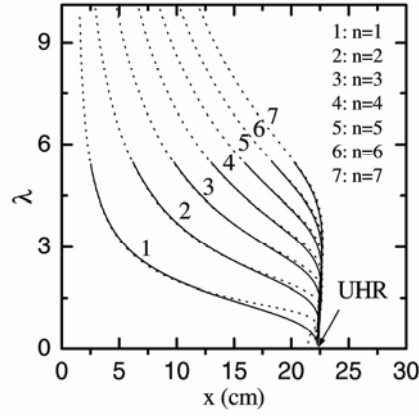


Рисунок 3.5. Решение уравнения (3.26) (сплошная линия) и точного уравнения (3.1) с электронной восприимчивостью (3.2) (пунктирная линия) при $n_{\parallel} = 0$.

(3.26) адекватно описывает точное решение. Удобный способ полуаналитического анализа функции (3.7) заключается в использовании разложения в ряд функции Бесселя J_0 в выражении (3.8). Интегрируя получившиеся члены разложения по переменной интегрирования x и используя известные свойства гамма-функции, получим:

$$G(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} B_k, \quad (3.27)$$

где $B_k = (-1)^k (2k)! / \left[2^{2k} (k!)^2 \prod_{n=1}^k (n^2 - q^2) \right]$. Вид коэффициентов разложения в выражении (3.27)

подсказывает простой путь вычисления функции G :

$$G(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(z, q), \quad G_k = -\frac{(2k-1)z^2}{k(k^2 - q^2)} G_{k-1}, \quad G_0 = 1. \quad (3.28)$$

Данное представление крайне удобно в случае функции распределения электронов отличной от максвелловской. В случае максвелловской функции распределения электронная восприимчивость при $n_{\parallel} = 0$, $\beta = 0$ имеет вид:

$$\chi_e = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{q^2}{1 - q^2} A(\lambda, q), \quad (3.29)$$

$$A(\lambda, q) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k = -\frac{(2k-1)z_e^2}{2(k^2 - q^2)} A_{k-1}, \quad A_1 = 1. \quad (3.30)$$

Решения точного уравнения (3.1) с электронной восприимчивостью (3.2), приведенные на рисунке 3.4, получены именно этим методом.

3.1.1. Выводы

В настоящем разделе:

1. Предложена удобная аналитическая форма представления дисперсионного уравнения ЭБ волн (3.13), которая будет использоваться в главе 4.
2. Показано, что в нерелятивистском случае затухание ЭБ волн можно описывать по теории возмущений.
3. Предложен простой метод вычисления профиля энерговыделения в релятивистском случае.
4. Предложен быстрый численный алгоритм вычисления электронной восприимчивости (3.29) и дисперсионного соотношения ЭБ волн.

Основные публикации:

Piliya A.D., Popov A.Yu. and Tregubova E.N. Propagation and damping of electron Bernstein waves with small n_{\parallel} in inhomogeneous plasma // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2003. - Vol.45. - P.1309.

3.2. Двумерная теория распространения и затухания электронных бернштейнских волн в экваториальной плоскости сферических токамаков

Согласно результатам расчетов лучевых траекторий ЭБВ в окрестности экваториальной плоскости сферического токамака их поведение зависит от формы поверхности электронного циклотронного (ЭЦ) резонанса. В случае вогнутой поверхности ЭЦ резонанса, - типичная ситуация в сферических установках когда ЭЦ резонанс расположен между поверхностью верхнего гибридного резонанса (ВГР) и осью разряда, - лучевые траектории демонстрируют регулярной осцилляторное поведение вокруг экваториальной плоскости (рисунок 3.6, левая панель). В случае выпуклой поверхности ЭЦ резонанса отклонение луча от экваториальной плоскости происходит по экспоненциальному закону (рисунок 3.6, правая панель). Регулярное поведение лучей делает возможным их аналитическое описание.

Рассмотрим окрестность экваториальной плоскости. Введем декартову систему координат (x, y, z) , где x - ось вдоль большого радиуса R в экваториальной плоскости, y, z - полоидальная и тороидальная координаты, соответственно. Далее, будем считать, что все координаты нормированы на величину c/ω . Рассмотрим распространение ЭБВ со стороны слабого магнитного поля. Для описания этих волн будем использовать электростатическое приближение, в рамках которого дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\varepsilon(n_{\perp}, n_{\parallel}) = 0,$$

где n_{\perp} и n_{\parallel} - перпендикулярная и продольная компоненты показателя преломления $\mathbf{n} = \mathbf{kc}/\omega$. Далее, мы будем рассматривать волны, для которых выполняется следующее неравенство $n_x \approx n_{\perp} \gg n_{\parallel}$, и диэлектрическая функция ε может быть записана в виде:

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{n_x^2 \beta^2} \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Xi_n \frac{Z(\xi_n)}{\beta n_{\parallel}}, \quad (3.31)$$

$$\text{где } \Xi_n = \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\exp(-\lambda) I_n(\lambda)}{n_x^2 \beta^2}, \quad \beta = v_{te}/c, \quad v_{te} = \sqrt{2T_e/m_e}, \quad \lambda = (n_x \beta q)^2/2, \quad q = \omega/\omega_{ce}, \quad Z -$$

плазменная дисперсионная функция [92] и $\xi_n = (q-n)/q\beta n_{\parallel}$. Рассмотрим окрестность ЭЦ резонанса $q = m$ ($\omega = m\omega_{ce}$), где выполняются следующие неравенства:

$$1 \gg |(q-m)/q| \gg n_{\parallel} \beta. \quad (3.32)$$

При выполнении условия (3.32) аргумент плазменной дисперсионной функции Z много больше единицы для всех n , т.е. $|\xi_n| \gg 1$. В этом случае плазменная дисперсионная функция Z

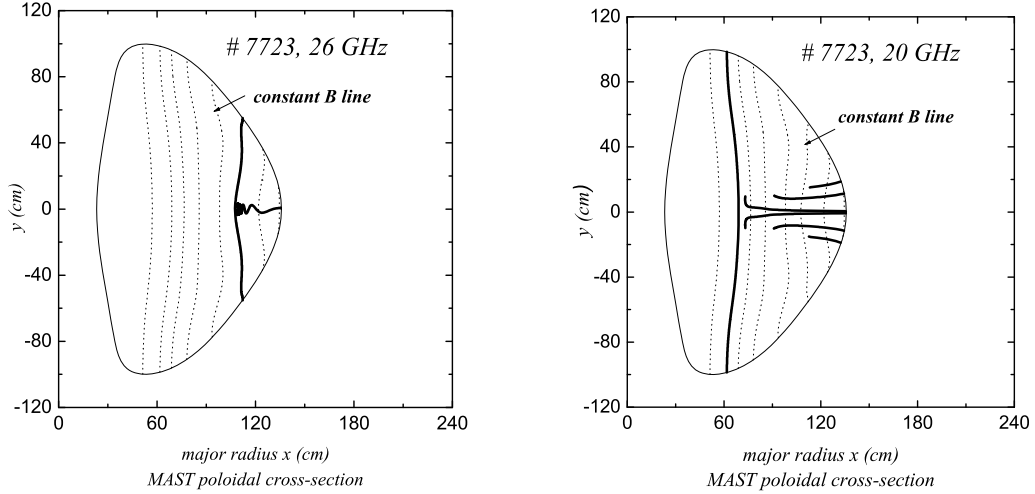


Рисунок 3.6. Лучевые траектории ЭВВ в полоидальном сечении токамака MAST. Левая панель - $f = 26 \text{ ГГц}$, вторая гармоника ЭЦ резонанса. Правая панель - $f = 20 \text{ ГГц}$, фундаментальная гармоника ЭЦ резонанса.

в (3.31) может быть разложена в ряд $Z(\xi) \rightarrow 1/\xi + 1/2\xi^3 + \dots$. Пренебрегая слабой полоидальной зависимостью q , получим:

$$\frac{Z(\xi_n)}{\beta n_{\parallel}} \rightarrow -\frac{q(x)}{n - q(x)},$$

где $q(x) = q(x, y)|_{y=0}$. В этом приближении $\varepsilon(x, y, n_x, n_{\parallel}) \rightarrow \varepsilon_0(x, n_x)$, где $\varepsilon_0 = \varepsilon(x, 0, n_x, 0)$. Для того, чтобы учесть полоидальную неоднородность магнитного поля, рассмотрим резонансный член $n = m$ в выражении (3.31) с большей аккуратностью. В случае вогнутой поверхности ЭЦ резонанса мы можем получить $(q(x, y) - m) / q(x, y) \approx (q(x, 0) - m) / q(x, 0) - (y/b)^2 = \delta(x) - (y/b)^2$. В итоге дисперсионная функция имеет вид:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = -\Xi_m \left(\frac{y^2}{\delta^2 b^2} + \frac{\beta^2 n_{\parallel}^2}{2\delta^3} \right). \quad (3.33)$$

Уравнение (3.33) представляет собой разложение дисперсионной функции в ряд по малым параметрам y and n_{\parallel} . Продольная компонента показателя преломления $n_{\parallel} = (\mathbf{nB})/B$ в окрестности экваториальной плоскости может быть представлена в виде:

$$n_{\parallel} = a \left(n_y + \zeta n_z - \frac{y}{R_F} n_x \right), \quad (3.34)$$

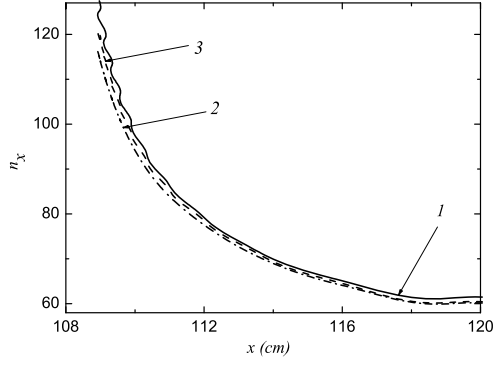


Рисунок 3.7. Решение дисперсионного уравнения для лучей, показанных на левой панели рисунка 3.6. 1, сплошная линия – точное решение дисперсионного уравнения; 2, штрих-пунктир – $n_{x0}(x)$; 3, пунктир – зависимость $n_{||}(x)$.

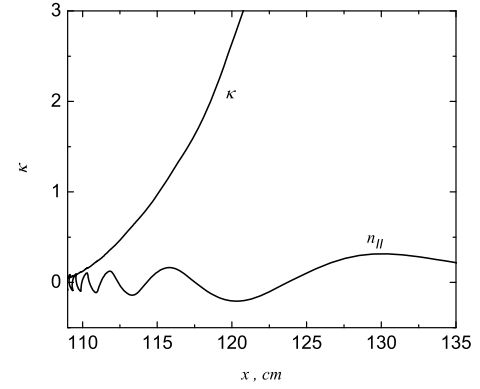


Рисунок 3.8. Зависимость параметра адиабатичности κ от координаты x . Для того, чтобы продемонстрировать влияние значения κ на поведение лучевых траекторий, показана зависимость $n_{||}(x)$.

$$N = n_{x0}(x) + N_1(x, y, n_y).$$

где $a = B_p / B$, $\zeta = B_T / B_p$, B_p и B_T - полоидальное и тороидальное магнитное поле, R_f - радиус кривизны магнитной поверхности, $n_z = const$. Далее, будем использовать ε как функцию Гамильтона для уравнения лучевых траекторий в пространстве переменных $\{x, n_x, y, n_y\}$. Далее, найдем $n_x = N(x, y, n_y)$ из уравнения $\varepsilon = 0$ и будем использовать ее как функцию Гамильтона канонических уравнений для переменных y и n_y . Поскольку ε_1 - малая поправка, то $N = n_{x0}(x) + N_1(x, y, n_y)$, где n_{x0} - решение уравнения нулевого порядка $\varepsilon_0(x, n_x) = 0$ и $N_1(x, y, n_y) = -(\partial \varepsilon_0 / \partial n_x)^{-1} \varepsilon_1(x, n_{x0}, y, n_y)$. Адекватность этого подхода продемонстрирована на рисунке 3.7. Сделаем преобразование $\{y, n_y\} \rightarrow \{\bar{y}, n_{||}\}$, $\bar{y} = y/a$, используя производящую функцию $\Phi = a\bar{y}(n_y + \zeta n_z - \bar{y}a n_{x0} / R_f)$, которая не зависит от координаты x . В результате новая функция Гамильтона имеет вид:

$$N_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = N_1(\bar{y}, n_{||}) + \frac{dn_{x0}}{dx} \frac{a^2 \bar{y}^2}{R_f}. \quad (3.35)$$

Поскольку $n_{x0}(x)$ - корень уравнения $\varepsilon_0(x, n_{x0}) = 0$, то

$$\frac{dn_{x0}}{dx} = -\frac{\partial \varepsilon_0 / \partial x}{\partial \varepsilon_0 / \partial n_{x0}} = -\left(\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial n_{x0}}\right)^{-1} \frac{\Xi_m}{\delta^2 L}. \quad (3.36)$$

где $L(x) = (d\delta/dx)^{-1}$. Главный вклад в выражение $\partial\varepsilon_0/\partial x$ вносит резонансный знаменатель δ ($n = m$). Подставим (3.36) в (3.35), убедимся, что каноническое преобразование идентично перенормировке коэффициента $b \rightarrow b_{eff}$ в выражении (3.33) согласно соотношению:

$$\frac{1}{b_{eff}^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{LR_f}.$$

Далее, будем считать $b_{eff}^2 > 0$. Тогда функция Гамильтона имеет вид:

$$N_1 = -\left(\frac{\partial\varepsilon_0(x)}{\partial n_{x0}}\right)^{-1} \varepsilon_1 = \left(\frac{\partial\varepsilon_0(x)}{\partial n_{x0}}\right)^{-1} \frac{\beta^2}{\delta^3(x)} \Xi_m K,$$

где

$$K = \frac{\Omega^2 \bar{y}^2 + n_{\parallel}^2}{2}, \quad (3.37)$$

$$\Omega = n_0^2 \Delta^{1/2}, \quad n_0 = \left(\frac{\sqrt{2a}}{b_{eff}}\right)^{1/2}, \quad \Delta = \frac{\delta}{\beta^2}, \quad x \rightarrow \tau(x) = \int_x^{x_0} \left(\frac{\partial\varepsilon_0(x')}{\partial n_{x0}}\right)^{-1} \frac{\beta^2 \Xi_m}{\delta^3(x')} dx' \quad (3.38)$$

и x_0 - начальная точка в окрестности ВГР. Соответственно, уравнения лучевых траекторий имеют вид:

$$\frac{d\bar{y}}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial n_{\parallel}}, \quad \frac{dn_{\parallel}}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial \bar{y}}. \quad (3.39)$$

Выражение (3.37) представляет собой гамильтониан гармонического осциллятора с изменяющейся частотой $\Omega(\tau)$. Поведение этой динамической системы зависит от поведения параметра $\kappa = |d\Omega/d\tau| \Omega^{-2}$, описывающего относительное изменение частоты за период осцилляций. Для того, чтобы оценить κ , обсудим предел $\delta \rightarrow 0$, при котором $\varepsilon_0 \rightarrow 1 - \Xi_m/\delta$, $\lambda \gg m$ и $\delta(x) \rightarrow x/L_0$, где $L_0 = L(0)$. В этом случае легко найти связь κ и δ : $\kappa = C_0 (b_{eff}/L) \delta^{5/6}$, где C_0 - константа порядка 1. Иными словами, $\kappa \ll 1$ в окрестности ЭЦ резонанса. Функция κ , полученная численно для конфигурации плазмы, обсуждаемой на рисунке 3.6 (левая панель), показана на рисунке 3.8. При малых κ уравнения (3.39) имеют адиабатический интеграл движения $I = K/\Omega$, что позволяет найти их решение в виде:

$$\bar{y} = (2I/\Omega)^{1/2} \sin\left(\int^{\tau} \Omega(t) dt + \alpha\right), \quad n_{\parallel} = (2I\Omega)^{1/2} \cos\left(\int^{\tau} \Omega(t) dt + \alpha\right), \quad (3.40)$$

где α - произвольная константа. Итак, лучевая траектория зависит от двух произвольных констант, I и α . Первая определяет область, в которой локализована лучевая траектория. Согласно (3.37) и (3.40), продольный волновой вектор n_{\parallel} имеет медленно уменьшающуюся

амплитуду колебаний ($\sim \Delta^{1/4}$) по мере приближения ЭБВ к резонансу. Это гарантирует проникновение ЭБ волн, описываемых лучевыми траекториями с малыми I , глубоко в плазму. Масштаб осцилляций n_{\parallel} можно оценить как n_0 ($n_0 < 0.2$ для случая на рисунке 3.6, левая панель). Сравнение приближенного аналитического решения (3.40) и точного решения показано на рисунке 3.9. Система уравнений для лучевых траекторий с гамильтонианом (3.37) эквивалентна линейному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 \bar{y}}{d\tau^2} + \Omega^2(\tau) \bar{y} = 0. \quad (3.41)$$

Таким образом, существует только два линейно независимых решения (луча) этого уравнения. Все возможные траектории лучей могут быть представлены как суперпозиция этих двух решений (лучей).

В случае выпуклой поверхности $B = \text{const} - (q(x, y) - m) / q(x, y) = \delta(x) + y^2 / b^2$ и функция Гамильтона имеет вид:

$$K = \frac{-\Omega^2 \bar{y}^2 + n_{\parallel}^2}{2}, \quad (3.42)$$

где $\Omega^2 = (2a^2 / b_{\text{eff}}^2) \Delta$ и $1 / b_{\text{eff}}^2 = 1 / b^2 + 1 / R_f L$. Лучевые траектории в этом случае имеют аperiодичное поведение. Асимптотически при больших значениях аргумента τ , т.е. в окрестности резонансной поверхности, $|\bar{y}| \sim |n_{\parallel}| \sim \exp(\Omega \tau)$ (см. рисунок 3.6, правая панель).

До сих пор мы обсуждали нерелятивистский случай, который имеет место, как было показано в предыдущем разделе, если одновременно выполняются два неравенства:

$$\delta \gg \beta^2, \quad n_{\parallel}^2 \gg \beta^2. \quad (3.43)$$

В случае, когда одно (или оба) из неравенств (3.43) нарушается, то релятивистские эффекты играют важную роль и необходимо выполнить замену

$$Z / n_{\parallel} \rightarrow \tilde{Z} / \beta \quad (3.44)$$

в резонансном члене $n = m$ в уравнении (3.31), где определение обобщенной дисперсионной функции $\tilde{Z}(\Delta, N)$, $N = n_{\parallel} / \beta$ дано выражением (3.16). Далее, мы не будем накладывать ограничений на минимальное значение n_{\parallel} и требовать, чтобы соблюдалось второе из неравенств (3.43). Модифицируем первое из этих неравенств с учетом (3.32):

$$1 \gg \delta \gg \max(n_{\parallel} \beta, \beta^2). \quad (3.45)$$

Используя релятивистскую дисперсионную функцию при выводе выражения (3.33), получим в скобках добавочный член $\beta^2 / (2\delta^2)$, который не зависит от канонических переменных и не

приводит к изменению уравнений лучевых траекторий. Таким образом, нерелятивистская модель для лучевых траекторий, описываемых уравнениями (3.39) с гамильтонианом (3.37) или (3.42), остается в силе при выполнении условия (3.45). Однако, релятивистские эффекты приводят к значительной модификации профиля энерговыведения для волн с малыми n_{\parallel} , что будет обсуждаться в последующих параграфах.

3.2.1. Волновое уравнение для электронных бернштейновских волн в экваториальной плоскости сферического токамака

Анализируя результаты предыдущего параграфа, можно прийти к выводу, что в случае вогнутых магнитных поверхностей в окрестности экваториальной плоскости формируется волновод для ЭБВ. Параметры этого волновода слабо меняются с изменением координаты x . ЭБ волны распространяются в этом волноводе как суперпозиция собственных мод, затухание которых может отличаться от того, как это предсказывает анализ лучевых траекторий. Для того, чтобы проверить эту гипотезу, рассмотрим уравнение, описывающее потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ ЭБ волны:

$$\Delta\varphi + 4\pi\rho(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.46)$$

где плотность заряда имеет вид $\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \varphi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$. В слабо неоднородной плазме функция отклика $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ зависит преимущественно от разности аргументов $\mathbf{p} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и слабо зависит через равновесные параметры плазмы от координаты $\mathbf{R} = (\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2$:

$$g(\mathbf{R}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int g(\mathbf{R}, \mathbf{n}) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{n}) d\mathbf{n}, \quad g(\mathbf{R}, \mathbf{n}) = -\chi_e(\mathbf{R}, \mathbf{n}) = n^2 (1 - \varepsilon(\mathbf{R}, \mathbf{n})), \quad (3.47)$$

где χ_e - электронная восприимчивость, ε - диэлектрическая функция. Поскольку плазма является однородной в тороидальном направлении, мы можем искать решение уравнения (3.46) в виде: $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y) \exp(in_z z)$. В этом случае интегральный оператор в выражении (3.47) станет двумерным с компонентой безразмерного волнового вектора n_z , входящей как параметр. Следуя предыдущему параграфу, будем считать зависимость от координаты x главной, т.е. $\Delta \approx \partial^2 / \partial x^2$, $n^2 \approx n_x^2$. Далее, в соответствии с выражением (3.33), представим $g(\mathbf{R}, \mathbf{n})$ в виде:

$$g(\mathbf{R}, \mathbf{n}) = g_0(\mathbf{R}, \mathbf{n}) + g_1(\mathbf{R}, \mathbf{n}), \quad g_0(\mathbf{R}, \mathbf{n}) = n_x^2 (1 - \varepsilon_0(X, n_x)), \quad g_1(\mathbf{R}, \mathbf{n}) = -n_x^2 \varepsilon_1(X, Y, n_x, n_y, n_z), \quad \text{где}$$

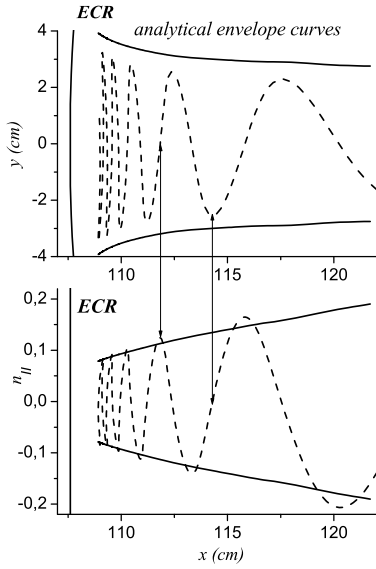


Рисунок 3.9. Лучевая траектория с рисунка 3.6 в области, где существует адиабатический инвариант $I=1$, и ее огибающие (см. (3.40)).

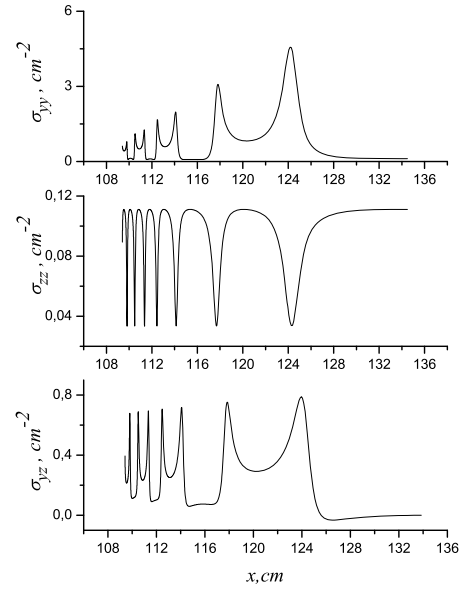


Рисунок 3.10. Эволюция параметров пучка. Начальное распределение: $\sigma_{yy,zz}(0) = 0.1 \text{ см}^{-2}$, $\sigma_{yz}(0) = 0$.

$X = R_x = (x + x')/2$, $Y = R_y = (y + y')/2$. Подставив это выражение в выражение (3.46), получим:

$$\partial^2 \varphi(x, y) / \partial x^2 + \hat{g}_0(X, \rho_x) \varphi(x', y) + \hat{g}_1(X, Y, \rho_x, \rho_y) \varphi(x', y') = 0, \quad (3.48)$$

где \hat{g}_0 и \hat{g}_1 - интегральные операторы. Будем искать такое решение этого уравнения, которое описывает пучок ЭБ волн, распространяющийся от точки $x = x_0$ вдоль оси x к ЭЦ резонансу:

$$\varphi = \varphi_0(x) A(x, y, n_z), \quad (3.49)$$

$\varphi_0 = \sqrt{\frac{16\pi}{c}} \frac{\exp\left(i \int_{x_0}^x n_{x_0}(x') dx'\right)}{\sqrt{n_{x_0}^2 \partial \varepsilon_0 / \partial n_{x_0}}}$ - ВКБ решение невозмущенного ($\hat{g}_1 = 0$) уравнения (3.48),

нормированное на единичную мощность, и A - медленно меняющаяся амплитуда. При $x = x_0$ решение (3.49) отвечает граничному условию $A(x_0, y, n_z) = A_0(y, n_z)$, где $A_0(y, n_z)$ - Фурье-гармоника заданного распределения $A_0(y, z)$, $\int_{-\infty}^{\infty} |A_0(y, z)|^2 dy dz = P_i$, и P_i - мощность пучка.

Используя процедуру укорачивания, получим уравнение для амплитуды A :

$$i \left(2n_{x_0} - \frac{\partial g_0}{\partial n_{x_0}} \right) \varphi_0(x) \frac{\partial A}{\partial x} + n_{x_0}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1(X, \rho_x, Y, \rho_y) \varphi_0(x') A(x', y') dx' dy' = 0, \quad (3.50)$$

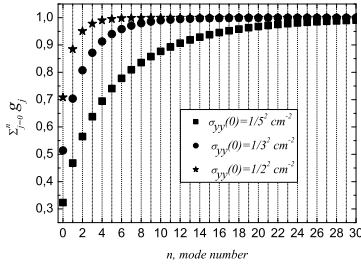


Рисунок 3.11. Зависимость вкладываемой мощности от номера моды n для разной ширины падающего пучка в конфигурации аналогичной той, что использовалась на рисунке 3.6.

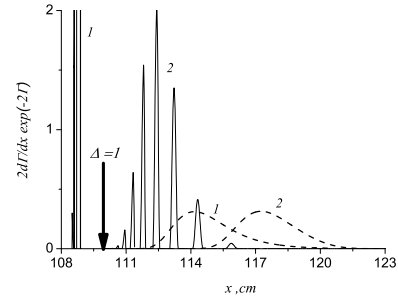


Рисунок 3.12. Профиль энергосвечения для лучей, характеризующихся интегралом движения $I = n+1/2$, и собственных мод ψ_n , $n=0,1$ ($b_{eff}\beta^2 = 0.8$). Пунктирная линия – профиль для мод, 1: $n=0$; 2: $n=1$. Сплошная линия – для лучей, 1: $n=0$; 2: $n=1$. Стрелка указывает на границу релятивистского ЭЦ слоя ($\Delta=\delta/\beta^2=1$).

где

$$\left(2n_{x0} - \frac{\partial g}{\partial n_{x0}}\right) = n_{x0}^2 \frac{\partial \varepsilon_0(x, n_{x0})}{\partial n_{x0}}.$$

Интегральный член в выражении (3.50) с требуемой точностью может быть представлен в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1(X, \rho_x, Y, \rho_y) \varphi_0(x') A(x', y') dx' dy' \approx \varphi_0(x) \int \varepsilon_1(x, \rho_x, Y, \rho_y) A(x', y') dx' dy'.$$

Выражая $\varepsilon_1(x, \rho_x, Y, \rho_y)$ через функцию $\varepsilon_1(x, n_{x0}, Y, n_y)$ и выполняя интегрирование по x' , получим:

$$i \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon'_0}{\partial n}\right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1(x, n_{x0}, Y, n_y) \exp(i\rho_y n_y) A(x, y') dn_y dy' = 0, \quad (3.51)$$

где $\varepsilon_1(x, n_{x0}, Y, n_y)$ дается выражением (3.33), в котором $y \rightarrow Y$. Поменяем в (3.51) переменные интегрирования $n_y \rightarrow n_{\parallel}$, $y \rightarrow \bar{y}$ и выполним интегрирование по переменной n_{\parallel} , а затем по \bar{y}' .

Введем также новую переменную $\tau(x)$ согласно (3.38) и окончательно получим уравнение для функции

$$\Psi(x, y, n_z) = \exp\left(in_z \frac{B_T}{B} \bar{y} - i \frac{n_{x0} a^2}{2R_F} \bar{y}^2\right) A(x, y, n_z) \quad (3.52)$$

в виде:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \hat{K} \Psi, \quad \hat{K} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \frac{1}{2} \Omega^2 \bar{y}^2. \quad (3.53)$$

Начальное условие для этого уравнения:

$$\Psi(0, \bar{y}) = \Psi_{in}(\bar{y}, n_z) \equiv \exp\left(in_z \bar{y} \frac{B_T}{B}\right) A_{in}(\bar{y}, n_z), \quad A_{in}(\bar{y}, n_z) = \exp\left(-i \frac{n_{x0}(0) a^2 \bar{y}^2}{2R_F}\right) A_0(a\bar{y}, n_z).$$

Гамильтониан в уравнении (3.53) не зависит от n_z , т.е. этот параметр входит в ответ только через начальное условие $\Psi_{in}(\bar{y}, n_z)$. Уравнение (3.53) – это уравнение типа уравнения Шредингера для гармонического осциллятора, параметры которого зависят от времени. Его оператор Гамильтона \hat{K} получается из «классической» гамильтоновой функции (3.37) заменой $n_{\parallel} \rightarrow -ia\partial/\partial\bar{y}$. Уравнение (3.53) исследовалось многими авторами [100 - 104]. Его общее решение можно представить в виде:

$$\Psi(\tau, \bar{y}, n_z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau, \bar{y}, \bar{y}') \Psi_{in}(\bar{y}', n_z) d\bar{y}', \quad (3.54)$$

где функция Грина G дается выражением:

$$G(\tau, \bar{y}, \bar{y}') = \frac{1}{(2\pi i s(\tau))^{1/2}} \exp\left(\frac{i}{2} \frac{(\partial s / \partial \tau) \bar{y}^2 + c(\tau) \bar{y}'^2 - 2\bar{y}\bar{y}'}{s(\tau)}\right). \quad (3.55)$$

В выражении (3.55) s и c – два линейно независимых решения системы уравнений лучевых траекторий (3.41) с граничными условиями $s(0) = \partial c / \partial \tau|_{\tau=0} = 0$ и $c(0) = \partial s / \partial \tau|_{\tau=0} = 1$, что подразумевает единичный определитель Вронского $w(c, s) = 1$. Амплитуда потенциала $A(\tau, \bar{y}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau, \bar{y}, n_z) \exp(in_z z) dn_z$ может быть получена из выражения (3.54) с помощью (3.52):

$$A(\tau, \bar{y}, z) = \exp\left(i \frac{n_{x0} a^2}{2R_F} \bar{y}^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau, \bar{y}, \bar{y}') A_{in}\left(\bar{y}', s + \frac{B_T}{B} \bar{y}'\right) d\bar{y}', \quad (3.56)$$

где введена новая переменная $s = z - (B_T/B)\bar{y}$. В случае пучка гауссовой формы $A_{in} = C \exp\left(-(\sigma_{yy} \bar{y}^2 - 2\sigma_{yz} \bar{y}z + \sigma_{zz} z^2)/2\right)$, где σ_{ik} – константы и $C = \pi^{-1} \sqrt{|\det \hat{\sigma}|}$, амплитуда ЭБ волны может быть найдена в явном вид. Она имеет гауссову форму с параметрами $C(\tau)$, $\sigma_{ik}(\tau)$, зависящими от переменной τ и выраженными через известные функции $c(\tau)$ и $s(\tau)$. На рисунке 3.10 показана эволюция параметров пучка, распространяющегося от ВГР к ЭЦ слою без затухания, для начального распределения $\sigma_{yy,zz}(0) = 0.1 \text{ cm}^{-2}$, $\sigma_{yz}(0) = 0$.

Обсудим более подробно окрестность ЭЦ слоя, где параметр адиабатичности много меньше единицы $\kappa \ll 1$ и, как следствие, применимо адиабатическое приближение. Мы можем найти решение уравнения (3.41) в этой области в виде:

$$s(\tau) = \left(2I_s / \sqrt{\Omega(\tau)}\right) \sin(\theta), \quad c(\tau) = \left(2I_c / \sqrt{\Omega(\tau)}\right) \cos(\theta + \mu), \quad (3.57)$$

где $\theta = \int_0^\tau \Omega(\tau') d\tau' + \alpha$, $I_{s,c}$, μ - константы, удовлетворяющие условию

$$4I_s I_c \cos(\mu) = 1, \quad (3.58)$$

которое следует из равенства единице вронскиана $w(c, s) = 1$. Подставим (3.57) в (3.55). Введем новые переменные $\xi = \Omega^{1/2} \bar{y}$, $\xi_0 = (I_c \cos(\mu) / I_s)^{1/2} \bar{y}'$ и, используя (3.58), в итоге получим:

$$G(\tau, \bar{y}, \bar{y}') = \frac{\Omega^{1/4}}{(2\pi i I_s \sin(\theta))^{1/2}} \exp\left(-i \cdot \tan(\mu) \xi_0^2 + \frac{i(\xi^2 + \xi_0^2) \cos(\theta) - 2\xi \xi_0}{\sin(\theta)}\right).$$

Обозначим $\exp(-i\theta) = z$. Используя известную формулу суммирования [105]:

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 - 2xyz}{1-z^2}\right) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) u_n(y),$$

где $u_n(\xi) = (\pi)^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} H_n(\xi) \exp(-\xi^2/2)$ и H_n - полином Эрмита, получим окончательно:

$$G(\tau, \bar{y}, \bar{y}') = \exp\left(-i \cdot \tan(\mu) \frac{\xi_0^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-i(n+1/2)\theta) \psi_n(\bar{y}) \psi_n'(\bar{y}'), \quad (3.59)$$

где $\psi_n(\bar{y}) = \Omega^{1/4} u_n(\xi)$ и $\psi_n'(\bar{y}') = (I_c \cos(\mu) / I_s)^{1/4} u_n(\xi_0)$ - ортогональные функции, нормированные на 1. Функция ψ_n является решением уравнения

$$\hat{K} \psi_n = K_n \psi_n, \quad (3.60)$$

где $K_n = (2n+1)\Omega$. Согласно (3.60) область полоидальной локализации $\Delta \bar{y}_n$ решения ψ_n можно оценить как $\Delta \bar{y}_n \approx ((2n+1)/\Omega)^{1/2} \approx ((2n+1)b_{eff}\beta)^{1/2} \delta^{-1/4}$. Подставим (3.59) в (3.56):

$$A(\tau, \bar{y}, z) = \exp\left(i \frac{n_{x0} a^2}{2R_F} \bar{y}^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(s) \psi_n(\bar{y}, \tau) \exp\left(-i\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right), \quad (3.61)$$

$$C_n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i \cdot \tan(\mu) \frac{\xi_0^2}{2}\right) A_{in}\left(\bar{y}', s + \frac{B_r \bar{y}'}{B}\right) \psi_n'(\bar{y}') d\bar{y}'. \quad (3.62)$$

огласно (3.60), каждый член в выражении (3.61), представляет собой приближенное решение уравнения (3.53), в котором положено $d\Omega/d\tau = 0$, что является адекватным приближением при выполнении условия адиабатичности $\kappa \ll 1$. Таким образом, найденное решение в окрестности ЭЦ резонанса представляет собой суперпозицию адиабатических собственных мод, каждая из которых распространяется вдоль оси x и переносит энергию независимо от других. ВКБ приближение применимо только при описании высоких собственных мод. В предельном случае $n \gg 1$ спектр I становится непрерывным в соответствии с классическим геометрико-оптическим представлением. Однако ВКБ приближение неприменимо для описания первых членов в сумме в выражении (3.61). Эта часть решения представляет особый интерес, поскольку

она представляет собой слабозатухающие моды, проникающие глубже всего в плазму. Зависимость спектра собственных мод от начальных условий продемонстрирована на рисунке 3.11 для Гауссовского пучка, вытянутого в тороидальном направлении ($\sigma_{yz}(0) = 0$, $\sigma_{zz}(0) \ll \sigma_{yy}(0)$) для условий, аналогичных тем, что и на рисунке 3.6. Можно видеть, что для пучка шириной несколько сантиметров, значительная часть вложенной мощности отвечает модам, которые не описываются в ВКБ приближении. В случае выпуклых магнитных поверхностей анализ может быть проведен тем же путем. Однако, вместо «потенциальной ямы» гамильтониан (3.42) будет описывать «потенциальный горб». В этом случае спектр полученных решений окажется непрерывным. Само же решение адекватно описывается в рамках ВКБ приближения.

3.2.2. Затухание собственных мод

В ВКБ приближении затухание ЭБ волны описывается малой мнимой добавкой $\gamma = -(\partial \varepsilon_0 / \partial n_{x0})^{-1} \text{Im } \varepsilon$ к ее волновому вектору n_x . Оптическая толщина ЭЦ слоя имеет вид:

$$\Gamma(x) = 2 \int_x^{x_0} \gamma(x') dx', \quad (3.63)$$

где x_0 - координата стартовой точки и интегрирование выполняется вдоль лучевой траектории. Вычисляя $\text{Im } \varepsilon$, ограничимся вкладом резонансного члена в бесконечной сумме по номеру циклотронной гармоники $n = m$ в выражении (3.31). Не требуя выполнения условия $n_{\parallel}^2 \gg \beta^2$, выполним в (3.31) замену согласно (3.44), что приводит к явному выражению для функции $\text{Im } \varepsilon = \Xi_m \text{Im } \tilde{Z} / \beta^2$, которое подставим в выражение (3.63):

$$\Gamma(\tau) = 2 \int_0^{\tau} \frac{\delta^3 \text{Im } \tilde{Z}}{\beta^4} d\tau'. \quad (3.64)$$

Напомним, что согласно результатам работы [19a], представленным в разделе 3.1, функция $\text{Im } \tilde{Z}$ может быть представлена в явном виде:

$$\begin{cases} \text{Im } \tilde{Z}(\Delta, N) = -2\pi e^{-2(N^2 - \Delta)} I_0(2N\sqrt{N^2 - 2\Delta}), & N^2 > 2\Delta, \\ \text{Im } \tilde{Z}(\Delta, N) = 0, & N^2 < 2\Delta. \end{cases}$$

В силу присутствия из-за релятивистской поправки отсечки у профиля энерговыведения, волны с малыми продольными волновыми векторами $n_{\parallel} \leq \beta$ ($N \leq 1$) в одномерной модели могут поглощаться только в релятивистском циклотронном слое, т.е. при отстройке от резонанса на

величину не больше, чем $x \leq L_0 \beta^2$. В этой области $\text{Re } n_x \sim \text{Im } n_x$ и затухание нельзя описывать по теории возмущения. Однако данная одномерная картина распространения ЭБВ нарушается в экваториальной плоскости из-за возбуждения плазменного волновода и формирования собственных мод ЭБВ. В рамках полноволнового решения затухание собственных мод может быть найдено путем включения $\text{Im } \varepsilon$ в уравнение (3.53). Итак, мы учтем дополнительный член \hat{V} , который описывает затухание, в гамильтониане $\hat{K} \rightarrow \hat{K} + \hat{V}$, где

$$\hat{V}(\bar{y}, \bar{y}') \Psi(\bar{y}') = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial n_{x0}} \right)^{-1} \int \text{Im } \varepsilon(n_{\parallel}) \exp(in_{\parallel}(\bar{y} - \bar{y}')) \Psi(\bar{y}') dn_{\parallel} d\bar{y}'.$$

Далее, рассматривая мнимую добавку к Гамильтониану как возмущение, найдем мнимую поправку к собственной частоте волновода γ_n по теории возмущений:

$$\gamma_n(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{d\tau}{dx} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial n_{x0}} \right)^{-1} \int \text{Im } \varepsilon(n_{\parallel}) \exp(in_{\parallel}(\bar{y} - \bar{y}')) \psi_n(\bar{y}) \psi_n(\bar{y}') dn_{\parallel} d\bar{y} d\bar{y}'. \quad (3.65)$$

Поскольку функция $\text{Im } \varepsilon$ не зависит от координаты \bar{y} и \bar{y}' , выполним интегрирование по этим переменным: $\int_{-\infty}^{\infty} u_n(\Omega^{1/2} \bar{y}) e^{im_{\parallel} \bar{y}} d\bar{y} = (2\pi)^{1/2} u_n(\Omega^{-1/2} n_{\parallel}) i^n$. В итоге, получим $\gamma_n = \delta^3 \beta^{-4} \langle \text{Im } \tilde{Z} \rangle_n$, где $\langle \text{Im } \tilde{Z} \rangle_n = \Omega^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im}(\tilde{Z}) \cdot u_n^2(\Omega^{-1/2} n_{\parallel}) dn_{\parallel} = 2\Omega^{-1/2} \int_{\sqrt{2}\delta}^{\infty} \text{Im}(\tilde{Z}) \cdot u_n^2(\Omega^{-1/2} n_{\parallel}) dn_{\parallel}$. (3.66)

Эволюция потока энергии $P(\tau)$ пучка ЭБ волн, может быть описана в виде:

$$P(\tau) = P_i \sum_{n=0}^{\infty} g_n \exp(-\Gamma_n), \quad \Gamma_n = 2 \int_0^{\tau} \gamma_n(\tau') d\tau'.$$

Функция $\Omega^{-1/2} u_n^2(\Omega^{-1/2} n_{\parallel})$ в выражении (3.66) описывает спектр собственных функций ψ_n по n_{\parallel} . Характерная ширина спектра $(\Delta n_{\parallel})_n \sim [(2n+1)\Omega]^{1/2} \sim [(2n+1)\sqrt{\Delta}/b_{\text{eff}}]^{1/2}$. При выполнении условия $n_{\parallel}^2 > (\Delta n_{\parallel})_n^2$, функция ψ_n становится экспоненциально малой. Поскольку собственная функция ψ_n для фиксированной моды n в выражении (3.66) ограничена при всех продольных коэффициентах преломления n_{\parallel} , то функция $\langle \tilde{Z} \rangle_n$ оказывается ограниченной для всех аргументов Δ . В результате декремент затухания γ_n не имеет отсечки по координате x . На рисунке 3.12 приведено сравнение профилей энерговыделения, которые вычислены в лучевом и полноволновом приближениях для параметров $T_e \sim 800 \text{ эВ}$, $b_{\text{eff}} \beta^2 \approx 0.8$. Резкие пики на профиле энерговыделения, вычисленного для лучей, соответствуют моментам времени τ , когда осциллирующая величина n_{\parallel} (см. рисунок 3.9) имеет максимумы.

Обсудим далее затухание собственных мод с большим собственным числом и сравним его

с затуханием, вычисленным вдоль лучевых траекторий. Используя ВКБ асимптотику собственных функций u_n в выражении (3.66), получим

$$\langle \text{Im } \tilde{Z} \rangle_n = \langle \text{Im } \tilde{Z} \rangle_{Tn},$$

где $\langle \dots \rangle_{Tn}$ - усреднение по периоду осцилляций $T = 2\pi / \Omega$ при $I = n + 1/2$. С другой стороны, используя (3.64), получим:

$$\Gamma = 2 \int_0^{\tau} \frac{\delta^3 \langle \text{Im } \tilde{Z} \rangle_{\tau}}{\beta^4} d\tau'. \quad (3.67)$$

Таким образом, затухание мод с высоким собственным числом адекватно описывается в рамках ВКБ приближения (т.е. с помощью интегрирования вдоль лучевых траекторий).

3.2.3. Выводы

В настоящем разделе развита линейная теория ЭБ волн в двумерно-неоднородной плазме сферического токамака. Показано, что в случае вогнутых магнитных поверхностей в окрестности экваториальной плоскости имеет место возбуждения плазменного волновода для ЭБВ, параметры которого плавно меняются вдоль большого радиуса. Найдено решение полноволновой задачи с учетом этой специфической неоднородности плазмы. Показано, что поглощение собственных мод этого волновода с малым собственным числом не может быть описано в рамках ВКБ приближения, т.е. с помощью интегрирования вдоль лучевых траекторий. При этом затухание мод с высоким собственным числом адекватно описывается в рамках ВКБ приближения.

В случае выпуклой магнитной поверхности лучевые траектории ЭБВ аperiodичные. В окрестности резонансной поверхности отклонение луча от экваториальной плоскости и значение $|n_{\parallel}|$, параметра ответственного за эффективность ЭЦ затухания, растут по экспоненциальному закону. Поведение ЭБ волн в этом случае адекватно описывается в рамках квазиклассического приближения.

Основные публикации:

Piliya A.D., Popov A.Yu. and Tregubova E.N. Electron Bernstein waves in the mid-plane region of a spherical tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2005. - Vol.47. - P.379.

3.3. Теория распространения и затухания электронных бернштейновских волн в сферических токамаках при немонотонном профиле модуля магнитного поля

В токамаках с малым аспектным отношением возможны равновесные магнитные конфигурации, при которых профиль модуля магнитного поля вдоль большого радиуса является немонотонным. Такое поведение профиля модуля магнитного поля, пример которого показан на рисунке 3.14, приводит к изменению характера поведения дисперсионных кривых ЭБ волны, нарушению в окрестности ЭЦ резонанса ВКБ приближения при описании этих волн и частичному отражению ЭБ волны от резонансного слоя. В настоящем разделе приведены результаты анализа этих эффектов, полученные в работе [21a].

3.3.1. Описание электронных бернштейновских волн в рамках электростатического приближения

Рассмотрим более подробно поведение пучка ЭБВ в области между ВГР и поверхностью ЭЦ гармоник в экваториальной плоскости. Введем декартову систему координат (x, η, ξ) , где x – ось вдоль большого радиуса R в экваториальной плоскости, $\{\eta, \xi\}$ – поперечная и продольная координаты, соответственно. Далее, будем считать, что все координаты нормированы на величину c/ω . Для описания ЭБ волны будем использовать электростатическое приближение, в рамках которого дисперсионное уравнение имеет вид $\varepsilon(n_{\perp}, n_{\parallel}) = 0$, где n_{\perp} и n_{\parallel} – перпендикулярная и продольная компоненты коэффициента преломления $\mathbf{n} = \mathbf{kc} / \omega$. Далее, мы будем рассматривать волны, для которых выполняется следующее неравенство $n_x \approx n_{\perp} \gg n_{\parallel}$. В этом случае диэлектрическая функция ε может быть записана в виде:

$$\varepsilon = 1 + v \frac{q^2}{\lambda} \left[1 - \frac{e^{-\lambda}}{\gamma} \sum_{s=-\infty}^{\infty} I_s(\lambda) Z_s \right], \quad (3.68)$$

где $\lambda = (n_x q \beta)^2 / 2$, $v = \omega_{pe}^2 / \omega^2$, $\beta = \sqrt{2T_e / m_e} / c$, $Z_s = Z(\xi_s)$ – плазменная дисперсионная функция [92], $q = \omega / \omega_{ce}$, $\xi_s = (q - s) / \gamma q$, $\gamma = \beta n_{\parallel} = \beta^2 N$, $N = n_{\parallel} / \beta$. В окрестности ЭЦ резонанса $q = s$ мы можем представить функцию $q(x)$ в виде:

$$q = s \left[1 - x / l_B \right], \quad (3.69)$$

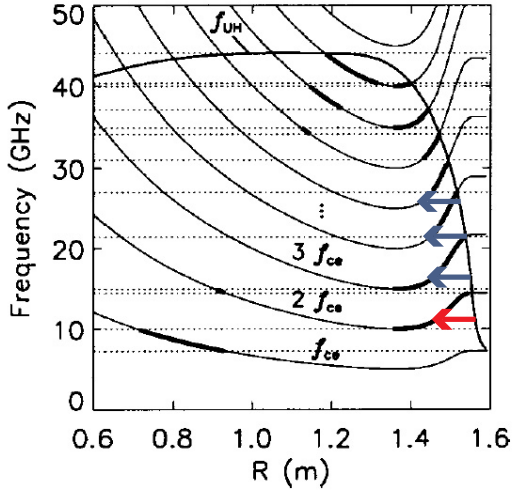


Рисунок 3.13. Зависимость ЭЦ частоты $\omega_{ce}/2\pi$, гармоник ЭЦ частоты $n\omega_{ce}/2\pi$, верхней гибридной частоты $\omega_{uh}/2\pi$ от большого радиуса в экваториальной плоскости сферического токамака NSTX. Стрелками показаны случаи доступности поверхности ЭЦ резонанса со стороны сильного магнитного поля [106].

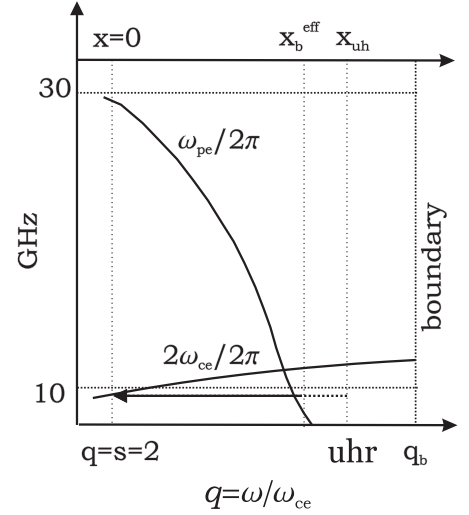


Рисунок 3.14. Иллюстрация модели. Поверхность с координатой $x=x_b^{eff}$ служит границей, с которой в плазму запускается пучок ЭБ волн.

где $l_B = B |dB/dx|_{ECR}^{-1}$. В безразмерной форме l_B пропорциональна частоте волн. Введем обозначение $l_B = ql_{B0}$, где длина l_{B0} нормирована на величину c/ω_{ce} . Используя (3.69), получим $\xi_s = -x/L_s$, где $L_s = \gamma sl_{B0}$ - характерный размер ЭЦ слоя. В релятивистском случае, $n_{||} \leq \beta$, размер ЭЦ слоя равен $L_s = s\beta^2 l_{B0}$. Вне ЭЦ слоя $|\xi_s| \gg 1$ дисперсионная функция (3.68) имеет вид:

$$\varepsilon = 1 - \frac{2\nu q^2}{\lambda} e^{-\lambda} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^2}{q^2 - s^2} I_s(\lambda). \quad (3.70)$$

Далее, рассмотрим более подробно случай второй ЭЦ гармоники $q = 2$. В окрестности ВГР, где λ - малый параметр, разложим (3.70) в ряд:

$$\varepsilon = \varepsilon^{(C)} - \nu \frac{3q^2}{(q^2 - 1)(q^2 - 4)} \lambda = 0, \quad (3.71)$$

где $\varepsilon^{(C)} = 1 - \nu q^2 / (q^2 - 1)$ - выражение для дисперсионной функции ε в холодном приближении.

Решение (3.71) имеет вид:

$$n_x^2 = - \frac{2(q^2 - 1)(4 - q^2)}{3\nu q^4 \beta^2} \varepsilon^{(C)}. \quad (3.72)$$

Характерный масштаб изменения $\varepsilon^{(C)}(x)$ в окрестности ВГР:

$$\left[\frac{1}{l_n} - \frac{2}{l_B(q_b^2 - 1)} \right]^{-1}, \quad (3.73)$$

где $l_n = |n_e / (dn_e / dx)|$ и q_b - значение параметра q на границе. На периферии токамаков с малым аспектным отношением выполняется неравенство $l_n \ll l_B$, поэтому можно считать, что величина, определяемая выражением (3.73) положительная. Соответственно, ЭБ волна может распространяться в области, где выполняется условие $\varepsilon^{(C)}(x) < 0$. Эта область лежит между ВГР и ЭЦ резонансом (не имеет значения, о каком номере ЭЦ гармоники идет речь). Для того чтобы избежать обсуждения механизма возбуждения ЭБ волны в окрестности ВГР, поставим границу в точке x_b^{eff} в окрестности ВГР. Будем считать, что с этой границы в плазму эмитируется пучок ЭБ волн с достаточно большим показателем преломления n_x , что гарантирует применимость ВКБ приближения (см. рисунок 3.14). ЭБ волны, падающие, в свою очередь, на эту границу со стороны большей плотности, частично трансформируются в электромагнитные волны и частично отражаются обратно в плазму. Коэффициенты линейной связи между электромагнитной веткой колебаний на периферии плазмы и ЭБ волной были найдены в работе [107, 108].

Обсудим поведение ЭБВ в окрестности второй гармоники ЭЦ резонанса. В этой области безразмерный параметр ν много больше единицы, $\nu \gg 1$, и решение дисперсионного уравнения имеет вид:

$$n_x^2 \approx \frac{2(4 - q^2)}{3q^2\beta^2}. \quad (3.74)$$

Подставим (3.69) в (3.74) и получим

$$n_x^2 \approx \frac{2|x|}{3\beta^2 l_{B0}}. \quad (3.75)$$

Таким образом, ЭБ волна в рамках электростатического приближения оказывается локализованной между двумя «отсечками», первая из которых - ВГР, $\varepsilon^{(C)}(x) = 0$, вторая - поверхность ЭЦ резонанса, $q = 2$. Для качественной оценки поведения ЭБВ будем считать, что параметр λ остается малым во всей области между этими «отсечками». Это означает, что решение (3.72) оказывается верным во всей области между ЭЦР и ВГР и $n_x \sim \beta^{-1}$. Решение дисперсионного уравнения (3.70) показано на рисунке 3.15 пунктирной линией.

Рассмотрим далее произвольную гармонику ЭЦ резонанса $s = p$. В этом случае в окрестности ЭЦ поверхности $|p - q|/q \ll 1$ резонансный член $s = p$ из бесконечной суммы (3.70) вносит доминирующий вклад. Поэтому, раскладывая (3.70) в ряд по параметру λ , мы

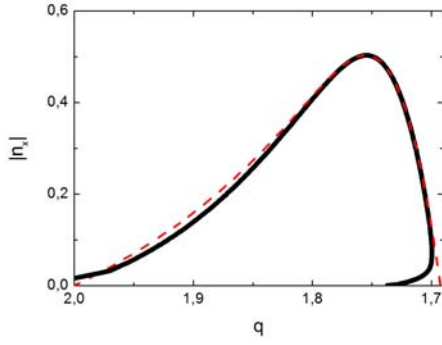


Рисунок 3.15. Решение электростатического уравнения (пунктирная линия) (3.72) и полного дисперсионного уравнения (сплошная линия) (3.81).

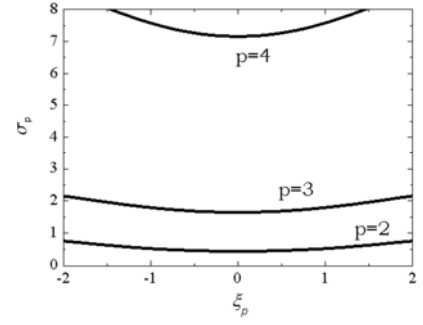


Рисунок 3.16. Зависимость функции σ_p (3.85) от аргумента ξ_p для условий токамака MAST в нерелятивистском случае $N = 2$.

можем оставить первый неисчезающий резонансный член порядка $(p-1)$ при резонансном вкладе в бесконечную сумму по номерам ЭЦ гармоник, нерезонансный член при $\lambda=0$ и опустить члены порядка $(p-1)$ и ниже в нерезонансных вкладах. В результате мы получим:

$$n_x^2 = \frac{2}{\beta^2 p^2} \left[\frac{2(p-2)!}{p+1} \right]^{1/p-1} \left[\frac{x}{l_{B0}} \right]^{1/p-1}. \quad (3.76)$$

При $p=2$ выражение (3.76), полученное в рамках электростатического приближения, сводится к выражению (3.74). Отметим, что электростатическое приближение применимо при выполнении следующего неравенства $n_x^2 \gg |\varepsilon|$. В случае $\nu \gg 1$ критерий применимости электростатического приближения удобнее представить в виде:

$$n_x^2 \gg \nu. \quad (3.77)$$

Данное неравенство нарушается в окрестности ЭЦ резонанса и для описания ЭБВ требуется анализ волновых уравнений.

3.3.2. Описание электронных бернштейновских волн в окрестности ЭЦ резонанса

Рассмотрим систему уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} (n_{\parallel}^2 - \varepsilon_{\perp})E_x - igE_{\eta} - n_{\parallel}n_{\perp}E_{\xi} = 0, \\ igE_x + (n^2 - \varepsilon_{\perp})E_{\eta} = 0, \\ -n_{\parallel}n_{\perp}E_x + (n_{\parallel}^2 - \varepsilon_{\xi})E_{\xi} = 0, \end{cases} \quad (3.78)$$

где $n_{\perp} = n_x$. В окрестности ЭЦ резонанса $q = 2$, где $n_{\perp} / v \ll 1$, из третьего уравнения системы (3.78) видно, что $E_{\xi} \ll E_x$. Опустим E_{ξ} и n_{\parallel}^2 , что в итоге приведет к дисперсионному уравнению:

$$D = n_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\perp} - g)(\varepsilon_{\perp} + g) = 0. \quad (3.79)$$

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости в окрестности резонанса $q = 2$ имеют вид:

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\perp}^{(C)} - \delta\varepsilon, \quad g = g^{(C)} + \delta\varepsilon, \quad g^{(C)} = v \frac{q}{q^2 - 1}, \quad \delta\varepsilon = \frac{v}{4} \frac{\lambda}{n_{\parallel} \beta} Z(\xi_2). \quad (3.80)$$

Подставим (3.80) в (3.79) и получим приближенное дисперсионное уравнение:

$$D_0 = n_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} + v^2 \frac{q^2}{q^2 - 1} \left[1 + \frac{n_{\perp}^2 \beta^2}{4} \frac{Z(\xi_2)}{n_{\parallel} \beta} \right] = 0, \quad (3.81)$$

которое верно при выполнении неравенства $n_{\perp} < v$. Поскольку электростатическое приближение (3.71) выполняется при $n_{\perp}^2 > v$, то можно выделить пространственную область, где электростатическое и полноволновое приближение выполняются одновременно: $v^2 > n_{\perp}^2 > v$. Поскольку в этом случае второй член в уравнении (3.81) мал по сравнению с первым, то (3.81) сводится к уравнению (3.71), которое остается верным вплоть до ВГР. В окрестности ЭЦ резонанса $q = 2$ второй член в дисперсионном уравнении (3.81) оказывается доминирующим. Полученное дисперсионное уравнение может быть использовано и в случае, когда важным становится релятивистское уширение ЭЦ резонанса, т.е. при квазиперечном распространении ЭВВ $n_{\parallel} \leq \beta$. В этом случае надо заменить плазменную дисперсионную функцию Z ее релятивистским аналогом [93, 96]. Для первого «электростатического» члена можно использовать точное разложение $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{xx}(n_{\perp}, 0)$ без разложения в ряд по параметру λ , поскольку этот член играет роль только вдали от ЭЦ резонанса. Таким образом, уравнение (3.81), в котором первый член $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{xx}(n_{\perp}, 0)$ не разлагается в ряд по параметру λ , представляет собой интерполяционное уравнение. Это уравнение верно во всей области между ЭЦ резонансом $q = 2$ и окрестностью ВГР при $n_{\parallel} \ll 1$ и большой плотности плазмы $v \gg 1$ в ЭЦ резонансе $q = 2$. На рисунке 3.15 приведено сравнение решения электростатического уравнения (пунктирная линия) (3.72) и полного дисперсионного уравнения (сплошная линия) (3.81). В ЭЦ резонансном слое решение уравнения (3.81) имеет вид:

$$n_x \approx \pm \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{n_{\parallel} \beta}{Z(|\xi_2|)}}, \quad (3.82)$$

т.е. оценка величины безразмерного коэффициента преломления на границе ЭЦ слоя дается выражением: $|n_x| \sim (n_{\parallel} / \beta)^{1/2}$. Приближение геометрической оптики в области резонанса остается корректным пока безразмерный параметр $\sigma_2 = |n_x| L_2$, где $L_p = \beta n_{\parallel} p l_{B0}$, $p = 2$ - размер ЭЦ слоя для $q = 2$, много больше 1:

$$\sigma_2 = \frac{4\beta^{1/2} n_{\parallel}^{3/2} l_{B0}}{|Z(\xi_2)|^{1/2}} = \frac{4\beta^2 N^{3/2} l_{B0}}{|Z(\xi_2)|^{1/2}} \gg 1 \quad (3.83).$$

В релятивистском случае в выражении $L_p = \beta n_{\parallel} p l_{B0}$ и в неравенстве (3.83) надо сделать замену: $n_{\parallel} \rightarrow \beta$. В случае произвольной гармоники ЭЦ резонанса $q = p$ выражения (3.82) и (3.83) можно обобщить:

$$n_x = \pm \frac{2(p-2)!^{1/2(p-1)}}{\beta} \left(\frac{n_{\parallel} \beta}{Z(\xi_p)} \right)^{1/2(p-1)}, \quad (3.84)$$

$$\sigma_p = 2(p-2)!^{1/2(p-1)} \left(\frac{n_{\parallel} \beta}{Z(\xi_p)} \right)^{1/2(p-1)} n_{\parallel} p l_{B0} \gg 1. \quad (3.85)$$

Зависимость σ_p (3.85) от аргумента ξ_p для условий токамака MAST в нерелятивистском случае $N = 2$ показана на рисунке 3.16. Из рисунка видно, что параметр σ_p имеет минимум в ЭЦ слое. Кроме того, следует отметить, что для низких гармоник $p = 2, 3$ нарушается применимость ВКБ приближения.

3.3.3. Полноволновое описание электронных бернштейновских волн в окрестности ЭЦ резонанса

Как было отмечено в предыдущем параграфе, ВКБ приближение при описании ЭБ волны нарушается в окрестности ЭЦ слоя для низких гармоник ЭЦ резонанса. Нарушение ВКБ приближения обычно свидетельствует о наличии отражения падающей волны. Чтобы оценить величину этого отражения обсудим решение укороченного волнового уравнения в этой области. Исходя из системы уравнений (3.78), получим интегральное уравнение для компоненты поля E_{η} ЭБ волны в слабо неоднородной плазме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(x, x') E_{\eta}(x') dx' = 0, \quad (3.86)$$

$$D(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn_x}{2\pi} D(n_x, X) \exp(in_x \rho) \quad (3.87)$$

и $X = (x + x')/2 = x - \rho/2$, $\rho = x - x'$. Функция $D(n_x, x)$ - дисперсионная функция, которая определена в выражении (3.79). Подставим выражение (3.87) в уравнение (3.86). В итоге, получим интегральное уравнение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(n_x, x - \rho/2) E_\eta(x - \rho) \exp(in_x \rho) d\rho dn_x = 0. \quad (3.88)$$

Далее, разложим функцию $D(n_x, x - \rho/2) E_\eta(x - \rho)$ в ряд по параметру ρ и выполним почленное интегрирование по переменной n_x . В результате получим:

$$\int d\rho \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \rho^m} \left[\frac{\partial^m}{\partial n_x^m} D\left(n_x, x - \frac{\rho}{2}\right) E_\eta(x - \rho) \right]_{\substack{n_x=0 \\ \rho=0}} = 0. \quad (3.89)$$

Окончательно, приближенное волновое уравнение имеет вид:

$$\kappa_p^{2(p-1)} E_\eta - \frac{\partial^{2p-2}}{\partial \zeta^{2p-2}} \left(Z(\zeta - \zeta/2) E_\eta(\zeta - \zeta) \right)_{\zeta=0} = 0, \quad (3.90)$$

где использованы новые переменные: $x \rightarrow \zeta \equiv (-x/L_p)$, $\rho \rightarrow \zeta \equiv \rho/L_p$ и

$\kappa_p^2 = 4((p-2)!) \frac{1}{(\beta^{p-1})} (n_{||}/\beta)^{\frac{2p-1}{p-1}} \beta^{\frac{2p}{p-1}} l_{B0}^2$. Рассмотрим более подробно наиболее интересный случай

второй ЭЦ гармоники $p = 2$. Сделаем функциональную замену:

$$E_\eta = Z^{-1/2} F. \quad (3.91)$$

Подставим (3.91) в уравнение (3.90) и получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} F(\zeta) + Q^2(\zeta) F(\zeta) = 0 \quad (3.92)$$

с комплексным потенциалом

$$Q^2(\zeta) = \kappa_2^2 Z(\zeta)^{-1} - \frac{1}{4} \frac{d^2}{d\zeta^2} \ln Z(\zeta). \quad (3.93)$$

Используя асимптотическое выражение дисперсионной функции Z при $|\zeta| \gg 1$, легко показать, что первый член в потенциале (3.93) растет пропорционально $|\zeta|$, в то время как второй член убывает по закону $|\zeta|^{-2}$. В результате, в асимптотической области комплексный потенциал имеет вид $Q^2(\zeta) \approx n_x^2(\zeta) = \kappa_2^2 Z^{-1}$ и уравнение (3.92) имеет два линейно независимых частных ВКБ решения:

$$F_1 = \sqrt{\frac{1}{n_x}} \exp\left(-i \int^x n_x dx'\right), \quad F_2 = \sqrt{\frac{1}{n_x}} \exp\left(i \int^x n_x dx'\right), \quad (3.94)$$

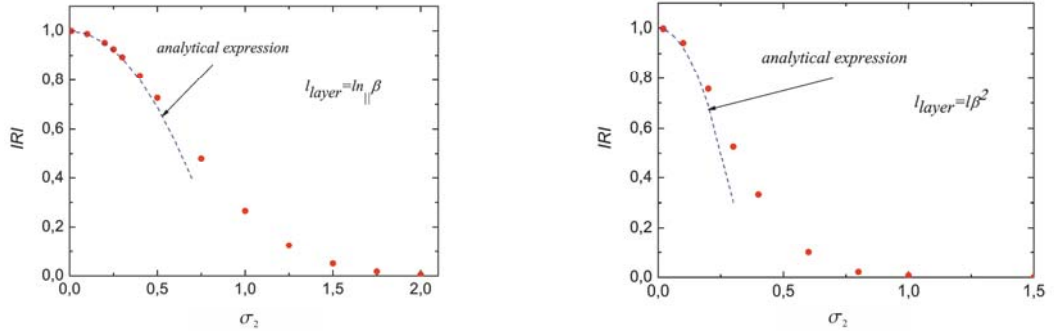


Рисунок 3.17. Зависимости коэффициента отражения $|R|$ от коэффициента σ_2 в нерелятивистском (левая панель, $N = 2$) и релятивистском (правая панель, $N = 0.5$) случаях. Аналитические зависимости (3.100) показаны штрихованными линиями.

первое из которых описывает волну, падающую с поверхности ВГР на ЭЦ слой, второе – волну, уходящую от ЭЦ слоя к поверхности ВГР. Полное решение уравнения (3.92) при $\zeta \gg 1$ можно представить в виде:

$$F = F_1 + RF_2, \quad (3.95)$$

где $|R|^2$ - коэффициент отражения ЭБ волны, который зависит только от параметра κ_2 .

Запишем уравнение (3.92) в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} F(\zeta) + [n_{x0}^2(\zeta) + \delta n_x^2(\zeta)] F(\zeta) = 0, \quad (3.96)$$

где $n_{x0}^2(\zeta) = n_x^2(\zeta) - \delta n_x^2(\zeta)$ и $\delta n_x^2(\zeta) = n_x^{1/2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} n_x^{-1/2} \right)$. Прямой подстановкой легко проверить,

что решения (3.94) являются точными для уравнения:

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} F(\zeta) + n_{x0}^2(\zeta) F(\zeta) = 0 \quad (3.97)$$

и член $\delta n_x^2(\zeta)$ меньше по сравнению с членом $n_{x0}^2(\zeta)$ в $1/\sigma_2 \ll 1$ раз, если выполняется критерий применимости ВКБ приближения. В этом случае отражение имеет место из-за слабого нарушения ВКБ приближения. Коэффициент отражения может быть найден с использованием метода вариации произвольной постоянной в предположении, что решение нулевого порядка описывается функцией F_1 :

$$R = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta n_x^2(\zeta) |F_1(\zeta)|^2 d\zeta = \sigma_2^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} Z^{1/4} \right) Z^{1/4}(\zeta) \exp \left[-i\sigma_2 \int_{-\infty}^{\zeta} Z^{-1/2}(\zeta') d\zeta' \right] d\zeta. \quad (3.98)$$

В противоположном случае $\sigma_2 \leq 1$, ВКБ приближение не является применимым. Однако в этом случае потенциал уравнения (3.92) может быть представлен в виде:

$Q^2(\zeta) \approx \kappa_2^2 [\zeta - i \text{Im}(Z(\zeta)) \zeta^2]$, где второй член в квадратных скобках может быть рассмотрен как возмущение. Решением невозмущенного редуцированного уравнения (3.92)

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} F(\zeta) + \kappa_2^2 \zeta F(\zeta) = 0 \quad (3.99)$$

являются функции Эйри $\text{Ai}(\zeta)$ и $\text{Bi}(\zeta)$, а коэффициент отражения, который может быть найден методом вариации произвольной постоянной, имеет вид:

$$|R| \approx 1 - \left[\frac{\sigma_2}{a} \right]^2, \quad (3.100)$$

где $a^{-1} \approx 1.12$. В промежуточном диапазоне параметров $\sigma_2 > 1$ коэффициент отражения может быть найден численно.

В случае квазипоперечного распространения ЭБВ $N \leq 1$, когда играют роль релятивистские эффекты, плазменная дисперсионная функция Z должна быть заменена на релятивистскую дисперсионную функцию двух аргументов [96]. Далее, рассмотрим случай строго поперечного распространения ЭБВ $N = 0$. В этом случае функцию $Z(\zeta)$ в выражении (3.93) следует заменить релятивистской дисперсионной функцией одного аргумента [96]:

$$\bar{Z}(\zeta_p) = \sum_{l=0}^p (-\zeta_p)^l \frac{\Gamma(p+1/2-l)}{\Gamma(p+3/2)} - \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+3/2)} (-\zeta_p)^p Z(i\zeta_p^{1/2}), \zeta_p = \xi_p \Big|_{N=1/2} \quad (3.101)$$

Коэффициент κ_p в этом случае имеет вид

$$\kappa_p = 2^{-\frac{1}{2(p-1)}} \left((p-2)! \right)^{\frac{1}{2(p-1)}} \beta^{\frac{p}{p-1}} l_{B0} \quad (3.102)$$

и коэффициент отражения определяется выражением (3.100), в котором $a^{-1} \approx 2.8$. На рисунке 3.17 изображены зависимости коэффициента отражения R от функции σ_2 , которые получены в результате численного решения уравнения (3.92) в нерелятивистском случае (левая панель) и релятивистском случае (правая панель). Аналитические зависимости (3.100) показаны штрихованными линиями. Поскольку для параметров токамака MAST в нерелятивистском случае ($N = 2$) $\sigma_2 = 0.7 \div 1.1$, а в релятивистском случае ($N = 0.5$) $\sigma_2 = 0.27 \div 0.4$, видно, что до 20 % мощности ЭБВ может отражаться от ЭЦ слоя.

3.3.4. Выводы

В настоящем разделе показано, что в присутствии сильной неоднородности плотности плазмы и немоного профиля модуля магнитного поля возможно существование ЭБ волн

между поверхностью ВГР и гармониками ЭЦ резонанса. Эти волны описываются дисперсионным уравнением (3.81). В случае, если выполняется условие применимости ВКБ приближения (3.85), ЭБ волны практически полностью затухает в ЭЦ слое. Коэффициент отражения зависит от степени нарушения приближения геометрической области.

Основные публикации

Piliya A.D., Popov A.Yu. and Tregubova E.N. Electron Bernstein waves in a spherical tokamak with a magnetic well // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2005. - Vol.47. - P.2029.

4. Низкопороговая нелинейная трансформация пучков электромагнитных волн электронного циклотронного диапазона частот

В настоящее время ЭЦ нагрев плазмы широко применяется в экспериментах на стеллараторах и в токамаках как эффективный метод локального дополнительного нагрева электронной компоненты плазмы. Он также планируется для использования в токамаке - реакторе ITER как для нагрева плазмы, так и для контроля и подавления неоклассической тиринг - моды. Отметим, что эффективность этого метода базируется на использовании надежных и эффективных генераторов, - гиротронов, - которые позволяют возбуждать пучки ЭЦ волн с мощностью от 100 кВт до 1МВт в каждом. Согласно представлениям стандартной теории [109 - 120] мощность нагрева, даже если гиротроны объединены в группу, оказывается существенно ниже, чем пороги типичных параметрических неустойчивостей, которые могут сопровождать распространение волн электронного циклотронного диапазона частот. Это обусловлено большими конвективными потерями энергии возбуждаемых дочерних волн из области параметрического распада в направлении неоднородности. Заметим, что возбуждение параметрических неустойчивостей волны накачки при дополнительном СВЧ нагреве все же возможно, что было показано в экспериментах, где для нагрева электронов в различной постановке использовалась линейная трансформация необыкновенных волн в окрестности верхнего гибридного резонанса (ВГР) [121 - 123]. Параметрический распад необыкновенной волны приводит в этом случае к возбуждению дочерней нижегибридной (НГ) и электронной бернштейновской волны. В окрестности ВГР, где происходит распад, уменьшается групповая скорость волны накачки и возрастает ее амплитуда, что, в свою очередь, приводит к снижению порога возбуждения параметрической неустойчивости [124] и к появлению возможности превзойти этот порог в эксперименте. До последнего времени считалось, что традиционные методы ЭЦ нагрева плазмы является вполне рутинным, а распространение и поглощение необыкновенной волны на второй гармонике ЭЦ резонанса и обыкновенной волны на фундаментальной гармонике предсказуемы в деталях и описываются в рамках линейной теории распространения волн. Вместе с тем, в последнее время было получено много экспериментальных данных, свидетельствующих о наличии аномальных явлений, которые сопровождают распространение ЭЦ волны. К ним относятся, во-первых, наблюдение нагрева и генерации быстрых ионов в условиях экспериментов по ЭЦ нагреву, когда энергообмен между электронами и ионной компонентой пренебрежимо мал [125, 126]; во-вторых, эффект аномального отражения, обнаруженный в экспериментах по ЭЦ нагреву плазмы пучками

необыкновенных волн на второй ЭЦ гармонике мощностью 200-600 кВт [127, 128], который может быть интерпретирован как отражательная параметрическая неустойчивость волн накачки. Общим элементом этих наблюдений являлось наличие немоного профиля плотности плазмы. Причиной формирования немоного профиля плазмы могут служить различные физические механизмы. Среди них: аномальный конвективный вынос плазмы в результате так называемого «electron-pump-out» эффекта [125] при мощном ЭЦ нагреве, особенности удержания плазмы в локализованной турбулентной структуре, такой как филамент, блок, дрейфовый вихрь [126], или в магнитном острове [127 - 130]. Поскольку во всех перечисленных экспериментах [125 - 130] условие ВГР для ЭЦ волны не выполнялись, можно полагать, что значительное снижение порога параметрической неустойчивости вызвано новым неизученным механизмом и каким-то образом связано с наличием немоного профиля плотности плазмы.

В настоящей главе диссертации анализируются экспериментальные условия, при которых происходит существенное снижение порога параметрической неустойчивости по сравнению с предсказанием стандартной теории [118 - 120]. Рассматриваются различные сценарии низкорогового параметрического распада ЭЦ волны необыкновенной поляризации. Полученные результаты позволяют выяснить роль, которую играют или могут играть низкороговые параметрические распадные неустойчивости в энергетическом балансе при электронном циклотронном нагреве плазмы в существующих и будущих тороидальных магнитных ловушках.

4.1. Низкороговая неустойчивость индуцированного рассеяния «назад» необыкновенной волны

Красноречивым доказательством возбуждения нелинейных эффектов при СВЧ нагреве плазмы на второй гармонике ЭЦ резонанса волной необыкновенной поляризации являются наблюдение нелинейного рассеяния на токамаке TEXTOR [127, 128] в присутствии магнитного острова, O - точка которого совпадает с локальным максимумом плотности плазмы [129, 130]. Обсудим далее основные результаты, полученные в работах [22а - 25а]. Эти результаты объясняют параметрическое отражение ЭЦ волны необыкновенной поляризации как низкороговую неустойчивость волны накачки, которая сопровождается генерацией ионной бернштейновской (ИБ) волны и необыкновенной волны, распространяющейся в обратном направлении.

4.1.1. Уравнения для амплитуд волн, участвующих в распаде волны накачки

Рассмотрим модель плоскостойкой двумерно-неоднородной плазмы. Будем полагать, что градиент плотности направлен вдоль оси x , координаты y и z - имитируют линейные координаты в полоидальном и тороидальном направлении. Предположим, что ЭЦ волна необыкновенной поляризации, квадрат частоты которой много больше квадрата электронной плазменной частоты и электронной циклотронной частоты $\omega_i^2 \gg \omega_{pe}^2, \omega_{ce}^2$, возбуждается внешней антенной и распространяется в направлении x в экваториальной плоскости. В этом случае мы можем пренебречь зависимостью волновых векторов высокочастотных волн, k_{ix} и k_{sx} , от координаты x и представить пучок ЭЦ волн, распространяющихся от антенны внутрь плазмы поперек магнитного поля, в виде:

$$E_{iy} = \frac{a_i(y, z)}{2} \exp(ik_{ix}x - i\omega_i t) + c.c.,$$

где $c.c.$ - член, комплексно сопряженный первому члену, $a_i = a_0 \exp\left[-(y^2 + z^2)/(2w^2)\right]$, $a_0 = \sqrt{8\pi P_i / (\pi w^2 c)} = const$ - амплитуда, P_i - мощность, w - радиус пучка. Электрическое поле отраженной необыкновенной волны описывается уравнением:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_{sx}^2\right) E_{sy} = i \frac{4\pi\omega_s}{c^2} j_{sy}, \quad (4.1)$$

где нелинейная плотность тока в уравнении (4.1) есть произведение возмущения плотности электронов δn_Ω , вызванное присутствием низкочастотной $\Omega = \omega_i - \omega_s \ll \omega_i$ ИБ волны, и осцилляторной скорости u_{iy} в электрическом поле волны накачки, т.е. $j_{sy} = e\delta n_\Omega u_{iy}$. Поскольку ИБ волна с хорошей точностью является продольной (потенциальной)

$$\varphi = \frac{b}{2} \exp(-iq_{x0}x + ik_z z + i\Omega t) + c.c., \quad (4.2)$$

мы можем представить выражение для плотности нелинейного тока в виде:

$$j_{sy} = e\delta n_\Omega u_{iy} \simeq \frac{eq_{x0}^2}{8\pi m_e \omega_s} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} b a_i \exp(i(k_{ix} - q_{x0})x + ik_z z - i\omega_s t) + c.c., \quad (4.3)$$

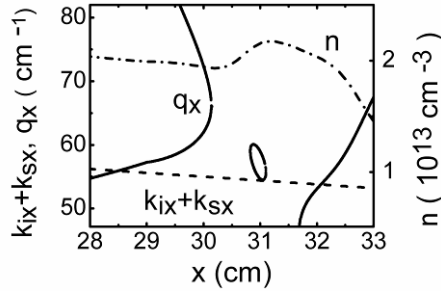


Рисунок 4.1. Дисперсионные кривые ИБ волны (сплошная линия) и профиль плотности плазмы (штрих-пунктирная линия) [129]. Пунктирная линия - $k_{ix} + k_{sx}$, $\Omega_0 = 0.86$ ГГц, $T_i = 500$ эВ.

Будем искать решение уравнения (4.1) в виде:

$$E_{sy} = \frac{a_s(x)}{2} \exp(-ik_{sx}x + ik_zz - i\omega_s t) + c.c., \quad (4.4)$$

где $a_s(x)$ - амплитуда, медленно меняющаяся в области параметрического распада в результате нелинейного взаимодействия. Подставим (4.4) в (4.1) и после интегрирования с учетом выражения (4.3) получим:

$$a_s(\mathbf{r}) \simeq \frac{ek_{sx}}{2m_e c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} a_i(y, z) \int_{-\infty}^x dx' b(x', y, z) \exp[-i\Delta K x'], \quad (4.5)$$

где $\Delta K = q_{x0} - k_{ix} - k_{sx}$. Отметим, что амплитуда дочерней СВЧ волны зависит не только от радиальной координаты, но и адиабатически от координат (y, z) , которые входят в решение через амплитуду волны накачки. Потенциал ИБ дочерней волны описывается интегральным уравнением:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' \hat{D}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}\right) \varphi(\mathbf{r}') = 4\pi\rho_{\Omega}. \quad (4.6)$$

Нелинейная плотность заряда ρ_{Ω} в уравнении (4.6) индуцируется в результате нелинейного взаимодействия волны накачки и отраженной волны (результат действия силы Миллера) и дается выражением [144]:

$$\rho_{\Omega} = \frac{e}{4\pi m_e} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 \omega_i^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[E_{iy}^* \frac{\partial E_{sy}}{\partial x} + E_{sy} \frac{\partial E_{iy}^*}{\partial x} \right]. \quad (4.7)$$

В слабо неоднородной плазме ядро интегрального оператора $\hat{D}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',(\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2)$ в уравнении (4.6) зависит преимущественно от разностного аргумента $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Зависимость этой функции от аргумента $(\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2$, который описывает неоднородность среды, значительно более слабая. Это позволяет нам представить ядро интегрального оператора в виде:

$$\hat{D}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\frac{\mathbf{r}+\mathbf{r}'}{2}\right)=(2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{\infty}D\left(\mathbf{q},\frac{\mathbf{r}+\mathbf{r}'}{2}\right)\exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]d\mathbf{q}, \quad (4.8)$$

где $D(\mathbf{q})=D'(\mathbf{q})+iD''(\mathbf{q})$, $D'(\mathbf{q})=q^2+\chi_e(\mathbf{q})+\chi_i(\mathbf{q})$ - действительная часть дисперсионной функции,

$$\chi_e=q_{\perp}^2\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2}-q_{\parallel}^2\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2}, \quad \chi_i=\frac{2\omega_{pi}^2}{v_{ii}^2}\left[1-X\left(\frac{\Omega}{q_{\perp}v_{ii}}\right)-\cot\left(\frac{\pi\Omega}{\omega_{ci}}\right)Y\left(\frac{\Omega}{q_{\perp}v_{ii}}\right)\right] \quad (4.9)$$

- электронная и ионная [131] восприимчивости в однородной плазме, $q_{\parallel}=|\mathbf{q}\cdot\mathbf{H}|/H$,

$$q_{\perp}=\sqrt{q^2-q_{\parallel}^2}, \quad \mathbf{b}=\mathbf{B}/B \quad \text{и} \quad X(\xi)-iY(\xi)=\frac{\xi}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-t^2)}{\xi-t}dt. \quad \text{Мнимая часть дисперсионной}$$

функции ИБ волны D'' имеет вид:

$$D''\simeq\frac{2\omega_{pe}^2}{v_{ie}^2}\frac{\sqrt{\pi}\Omega}{|q_{\parallel}v_{ie}}\exp\left(-\frac{\Omega^2}{q_{\parallel}^2v_{ie}^2}\right)+ \frac{2\omega_{pi}^2}{v_{ii}^2}Y\left(\frac{\Omega}{q_{\perp}v_{ii}}\right)\left[\frac{\pi}{\omega_{ci}}\sec^2\left(\pi\frac{\Omega_0}{\omega_{ci}}\right)v_{ii}\left(\frac{\Omega}{q_{\perp}}\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\omega_{ci}}{|q_{\parallel}v_{ii}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\Omega-m\omega_{ci})^2}{q_{\parallel}^2v_{ii}^2}\right)\right], \quad (4.10)$$

где первый член описывает затухание Ландау на электронах, второй – затухание Ландау на ионах, которое не обнуляется полностью при учёте сбоя фазы циклотронного вращения резонансных частиц из-за ион - ионных столкновений, а третий – циклотронное затухание ИБ волны на высоких гармониках резонанса. Параметрическое взаимодействие значительно усиливается в области, где групповая скорость дочерней низкочастотной (ИБ) волны стремится к нулю. Поэтому мы будем искать решение уравнения (4.6) в окрестности точки поворота ИБ волны $x=x_0$. где $x_0=x_m+\delta x$, x_m - положение локального максимума плотности плазмы, $\delta x\ll\omega_{ci}a/\Omega$ и a - малый радиус установки. Из-за немонотонного профиля плотности плазмы возможно запираение ИБ волны в радиальном направлении (см. рисунок 4.1) и подавление соответствующих конвективных потерь. Полоидальная зависимость модуля магнитного поля может обеспечить локализацию ИБ волны, распространяющейся в

экваториальной плоскости, во втором, полоидальном, направлении. Для того чтобы проиллюстрировать возможность возбуждения 2D волновода для ИБВ, проанализируем дисперсионное уравнение $D'(\mathbf{q}) = q^2 + \chi_e(\mathbf{q}) + \chi_i(\mathbf{q}) = 0$ с помощью метода лучевых траекторий для условий токамака TEXTOR [127, 128] с учетом двумерной зависимости магнитного поля $\omega_{ci}(x, y) = \omega_{ci}(R_0) \cdot R_0 / R(x, y)$, где R_0 и R большой и текущий радиус. Итак, мы будем решать численно систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} = \frac{\partial D'(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = -\frac{\partial D'(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{q}}, \quad (4.11)$$

описывающих поведение лучевых траекторий ИБВ в 4D фазовом пространстве $\mathbf{r} = (x, y); \mathbf{q} = (q_x, q_y)$ в окрестности точки поворота x_0 и локального максимума плотности x_m , совпадающего в токамаке TEXTOR с O - точкой магнитного острова [129, 130]. Переменная s - эффективная длина траектории ИБ. Результаты численного интегрирования системы уравнений (4.11) показаны на рисунке 4.2. Можно видеть, что траектория ИБ волны локализована как в радиальном (левая панель), так и в полоидальном (центральная панель) направлении. Причем, частота осцилляций в полоидальном направлении много больше частоты осцилляций в радиальном направлении (правая панель). Таким образом, в присутствии нелокального профиля плотности и в окрестности экваториальной плоскости ИБ волна локализована в 2D плазменном волноводе. В этом случае интегральный оператор в уравнении (4.6) может быть упрощен для ИБ волны с частотой Ω_0 в окрестности волнового вектора $(q_{x0}, 0, 0)$ и координаты $(x_0, 0, 0)$, которые являются решениями системы трех уравнений: $D'|_{x_0, q_{x0}} \doteq D'|_0 = 0$, $\partial D' / \partial q_x|_0 = 0$, $\partial D' / \partial x|_0 = 0$. Первое уравнение – дисперсионное уравнение ИБ волны, второе уравнение обеспечивает наличие точки поворота дисперсионной кривой ИБ волны в радиальном направлении, а третье – условие локального максимума дисперсионной функции D' в радиальном направлении, которое приводит к появлению двух точек поворота, связывающих «теплую» и «горячую» моду ИБ волны. Раскладывая в ряд Тейлора функцию $D(\mathbf{q}, (\mathbf{r} + \mathbf{r}') / 2)$, входящую в выражение (4.8) в окрестности $(q_{x0}, 0)$ и $(x_0, 0)$ до первых неисчезающих членов, мы сведем интегральное уравнение (4.6) к дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\{D_0 + \delta D + iD''\} \bar{b} = \frac{q_{x0}^3}{4i} \frac{\omega_{pe}^4}{\omega_i^2 \omega_{ce}^2} \frac{|a_{i0}|^2}{H^2} \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{w^2}\right) \int_{-\infty}^x dx' \exp(i\Delta K(x - x')) \bar{b}(x', y, z) \quad (4.12)$$

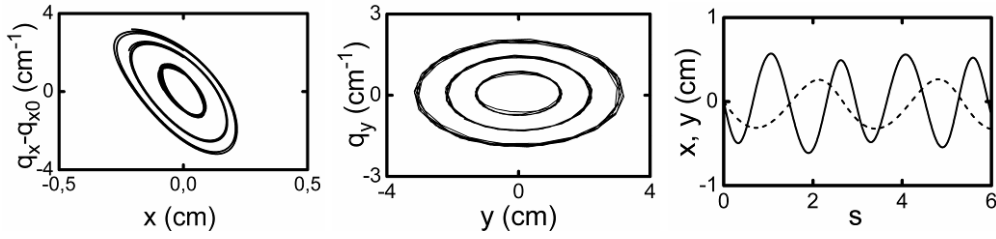


Рисунок 4.2. Фазовый портрет: $q_x(x) - q_{x0}$, $q_{x0} = 59.7 \text{ см}^{-1}$ (левая панель); $q_y(y)$ (центральная панель). Зависимости $x = x(s)$ (пунктирная линия) и $y = y(s)$ (сплошная линия) от длины траектории (правая панель); $\Omega_0 / 2\pi = 0.86$ ГГц, $T_i = 500$ эВ.

где

$$b = \bar{b} \exp[-iq_z y \cot \phi], \quad \tan \phi = B_y / B_z \Big|_0,$$

$$D_0 = \Delta D - D_{qq} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2D_{xq} (x - x_0) \frac{i\partial}{\partial x} - iD_{xq} + \eta_0 \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + D_{xx} (x - x_0)^2 + D_{yy} y^2, \quad (4.13)$$

$$\Delta D = \delta \Omega \frac{\partial D'}{\partial \Omega} \Big|_0, \quad \delta \Omega = \Omega - \Omega_0, \quad \eta_0 = \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega^2} \Big|_0, \quad D_{qq} = \frac{\partial^2 D'}{2\partial q_x^2} \Big|_0, \quad D_{xq} = \frac{\partial^2 D'}{2\partial q_x \partial x} \Big|_0, \quad D_{xx} = \frac{\partial^2 D'}{2\partial x^2} \Big|_0, \quad D_{yy} = \frac{\partial^2 D'}{2\partial y^2} \Big|_0 \text{ и}$$

$$\delta D = \frac{q_z^2}{4 \sin^2 \phi} \left[\frac{q_{x0} D'_{qqq} - 4D'_{qq}}{q_{x0}^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{6D'_{qq}}{q_{x0}^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \quad (4.14)$$

- поправка более высокого порядка, описывающая потери ИБВ из области взаимодействия. Однородное уравнение (4.12): $D_0 \bar{b} = 0$ описывает запираение ИБВ в 2D волноводе. Это запираение означает полное подавление потерь энергии дочерней низкочастотной волны из области взаимодействия в радиальном и полоидальном направлении. При этом ИБ волна, потенциал которой

$$\varphi \propto \exp[iq_z z - i \cot \phi q_z y] = \exp \left[i \frac{q_z \eta}{\sin \phi} \right], \quad (4.15)$$

имеет потери энергии вдоль поперечной магнитному полю координаты $\eta = z \sin \phi - y \cos \phi$ ($\propto \delta D$) и испытывает затухание ($\propto D''$). В этом случае можно ожидать возбуждение низкопороговой (по сравнению с порогами, предсказанными в [118 - 120]) конвективной отражательной неустойчивости.

4.1.2. Конвективная отражательная неустойчивость

В случае конвективной неустойчивости основным источником потерь ИБ волны является вынос энергии из области распада. Поэтому будем пренебрегать в уравнении (4.12) членом, описывающим затухание. Считая потери энергии из области взаимодействия и параметрическую накачку ИБ волны малыми, будем учитывать их, следуя процедуре теории возмущений, описанной в [132]. В нулевом приближении будем считать $q_z = 0$, что отвечает минимальным потерям дочерней волны. Решение однородного уравнения $D_0 \bar{b} = 0$ может быть записано в виде собственных мод тороидального волновода

$$\bar{b}(x, y) = \exp\left(-i \frac{D_{xq}}{2D_{qq}}(x - x_0)^2\right) \varphi_k(x) \varphi_l(y) =$$

$$H_k\left(\frac{x - x_0}{\delta_x}\right) H_l\left(\frac{y}{\delta_y}\right) \exp\left[-i \frac{D_{xq}}{2D_{qq}}(x - x_0)^2 - \left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2}\delta_x}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}\delta_y}\right)^2\right], \quad (4.16)$$

H_k - полиномы Эрмита, $\delta_x = \sqrt[4]{D_{qq}} \sqrt{L_x / q_{x0}}$, $\delta_y = \sqrt{L_y / q_{x0}} \sqrt{|\sin \phi| \omega_{pe} / \Omega_0}$ - размеры области локализации, $L_x \doteq \sqrt{2} q_{x0} \left[\partial^2 D' / \partial x^2 - (\partial^2 D' / \partial x \partial q_x)^2 / (\partial^2 D' / \partial q_x^2) \right]_0^{-1/2}$, $L_y \doteq \sqrt{2} q_{x0} \partial^2 D' / \partial y^2 \Big|_0^{-1/2}$.

Собственная частота 2D волновода, которая определяется условиями квантования, имеет вид:

$$\Omega_{kl} = \Omega_0 + \delta\Omega_{kl}, \quad \delta\Omega_{kl} = \partial D' / \partial \Omega \Big|_0^{-1} \left[\sqrt{D_{qq}} \frac{q_{x0}}{L_x} (2k + 1) - \sin \phi \frac{\omega_{pe}}{\Omega_0} \frac{q_{x0}}{L_b} (2l + 1) \right]. \quad (4.17)$$

Далее, используя решение (4.16) уравнения (4.12) в однородном случае, воспользуемся процедурой теории возмущений [132]. Будем искать такое возмущение компоненты волнового вектора $q_z''(z)$, которое обеспечивает тождественное обнуление возмущения частоты собственной моды в присутствии накачки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \varphi_k(x) \varphi_l(y) \left\{ \delta D[\varphi_k(x) \varphi_l(y)] - \frac{q_{x0}^3}{4i} \frac{\omega_{pe}^4}{\omega_i^2 \omega_{ce}^2} \frac{|a_{i0}|^2}{H^2} \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{w^2}\right) \int_{-\infty}^x dx' \exp(i\Delta K(x - x')) \varphi_k(x') \varphi_l(y) \right\} = 0 \quad (4.18)$$

Выполняя интегрирование по переменным x и y , получим:

$$q_z'' = |\sin \phi| q_{x0}^{5/2} \delta_x^{3/2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_i \omega_{ce}} \frac{a_0}{H} \alpha_{k,l}, \quad (4.19)$$

где

$$\alpha_{k,l}^2 = \frac{2}{\pi k! 2^k l! 2^l} \frac{\delta_y^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dy \left[\exp(-y^2/w^2) \varphi_l^2(y) \right]}{(2k+1) \left(1 + \frac{D_{qx}^2}{D_{qq}^2} \delta_x^4 \right) (q_{x0} D''' - 4D_{qq}) + 6D_{qq} (2l+1) \frac{\delta_x^2}{\delta_y^2}} \times \quad (4.20)$$

$$\delta_x^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_k(x) \exp\left(i \frac{D_{xq}}{2D_{qq}} x^2\right) \int_{-\infty}^x dx' \exp(i\Delta K(x-x')) \varphi_k(x') \exp\left(-i \frac{D_{xq}}{2D_{qq}} x'^2\right).$$

Для фундаментальной моды $k = 0$ и $l = 0$:

$$\alpha_{0,0}^2 \simeq \frac{2\sqrt{\pi} \delta_y^2}{\left[\left(1 + D_{qx}^2 \delta_x^4 / D_{qq}^2 \right) (q_{x0} D''' - 4D_{qq}) \delta_y^2 + 6D_{qq} \delta_x^2 \right]} \frac{w}{\sqrt{w^2 + \delta_y^2}} \frac{D_{qq}}{\sqrt{D_{qq}^2 + D_{xq}^2 \delta_x^4}} \exp\left(-\frac{\Delta K^2 \delta_x^2 D_{qq}^2}{D_{qq}^2 + D_{xq}^2 \delta_x^4}\right).$$

Согласно выражению (4.15) достаточным условием для возбуждения конвективной неустойчивости является следующее неравенство:

$$\Gamma = 2\sqrt{2l+1} \delta_y \cot \phi q_z'' > 1, \quad (4.21)$$

которое определяет коэффициент усиления ИБ волны при ее распространении в вдоль пучка накачки. На рисунке 4.3 показана зависимость коэффициента усиления (4.21) от номера радиальной моды при фиксированной полоидальной моде ($l = 0$) ИБВ для типичных условий токамака TEXTOR. Как показано на рисунке 4.4, частота аномально рассеянной волны уменьшается с увеличением плотности плазмы. Эта зависимость находится в согласии с экспериментальными данными [128]. Можно найти порог (по мощности) возбуждения отражательной неустойчивости необыкновенной волны, который определяется условием $\Gamma > 1$ и дается выражением:

$$P_{th} = \frac{cH^2}{2\pi\alpha_{k,l}^2} \frac{\omega_i^2 \omega_{ce}^2}{\omega_{pe}^4} \left(\frac{w^2}{(2l+1)\delta_y^2} \frac{1}{q_{x0}^5 \delta_x^3} \right) \Big|_0. \quad (4.22)$$

Для типичных условий экспериментов на токамаке TEXTOR ($H = 19$ кГц, $f_i = 140$ ГГц, $n = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_i = 500$ эВ, $w = 1$ см) [127, 128] и вариации плотности в острове $\delta n/n = 0.11$ [129, 130] мы можем получить для фундаментальной ИБ моды тороидального волновода ($k = 0$, $l = 0$) следующую оценку порога возбуждения параметрической неустойчивости: $P_{th} \approx 200$ кВт. Для типичной мощности пучка $P_i = 400 \div 600$ кВт данный порог легко превосходится в эксперименте, что могло приводить к возбуждению необыкновенной волны, распространяющейся в сторону слабого магнитного поля, на частоте, сдвинутой относительно частоты гиротрона на $\Omega_0 = 0.923$ ГГц. Данное значение смещения частоты согласуется с экспериментальными данными [128].

Итак, в рассмотренном случае имеет место значительное (на 4 порядка величины) снижение порога параметрической распадной неустойчивости индуцированного рассеяния

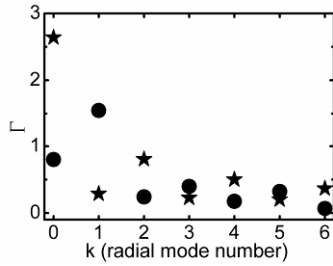


Рисунок 4.3. Зависимость коэффициента конвективного усиления ИБ волны от номера радиальной моды для фундаментальной полоидальной моды 2D волновода $l = 0$; $P_i = 400$ кВт, $T_i = 500$ эВ. Кружки – $n = 2 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$, $\Omega_0 / 2\pi = 0.832$ ГГц; Звезды – $n = 3 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$, $\Omega_0 / 2\pi = 0.923$ ГГц.

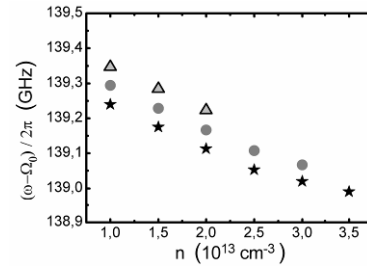


Рисунок 4.4. Зависимость частоты дочерней СВЧ волны от плотности плазмы в O - точке магнитного острова; Треугольники – $T_i = 300$ эВ, кружки – $T_i = 600$ эВ; звезды – $T_i = 900$ эВ.

«назад» ЭЦ волны необыкновенной поляризации, сопровождаемой генерацией отраженной «назад» и смещенной вниз по частоте необыкновенной волны и низкочастотной ИБ волны в диапазоне ионной плазменной частоты. Причиной столь драматического снижения порога конвективной неустойчивости служит подавление конвективного выноса энергии одной из дочерних волн, а именно ИБ волны, в радиальном направлении из-за немонотонного профиля плотности плазмы в магнитном острове и в полоидальном направлении из-за полоидальной неоднородности модуля магнитного поля. В результате формирования двумерного плазменного волновода для ИБ волны возбуждается неустойчивость, насыщаемая медленным выносом ИБ волны в третьем направлении и носящая конвективный характер.

Следует отметить, что не монотонность профиля плотности плазмы может быть вызвана не только присутствием магнитного острова, но и другими причинами, среди которых особенности удержания или локализация источника ионизации, например, при инжекции пучка нейтральных атомов или макрочастиц. В частности, созданию «провальных» профилей плотности плазмы способствует сам мощный ЭЦ нагрев, приводящий к аномальному конвективному выносу плазмы в результате так называемого «electron-pump-out» эффекта [125]. При наличии провального профиля плотности в токамаке в отсутствие магнитного острова двумерный плазменный ИБ волновод превращается в резонатор в силу аксиальной симметрии системы. Если при этом волна накачки пересекает магнитную поверхность, соответствующую локальному максимуму плотности, в окрестности точки, соответствующей минимуму модуля магнитного поля, то возможно параметрическое возбуждение этого резонатора и развитие

абсолютной неустойчивости, экспоненциально нарастающей во времени и насыщающейся не из-за конвективного выноса энергии, а за счёт нелинейных эффектов.

В следующем параграфе рассмотрены условия, при которых возможно возбуждение абсолютной параметрической распадной неустойчивости ЭЦ волны необыкновенной поляризации, сопровождающееся аномальным отражением ЭЦ волны и генерацией низкочастотной ИБ волны в диапазоне ионной плазменной частоты. Проанализирован описанный выше механизм ее возбуждения. Получено выражения для ее инкремента и порога возбуждения.

4.1.3. Абсолютная отражательная неустойчивость

В случае абсолютной неустойчивости, когда имеет место параметрическое возбуждение 3D резонатора, диссипация является единственным источником потерь, который определяет порог возбуждения параметрической неустойчивости, экспоненциально нарастающей во времени. Поэтому будем пренебрегать в уравнении (4.12) членом, описывающим конвективные потери, и учтем аксиальную симметрию системы: $q'_z = n / R$, где R - текущий большой радиус. По аналогии с конвективной неустойчивостью, будем считать диссипацию и параметрическую накачку ИБ волны малыми и учитывать их, следуя процедуре теории возмущений. В пренебрежении затуханием ИБ волны и нелинейным взаимодействием, т.е. при $D'' = 0$, $\rho_\Omega = 0$, решение уравнения (4.12) может быть записано в виде собственных мод тороидального резонатора

$$\varphi_{kln}(x, y, z) = \exp\left(-i \frac{D_{xq}}{2D_{qq}} x^2 + i \frac{n}{R} (z - y \cot \phi)\right) \varphi_k(x) \varphi_l(y). \quad (4.23)$$

В выражении (4.23) мы использовали те же обозначения, что и в выражении (4.16). Собственная частота волны в таком резонаторе определяется выражением (4.17). В следующем порядке теории возмущений мы можем найти поправки к частоте собственной моды резонатора, связанные с учетом параметрической накачки ИБ волны и ее затухания. Для ИБ моды с радиальным и полоидальным числом соответственно k и l получим выражение

$$(\Omega - \Omega_{kl}) \frac{\partial D'}{\partial \Omega} \Big|_0 = -i D'' \Big|_0 + i \frac{q_{x0}^3 \delta_x}{4} \frac{\omega_{pe}^4}{\omega_i^2 \omega_{ce}^2} \frac{|a_i|^2}{H^2} \frac{\sqrt{\pi} w}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta_y^2}{w^2} \xi^2\right) \varphi_l^2(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{\pi} 2^l l!} \times \quad (4.24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\pi} 2^k k!} \int_0^{\infty} d\tau \exp\left(i\Delta K \delta_x \tau + i \frac{D_{xq} \delta_x^2}{D_{qq}} s\tau\right) \varphi_k\left(s + \frac{\tau}{2}\right) \varphi_k\left(s - \frac{\tau}{2}\right),$$

которое связывает инкремент (декремент) ИБ моды $\gamma_{kl} = -i(\Omega - \Omega_{kl})$ с мощностью волны накачки. Это выражение упрощается в случае раскачки основной моды резонатора $k = 0, l = 0$:

$$\gamma_{00} = -\nu_{IB} + \frac{q_{x0}^3}{8} \frac{\omega_{pe}^4}{\omega_i^2 \omega_{ce}^2} \frac{|a_i|^2}{H^2} \frac{\delta_x}{R_0} \frac{w^2}{\sqrt{w^2 + \delta_y^2}} \frac{D_{qq}}{\sqrt{D_{qq}^2 + D_{xq}^2 \delta_x^4}} \exp\left[-\frac{\Delta K^2 \delta_x^2 D_{qq}^2}{D_{qq}^2 + D_{xq}^2 \delta_x^4}\right] \frac{\partial D'}{\partial \Omega}\Big|_0^{-1}, \quad (4.25)$$

где $\nu_{IB} = D''\Big|_0 \partial D' / \partial \Omega\Big|_0^{-1}$ - декремент затухания ИБ волны. Используя выражение (4.25) и полагая $\gamma_{00} = 0$, получим порог абсолютной параметрической распадной неустойчивости в виде условия баланса мощности параметрической накачки и потерь дочерних волн:

$$\nu_0^2(P_i) \frac{D_{qq}}{\sqrt{D_{qq}^2 + D_{xq}^2 \delta_x^4}} \exp\left[-\frac{\Delta K^2 \delta_x^2 D_{qq}^2}{D_{qq}^2 + D_{xq}^2 \delta_x^4}\right] = \nu_{IB} \nu_{EC} \frac{V_{damp}}{V_{PDI}}. \quad (4.26)$$

Выражение (4.26), где мы ввели следующие обозначения:

$$\nu_0(P_i) = \frac{q_{\rho 0}^{3/2} c^{1/2}}{2D_{\Omega}^{1/2}} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_i \omega_{ce}} \frac{|a_i|}{H}$$

- максимальный инкремент неустойчивости в теории однородной плазмы в пренебрежении диссипацией дочерних волн,

$$\nu_{EC}^{-1} = \delta_x / c$$

- характерное время конвективного выноса энергии высокочастотной дочерней волны из области параметрического распада, V_{PDI} / V_{damp} - геометрический фактор, определяемый отношением объемов, в которых происходит нелинейное взаимодействие (V_{PDI}) и существенно затухание ИБ моды (V_{damp}), напоминает соответствующее условие теории однородной плазмы [133]. В случае столкновительного затухания этот фактор, значительно превосходящий единицу, имеет вид: $V_{PDI} / V_{damp} = 2\pi R \sqrt{1 + \delta_y^2 / w^2} / (\sqrt{\pi} w)$. Экспоненциальный фактор в соотношении (4.26) описывает ослабление параметрической накачки в случае, когда распадное условие выполнено неточно: $\Delta K \neq 0$. Далее, проиллюстрируем выражение (4.24) для инкремента (декремента) ИБ моды на примере планируемых в последнее время экспериментов по ЭЦР нагреву плазмы на второй электронной циклотронной гармонике на токамаке JET. На рисунке 4.5 приведена зависимость инкремента абсолютной неустойчивости от мощности

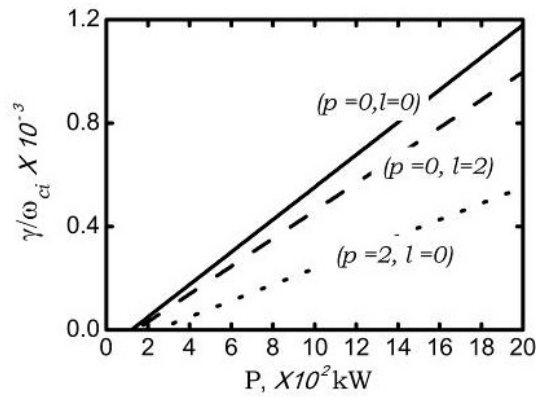


Рисунок 4.5. Зависимость инкремента абсолютной неустойчивости от мощности волны накачки.

волны накачки, полученная для условий эксперимента в крупной установке с параметрами плазмы близкими к термоядерным ($n = 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $T_D = T_e = 3 \text{ кэВ}$; $H = 23 \text{ кГц}$; $R = 2.96 \text{ м}$; $a = 1.25 \text{ м}$; $b = 2.10 \text{ м}$; $B_y / B_z \simeq 0.1$, $f_i = 170 \text{ ГГц}$, $w = 3 \text{ см}$, $\delta = 0.1$ и $l_x = 5 \text{ см}$). Видно, что минимальный порог неустойчивости реализуется для фундаментальной моды $k = 0$, $l = 0$ и составляет менее 100 кВт. Это значение на 4 порядка величины ниже предсказаний стандартной теории [119, 120], не учитывающей реальных особенностей профиля плотности плазмы, и, как правило, превосходится в эксперименте. Инкремент неустойчивости невысок, что связано с большой длиной траектории распространения ИБ волны в тороидальном резонаторе, многократно пересекающей СВЧ пучок. Вместе с тем, порог её возбуждения на порядок величины ниже порога быстрой конвективной неустойчивости [22а – 24а], реализующейся при однократном прохождении ИБ волны в направлении поперёк магнитного поля через пучок накачки. Уровень насыщения абсолютной неустойчивости и соответствующий коэффициент аномального отражения греющего СВЧ излучения определяется нелинейными процессами. Наиболее вероятный «квазилинейный» механизм насыщения - стохастическое амплитудно - зависимое поглощение ИБ волны.

4.1.4. Выводы

В разделе проанализированы экспериментальные условия, способные приводить к существенному снижению порога отражательных параметрических неустойчивостей при электронном циклотронном нагреве плазмы в магнитных ловушках в отсутствии верхнего

гибридного резонанса для греющего пучка необыкновенных волн. Предложена теоретическая модель, предсказывающая полное подавление конвективных потерь низкочастотной дочерней волны в направлении неоднородности плотности плазмы и в полоидальном направлении, и, как следствие, значительное снижение порога параметрической неустойчивости по сравнению с предсказанием стандартной теории [118 - 120].

Показано, что в присутствии магнитного острова, в силу особенностей удержания плазмы в котором плотность имеет немонотонный профиль, возможно возбуждение конвективной отражательной неустойчивости необыкновенной волны. Порог возбуждения этой неустойчивости на 4 порядка меньше значения, предсказанного в работах [118 - 120].

Показано, что если не монотонность профиля плотности плазмы является следствием аномального конвективного выноса при мощном ЭЦ нагреве [125], возможно параметрическое возбуждение в силу аксиальной симметрии системы 3D резонатора ИБ волны и развитие абсолютной неустойчивости, экспоненциально нарастающей во времени. Значение пороговой мощности также на 4 порядка величины ниже предсказаний стандартной теории [118 - 120], не учитывающей реальных особенностей профиля плотности плазмы. Однако, инкремент неустойчивости невысок, что связано с большой длиной траектории распространения ИБ волны в тороидальном резонаторе, многократно пересекающей СВЧ пучок.

Основные публикации

- 1) Гусаков Е.З., Попов А.Ю. Низкопороговые параметрические распадные неустойчивости в экспериментах по ЭЦ нагреву в тороидальных ловушках // Письма ЖЭТФ. - 2010. - Т.91. - С.724.
- 2) Gusakov E.Z., Popov A.Yu. Low Threshold Parametric Decay Backscattering Instability in Tokamak Electron Cyclotron Resonance Heating Experiments // Phys. Rev. Lett. - 2010. - Vol.105. - P.115003.
- 3) Gusakov E.Z., Popov A.Yu. Low Threshold Parametric Decay Instabilities in ECRH experiments at toroidal devices // Nuclear Fusion. - 2011. - Vol.51. - P.073028.
- 4) Гусаков Е.З., Попов А.Ю. Низкопороговые абсолютные параметрические распадные неустойчивости в экспериментах по электронному циклотронному нагреву в токамаках // Письма ЖЭТФ. - 2011. - Т.94. - С.301.

4.2. Параметрический механизм нагрева ионов в экспериментах по электронному циклотронному нагреву в тороидальных ловушках

Аномальный нагрев и ускорение ионов, который наблюдался в ряде установок в условиях, когда энергообмен между электронами и ионной компонентой пренебрежимо мал [125, 126], долгое время не мог найти рационального объяснения. Пороговая мощность параметрического распада волны накачки, который мог бы объяснить транзит энергии от СВЧ колебаний к ионам плазмы, многократно превышает согласно стандартным моделям [118 - 120], не учитывающим реальных особенностей профиля плотности плазмы, мощность гиротронов.

В настоящем разделе анализируются экспериментальные условия, облегчающие возбуждение параметрических распадных неустойчивостей при электронном циклотронном нагреве плазмы на второй гармонике ЭЦ резонанса в тороидальных установках, что, в результате, делает возможным аномальный нагрев ионной компоненты. Показано, что в случае немонотонного радиального профиля плотности плазмы при прохождении пучка ЭЦ волн вблизи от экваториальной плоскости установки может происходить параметрическое возбуждение резонансов ЭБ волн. Одновременно генерируются ИБ волны, распространяющиеся из области параметрического распада к ближайшей ионной циклотронной гармонике, где они эффективно взаимодействуют с ионами [26а]. Порог возбуждения раскачиваемой при этом конвективной неустойчивости определяется конвективными потерями дочерней ИБ волны и дифракционными потерями ЭБ волны и может составлять значения мощности, существенно превышаемые в современных экспериментах по ЭЦ нагреву плазмы в тороидальных ловушках. Кроме того, в силу аксиальной симметрии системы возможно возбуждение 3D резонатора ЭБВ и развитие абсолютной неустойчивости [27а].

4.2.1. Основные уравнения

Рассмотрим наиболее простую, но адекватную эксперименту [126], модель трехволнового взаимодействия, в рамках которой будем считать, что пучок необыкновенных волн, вектор поляризации которых направлен преимущественно в полоидальном направлении u , распространяется перпендикулярно магнитному полю \mathbf{H} в направлении градиента плотности плазмы x :

$$E_{0y} = \frac{a_i(y, z)}{2} \exp(k_0 x - i\omega_0 t) + c.c., \quad (4.27)$$

где с.с. - комплексное сопряжение, z - тороидальная координата, амплитуда $a_i = a_0 \exp[-(y^2 + z^2)/(2w^2)]$, $a_0 = \sqrt{8\pi/c} \sqrt{P_i/(\pi w^2)}$, w - радиус пучка, P_i - мощность пучка. Кроме того, при записи (4.27) принято во внимание, что в анализируемых экспериментах $\omega_0^2 \gg \omega_{ce}^2, \omega_{pe}^2$. Система интегральных уравнений, описывающая распад мощной необыкновенной волны (4.27) на две дочерние, во - первых, низкочастотную ИБ волну $\phi_I \propto \exp(i\Omega t)$ и, во - вторых, высокочастотную ЭБ волну $\phi_E \propto \exp(-i(\omega_0 - \Omega)t)$, $\Omega \ll \omega_0$, может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \hat{D}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \Omega) \{ \phi_I(\mathbf{r}') \} = 4\pi \rho_I(\mathbf{r}; \Omega), \\ \hat{D}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_0 - \Omega) \{ \phi_E(\mathbf{r}') \} = 4\pi \rho_E(\mathbf{r}; \omega_0 - \Omega), \end{cases} \quad (4.28)$$

где \hat{D} - интегральные операторы, которые в слабо неоднородной плазме имеют вид:

$$\hat{D}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) \{ f(\mathbf{r}') \} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{q} d\mathbf{r}'}{(2\pi)^3} D\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}; \omega\right) \exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] f(\mathbf{r}'), \quad (4.29)$$

где $\omega = [\Omega, \omega_0 - \Omega]$, $D(\mathbf{q}, \mathbf{r}; \omega) = q^2 + \chi_e(\mathbf{q}, \mathbf{r}; \omega) + \chi_i(\mathbf{q}, \mathbf{r}; \omega)$, χ_e и χ_i - это электронная и ионная восприимчивости [92], [131], определенные в фиксированной координате \mathbf{r} :

$$\chi_e(\omega_0 - \Omega) = \frac{2\omega_{pe}^2}{v_{te}^2} \left[1 - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0 - \Omega}{q_{\parallel} v_{te}} Z\left(\frac{\omega_0 - \Omega - m\omega_{ce}}{q_{\parallel} v_{te}}\right) \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 v_{te}^2}{2\omega_{ce}^2}\right) I_m\left(\frac{q_{\perp}^2 v_{te}^2}{2\omega_{ce}^2}\right) \right],$$

$$\chi_i'(\omega_0 - \Omega) \ll \chi_e'(\omega_0 - \Omega),$$

$$\chi_e(\Omega) = \frac{2\omega_{pe}^2}{v_{te}^2} \left(1 - \frac{\Omega}{|q_{\parallel}| v_{te}} Z\left(\frac{\Omega}{|q_{\parallel}| v_{te}}\right) I_0\left(\frac{q_{\perp}^2 v_{te}^2}{2\omega_{ce}^2}\right) \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 v_{te}^2}{2\omega_{ce}^2}\right) \right),$$

$$\chi_i(\Omega) = \frac{2\omega_{pi}^2}{v_{ti}^2} \left[1 - X\left(\frac{\Omega}{q_{\perp} v_{ti}}\right) - Y\left(\frac{\Omega}{q_{\perp} v_{ti}}\right) \times \left\{ \cot\left(\pi \frac{\Omega}{\omega_{ci}}\right) + \frac{i}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_{ci}}{|q_{\parallel}| v_{ti}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\Omega - m\omega_{ci})^2}{q_{\parallel}^2 v_{ti}^2}\right) \right\} \right],$$

где $\xi Z(\xi) = X(\xi) - iY(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) \frac{dt}{\xi - t}$, $q_{\parallel} = |\mathbf{q} \cdot \mathbf{H}| / H$, $q_{\perp} = \sqrt{q^2 - q_{\parallel}^2}$,

$\mathbf{H} = H(\mathbf{e}_y \sin \phi + \mathbf{e}_z \cos \phi)$ - внешнее магнитное поле, $\sin \phi = H_y / H \ll 1$ и I_m - модифицированная функция Бесселя. Кроме того, ρ_I и ρ_E в (4.28) - нелинейные плотности заряда, согласно [133] имеющие вид:

$$\rho_I(\Omega) \approx \frac{a_B^*}{8\pi} \frac{\chi_i(\Omega)}{q_{\perp}^2} \chi_e(\omega_0 - \Omega) \phi_E, \quad \rho_E(\omega_0 - \Omega) \approx \frac{a_B}{8\pi} \frac{\chi_e(\omega_0 - \Omega)}{q_{\perp}^2} \chi_i(\Omega) \phi_I, \quad a_B = \frac{E_{0y}}{H} \frac{\omega_{ce}^2}{\omega_0^2 - \omega_{ce}^2}. \quad (4.30)$$

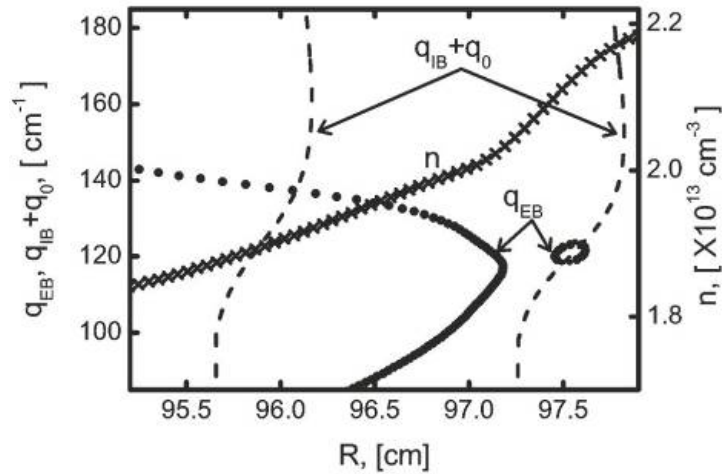


Рисунок 4.6. Дисперсионные кривые ЭБ волны q_{EB} (точки), дисперсионные кривые ИБ волны q_{IB} (пунктир), смещенные вверх на величину волнового вектора необыкновенной ЭЦ волны $k_0 = 17.2$ см. В точках, где кривые пересекаются, выполнены резонансные условия Брэгга; (правая и нижняя оси): профиль плотности плазмы (сплошная линия с крестами). $R_0 = 87.5$ см, $T_e(x_m) = 1.8$ кэВ, $T_i(x_m) = 0.35$ кэВ, $H(x_m) = 12.7$ кГц, $x_m = 98$ см - положение максимума плотности, $f_0 = 76.925$ ГГц, $f_I = 0.46$ ГГц.

4.2.2. Укороченные уравнения для электронных и ионных бернштейнских волн

Локализация одной из дочерних волн существенно снижает порог параметрической неустойчивости. Поэтому, будем искать решение системы уравнений (4.28) в окрестности точки трансформации ЭБ волны из «тёплой» в «горячую» моду, расположенной вблизи от локального максимума плотности плазмы и экваториальной плотности, где такая локализация возможна. С этой целью потребуем выполнения следующих условий $D'|_{\bar{q}_E, \omega_E, x_E} \equiv D'|_E = 0$; $\partial D' / \partial q_x|_E = 0$; $\partial D' / \partial x|_E = 0$, где первое условие – дисперсионное уравнение ЭБ волны, второе – условие наличия поворотной точки на ее дисперсионной кривой, третье – условие экстремума дисперсионной функции ЭБ волны $D'_E(q_\perp, \omega, x)|_E$ по координате x . Решение этой системы, – частота ω_E , волновой вектор $\mathbf{q} = \mathbf{q}_E = (q_E, 0, 0)$ и координата $x = x_E$, – обеспечивает выполнение резонансных условий и наличие минимума дисперсионной функции $D'_E(q_E + q_x, \omega_E, x_E + x)$ по двум переменным (q_x, x) , который при выполнении дополнительных

условий $\partial^2 D'_E / \partial q_x^2|_E > 0$ и $\partial^2 D'_E / \partial x^2|_E = q_E^2 / L^2 > 0$ приводит к появлению двух точек поворота ЭБ дисперсионной кривой. В этом случае имеет место запираание ЭБ волны между этими точками и полное подавление конвективных потерь в радиальном направлении. Запираание ЭБ волны для условий экспериментов на токамаке TCV [126] ($R_0 = 87.5$ см, $T_e = 4$ кэВ, $T_i = 350$ эВ, $H(x_m) = 13.6$ кГс, $n(x_m) = 2.1 \times 10^{13}$ см $^{-3}$, $\omega_0 / 2\pi = 82.4$ ГГц) показано на рисунке 4.6, где изображены ее дисперсионная кривая вместе с профилем плотности плазмы. Этот рисунок иллюстрирует возможность распада необыкновенной ЭЦ волны на ЭБ волну и ИБ волну на частоте $\Omega_I / 2\pi = 0.538$ ГГц, дисперсионные кривые для которой показаны на рисунке 4.6 сдвинутыми вверх на величину волнового вектора ЭЦ волны $k_0 = 17.2$ см $^{-1}$. Полоидальная зависимость модуля магнитного поля может обеспечить локализацию ЭБ волны во втором, полоидальном направлении, что показано на рисунке 4.7 (левая панель), где изображена двумерно-локализованная лучевая траектория ЭБ волны. На этом же рисунке (правая панель) можно видеть фазовый портрет лучевых траекторий, полученный для тех же параметров плазмы, что и на рисунке 4.6, для реальной геометрии эксперимента на токамаке TCV и магнитной конфигурации, рассчитанной с помощью кода равновесия. В окрестности точки поворота дисперсионной кривой ЭБ волны (ω_E, q_E, x_E) и экваториальной плоскости токамака $y = 0$ система интегральных уравнений (4.28) с (4.29) и (4.30) сводится к системе дифференциальных уравнений:

$$\left\{ iD'_{Iq_x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_I^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + iD''_I \right\} b_I = b_E \exp \left[-i \int^x \Delta q dx' \right] \frac{|a_B| \chi_i(\Omega_I) \chi_e(\omega_E)}{2 q_E^2}, \quad (4.31)$$

$$\left\{ \hat{D}_E + \delta D_E + iD''_E \right\} b_E = b_I \exp \left[i \int^x \Delta q dx' \right] \frac{|a_B| \chi_e(\omega_E) \chi_i(\Omega_I)}{2 q_I^2}, \quad (4.32)$$

где $b_{I,E}(\mathbf{r})$ - медленно меняющиеся амплитуды потенциалов $\phi_{E,I}(\vec{r})$,

$$\phi_E(\mathbf{r}) = b_E(\mathbf{r}) \exp(iq_E x - i\omega_E t), \quad \phi_I(\mathbf{r}) = b_I(\mathbf{r}) \exp\left(i \int^x q_I dx + i\Omega_I t\right), \quad \Omega_I = \omega_0 - \omega_E, \quad \mathbf{q}_I = (q_I(x), 0, 0) -$$

решение дисперсионного уравнения ИБ волны $D'(\mathbf{q}_I, \Omega_I, x) = 0$, $\Delta q = q_0 + q_I(x) - q_E$ - величина расстройки Брэгговского резонансного условия;

$$\hat{D}_E = \frac{\partial D'_E}{\partial \Omega} \Big|_0 \delta \Omega - \frac{\partial^2 D'}{2 \partial q_x^2} \Big|_E \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{q_E^2}{L^2} x^2 + \frac{q_E^2}{q_\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{q_E^2}{y_0^2} y^2$$

- дифференциальная форма интегрального оператора, описывающего ЭБ волну около точки поворота;

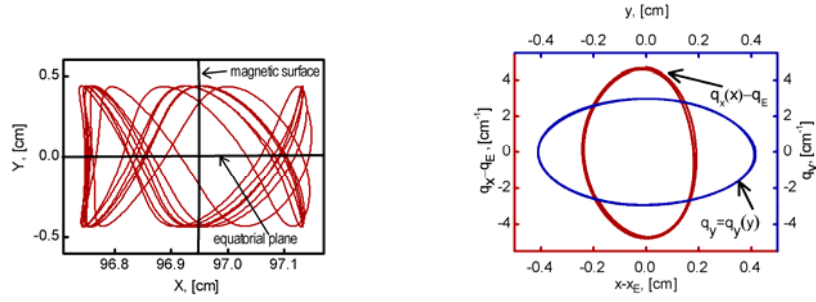


Рисунок 4.7. Левая панель: лучевая траектория ЭБ волны в полоидальном сечении токамака. X - большая ось токамака, Y - вертикальная координата; Правая панель: фазовый портрет $q_x(x) - q_E$, $q_E = 94 \text{ см}^{-1}$ (левая и нижняя оси) и $q_y(y)$ (правая и верхняя оси). Параметры - как на рисунке 4.6.

$$\delta D_E = \frac{q_z^2}{4(\sin \phi)^2} \left[\left(\frac{\partial^3 D'}{q_x \partial q_x^3} - 2 \frac{\partial^2 D'}{q_x^2 \partial q_x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{3 \partial^2 D'}{q_x^2 \partial q_x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right]_E$$

- поправка к дисперсионной функции ЭБ волны, описывающая ее конвективный вынос аналогично случаю ИБ волны [22а - 24а], $D'_{Iq_x} = \partial D'(\mathbf{q}_I, \Omega_I, x_E) / \partial q_x$; $D'_I = D''(\mathbf{q}_I, \Omega_I, x_E)$; $D''_E = D''(q_E, \omega_E, x_E)$; координаты вдоль ξ и поперек η магнитной силовой линии на магнитной поверхности имеют вид $y = \cos \alpha \cdot \eta + \sin \alpha \cdot \xi$, $z = -\sin \alpha \cdot \eta + \cos \alpha \cdot \xi$;

$$\lambda = \frac{q_E^2 v_{te}^2}{2\omega_{ce}^2}, \quad \frac{1}{y_0^2} = \frac{\omega_{pe}^2 \exp(-\lambda)}{q_E^2 v_{te}^2 a R_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_m(\lambda)}{\varepsilon_m^2}, \quad \frac{1}{q_\xi^2} = \frac{\omega_{pe}^2 \exp(-\lambda)}{q_E^2 \omega_0^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_m(\lambda)}{\varepsilon_m^3}, \quad \varepsilon_m(x) = 1 - m \frac{\omega_{ce}(x)}{\omega_0 - \Omega_0}.$$

Первый, второй и третий члены в левой части уравнения (4.31) описывают конвективный вынос ИБ волны в радиальном направлении, её потери из области параметрического распада вдоль магнитного поля, имеющие при малых продольных волновых числах $q_{||}$ дифракционный характер, и затухание. Мы ищем решения (4.31) и (4.32) с малыми продольными векторами $q_{||}$, для которых область ионного циклотронного (ИЦ) и ЭЦ поглощения локализованы в узкой окрестности соответствующей гармоники. Поскольку область параметрического распада локализована в окрестности точки x_E , которая находится между близлежащими гармониками ИЦ и ЭЦ частоты и где выполняются неравенства $(\Omega_I - m\omega_{ci}) / (q_{||} v_{ti}) \gg 1$, $m \gg 1$ и $(\omega_E - p\omega_{ce}) / (q_{||} v_{te}) \gg 1$, $p \geq 2$, будем считать, что циклотронное поглощение ИБ и ЭБ волн отсутствует: т.е. $D'_I = 0$, $D''_E = 0$.

4.2.3. Конвективная параметрическая неустойчивость

В случае конвективной неустойчивости основным источником потерь является вынос энергии ЭБВ из области распада. Поэтому будем пренебрегать в уравнении (4.32) ее затуханием. Считая конвективные потери и параметрическую накачку ЭБ волны малыми, будем учитывать их, следуя процедуре теории возмущений, описанной в [132]. В пренебрежении нелинейным взаимодействием решение уравнения (4.32) может быть записано в виде собственных мод двумерного резонатора:

$$b_E^{nk}(x, y, z) = \varphi_n(x) \varphi_k(y) \exp(ik_z [z - y \cot \phi]) = \varphi_n(x) \varphi_k(y) \exp(-ik_z \eta / \sin \phi), \quad (4.33)$$

где $\varphi_n(x) \varphi_k(y) = H_n\left(\frac{x}{\delta_x}\right) H_k\left(\frac{y}{\delta_y}\right) \exp\left[-\frac{x^2}{2\delta_x^2} - \frac{y^2}{2\delta_y^2}\right]$, H_k - полиномы Эрмита,

$\delta_x = \sqrt[4]{\partial^2 D'_E / (2\partial q_x^2)} \Big|_E \sqrt{L / q_E}$ и $\delta_y = \sqrt{\sin \phi y_0 / q_\xi}$ - области локализации ЭБ волны в радиальном и полоидальном направлении. Точное значение собственной частоты ЭБ волны $\omega_{EB} = \omega_E + \delta\omega_{nk}$ определяется из условия квантования

$$\delta\omega_{nk} = \frac{\partial D'_E}{\partial \omega} \Big|_E^{-1} \left[\sin |\phi| \frac{q_E^2}{q_\xi y_0} (2k + 1) - \sqrt{\frac{\partial^2 D'_E}{2\partial q_x^2}} \Big|_E \frac{q_E}{L} (2n + 1) \right]. \quad (4.34)$$

Решение уравнения (4.31) при $q_0 \ll q_l, q_E$, $\delta\omega_{nk} \ll \omega_E$ имеет вид:

$$b_l = -i \frac{\chi_l(\Omega_l) \chi_e(\omega_E)}{2q_E^2} \int_{-\infty}^x \frac{dx'}{D'_{lq_x}} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \cdot G(x - x', \xi - \xi') \exp\left[-i \int^x \Delta q dx''\right] |a_B|(y(\xi', \eta), z(\xi', \eta)) b_E(x', y(\xi', \eta), z(\xi', \eta)), \quad (4.35)$$

где

$$G(x - x', \xi - \xi') = \sqrt{\frac{i |D'_{lq_x}| \Omega_l^2}{4\pi\omega_{pe}^2 |x - x'|}} \exp\left[-i \frac{|D'_{lq_x}| \Omega_l^2 (\xi - \xi')^2}{4\omega_{pe}^2 (x - x')}\right].$$

В интеграл по продольной координате ξ в выражении (4.35) основной вклад вносит область локализации пучка накачки $2w$, которая для типичных параметров плазмы и условий экспериментов оказывается значительно уже области локализации собственной моды $\varphi_k(y)$ вдоль по магнитному полю, имеющей размер $\sqrt{2k + 1} \delta_y / \sin \phi$. Подставим выражение (4.35) в уравнение (4.32) и используя в правой части (4.35) решение нулевого порядка (4.33) для потенциала ЭБ волны, сделаем следующий шаг в процедуре теории возмущений: умножим обе

части уравнения (4.32) на комплексно сопряжённое решение нулевого порядка (4.33) и проинтегрируем получившееся выражение по переменным x, y , что позволяет найти мнимую часть волнового числа в тороидальном направлении и получить показатель коэффициента усиления в виде:

$$\Gamma_{n,k} = 2 \int q_z'' dz = 2 \sin |\alpha| \frac{\chi_e(\omega_E) \chi_i(\Omega_I)}{q_E \sqrt{\delta_x D'_{Iq_x}}} |a_B| \delta_x^2 \beta_{n,k} L_{z,n}, \quad (4.36)$$

где $L_{z,n} = \int \text{Re}(W_n(z)) dz$,

$$W_n^2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\pi n! 2^n}} \int_0^{\infty} \frac{i2d\tau}{\sqrt{1-i2T\tau}} \times \exp\left(-\frac{z^2}{2w^2} - \frac{z^2}{2w^2(1-i2T\tau)} - i \int_{s-\tau/2}^{s+\tau/2} \Delta q(x) dx\right) \varphi_n^*\left(s + \frac{\tau}{2}\right) \varphi_n\left(s - \frac{\tau}{2}\right) \quad (4.37)$$

и

$$\beta_{n,k}^2 = \frac{(\sqrt{\pi} k! 2^k)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{y^2 \delta_y^2}{w^2}\right) \varphi_k^2(y)}{\left[\left(q_x \frac{\partial^3 D'}{\partial q_x^3} - 2 \frac{\partial^2 D'}{\partial q_x^2} \right) (2n+1) + 3 \frac{\partial^2 D'}{\partial q_x^2} \frac{\delta_x^2}{\delta_y^2} (2k+1) \right]_E}. \quad (4.38)$$

В случае возбуждения наиболее опасной фундаментальной моды ЭБ волны $n=k=0$, обладающей самым низким порогом возбуждения и самым большим коэффициентом усиления, выражение (4.38) при слабой расстройке брэгговского резонансного условия в пределах области локализации ЭБ волны в радиальном направлении $\Delta q \delta_x \ll \pi$ значительно упрощается:

$$\beta_{0,0}^2 = \frac{1}{\left[\left(q_x \frac{\partial^3 D'}{\partial q_x^3} - 2 \frac{\partial^2 D'}{\partial q_x^2} \right) + 3 \frac{\partial^2 D'}{\partial q_x^2} \frac{\delta_x^2}{\delta_y^2} \right]_E \sqrt{1 + \frac{\delta_y^2}{w^2}}}, \quad (4.39)$$

$$W_0^2(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{2w^2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{i2d\tau}{\sqrt{1-i2T\tau}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{4} - \frac{z^2}{2w^2(1-i2T\tau)}\right) \right), \quad (4.40)$$

$T = \tau_x / \tau_{\parallel}$ - коэффициент, который равен отношению характерных времен конвективных потерь ИБ волны в радиальном направлении $\tau_x = \delta_x D'_{I\Omega} / D'_{Iq_x}$, $D'_{I\Omega} = \partial D'_I / \partial \Omega_I$ и дифракционных потерь ИБ волны вдоль магнитного поля $\tau_{\parallel} = \Omega^2 / \omega_{pe}^2 \cdot D'_{I\Omega} w^2$. В случае, когда доминируют конвективные потери ИБ волны в радиальном направлении, т.е. при ($T \ll 1$), $\text{Re}[W_0(z)] = \exp(-z^2 / (2w^2))$ и $L_{z,0} = \sqrt{2\pi} w$. В более реалистичном случае, когда более существенны дифракционные потери ИБ волны вдоль магнитного поля, $T \gg 1$, при $|z| \ll \sqrt{2T} w$:

$$\operatorname{Re}[W_0(z)] \approx \sqrt[4]{\frac{1}{\pi T}} \sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{4w^2}\right) = \frac{0.54}{T^{1/4}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{4w^2}\right) \text{ и } L_{z,0} = \frac{0.92\sqrt{\pi}w}{T^{1/4}}.$$

Зависимость коэффициента усиление шумов ЭБВ, проходящих по тороидальному волноводу через пучок накачки, от её мощности представлена в логарифмическом масштабе на рисунке 4.8 для приведенных выше параметров эксперимента на токамаке TCV. Порог параметрической неустойчивости, соответствующий мощности волны накачки, при которой будет происходить существенное усиление шумов, получается из условия $\Gamma_{0,0} = 1$ и дается в этом случае выражением

$$\left(\frac{a_0^2(0,0)}{H^2}\right)^{th} = \frac{9}{4} \frac{q_E^2 D'_{Iq_x} \left[\left(q_x \frac{\partial^3 D'}{\partial q_x^3} - 2 \frac{\partial^2 D'}{\partial q_x^2} \right) + \frac{3 \partial^2 D' \delta_x^2}{\partial q_x^2 \delta_y^2} \right]_E}{\sin|\alpha|^2 \chi_e^2(\omega_E) \chi_i^2(\Omega_I) \delta_x^3 L_{z,0}^2} \sqrt{1 + \frac{\delta_y^2}{w^2}} \quad (4.41)$$

Следует отметить, что, согласно формуле (4.33), ещё при существенно меньших амплитудах накачки нелинейное взаимодействие волн начинает оказывать воздействие на структуру собственной моды ЭБВ в плазменном волноводе. Порог этого эффекта задаётся условием $2q_z'' w \cot \phi = \Gamma_{0,0} \cot \phi > 1$. Для типичных параметров плазмы и микроволнового пучка на токамаке TCV, как это показано на рисунке 4.8, порог возбуждения конвективной параметрической неустойчивости даётся значением $P_0^{th} = 35 \text{ кВт}$ и легко превосходится в эксперименте. При обычных мощностях в одном пучке до 400 кВт достигается усиление шумов более чем на порядок, что при наличии механизма возвращения части конвективно вынесенной энергии ЭБ волны назад в область усиления может приводить к возбуждению абсолютной неустойчивости, насыщаемой на более высоком уровне за счёт нелинейных эффектов.

Усиление шумов ЭБ волны сопровождается генерацией низкочастотной дочерней ИБ волны, распространяющейся почти поперек магнитного поля к ближайшей ИЦ гармонике. В окрестности ИЦ гармоника ИБ волна поглощается ионами по циклотронному механизму. В силу того, что эти события (возбуждение в области параметрического распада и поглощение в ИЦ слое) существенно разнесены как пространственно, так и по волновым векторам, их можно рассматривать независимо. В рамках линейной теории, построенной в модели однородной плазмы, поглощение высоких гармоник ИБ волны при строго поперечном распространении обнуляется. Однако, как было показано в [131], при учете неоднородности магнитного поля и связанного с ним тороидального дрейфа ионов, поглощение ИБ волны конечно. Коэффициент оптической толщины ИЦ слоя для ИБ волн определяется выражением $\Gamma_{IR} = 2 \int \operatorname{Im}(q_{xI}) dx$, где $q_{xI} \approx (2\sqrt{\pi})^{1/3} (\Omega_I / \nu_{ii}) \tilde{Z}^{1/3}(x, q_{ef})$ - решение волнового уравнения (первое уравнение в

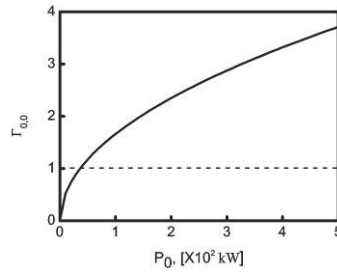


Рисунок 4.8. Зависимость показателя коэффициента усиления фундаментальной моды ЭЦ волны $\Gamma_{0,0}$ от мощности волны накачки для параметров рисунков 4.6, 4.7.

выражении (4.28) с нулевой правой частью, $q_{ef} = \sqrt{q_{||l}^2 + \omega_{ci}^2 / (\Omega_I R_0)^2}$ и \tilde{Z} - обобщенная дисперсионная функция, учитывающая эффекты продольной пространственной дисперсии и тороидального дрейфа ионов [131]. Для всего возможного диапазона продольных волновых векторов ИБ волны $\Gamma_{IR} \gg 1$, что означает ее сильное поглощение. Эффективность поглощения ИБ волны с ростом ее амплитуды будет заметно возрастать за счет стохастического поглощения [134]. Следует подчеркнуть, что оба упомянутых механизма поглощения ИБ волны приводят к квазилинейным искажениям ионной функции распределения в области энергий, превышающих тепловую, т.е. к генерации ионных "хвостов". Мощность, поглощаемая ионной компонентой плазмы в случае конвективной неустойчивости, может быть оценена как $P_I^{nk} = \delta\omega_E T_e \exp(\Gamma_{n,k}) \Omega_I / \omega_0$, где отношение частот Ω_I / ω_0 соответствует равенству чисел ЭБ и ИБ плазмонов, генерируемых в процессе распада, а ширина линии усиления $\delta\omega_E$ определяется зависимостью $\Gamma_{n,k} [q_{||}(\omega_E)]$.

Отметим в заключение, что сценарий возбуждения низкопороговой конвективной параметрической распадной неустойчивости, рассмотренный в настоящей статье, может лежать в основе объяснения эффекта аномального ускорения ионов, наблюдаемого на ряде установок при дополнительном ЭЦ нагреве плазмы [125, 126].

4.2.4. Абсолютная параметрическая неустойчивость

В случае абсолютной неустойчивости, когда имеет место параметрическое возбуждение 3D резонатора, диссипация является единственным источником потерь, который определяет

порог возбуждения параметрической неустойчивости, экспоненциально нарастающей во времени. Поэтому будем пренебрегать в уравнении (4.32) членом, описывающим конвективные потери, и учтем аксиальную симметрию системы: $q'_z = n / R$, где R - текущий большой радиус. По аналогии с конвективной неустойчивостью, будем считать диссипацию и параметрическую накачку малыми и учитывать их, следуя процедуре теории возмущений. Пренебрегая затуханием ЭБ волны и нелинейным взаимодействием, решение уравнения (4.32) может быть записано в виде собственных мод двумерного резонатора:

$$b_E^{nk}(x, y, z) = \varphi_n(x) \varphi_k(y) \exp\left(-i \frac{l}{R_0 \sin \phi} \eta\right), \quad (4.42)$$

В выражении (4.42) мы использовали те же обозначения, что и в выражении (4.33). Собственная частота волны в таком резонаторе определяется выражением (4.34). В следующем порядке теории возмущений мы можем найти поправки к частоте собственной моды резонатора, связанные с учетом параметрической накачки ИБ волны и ее затухания. Для ЭБ моды с радиальным и полоидальным числом соответственно k и l получим выражение:

$$\begin{aligned} \gamma_{kn} \frac{\partial D'_E}{\partial \omega} \Big|_E &= -D'_E + \frac{\chi_e^2(\omega_E) \chi_i^2(\Omega_I)}{4q_E^4 D'_{Iq_x}} \frac{a_B^2}{2\pi R_E} \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^k k! \delta_x} \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n! \delta_y} \times \\ &\int_{-\infty}^{\infty} ds \int_0^{\infty} d\tau \cdot \varphi_k^* \left(s + \frac{\tau}{2}\right) \varphi_k \left(s - \frac{\tau}{2}\right) \exp\left[-i \int_{s-\tau/2}^{s+\tau/2} \Delta q dx\right] \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp\left(-\frac{\eta^2}{w^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \cdot G(\tau, \nu) \times \\ &\exp\left(-\frac{u^2}{w^2} - \frac{v^2}{4w^2}\right) \varphi_n^* \left[y\left(u + \frac{v}{2}, \eta\right)\right] \varphi_n \left[y\left(u - \frac{v}{2}, \eta\right)\right], \end{aligned} \quad (4.43)$$

где R_E - текущий большой радиус в точке $x_E = 0$, $\gamma_{kn} = -i(\Omega - \Omega_{kn})$ - инкремент (декремент) ЭБ моды. Это выражение упрощается в случае раскачки основной моды резонатора $k = 0$, $n = 0$:

$$\gamma = -\nu_E + \frac{\partial D'_E}{\partial \omega} \Big|_E^{-1} \frac{\chi_e^2(\omega_E) \chi_i^2(\Omega_I)}{4q_E^4 D'_{Iq_x}} a_B^2 \frac{w^2 \delta_x}{\sqrt{w^2 + \delta_y^2}} \frac{J}{2R_E}, \quad (4.44)$$

где $\nu_E = D''_E \cdot \partial D' / \partial \omega \Big|_E^{-1}$ - декремент затухания ЭБВ и

$$J = \frac{\text{Re}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - iT\xi}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4}\right] \right\} \quad (4.45)$$

и $T = \tau_{\perp} / \tau_{\parallel}$ - отношение времени потери энергии в радиальном направлении $\tau_{\perp} = \delta_x D'_{I\omega} / D'_{Iq_x}$ и вдоль магнитного поля $\tau_{\parallel} = \Omega^2 / \omega_{pe}^2 \cdot D'_{I\omega} w^2$. В случае $T \ll 1$ - $J = 1$. В противоположном случае $T \gg 1$ - $\text{Re}(J) = \Gamma(1/4) / (2\sqrt{\pi T})$. Считая, что в выражении (4.44) инкремент равен нулю, найдем выражение, определяющее порог возбуждения абсолютной неустойчивости:

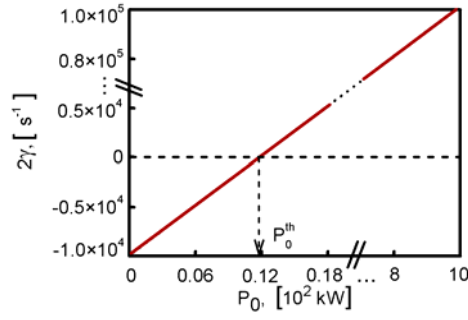


Рисунок 4.9. Зависимость инкремента параметрической неустойчивости $2\gamma_{0,0}$ от мощности накачки P_i для фундаментальной моды ЭБ волны.

$$\gamma_0^2|_{th} \simeq v_E v_I^* \frac{V_{damp}}{V_{PDI}}, \quad (4.46)$$

где $\gamma_0^2 = \frac{|a_B|^2}{4} \frac{\chi_e^2(\omega_E) \chi_i^2(\Omega_I)}{q_E^4 D'_{I\omega} D'_{E\omega}}$ - квадрат инкремента неустойчивости в однородной плазме,

$v_I^* = (\tau_{\perp} \tau_{\parallel})^{-1/2}$ - характеризует время потерь ИБВ из области распада, V_{PDI} / V_{damp} - отношение

объемов, где происходит распад $V_{PDI} \simeq \pi w^2 \delta_y \delta_x / \sqrt{w^2 + \delta_y^2}$ и где важную роль играет затухание

V_{damp} . Зависимость инкремента параметрической неустойчивости $2\gamma_{0,0}$ от мощности накачки P_i

для фундаментальной моды ЭБВ показана на рисунке 4.9 для типичных параметров экспериментов на токамаке TCV [126] ($R_0 = 87.5$ см, $n(x_m) = 2.2 \times 10^{13}$ см $^{-3}$, $T_e = 3.6$ кэВ,

$T_i = 350$ эВ, $H(x_m) = 13.6$ кГц, $w = 2$ см, $\omega_0 / 2\pi = 82.4$ ГГц). Перечислим параметры дочерних

волн: $q_E = 94$ см $^{-1}$, $\delta_x = 0.24$ см, $\delta_y = 0.34$ см, $\Omega_I / 2\pi = 0.55$ ГГц, $\omega_{EB} / 2\pi = 81.85$ ГГц,

$\omega_E / 2\pi = 81.89$ ГГц, $\delta\omega_{0,0} / 2\pi = -40$ МГц. Как можно видеть на рисунке 4.9, порог

возбуждения параметрической неустойчивости для параметров токамака TCV составляет 12

кВт. Для типичных мощностей нагрева 400 - 600 кВт, используемых при ЭЦ нагреве, инкремент

неустойчивости порядка $\gamma \simeq 10^5$ сек $^{-1}$. Его величина - на порядок меньше, а инкремент - на

порядок больше величины порога отражательной неустойчивости необыкновенной волны $t \rightarrow t' + l_{IB}$ для тех же экспериментальных параметров [25a]. Таким образом, рассмотренный в

настоящем разделе механизм представляется одним из основных для объяснения аномального нагрева ионной компоненты плазмы при ЭЦ нагреве плазмы. Этот же механизм может быть

ответственным за явление, так называемого, нелокального электронного переноса, обнаруженного в некоторых установках при ЭЦ нагреве плазмы [135]. Если в результате

распадной неустойчивости происходит полная конверсия волны накачки в ЭБ волны, то можно

ожидать поглощения ионами мощности $P_I^{nk} = P_0 \Omega_I / \omega_0$. В условиях эксперимента на TCV эта оценка дает мощность масштаба 10 кВт, которая может возрасти, если насыщение неустойчивости носит каскадный характер.

4.2.5. Выводы

Предложена теоретическая модель, объясняющая аномальный нагрев ионов при ЭЦ нагреве плазмы, наблюдавшийся в экспериментах на токамаке TCV и стеллараторе TJ-II. В случае немонотонного радиального профиля плотности плазмы показана возможность параметрического возбуждения пучком волн накачки, распространяющимся в экваториальной плоскости установки, резонансов двумерно запертых ЭБВ и генерацию ИБВ. Порог раскачиваемой при этом быстрой конвективной неустойчивости определяется диссипацией ИБ волны и может составлять значения, превышаемые в современных экспериментах по ЭЦ нагреву плазмы в токамаках. Показано, что силу аксиальной симметрии системы возможно возбуждение трехмерного резонатора ЭБВ и развитие абсолютной неустойчивости, порог возбуждения которой для типичных условий экспериментов составляет несколько десятков кВт, что значительно меньше значения, предсказанного стандартной теорией [119, 120], а инкремент неустойчивости велик настолько $\gamma \approx 10^5 \text{сек}^{-1}$, что квазилинейное насыщение становится затруднительным.

Основные публикации

- 1) Gusakov E., Popov A. On the possibility of low-threshold anomalous absorption in tokamak 2nd-harmonic electron cyclotron resonance heating experiments // EPL. - 2012. - Vol.99.- P.15001.
- 2) Попов А.Ю., Гусаков Е.З., Савельев А.Н. О низкороговом параметрическом механизме аномального поглощения мощности в экспериментах по ЭЦ нагреву плазмы в тороидальных ловушках // Письма ЖЭТФ. - 2012. - Т.96. - С.178-183.
- 3) Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Saveliev A.N. Anomalous phenomena in ECRH experiments at toroidal devices and low-threshold parametric decay instabilities // EPJ Web of Conferences. - 2012. - V32. - P.01002.

4.3. Механизм низкопороговой неустойчивости параметрического распада пучка электронных циклотронных волн необыкновенной поляризации в турбулентной плазме

В высокотемпературной плазме токамака может развиваться целый ряд различных неустойчивостей, далеко за порогом возбуждения каждой из которых в системе имеет место широкий спектр слабо коррелирующих осцилляций, т.е. плазменная турбулентность. На нелинейной стадии развития этих неустойчивостей возможно возбуждение долго живущих когерентных структур, как правило, вытянутых вдоль магнитной силовой линии и локализованных в поперечном направлении. Обычно, плотность плазмы в таких структурах выше фоновой. В силу этого, они могут служить как естественные объекты, которые могут в присутствии неоднородного магнитного поля приводить к трехмерной локализации ЭБ волн. Как было показано в работе [28а], данный универсальный механизм появления 3D резонатора ЭБ волны является причиной возбуждения низкопороговой абсолютной параметрической неустойчивости необыкновенной волны накачки на 2 гармонике ЭЦ резонанса. Основные положения и выводы работы [28а] изложены в настоящем параграфе.

4.3.1. Анализ трехмерного запираения лучевой траектории ЭБ волны в дрейфовой ячейке

Как и в предыдущих разделах настоящей главы, мы будем пренебрегать электромагнитной компонентной ЭБ волн. В слабо неоднородной плазме интегральное уравнение, описывающее поведение ее потенциала, имеет вид:

$$\hat{D}\{\phi(\mathbf{r}), \omega\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{q}d\mathbf{r}'}{(2\pi)^3} D\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{r}+\mathbf{r}'}{2}, \omega\right) \exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] \phi(\mathbf{r}') = 0, \quad (4.47)$$

где $D(\omega) = q^2 + \chi_e(\omega) + \chi_i(\omega)$, $\chi_i(\omega) \ll \chi_e(\omega)$, $\chi_{e,i}(\omega)$ - электронная и ионная восприимчивости, не учитывающие релятивистские эффекты. Введем две декартовы системы координат (ρ, η, ξ) и (x, y, z) , которые имеют общее начало координат, расположенное в экваториальной плоскости. Координата x направлена вдоль большого радиуса R , ρ - радиус текущей магнитной поверхности, η и ξ - координаты поперек и вдоль магнитной силовой линии, y и z - линейные координаты в полоидальном и тороидальном направлениях. Профиль плотности плазмы можно представить как сумму профиля фоновой плазмы n_0 и возмущения

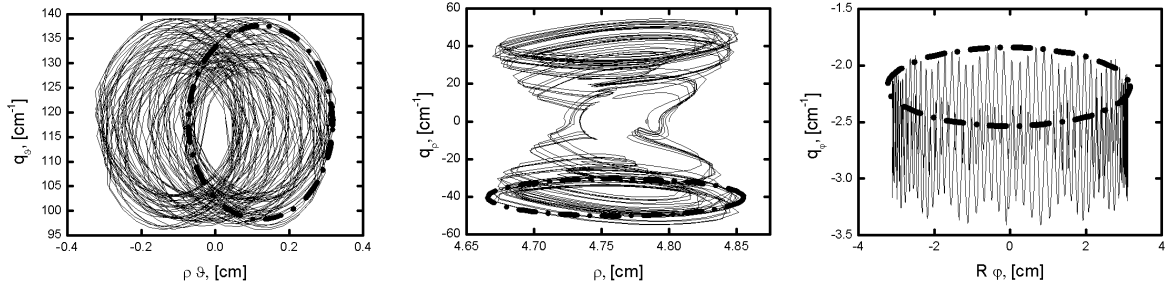


Рисунок 4.10. Фазовый портрет лучевой траектории, полученный с использованием нерелятивистского дисперсионного соотношения для ЭБВ; $n_0 = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 2 \text{ кэВ}$, $H_0 = 13.7 \text{ кГц}$, $\omega_{EB} / 2\pi = 82.3 \text{ ГГц}$.

(а) $q_\vartheta = q_\vartheta(\vartheta)$. Штрих-пунктирная кривая – (4.54) для $m = 1$. Штрих-пунктирная кривая – (4.58) для $n = 0$.
 (б) $q_\rho = q_\rho(\rho)$. Штрих-пунктирная кривая – (4.58) для $n = 0$.
 (с) $q_\varphi = q_\varphi(\varphi)$. Штрих-пунктирная кривая – (4.65) для $k = 0$.

$$\delta n = \delta_n n_0 \exp\left(-\left[(\rho - \rho_0)^2 + \rho^2 (\vartheta - \varphi / q(\rho))^2\right] / l^2\right), \quad (4.48)$$

вызванного присутствием турбулентного вихря. В выражении (4.48) ρ и ρ_0 - текущий радиус магнитной поверхности и радиус магнитной поверхности, на которой возмущение плотности имеет максимум, ϑ и φ - полоидальный и тороидальный угол, $q(\rho)$ - запас устойчивости, $\delta_n \ll 1$ - относительная амплитуда возмущения плотности и l - поперечный размер возмущения. Далее, выберем положение возмущения (4.48) в окрестности магнитной оси $\rho_0 = 3 \text{ см}$ и поперечный размер $l = 0.3 \text{ см}$, который отвечает структуре, возбуждаемой дрейфовой модой на запертых электронах. Относительное возмущение плотности выберем на уровне $\delta_n = 0.05$, что согласуется с величиной возмущений плотности, вызванной дрейфовой турбулентностью на границе плазмы, но несколько выше типичных значений относительных возмущений плотности в центральной части шнура (0.005 – 0.02). Однако с учетом явлений, описываемых негауссовскими хвостами функции вероятности реализации случайных событий [136 – 138], данная величина представляется адекватной при описании вихревой структуры. В присутствии возмущения плотности (4.48) аксиальная симметрия нарушается, и плазма становится 3D неоднородной. Учитывая, что возмущение (4.48) находится в окрестности экваториальной плоскости, мы исследуем лучевые траектории ЭБ волны для условий эксперимента на токамаке TCV ($R_0 = 90.8 \text{ см}$, $a = 24 \text{ см}$, $n_0 = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 2 \text{ кэВ}$, $H_0 = 13.7 \text{ кГц}$). Будем численно интегрировать систему уравнений Гамильтона, описывающих поведение лучевой траектории в шестимерном фазовом пространстве:

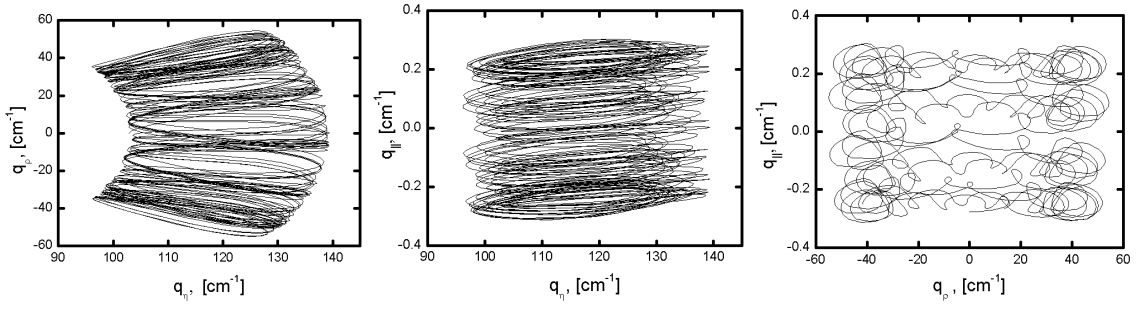


Рисунок 4.11. Взаимные зависимости компонент волнового вектора, полученные для нерелятивистского дисперсионного соотношения для ЭБВ; $n_0 = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 2 \text{ кэВ}$, $H_0 = 13.7 \text{ кГц}$, $\omega_{EB} / 2\pi = 82.3 \text{ ГГц}$. (a) $q_\rho = q_\rho(q_\eta)$, (b) $q_\parallel = q_\parallel(q_\eta)$, (c) $q_\parallel = q_\parallel(q_\rho)$.

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \left[\frac{\partial D'(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial \omega} \right]^{-1} \frac{\partial D'(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = - \left[\frac{\partial D'(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial \omega} \right]^{-1} \frac{\partial D'(\mathbf{q}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (4.49)$$

В результате, получим фазовые зависимости для ЭБ волны, которые показаны на рисунке 4.10 ($n_0 = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 2 \text{ кэВ}$, $H_0 = 13.7 \text{ кГц}$, $\omega_{EB} / 2\pi = 82.3 \text{ ГГц}$). Можно видеть их регулярное, финтное, но при этом сложное взаимозависимое поведение, что говорит о невозможности разделения переменных в системе уравнений (4.49). Как показано на рисунке 4.11, лучевая траектория в разных проекциях характеризуется разными характерными временами:

$$\left| \partial \ln q_\eta(t) / \partial t \right| \gg \left| \partial \ln q_\rho(t) / \partial t \right| \gg \left| \partial \ln q_\parallel(t) / \partial t \right|, \quad (4.50)$$

где $q_\eta = [q_\rho H_\phi - q_\phi H_\rho] / H$, $q_\parallel = [q_\rho H_\rho + q_\phi H_\phi] / H$. Колебания лучевой траектории вдоль магнитного поля намного более медленные, чем в радиальном направлении. В свою очередь, колебания лучевой траектории в радиальном направлении намного более медленные, чем в поперечном направлении. В этом случае, хотя переменные в уравнениях не разделяются, мы может описать поведение запертой ЭБ волны приближенно (полуаналитически). Однако, прежде чем перейти к полуаналитическому описанию ЭБ волны, оценим влияние электромагнитных поправок и релятивистских эффектов на эффект запираения. Примем в расчет релятивистские поправки к полному дисперсионному соотношению [139]. Отметим, что электромагнитные поправки и учет релятивизма играют существенную роль при малых значениях поперечного коэффициента преломления или в случае большой плотности плазмы, свойственной токамакам с малым аспектным отношением, [19а – 21а, 140]. В случае ЭБ волны, запертой в вихре, роль электромагнитных поправок для условий экспериментов на токамаке TCV ($R_0 = 90.8 \text{ см}$, $a = 24 \text{ см}$, $n_0 = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 2 \text{ кэВ}$, $H_0 = 13.7 \text{ кГц}$) ничтожна мала. Это показано на рисунке 4.12, где изображены дисперсионные кривые ЭБ волны, полученные с помощью полного дисперсионного уравнения и электростатического дисперсионного

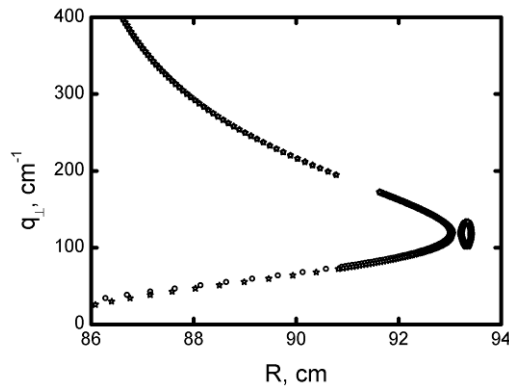


Рисунок 4.12. 1D дисперсионные кривые ЭБ волны, полученные с помощью полного дисперсионного уравнения (звезды) и электростатического дисперсионного уравнения (кружки) для условий экспериментов на токамаке TCV; $n_0 = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 2 \text{ кэВ}$, $H_0 = 13.7 \text{ кГц}$, $\omega_{EB} / 2\pi = 82.3 \text{ ГГц}$.

уравнения. Типичные фазовые соотношения, полученные с помощью электростатического дисперсионного уравнения, учитывающего релятивистские поправки [139], показаны на рисунке 4.13. Эти зависимости выглядят таким же образом, как зависимости на рисунке 4.10. Единственное отличие – при учете релятивизма частота запертой ЭБВ оказывается $\omega_{EB} / 2\pi = 81.65 \text{ ГГц}$. В случае более теплой, но при этом менее плотной плазмы ($n_0 = 2.3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 5 \text{ кэВ}$), лучевая траектория ЭБ волны оказывается все также трехмерно запертой, что показано на рисунке 4.14. Частота запертой ЭБ волны оказывается меньше, чем в предыдущем случае - $\omega_{EB} / 2\pi = 80.8 \text{ ГГц}$. Таким образом, мы показали, что малое возмущение плотности плазмы в когерентной турбулентной структуре может стать трехмерным резонатором для ЭБВ. Размер этого резонатора в тороидальном направлении значительно меньше, чем в случае, когда трехмерный резонатор возбуждается в силу тороидальной симметрии системы. В этом случае, можно ожидать снижение порога возбуждения параметрической неустойчивости и увеличения ее инкремента.

4.3.2. Полуаналитическое описание запираания ЭБ волны в возмущении плотности плазмы

К сожалению, численный анализ показал невозможность разделения переменных в системе уравнений (4.49). В этом случае найти строгое решение системы уравнений в частных производных не представляется возможным. Несмотря на это, большая разница между харак-

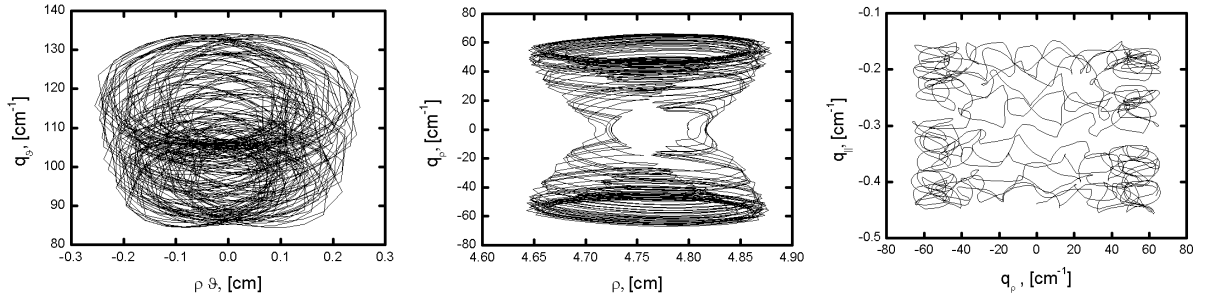


Рисунок 4.13. Фазовый портрет лучевой траектории, полученный с использованием релятивистского дисперсионного соотношения для ЭБ волны [139]; $n_0 = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 2 \text{ кэВ}$, $H_0 = 13.7 \text{ кГц}$, $\omega_{EB} / 2\pi = 81.65 \text{ ГГц}$. (a) $q_\phi = q_\phi(\vartheta)$. (b) $q_\rho = q_\rho(\rho)$. (c) $q_\eta = q_\eta(\varphi)$.

терными масштабами времен, характеризующих колебания лучевой траектории в разных проекциях (4.50) позволяет найти приближенное решение (4.49). Мы будем описывать поведение траектории вдоль координаты η , считая, что зависимость от двух других координат адиабатическая. Далее, мы будем описывать поведение траектории вдоль координаты ρ , считая зависимость от координаты ξ адиабатической. С целью упрощения анализа, мы будем искать решение (4.49) в окрестности точки поворота ЭБ волны в радиальном направлении. Координату и волновой вектор, соответствующий этой точке, будем искать, решая систему уравнений:

$$D'(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \omega) \Big|_{\bar{q}_E, \bar{r}_E, \omega_E} \equiv D' \Big|_0 = 0, \quad \partial D'(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \omega) / \partial q_\perp \Big|_0 = 0, \quad \partial D'(\mathbf{q}, \mathbf{r}, \omega) / \partial \rho \Big|_0 = 0, \quad (4.51)$$

где $q_\perp = \sqrt{q_\rho^2 + q_\eta^2}$. Первое уравнение – дисперсионное уравнение ЭБ волны, второе уравнение обеспечивает наличие точки поворота дисперсионной кривой ЭБ волны в радиальном направлении, а третье – условие локального максимума дисперсионной функции D' в радиальном направлении, которое приводит к появлению двух точек поворота, связывающих «теплую» и «горячую» моду ЭБ волны. Решение (4.51) дает $\omega = \omega_E$, $\mathbf{q}_E = (q_\rho = 0, q_\eta = q_E, q_\parallel = 0)$ и $\mathbf{r}_E = (\rho_E, \eta = 0, \xi = 0)$. В случае выполнения дополнительных условий:

$$\frac{\partial^2 D'}{\partial q_\perp^2} \Big|_0 > 0, \quad \frac{\partial^2 D'}{\partial \eta^2} \Big|_0 > 0, \quad (4.52)$$

существует глобальный минимум дисперсионной функции $D'(\mathbf{q}_E + \mathbf{e}_\eta Q_\eta, \mathbf{r}_E, \omega_E)$ от двух переменных (Q_η, η) , что показано на рисунке 4.15. В этом случае, возможно запираение лучевой траектории, а значит и ЭБВ в направлении η . Разложим D' в окрестности точек $\eta = 0, q_\eta = q_E$ вплоть до первого неисчезающего члена (второго порядка) по переменным $Q_\eta = q_\eta - q_E$ и η :

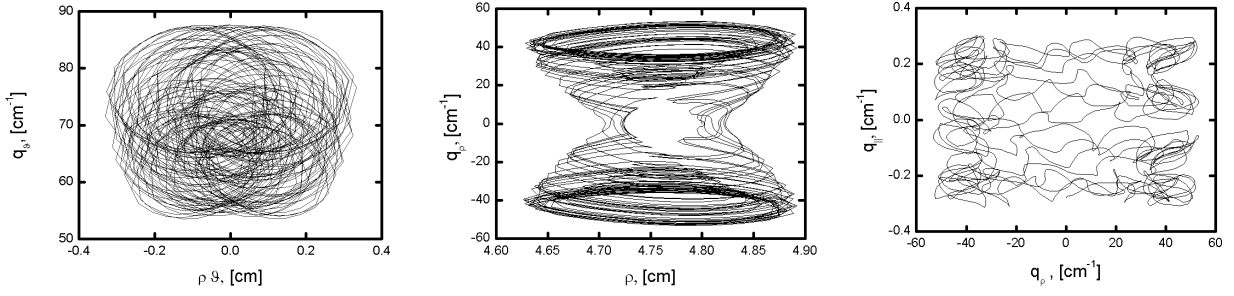


Рисунок 4.14. Фазовый портрет лучевой траектории, полученный с использованием релятивистского дисперсионного соотношения для ЭБ волны [139]; $n_0 = 2.3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 5 \text{ кэВ}$, $H_0 = 13.7 \text{ кГц}$, $\omega_{EB} / 2\pi = 80.8 \text{ ГГц}$. (а) $q_\varphi = q_\varphi(\vartheta)$. (б) $q_\rho = q_\rho(\rho)$. (с) $q_\varphi = q_\varphi(\varphi)$.

$$D'_\eta \approx D'_\eta + \frac{\partial^2 D'}{2\partial q_\eta^2} Q_\eta^2 + \frac{\partial^2 D'}{2\partial \eta^2} \eta^2 = 0, \quad (4.53)$$

где $D'_\eta = D'(q_\eta = q_E, \eta = 0; q_\rho, q_\parallel, \rho, \xi)$ и $q_\rho, q_\parallel, \rho, \xi$ - аргументы, от которых функция зависит адиабатически. Решая (4.53), найдем:

$$Q_\eta = \frac{\partial^2 D'}{2\partial q_\eta^2}^{-1/2} \sqrt{-D'_\eta - \frac{\partial^2 D'}{2\partial \eta^2} \eta^2}. \quad (4.54)$$

Эта зависимость показана на рисунке 4.10а штрих-пунктирной кривой. Поскольку (4.54) зависит адиабатически от $\rho, \xi, q_\rho, q_\parallel$, соответствующее действие $\oint Q_\eta d\eta$ является адиабатическим инвариантом лучевой траектории в этом 4D подпространстве. Учитывая условие квантования $\oint Q_\eta d\eta = (2m+1)\pi$, получим:

$$\phi_\eta(\eta, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{Q_\eta(0)}{Q_\eta(\eta)}} \left[\exp\left(i \int^\eta Q_\eta(s) ds\right) + c.c. \right], \quad (4.55)$$

где с.с. – комплексное сопряжение. Окончательно получим редуцированное дисперсионное уравнение:

$$\tilde{D}' = D'_\eta + \left(m + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{\partial^2 D'}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 D'}{\partial q_\eta^2}} = 0. \quad (4.56)$$

Как можно видеть на рисунке 4.16 \tilde{D}' является полиномом 4 степени по переменной q_ρ и 3 степени по переменной $x = \rho - \rho_E$. В окрестности одного из двух локальных минимумов \tilde{D}' по переменной q_ρ при $q_{\rho 0}$ выражение (4.56) имеет вид:

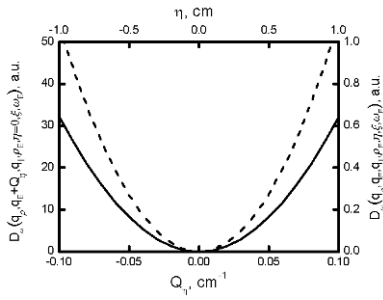


Рисунок 4.15. Зависимость $D'(\mathbf{q}_E + \mathbf{e}_n Q_n, \mathbf{r}_E, \omega_E)$ от Q_n (сплошная линия, левая и нижняя оси) и $D'(\mathbf{q}_E, \mathbf{r}_E + \mathbf{e}_n \eta, \omega_E)$ от η (пунктирная линия, правая и верхняя оси).

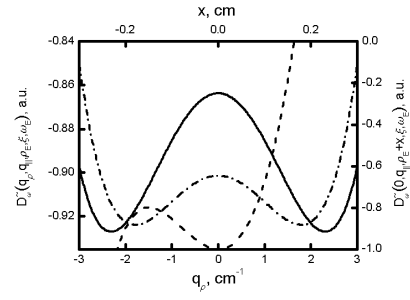


Рисунок 4.16. Зависимость $\tilde{D}'(q_\rho, q_\parallel, \rho_E, \xi, \omega_E)$ от q_ρ (сплошная и штрих-пунктирная линии, левая и нижняя оси) и $\tilde{D}'(0, q_\parallel, \rho_E + x, \xi, \omega_E)$ от x (пунктирная линия, правая и верхняя оси).

$$\tilde{D}' \approx \tilde{D}'|_x + \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{2\partial q_\rho^2} \Big|_x Q_x^2 + \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{2\partial \rho^2} \Big|_x x^2 - \frac{\partial^3 \tilde{D}'}{3!\partial \rho^3} \Big|_x x^3 = 0, \quad (4.57)$$

где $\tilde{D}'|_x = \tilde{D}'(q_\rho = q_{\rho 0}, \rho = \rho_E; q_\parallel, \xi)$ - функция двух переменных (q_\parallel, ξ) . Дисперсионное уравнение (4.57) описывает ангармонический осциллятор, который является одним из двух аттракторов для лучевой траектории в 2D (q_ρ, ρ) сечении 6D фазового пространства. Эти аттракторы имеют место для параметров лучевой траектории в 2D (q_\parallel, ξ) сечении фазового пространства при $(|q_\parallel| \rightarrow 0, |\xi| \rightarrow \max)$, что отвечает области фазового пространства, где лучевая траектория задерживается дольше всего. Переход от одного аттрактора к другому имеет место из-за движения лучевой траектории в 2D (q_\parallel, ξ) сечении фазового пространства между двумя точками отражения при $|q_\parallel| \rightarrow 0$. Решая уравнение (4.57), получим:

$$Q_x = \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{2\partial q_\rho^2} \Big|_x^{-1/2} \sqrt{-\tilde{D}'|_x - \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{2\partial \rho^2} \Big|_x x^2 + \frac{\partial^3 \tilde{D}'}{3!\partial \rho^3} \Big|_x x^3}. \quad (4.58)$$

В случае если выполнено условие $(\partial^3 \tilde{D}' / \partial \rho^3 |_x)^2 (\tilde{D}'|_x)^2 < -\frac{2}{3} (\partial^2 \tilde{D}' / \partial \rho^2 |_x)^3 \tilde{D}'|_x$, дискриминант

кубического уравнения $\frac{\partial^3 \tilde{D}'}{3!\partial \rho^3} \Big|_x x^3 - \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{2\partial \rho^2} \Big|_x x^2 - \tilde{D}'|_x = 0$ больше нуля и все 3 корня его корня –

действительные, причем $x_3 < x_2 < 0 < x_1$. Таким образом, мы можем представить (4.58) в виде:

$$Q_x = \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{2\partial q_\rho^2} \Big|_x^{-1/2} \frac{\partial^3 \tilde{D}'}{3!\partial \rho^3} \Big|_x^{1/2} \sqrt{(x - x_2)(x - x_3)(x_1 - x)}. \quad (4.59)$$

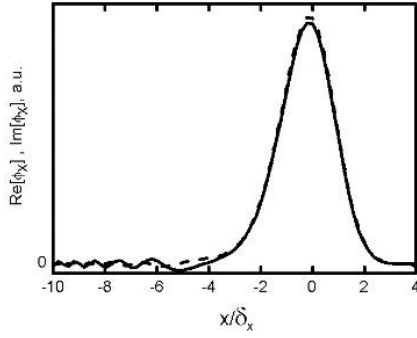


Рисунок 4.17. Распределение $\text{Re}(\phi_x(x))$ (сплошная линия) и $\text{Im}(\phi_x(x))$ (пунктирная линия) при $n=0$, $\xi=3.6\text{см}$, $Q_{\parallel}=0$, $\delta_x = (\partial^2 \tilde{D}' / \partial q_{\rho}^2) / (\partial^2 \tilde{D}' / \partial \rho^2) \Big|_x^{1/4}$.

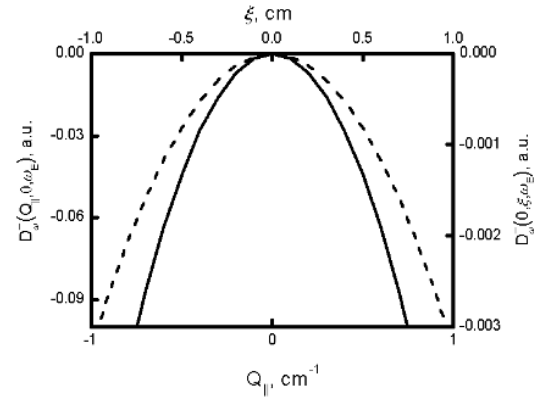


Рисунок 4.18. Зависимость $\bar{D}'(Q_{\parallel}, 0, \omega_E)$ от Q_{\parallel} (сплошная линия, левая и нижняя оси) и $\bar{D}'(0, \xi, \omega_E)$ от ξ (пунктирная линия, правая и верхняя оси).

Волновое число (4.59) отвечает ЭБ волне, которая может быть заперта между точками x_2 и x_1 , может свободно распространяться при $x < x_3$ и имеет область непрозрачности между точками $x_3 < x < x_2$. Далее, мы учтем локализацию решения между точками x_2 и x_1 , а также возможность туннелирования части энергии запертой ЭБ волны через область непрозрачности, расположенной между точками $x_3 < x < x_2$. В случае малых радиационных потерь, которые могут быть описаны в рамках ВКБ приближения, модифицированное условие квантования действия $\oint Q_x dx$ дает:

$$\bar{D}' + i\bar{D}'' = \tilde{D}' \Big|_x + \sqrt{\frac{\partial^2 \tilde{D}'}{\partial \rho^2} \Big|_x \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{\partial q_{\rho}^2} \Big|_x} \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{i}{4\pi} \exp \left[-2 \int_{x_3}^{x_2} Q_x(x) dx \right] \right\} = 0. \quad (4.60)$$

Последний член в выражении (4.60) описывает затухание запертой волны в силу радиационных потерь. Соответствующее ВКБ решение, описывающее волну, запертую в направлении x , имеет вид:

$$\phi_x(x, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{Q_x(0)}{Q_x(x)}} \left[\exp \left(i \int^x Q_x(s) ds \right) + c.c. \right]. \quad (4.61)$$

Выражения (4.60) и (4.61) применимы, если область непрозрачности достаточно широка и волна, запертая в резонаторе, соответствует высокой собственной моде. В противоположном случае фундаментальной моды и больших радиационных потерь, затухание может быть

оценено на основе анализа дифференциального уравнения, соответствующего дисперсионному уравнению (4.57):

$$\tilde{D}'\phi_x \approx \left[\tilde{D}'\Big|_x - \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{2\partial q_\rho^2}\Big|_x \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{2\partial \rho^2}\Big|_x x^2 - \frac{\partial^3 \tilde{D}'}{3!\partial \rho^3}\Big|_x x^3 \right] \phi_x = 0. \quad (4.62)$$

Решение (4.62) ищется численно таким, чтобы оно было локализовано между $x_2 < x < x_1$ и соответствовало не растущей уходящей волне при $x < x_3$. Собственное значение (4.62), удовлетворяющее этим требованиям равно:

$$\bar{D}' + i\bar{D}'' = \tilde{D}'\Big|_x + \sqrt{\frac{\partial^2 \tilde{D}'}{2\partial \rho^2}\Big|_x \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{2\partial q_\rho^2}\Big|_x} \{1 - \Delta_R - i\Delta_I\} = 0, \quad (4.63)$$

где Δ_R и Δ_I находятся численно. Результат численного решения (4.62) показан на рисунке 4.17.

В этом случае $\Delta_R = 0.039195$, $\Delta_I = 0.0009682$. В свою очередь дисперсионное уравнение (4.60) (или (4.63) в случае фундаментальной моды) может быть использовано, чтобы найти $Q_{||} = Q_{||}(\xi)$. (С целью сохранения общей формы презентации для всех переменных, мы будем использовать заглавную букву при обозначении продольного вектора). Учитывая локальный минимум функции $\bar{D}'(Q_{||}, \xi, \omega)$ от $(Q_{||} = 0, \xi = 0)$ (рисунок 4.18) и раскладывая ее в ряд Тейлора по переменным $\omega_{EB} - \omega_E$, $Q_{||}$ и ξ , получим:

$$(\omega_{EB} - \omega_E) \frac{\partial \bar{D}'}{\partial \omega}\Big|_0 + \bar{D}'\Big|_0 - \frac{\partial^2 \bar{D}'}{2\partial q_{||}^2}\Big|_0 Q_{||}^2 - \frac{\partial^2 \bar{D}'}{2\partial \xi^2}\Big|_0 \xi^2 + i\bar{D}''\Big|_0 = 0, \quad (4.64)$$

где $\omega_{EB} = \omega'_{EB} + i\omega''_{EB}$. Решая квадратное уравнение (4.64), найдем продольный волновой вектор в явном виде:

$$Q_{||} = \frac{\partial^2 \bar{D}'}{2\partial q_{||}^2}\Big|_0^{-1/2} \sqrt{(\omega'_{EB} - \omega_E) \frac{\partial \bar{D}'}{\partial \omega}\Big|_0 + \bar{D}'\Big|_0 - \frac{\partial^2 \bar{D}'}{2\partial \xi^2}\Big|_0 \xi^2}. \quad (4.65)$$

Соответствующее ВКБ решение, описывающее волну, запертую вдоль магнитного поля, имеет вид:

$$\phi_\xi(\xi, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{Q_{||}(0)}{Q_{||}(\xi)}} \left[\exp\left(i \int^\xi Q_{||}(s) ds\right) + c.c. \right]. \quad (4.66)$$

Собственная частота ЭБ волны, запертой в 3D резонаторе, имеет вид:

$$\omega'_{EB} = \omega_E + \frac{\partial \bar{D}'}{\partial \omega}\Big|_0^{-1} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\partial^2 \bar{D}'}{2\partial q_{||}^2}\Big|_0^{-1/2} \sqrt{\frac{\partial^2 \bar{D}'}{\partial \xi^2}\Big|_0 \frac{\partial^2 \bar{D}'}{\partial q_{||}^2}\Big|_0} - \left(m + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{\partial^2 \bar{D}'}{\partial \eta^2}\Big|_0 \frac{\partial^2 \bar{D}'}{\partial q_\eta^2}\Big|_0} - \right. \quad (4.67)$$

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\left. \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{\partial \rho^2} \right|_0 \left. \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{\partial q_\rho^2} \right|_0} - D' \Big|_0 \Big], \quad \omega''_{EB} = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial \bar{D}'}{\partial \omega} \right|_0^{-1} \sqrt{\left. \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{\partial \rho^2} \right|_x \left. \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{\partial q_\rho^2} \right|_x} \exp \left[-2 \int_{x_3}^{x_2} Q_x(x) dx \right].$$

Для фундаментальной моды:

$$\begin{aligned} \omega'_{EB} = \omega_E + \left. \frac{\partial \bar{D}'}{\partial \omega} \right|_0^{-1} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \left. \frac{\partial^2 \bar{D}'}{2 \partial q_{\parallel}^2} \right|_0^{-1/2} \sqrt{\left. \frac{\partial^2 \bar{D}'}{\partial \xi^2} \right|_0 \left. \frac{\partial^2 \bar{D}'}{\partial q_{\parallel}^2} \right|_0} - \left(m + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\left. \frac{\partial^2 D'}{\partial \eta^2} \right|_0 \left. \frac{\partial^2 D'}{\partial q_\eta^2} \right|_0} - \right. \\ \left. (1 - \Delta_R) \sqrt{\left. \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{\partial \rho^2} \right|_0 \left. \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{\partial q_\rho^2} \right|_0} - D' \Big|_0 \Big], \quad \omega''_{EB} = \Delta_I \left. \frac{\partial \bar{D}'}{\partial \omega} \right|_0^{-1} \sqrt{\left. \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{\partial \rho^2} \right|_x \left. \frac{\partial^2 \tilde{D}'}{\partial q_\rho^2} \right|_x}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

где Δ_R и Δ_I - результат численного решения. Для параметров эксперимента на токамаке TCV и параметров возмущения плотности, использованных при моделировании поведения лучевой траектории, единственная мода, которая может возбуждаться – это $(m=1, n=0, k=0)$. Для данной моды: $\omega'_{EB} / 2\pi \approx 82.21$ ГГц и $\omega''_{EB} / 2\pi = 0.89$ МГц. Зависимости (4.58) и (4.65) для фундаментальной моды $(n=0, k=0)$ показаны на рисунках 4.10b и 4.10с штрих-пунктирными линиями.

4.3.3. Параметрическое возбуждение 3D резонатора ЭБ волн пучком электронных циклотронных волн необыкновенной поляризации

Рассмотрим пучок необыкновенных волн, который распространяется почти перпендикулярно магнитному полю \mathbf{H} в направлении градиента плотности плазмы в экваториальной плоскости и вектор поляризации которых направлен преимущественно в полоидальном направлении:

$$E_{0y} = \frac{a_0}{2} \exp \left[-\frac{\eta^2 + \xi^2}{2w^2} + ik_{\rho 0} x + ik_{\parallel 0} \xi - i\omega_0 t \right] + \text{с.с.}, \quad (4.69)$$

где $a_0 = \sqrt{\frac{8\pi}{c} \frac{P_i}{\pi w^2}}$, P_i и w - мощность и радиус пучка, и принято во внимание, что в анализируемых экспериментах $\omega_0^2 \gg \omega_{ce}^2, \omega_{pe}^2$. В случае, если пучок пересекает дрейфовый вихрь, возможен распад X - волны и возбуждение трехмерно локализованной ЭБ волны $\phi_\omega \sim \exp(-i\omega t)$ и низкочастотных потенциальных колебаний $\phi_\Omega \sim \exp(i\Omega t)$, $\Omega = \omega_0 - \omega \ll \omega_0$. Эта неустойчивость описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \hat{D}\{\phi_\Omega(\mathbf{r}), \Omega\} = 4\pi\rho_\Omega(\mathbf{r}), \\ \hat{D}\{\phi_\omega(\mathbf{r}), \omega\} = 4\pi\rho_\omega(\mathbf{r}), \end{cases} \quad (4.70)$$

где интегральные операторы $\hat{D}(\omega)$ и $\hat{D}(\Omega)$ определены согласно выражению (4.47). В многокомпонентной плазме низкочастотная электронная [92] и ионная [131] восприимчивости даются выражениями:

$$\begin{aligned} \chi_e(\mathbf{q}_I, \Omega) &= \frac{2\omega_{pe}^2}{v_{te}^2} \left[1 - \frac{\Omega}{|q_{I\parallel}|v_{te}} Z\left(\frac{\Omega}{q_{I\parallel}v_{te}}\right) \exp\left(-\frac{q_{I\perp}^2 v_{te}^2}{2\omega_{ce}^2}\right) I_0\left(\frac{q_{I\perp}^2 v_{te}^2}{2\omega_{ce}^2}\right) \right], \\ \chi_i(\mathbf{q}_I, \Omega) &= \sum_j \frac{2\omega_{pj}^2}{v_{ij}^2} \left[1 - \frac{\Omega}{q_{I\perp}v_{ij}} Z\left(\frac{\Omega}{q_{I\perp}v_{ij}}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.71)$$

где $\mathbf{q}_I = (q_{\rho E} - k_{\rho 0}, q_{\eta E}, -k_{\parallel 0} \approx -\omega_0 \sin \mathcal{G}_0/c)$, $\mathcal{G}_0 \approx 10^\circ \div 12^\circ$ - угол наклона пучка накачки и j - суммирование по сортам ионов. В выражении (4.71) мы учли, что для низкочастотных колебаний, распространяющихся под углом к магнитному полю $|q_{I\parallel}| = \omega_0 \sin \mathcal{G}_0/c \geq \max[\omega_{cj}/v_{ij}]$, ионные циклотронные резонансы сильно перекрываются в пространстве и ионы ведут себя как немагнитные. Нелинейные плотности заряда ρ_Ω и ρ_ω могут быть представлены в виде [133]:

$$\rho_\Omega \approx -\frac{\chi_i(\Omega, q_I)}{4\pi} \frac{E_0^*}{3H} \phi_\omega, \quad \rho_\omega \approx -\frac{\chi_e(\Omega, q_I)}{4\pi} \frac{E_0}{3H} \phi_\Omega. \quad (4.72)$$

В выражении (4.72) мы приняли во внимание, что ЭБ волны удовлетворяют дисперсионному уравнению $D(q_E, \omega) = q_E^2 + \chi_e'(q_E, \omega) = 0$. Анализ возбуждения 3D резонатора ЭБ волны мы проведем, как и ранее, с использованием теории возмущения. На первом шаге мы пренебрежем затуханием ЭБ волны и ее нелинейной накачкой. В этом случае мы можем представить потенциал ЭБ волны в следующей форме:

$$\phi_\omega(\mathbf{r}) = \frac{b_\omega(\mathbf{r})}{2} \exp(iq_{\rho E}x + iq_{\eta E}\eta - i\omega t) + c.c., \quad (4.73)$$

где амплитуда b_ω является решением уравнения $\hat{D}'\{b_\omega, \omega\} = 0$:

$$b_\omega^{mnk} = \phi_\eta(\eta, m)\phi_x(x, n)\phi_\xi(\xi, k), \quad \omega = \omega_{EB}. \quad (4.74)$$

На следующем шаге теории возмущения мы учтем диссипативные и радиационные потери ЭБ волны, локализованной дрейфовым вихрем, а также ее нелинейную накачку. Подставим решение (4.74) в уравнение, описывающее низкочастотную волну:

$$\hat{D}\phi_\Omega(\vec{r}, \Omega) = -\chi_i(q_I, \Omega) \frac{a_0^*}{6H} b_\omega(\vec{r}) \exp\left[-\frac{\eta^2 + \xi^2}{2w^2} - i(k_{\rho 0} - q_{\rho E})x + iq_{\eta E}\eta - ik_{\parallel 0}\xi + i\Omega t\right]. \quad (4.75)$$

В силу конечности продольного волнового вектора $k_{||0}$ волн накачки, их параметрический распад может приводить к возбуждению не распространяющихся или сильно затухающих низкочастотных колебаний, потенциал которых имеет вид:

$$\phi_{\Omega}(\vec{r}) = b_{\Omega}(\vec{r}) \exp\left(i(q_{\rho E} - k_{\rho 0})x + iq_{\eta E}\eta - ik_{||0}\xi + i\Omega t\right), \quad (4.76)$$

где амплитуда $b_{\Omega}(\vec{r})$ дается выражением:

$$b_{\Omega}(\vec{r}) = -\frac{\chi_i(q_I, \Omega)}{D(q_I, \Omega)} \frac{a_0^*}{6H} b_{\omega}^{mnk}(\vec{r}) \exp\left[-\frac{y^2 + z^2}{2w^2}\right], \quad (4.77)$$

$D(q_I, \Omega) = D'(q_I, \Omega) - iD''(q_I, \Omega)$, $D'(q_I, \Omega) = q_I^2 + \chi_e'(q_I, \Omega) + \chi_i'(q_I, \Omega)$ - невязка в дисперсионном уравнении несобственных колебаний и $D''(q_I, \Omega) = \chi_e''(q_I, \Omega) + \chi_i''(q_I, \Omega)$.

Подставим (4.77) в правую часть высокочастотного уравнения (4.70) и получим:

$$\left[(\omega_{m,n,k} + i\omega_{EB}'') \frac{\partial D'}{\partial \omega} \Big|_0 + iD'' \right] b_{\omega}^{mnk}(\vec{r}) = \frac{|a_0|^2}{36H^2} \frac{\chi_i^2(q_I, \Omega)}{D(q_I, \Omega)} b_{\omega}^{mnk}(\vec{r}) \exp\left[-\frac{y^2 + z^2}{w^2}\right], \quad (4.78)$$

где $\omega_{m,n,k} = \omega'_{m,n,k} + i\gamma_{m,n,k}$ - поправка к собственной частоте ЭБ волны, локализованной в трехмерном плазменном резонаторе. Умножим уравнение (4.78) на функцию $(b_{\omega}^{mnk})^*$ и проинтегрируем получившееся выражение, что дает инкремент неустойчивости в виде:

$$\gamma_{m,n,k} = \nu_0 \frac{V_{PDI}}{V_{cavity}} - \nu_E, \quad (4.79)$$

$$\nu_E = \langle D'' \rangle \left| \frac{\partial D'}{\partial \omega} \Big|_0^{-1} + \langle \omega_{EB}'' \rangle \right. \quad (4.80)$$

- характеризует затухание и радиационные потери ЭБВ,

$$V_{cavity} = \int dV |\phi_{\eta}(\eta, m)|^2 |\phi_x(x, n)|^2 |\phi_{\xi}(\xi, k)|^2 \quad (4.81)$$

- объем, в котором локализована ЭБ волна,

$$\langle \dots \rangle = \int dV |\phi_{\eta}(\eta, m)|^2 |\phi_x(x, n)|^2 |\phi_{\xi}(\xi, k)|^2 \dots \quad (4.82)$$

- усреднение по объему локализации собственной моды,

$$V_{PDI} = \langle \exp\left[-\frac{\xi^2 + \eta^2}{w^2}\right] \rangle \quad (4.83)$$

- объем, в котором имеет место параметрический распад,

$$\nu_0 = \frac{|a_0|^2}{36H^2} \frac{\chi_i^2(q_I, \Omega) D''(q_I, \Omega)}{|D(q_I, \Omega)|^2} \left| \frac{\partial D'}{\partial \omega} \Big|_0^{-1} \right. \quad (4.84)$$

- инкремент неустойчивости в однородной плазме. Порог абсолютной неустойчивости можно найти из условия $\gamma_{m,n,k} = 0$:

$$\nu_0(P_0^{th}) = \nu_E \frac{V_{cavity}}{V_{PDI}}. \quad (4.85)$$

Для фундаментальной моды 3D резонатора ЭБ волны:

$$V_{cavity} \approx \pi^{3/2} \delta_x \delta_\eta \delta_\xi, \quad V_{PDI} \approx \frac{\pi^{3/2} \delta_x \delta_\eta \delta_\xi}{\sqrt{1 + \delta_\eta^2 / w^2} \sqrt{1 + \delta_\xi^2 / w^2}}.$$

В этом случае геометрический фактор сводится к выражению:

$$\frac{V_{PDI}}{V_{cavity}} = \frac{w^2}{\sqrt{w^2 + \delta_\eta^2} \sqrt{w^2 + \delta_\xi^2}}. \quad (4.86)$$

В случае типичного для токамака TCV разряда в дейтерии с малой примесью водорода ($n_H / n_D = 5\%$, $T_{D,H} = 0.3\text{кэВ}$) порог возбуждения абсолютной неустойчивости равен $P_0^{th} = 7.4\text{кВт}$. При мощности нагрева $P_i = 0.75\text{МВт}$ инкремент неустойчивости $2\gamma_{1,0,0} \approx 0.6 \cdot 10^8 \text{сек}^{-1}$. Значение инкремента много больше характерной частоты дрейфовой турбулентности и обратного времени жизни дрейфового вихря. Низкочастотные колебания, которые возбуждаются в результате неустойчивости – медленные ионные звуковые волны. Эти волны испытывают сильное бесстолкновительное затухание на ионах и, таким образом, вкладывают энергию в ионную компоненту. В ходе ЭЦ нагрева температура электронов растет до $T_e = 5\text{кэВ}$ [141] при примерно той же или немного меньшей плотности, чем до нагрева. Как показано на рисунке 4.14, ЭБВ при этой температуре остается локализована возмущением плотности (4.48). В этом случае в результате неустойчивости возбуждаются 3D резонатор ЭБ волн и индуцированные сильнозатухающие колебания на частоте $\Omega / (2\pi) = 1.6 \text{ГГц}$. Эти колебания взаимодействуют с ускоренными ионами дейтерия, 10% фракция которых образуется в результате ЭЦ нагрева и имеет эффективную температуру $T_{D,tail} = 4\text{кэВ}$ [142], что приводит к передаче энергии в ионный канал. Порог возбуждения абсолютной неустойчивости в этом случае $P_0^{th} = 167\text{кВт}$ и инкремент для мощности нагрева $P_0 = 0.75\text{МВт}$ составляет $2\gamma_{1,0,0} \approx 0.45 \cdot 10^5 \text{сек}^{-1}$. Отметим, что на токамаке TCV создана хорошо сфокусированная система, позволяющая вводить в плазму несколько пучков общей мощностью 4.5 МВт. В этом случае через один и тот же дрейфовый вихрь может пересекаться несколькими мощными пучками, что приводит к увеличению инкремента неустойчивости в $M \leq 7$ раз: $2\gamma_{1,0,0} \approx 0.45 \times M \cdot 10^5 \text{сек}^{-1}$.

4.3.4. Выводы

В настоящем разделе показано, что в присутствии дрейфовых вихрей (блотов, филаментов), плотность в которых больше плотности фоновой плазмы, может возбуждаться 3D резонатор ЭБ волны. Нелинейное возбуждение при ЭЦ нагреве этого резонатора вместе с низкочастотными индуцированными сильнозатухающими колебаниями можно интерпретировать как низкороговую абсолютную неустойчивость волны накачки. Эта неустойчивость может быть ответственна за аномальный нагрев ионов и генерацию групп ускоренных ионов, часто наблюдаемых в экспериментах по ЭЦ нагреву плазмы.

Основные публикации

Gusakov E.Z., Popov A.Yu., Saveliev A.N. Trapping of electron Bernstein waves in drift-wave eddies and parametric decay instability at second harmonic ECRH in toroidal devices // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2014. - Vol.56. - P.015010

4.4. Низкопороговая двухплазменная параметрическая неустойчивость пучка электронных циклотронных волн необыкновенной поляризации

Отражение необыкновенной ЭЦ волны в экспериментах на токамаке TEXTOR может быть объяснено ее параметрическим распадом на рассеянную «назад» необыкновенную волну и двумерно запертую ионную бернштейновскую волну [22а – 25а, раздел 4.1]. Подобная интерпретация выглядит естественной, но не является единственно возможной. Появление рассеянной «назад» необыкновенной волны может быть следствием вторичного нелинейного процесса, который сопровождает первичный параметрический распад волны накачки, имеющий другую природу. Указание на присутствие такого первичного параметрического процесса может быть найдено в [143], где показано, что наиболее интенсивное аномальное отражение от магнитного острова имеет место тогда, когда частота верхнего гибридного резонанса (ВГР) в нем слегка превосходит половину частоты волны накачки. В этих условия возможен распад необыкновенной ЭЦ волны на два верхнегибридных (ВГ) плазмона, частота которых порядка половины частоты накачки. В настоящем разделе приводятся основные результаты, полученные в работах [29а – 31а].

4.4.1. Первичный низкопороговый параметрический распад необыкновенной волны

Рассмотрим наиболее простую, но адекватную эксперименту по ЭЦ нагреву плазмы в тороидальной ловушке модель двухплазменного распада: будем считать, что пучок необыкновенных волн распространяется перпендикулярно магнитному полю $\mathbf{H} \parallel \mathbf{e}_z$ в экваториальной плоскости в направлении градиента плотности плазмы (вдоль оси \mathbf{e}_x):

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(\omega_0, x) \left[\frac{E_0(y, z)}{2} \sqrt{\frac{\omega_0}{ck_0(x)}} \exp\left(i \int^x k_0(x') dx' - i\omega_0 t\right) + c.c. \right], \quad (4.87)$$

$$\mathbf{e}(\omega_0, x) = -i \frac{g(\omega_0, x)}{\varepsilon(\omega_0, x)} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \quad (4.88)$$

- вектор поляризации,

$$E_0(y, z) = \sqrt{\frac{8\pi}{c} \frac{P_i}{\pi w^2}} \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{2w^2}\right) \quad (4.89)$$

- амплитуда поля в пучке, P_i - мощность пучка, w - радиус пучка,

$$k_0(x) = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega_0, x)^2 - g(\omega_0, x)^2}{\varepsilon(\omega_0, x)}} \quad (4.90)$$

- радиальная компонента волнового вектора,

$$\varepsilon(\omega_0) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0^2 - \omega_{ce}^2}, \quad g(\omega_0) = \frac{|\omega_{ce}|}{\omega_0} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0^2 - \omega_{ce}^2} \quad (4.91)$$

- поперечные к магнитному полю компоненты «холодного» тензора диэлектрической проницаемости плазмы на частоте ω_0 , *c.c.* - член, полученный из первого комплексным сопряжением. Приведем также явный вид продольной компоненты «холодного» тензора диэлектрической проницаемости плазмы

$$\eta(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad (4.92)$$

которая потребует в дальнейшем.

Рассмотрим распад волны накачки (4.1) на две дочерние потенциальные верхнегибридные волны, распространяющиеся поперек магнитного поля и описываемые потенциалами:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{C_1}{2} \exp(iq_y y - i\omega_1 t) \varphi_1(x) + c.c., \\ \phi_2 &= \frac{C_2}{2} \exp(iq_y y + i\omega_2 t) \varphi_2(x) + c.c., \end{aligned} \quad (4.93)$$

где $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$, $C_{1,2} = const$ и

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{|D_{jq}(q_{jx}^+(x))|}} \exp\left(i \int^x q_{jx}^+ d\xi\right) + \frac{1}{\sqrt{|D_{jq}(q_{jx}^-(x))|}} \exp\left(i \int^x q_{jx}^- d\xi\right), \quad j = (1, 2) \quad (4.94)$$

В выражении (4.94) радиальные компоненты волнового вектора ВГ волны, которые являются решением локального дисперсионного уравнения [144]:

$$D_{UH}(\omega_j) = l_{Tj}^2 (q_x^2 + q_y^2)^2 + \varepsilon(\omega_j) (q_x^2 + q_y^2) - \frac{\omega_j^2}{c^2} (\varepsilon(\omega_j)^2 - g(\omega_j)^2) + \eta(\omega_j) q_z^2 = 0, \quad (4.95)$$

где $l_{Tj}^2 = -\frac{3}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_j^2 - \omega_{ce}^2} \frac{v_{te}^2}{\omega_j^2 - 4\omega_{ce}^2}$, компоненты тензора даются выражениями (4.91), (4.92) и

$j = (1, 2)$, при $q_z = 0$ имеют вид:

$$q_{jx}^\pm(x) = \frac{1}{l_{Tj}} \sqrt{-\frac{\varepsilon(x)}{2} \mp \sqrt{\frac{\varepsilon(x)^2}{4} + \frac{\omega_j^2}{4c^2} (\varepsilon(x)^2 - g(x)^2) l_{Tj}^2 - q_y^2 l_{Tj}^2}} \gg q_y \quad (4.96)$$

и вдалеке от ВГР описывают «теплую» (+) и «холодную» (-) ветки дисперсионной кривой ВГ волны. Предэкспоненциальные множители $|D_{jq}(q_{jx}^+(x))|^{-1/2}$ и $|D_{jq}(q_{jx}^-(x))|^{-1/2}$ в выражении для потенциала (4.94), где

$$D_j = D_{UH}(\omega_j), D_{jq}(q_{jx}^\pm(x)) = \partial D_{UH} / \partial q_x |_{\omega=\omega_j, q_x=q_{jx}^\pm(x)} = 2q_{jx}^\pm(x) \left(2l_{Tj}^2 (q_{jx}^\pm(x)^2 + q_y^2) + \varepsilon(x) \right), \quad (4.97)$$

обеспечивают сохранение потока энергии электростатических ВГ волн в направлении неоднородности. Система дифференциальных уравнений, которые описывают распад пучка волн необыкновенной поляризации (4.87) на две дочерние ВГ волны (4.93), может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \left[l_{T1}^2 \hat{q}_\perp^4 + \varepsilon \hat{q}_\perp^2 - \frac{\omega_1^2}{c^2} (\varepsilon^2 - g^2) + \eta \hat{q}_z^2 \right] \phi_1(\mathbf{r}) = 4\pi \rho_1(\omega_1, \mathbf{r}), \\ \left[l_{T2}^2 \hat{q}_\perp^4 + \varepsilon \hat{q}_\perp^2 - \frac{\omega_2^2}{c^2} (\varepsilon^2 - g^2) + \eta \hat{q}_z^2 \right] \phi_2(\mathbf{r}) = 4\pi \rho_2(\omega_2, \mathbf{r}), \end{cases} \quad (4.98)$$

где введены следующие обозначения: $\hat{q}_\perp^2 = -(\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$, $\hat{q}_z^2 = -\partial^2 / \partial z^2$. В случае квазипоперечного, преимущественно радиального, распространения дочерних ВГ волн, $q_{x1,2} \gg q_{y1,2}$, нелинейные плотности электрического заряда $\rho_{1,2}$ в правой части уравнений (4.98), описывающие нелинейное возбуждение ВГ плазмонов быстрой необыкновенной волной, могут быть рассчитаны в гидродинамическом приближении и представлены в виде [144]:

$$\begin{aligned} \rho_1(\omega_1) &= \frac{3}{4\pi} \frac{cE_y}{H} \frac{\omega_{pe}^2 |\omega_{ce}|^2 \omega_1}{(\omega_0^2 - \omega_{ce}^2)(\omega_1^2 - \omega_{ce}^2)(\omega_2^2 - \omega_{ce}^2)} q_{x1} q_{x2} k_0 \phi_2, \\ \rho_2(\omega_2) &= \frac{3}{4\pi} \frac{cE_y^*}{H} \frac{\omega_{pe}^2 |\omega_{ce}|^2 \omega_2}{(\omega_0^2 - \omega_{ce}^2)(\omega_1^2 - \omega_{ce}^2)(\omega_2^2 - \omega_{ce}^2)} q_{x1} q_{x2} k_0 \phi_1. \end{aligned} \quad (4.99)$$

В окрестности локального максимума профиля ВГ частоты $\omega_{uh}(x) = \sqrt{\omega_{ce}^2(x) + \omega_{pe}^2(x)}$ и магнитной поверхности, на которой верхнегибридная частота $\omega_{uh} = (\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2)^{1/2}$ примерно равна половине частоты волны накачки $\omega_0/2$, обе дочерние верхнегибридные волны (4.94) могут быть радиально локализованы, причем их частоты $\omega_1 = \omega_1(m, n)$, $\omega_2(m, n) = \omega_0 - \omega_1(m, n)$ и полоидальные волновые числа $q_y = q_y(m, n)$ удовлетворяют условиям квантования Бора-Зоммерфельда

$$\begin{aligned} \int_{x_{1l}^*}^{x_{1r}^*} q_{1x}^+(\omega_1, q_y, \xi) d\xi + \int_{x_{1r}^*}^{x_{1l}^*} q_{1x}^-(\omega_1, q_y, \xi) d\xi &= 2\pi \left(m + \frac{1}{2} \right), \\ \int_{x_{2l}^*}^{x_{2r}^*} q_{2x}^+(\omega_0 - \omega_1, q_y, \xi) d\xi + \int_{x_{2r}^*}^{x_{2l}^*} q_{2x}^-(\omega_0 - \omega_1, q_y, \xi) d\xi &= 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.100)$$

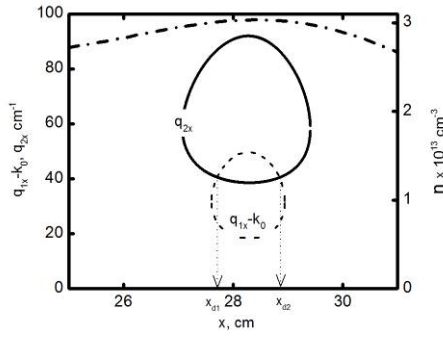


Рисунок 4.19. (а, левая и нижняя оси) – дисперсионные кривые первой дочерней ВГ волны, смещенные вниз на величину радиального волнового вектора необыкновенной волны $q_{1x} - k_0$ (пунктирная линия) и второй дочерней ВГ волны (сплошная линия). В точках $x_{d1,2}$, где сплошная и пунктирная линии пересекаются, выполнены распадные резонансные условия $k_0(x_{d1,2}) - q_{1x}(x_{d1,2}) + q_{2x}(x_{d1,2}) = 0$. ($T_e = 500\text{эВ}$, $\omega_0 / 2\pi = 140\text{ГГц}$, $R_0 = 175\text{см}$, $2\omega_{ce}(x_{ECR}) = \omega_0$, $x_{ECR} = -28\text{см}$, $q_y(m, n) = 0.02\text{см}^{-1}$, $q_z = 0$, $\omega_1(m, n) / 2\pi = 70.18\text{ГГц}$, $(\omega_0 - \omega_1(m, n)) / 2\pi = 69.82\text{ГГц}$, $m = 14$, $n = 33$); (b, правая и нижняя оси) – профиль плотности (пунктирная линия с точками) [129, 130].

Две пары координат (x_{1l}^*, x_{1r}^*) и (x_{2l}^*, x_{2r}^*) в резонансных условиях (4.100) являются решениями уравнений $D_{1q}(x_{1l,r}^*) = 0$, $D_{2q}(x_{2l,r}^*) = 0$ и отвечают точкам поворота ВГ волн в радиальном направлении. На рисунке 4.19 изображены радиальный профиль плотности плазмы, измеренный в эксперименте [129, 130], и дисперсионные кривые $q_{1x}^\pm = q_{1x}^\pm(m, \omega_1, q_y, x)$ и $q_{2x}^\pm = q_{2x}^\pm(n, \omega_0 - \omega_1, q_y, x)$ двух ВГ плазмонов с полоидальным $q_y(m, n) = 0.02\text{см}^{-1}$ и тороидальным $q_z = 0$ волновыми числами и частотами $\omega_1(m, n) / 2\pi = 70.18\text{GHz}$, $(\omega_0 - \omega_1(m, n)) / 2\pi = 69.82\text{GHz}$, что соответствует радиальным модам $m = 14$ и $n = 33$. Дисперсионные кривые получены для типичных условий экспериментов на токамаке TEXTOR ($T_e = 500\text{эВ}$, $\omega_0 / 2\pi = 140\text{ГГц}$, $R_0 = 175\text{см}$, $2\omega_{ce}(x_{ECR}) = \omega_0$, $x_{ECR} = -28\text{см}$, $q_y(m, n) = 0.02\text{см}^{-1}$, $\omega_1(m, n) / 2\pi = 70.18\text{ГГц}$, $(\omega_0 - \omega_1(m, n)) / 2\pi = 69.82\text{ГГц}$). Пунктирная линия соответствует дисперсионной кривой первой дочерней ВГ волны, смещенной вниз на величину радиального волнового вектора необыкновенной волны $q_{1x} - k_0$; сплошная линия – дисперсионная кривая второй дочерней ВГ волны. В точках $x_{d1,2}$, где сплошная и пунктирная линии пересекаются,

выполнены распадные резонансные условия $k_0(x_{d1,2}) - q_{1x}(x_{d1,2}) + q_{2x}(x_{d1,2}) = 0$. Итак, решения (4.93) вместе с выражениями (4.94), которые для собственных мод имеют вид

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{\sqrt{L_j^+(x)}} \exp\left(i \int_{x_{jl}^*}^x q_{jx}^+ d\xi - i \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{L_j^-(x)}} \exp\left(i \int_{x_{jl}^*}^x q_{jx}^- d\xi + i \frac{\pi}{4}\right),$$

$$L_j^\pm(x) = \left| D_{jq}(q_{jx}^\pm(x)) \right| \int_{x_{jl}^*}^{x_{jr}^*} d\xi \left(\frac{1}{\left| D_{jq}(q_{jx}^+(\xi)) \right|} + \frac{1}{\left| D_{jq}(q_{jx}^-(\xi)) \right|} \right), j = (1, 2),$$
(4.101)

описывают невзаимодействующие ВГ волны, которые локализованы в окрестности максимума профиля плотности и поверхности ВГР в радиальном направлении и распространяются в противоположных направлениях вдоль оси e_y с $q_z = 0$. Нормировка потенциалов (4.101) выбрана таким образом, чтобы $\int |\varphi_j(x)|^2 dx = 1$. В случае нелинейного взаимодействия ВГ волн (4.93) в присутствии волны накачки (4.87), их амплитуды перестают быть постоянными: $C_{1,2} \rightarrow C_{1,2}(y, z)$. В свою очередь, волна накачки при ее распространении через резонансный слой истощается $E_0(y, z) \rightarrow E_i(x, y, z)$. Умножим обе части первого из уравнений (4.98) на $\varphi_1^*(x)$, второго - на $\varphi_2^*(x)$. Далее, проинтегрируем оба уравнения по координате x . Используя нормировку амплитуд дочерних ВГ волн и волны накачки на число плазмонов и фотонов согласно выражениям:

$$a_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{16\pi} < D_{1,2\omega} > C_{1,2}}, \quad a_{0,i} = E_{0,i} \sqrt{\frac{1}{8\pi\omega_0}},$$
(4.102)

где $D_{1,2\omega} = \partial D_{UH} / \partial \omega_{1,2}$, и учитывая уравнение, описывающее эволюцию амплитуды волны накачки, получим:

$$\begin{cases} v_g(x') \frac{\partial}{\partial x} a_i = -\tilde{v}_0^*(x) \sqrt{\frac{ck_0(x)}{\omega_0}} a_1 a_2^* \\ \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} - i\Lambda_{1z} \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} = a_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{v}_0(x) a_i(x, y, z), \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} - u_{2y} \frac{\partial a_2}{\partial y} + i\Lambda_{2z} \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{v}_0^*(x) a_i^*(x, y, z), \end{cases}$$
(4.103)

где $|a_i(x, y, z)|_{x \rightarrow -\infty} = a_0(y, z)$, v_g - групповая скорость необыкновенной волны, величина которой для условий экспериментов на токамаке TEXTOR близка к скорости света,

$$\tilde{v}_0(x) = i \frac{3}{2} \frac{|\omega_{ce}(x_{\max})|^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_{uh}^2(x_{\max})) \omega_{pe}^2(x_{\max})} \frac{\sqrt{8\pi\omega_0}}{H} \frac{1}{\sqrt{< D_{1\omega} > < D_{2\omega} >}} \times$$

$$\varphi_1^*(x) \varphi_2(x) \exp\left(i \int^x k_0(x'') dx''\right),$$

$$u_{1y} = \left\langle \frac{\partial D_1}{\partial q_y} \right\rangle \frac{1}{\langle D_{1\omega} \rangle}, \quad u_{2y} = \left\langle \frac{\partial D_2}{\partial q_y} \right\rangle \frac{1}{\langle D_{2\omega} \rangle} \quad (4.104)$$

- усредненные по области радиальной локализации плазмонов групповые скорости, описывающие их конвективные потери в полоидальном направлении,

$$\Lambda_{1z} = \left\langle \frac{\partial^2 D_1}{2\partial q_z^2} \right\rangle \frac{1}{\langle D_{1\omega} \rangle}, \quad \Lambda_{2z} = \left\langle \frac{\partial^2 D_2}{2\partial q_z^2} \right\rangle \frac{1}{\langle D_{2\omega} \rangle} \quad (4.105)$$

- усредненные коэффициенты, описывающие «дифракционные» потери соответствующих плазмонов в направлении z . Процедура усреднения, представляющая собой вычисление матричного элемента, определена следующим образом:

$$\langle f(q_{jx}) \rangle = \int_{x_{jl}^*}^{x_{jr}^*} dx \varphi_j^*(x) f \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_j(x) = \int_{x_{jl}^*}^{x_{jr}^*} dx \left(\frac{f(q_{jx})|_{q_{jx}^+(x)}}{|L_j^+(x)|} + \frac{f(q_{jx})|_{q_{jx}^-(x)}}{|L_j^-(x)|} \right). \quad (4.106)$$

Проинтегрируем первое из уравнений системы (4.103), что приводит к выражению для амплитуды волны накачки:

$$a_i(x, y, z) = a_0(y, z) - a_1(y, z) a_2^*(y, z) \int_{-\infty}^x dx' \frac{\tilde{v}_0^*(x')}{v_g(x')}.$$

Подставим это выражение в два последних уравнения системы (4.103). Учитывая, что групповая скорость волны накачки меняется в резонансном слое слабо, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} - i \Lambda_{1z} \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} = v_0 a_0 a_2 - v_{0d} |a_2|^2 a_1, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} - u_{2y} \frac{\partial a_2}{\partial y} + i \Lambda_{2z} \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} = v_0^* a_0^* a_1 - v_{0d} |a_1|^2 a_2, \end{cases} \quad (4.107)$$

$$\text{где } v_{0d} = \frac{1}{v_g(x_{\max})} \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{v}_0^*(x) \int_{-\infty}^x dx' \tilde{v}_0(x'),$$

$$v_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{v}_0(x) = \frac{3\pi |\omega_{ce}(x_{\max})|^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_{uh}^2(x_{\max})) \omega_{pe}^2(x_{\max})} \sqrt{\frac{ck_0(x_{\max})}{\omega_0}} \frac{1}{\sqrt{\langle D_{1\omega} \rangle \langle D_{2\omega} \rangle}} \frac{\sqrt{\omega_0}}{H} \times$$

$$\left[\frac{l_{r1} q_{1x}^+(x_{d1}) q_{2x}^-(x_{d1}) \exp\left(i\Psi(x_{d1}) - i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{|L_1^+(x_{d1})| |L_2^-(x_{d1})|}} + \frac{l_{r2} q_{1x}^+(x_{d2}) q_{2x}^-(x_{d2}) \exp\left(i\Psi(x_{d2}) + i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{|L_1^+(x_{d2})| |L_2^-(x_{d2})|}} \right] \quad (4.108)$$

- нелинейный матричный элемент, где $\Psi(x_{d1,2}) = \int_{x_{2l}^*}^{x_{d1,2}} q_{2x}^- dx + \int_{(x_{d1,2}+x_{d2})/2}^{x_{d1,2}} k_0 dx - \int_{x_{1l}^*}^{x_{d1,2}} q_{1x}^+ dx$, $x_{d1,2}$ - координаты двух точек, в которых выполнены распадные резонансные условия $k_0(x_{d1,2}) - q_{1x}^+(x_{d1,2}) + q_{2x}^-(x_{d1,2}) = 0$, $l_{r1,2} = \left| \partial(k_0 - q_{1x}^+ + q_{2x}^-) / \partial x \right|_{x=x_{d1,2}}^{-1/2}$ - размер соответствующего резонансного слоя, параметрический распад волны накачки в котором возможен. В силу

близости параметров в двух точках распада: $l_{r1} \approx l_{r2}$, $q_{1x}^+(x_{d1}) \approx q_{1x}^+(x_{d2})$, $q_{2x}^-(x_{d1}) \approx q_{2x}^-(x_{d2})$, $|L_1^+(x_{d1})| \approx |L_1^+(x_{d2})|$, $|L_2^-(x_{d1})| \approx |L_2^-(x_{d2})|$, выражение (4.108) может быть упрощено:

$$v_0 = \frac{3\pi |\omega_{ce}(x_{\max})|^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_{ce}^2(x_{\max})) \omega_{pe}^2(x_{\max})} \sqrt{\frac{ck_0(x_{\max})}{\omega_0}} \frac{\sqrt{\omega_0}}{H} \frac{q_{1x}^+(x_{d1}) q_{2x}^-(x_{d1})}{\sqrt{\langle D_{1\omega} \rangle \langle D_{2\omega} \rangle}} \frac{2l_{r1}}{\sqrt{|L_1^+(x_{d1})| |L_2^-(x_{d1})|}} \times \quad (4.109)$$

$$\exp\left(i\Psi\left(\frac{x_{d1} + x_{d2}}{2}\right) - i\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\Psi(x_{d1}) - \Psi\left(\frac{x_{d1} + x_{d2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\right).$$

Первые и вторые члены в правых частях уравнений (4.107) описывают первичный распад и истощение волны накачки, соответственно. При оценке порога и инкремента первичной параметрической неустойчивости мы пренебрежем истощением накачки, т.е. будем анализировать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} - i\Lambda_{1z} \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} = v_0 a_0 a_2, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} - u_{2y} \frac{\partial a_2}{\partial y} + i\Lambda_{2z} \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} = v_0^* a_0^* a_1. \end{cases} \quad (4.110)$$

Эффект истощения накачки будет учтен далее, при анализе одного из режимов насыщения неустойчивости. Отметим, что дисперсионные кривые на рисунке 4.19 соответствуют случаю ($\omega_1 / 2\pi = 70.18\text{ГГц}$, $\omega_2 / 2\pi = 69.82\text{ГГц}$, $q_y = 0.02\text{см}^{-1}$), при котором обеспечивается существование собственных мод с максимально близкими частотами и минимальными конвективными потерями энергии в полоидальном направлении в силу малости полоидальной компоненты волнового вектора $u_{1,2} w / \Lambda_{1,2z} \ll 1$. Далее, сфокусируем наше внимание именно на этом случае. Итак, система уравнений (4.110) описывает нелинейную связь между необыкновенной волной накачки и двумя запертыми в радиальном направлении плазмонами при наличии потерь дочерних волн из области взаимодействия, которые описываются пространственными производными в левой части уравнений. При достаточном усилении дочерних плазмонов из-за нелинейного взаимодействия, описываемого правой частью уравнений (4.110), даже слабая обратная связь, обеспечивающая возвращение назад части энергии этих дочерних колебаний, теряемой в результате конвекции или дифракции из области распада, является причиной возбуждения абсолютной неустойчивости волны накачки и ведет к экспоненциальному росту во времени амплитуды распадных волн. В случае конвективного выноса энергии дочерних волн из области локализации одномерно-неоднородного пучка накачки в противоположных направлениях такая абсолютная неустойчивость была впервые обнаружена Кроллом [145] при анализе вынужденного рассеяния Мандельштама-Бриллюэна в фокусе лазера и затем детально изучена, в частности, Горбуновым [115]. В этих работах было

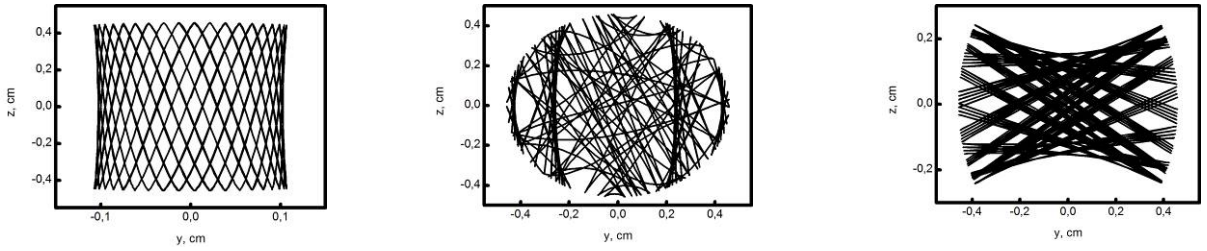


Рисунок 4.20. Траектория ВГ волны, являющаяся решением уравнения (4.111), $P_0 = 600\text{кВт}$.

а) $t = 0$ - преваляют дифракционные потери вдоль магнитного поля. б) $t = \pm 0.26$ мсек – потери поперек одного порядка. в) $t = \pm 0.41$ мсек – преваляют конвективные потери поперек магнитного поля.

показано, что при определенном размере пучка накачки потери энергии дочерних волн не компенсируют их нарастания в области сильного поля и параметрическая неустойчивость может начать носить абсолютный характер, когда нарастающие волны как бы «плениются» в области сильного поля накачки. Поскольку параметры волновода медленно меняются из-за полоидального вращения плазмы, будем искать ВКБ решение системы уравнений (4.110) в виде

$\propto \exp\left[\int_{-\infty}^t \gamma(t') dt' + iS(y, z)\right]$, что приводит к уравнению для эйконала:

$$\left(u_{1y}(t) \frac{\partial S}{\partial y} + \Lambda_{1z}(t) \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right)^2 - |v_0(y, z)|^2 + (\gamma(t) + v_{ei})^2 = 0, \quad (4.111)$$

где мы приняли во внимание, что $u_{1y} \approx u_{2y}$, $\Lambda_{1z} \approx \Lambda_{2z}$, и учли адиабатическую зависимость параметров от времени и наличие диссипации. Анализ (4.111) с помощью метода лучевых траекторий показал наличие дополнительной двумерной локализации траекторий ВГ волн на магнитной поверхности в пределах пятна пучка накачки. На рисунках 4.20 траектория одной из дочерних волн показана в разные моменты времени. Аналитическое решение уравнения в частных производных (4.111) может быть найдено в двух предельных случаях, когда преваляют энергетические потери волн из области взаимодействия в одном из направлений (рисунок 4.20 а, в). В этих случаях мы можем свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению и оценить порог возбуждения и инкремент абсолютной неустойчивости для пучка накачки прямоугольной формы:

$$|a_0(y, z)|^2 = H(y+w)H(w-y)H(z+w)H(w-z), \quad (4.112)$$

где $H(\dots)$ - функция Хевисайда. Начнем анализ со случая, когда О – точка магнитного острова оказывается в экваториальной плоскости токамака. В этом случае, волновод имеет такие параметры, что дифракция вдоль магнитного поля доминирует над остальными потерями и

траектория луча ЭБВ распространяется вдоль магнитного поля быстрее, чем поперек (рисунок 4.20а). Таким образом, мы можем пренебречь потерями энергии ЭБВ поперек магнитного поля:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} - i\Lambda_{1z} \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} + v_{ei} a_1 = v_0 a_0(y, z) a_2, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} + i\Lambda_{1z} \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} + v_{ei} a_2 = v_0^* a_0^*(y, z) a_1. \end{cases} \quad (4.113)$$

Будем искать решение системы уравнений (4.113) в виде $a_{1,2}(0, z, t) \propto \exp[\gamma t]$. Будем требовать непрерывность решения на границе пучок - плазма $z = \pm w$ и убывания решения при $z \rightarrow \pm\infty$. В итоге, получим дисперсионное соотношение:

$$iQ_z \tan(Q_z w) = k_z, \quad (4.114)$$

где $Q_z = \Lambda_{1z}^{-1/2} \sqrt{|v_0 a_0(0, 0)|^2 - (\gamma - i\delta\omega + v_{ei})^2}$ - волновое число, которое определено в промежутке $-w < z < w$, $\delta\omega$ - поправка к собственной частоте волновода, and $k_z = \Lambda_{1z}^{-1/2} \sqrt{\delta\omega + i\gamma + iv_{ei}}$ - волновое число, которое определено в промежутках $z < -w$ и $w < z$. Если мощность пучка немного превосходит энергетический порог, т.е. выполняется неравенство $Q_z w \ll 1$, уравнение (4.114) упрощается:

$$Q_z^2 w = -ik_z. \quad (4.115)$$

Решая его, получим порог возбуждения неустойчивости:

$$|v_0 a_0(0, 0; P_i^{th})|^2 = \left(\frac{\Lambda_{1z}}{2w^2}\right)^2 + v_{ei}^2, \quad (4.116)$$

ее инкремент и поправку к собственной частоте волновода:

$$2\gamma = -2v_{ei} + 2\sqrt{|v_0 a_0(0, 0)|^2 - \left(\frac{\Lambda_{1z}}{2w^2}\right)^2}, \quad \delta\omega = -\frac{\Lambda_{1z}}{2w^2}. \quad (4.117)$$

Когда мощность пучка существенно превосходит пороговое значение, так что выполняются неравенства $1 \leq Q_z w$, $Q_z / q_z \ll 1$, дисперсионное соотношение (4.114) упрощается:

$$\cot(Q_z w) = 0. \quad (4.118)$$

Решая его, получим инкремент неустойчивости в виде:

$$2\gamma = -2v_{ei} + 2\sqrt{|v_0 a_0(0, 0)|^2 - \left(\frac{\pi(2p+1)}{2w}\right)^4} \Lambda_{1z}^2, \quad (4.119)$$

где p - номер тороидальной моды. Полоидальное вращение плазмы приводит к изменению параметров радиального резонатора и увеличению конвективного выноса в поперечном направлении и его преобладанию над потерями в продольном направлении (см. рисунок.4 20с). В этом случае система уравнений в частных производных (4.103) упрощается:

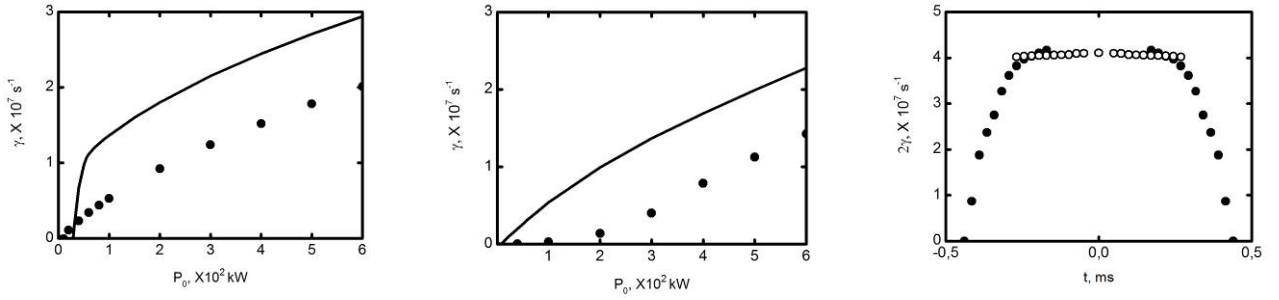


Рисунок 4.21. Зависимость инкремента абсолютной неустойчивости от: (левая и центральная панели) мощности пучка, (правая панель) времени.

левая панель: $t = 0$, центр. панель: $t = \pm 0.41$ мсек правая панель: открытые
 преваляют дифракционные – преваляют конвективные кружки – (4.119); закрытые
 потери вдоль магнитного потери поперек магнитного кружки – (4.125),
 поля. Кружки – численое поля. Кружки – численое фундаментальная мода,
 моделирование, $P_i^{th} = 8\text{кВт}$. моделирование, $P_i^{th} = 36\text{кВт}$. $P_i = 600\text{кВт}$. $t = 0$
 Сплошная линия – решение Сплошная линия – решение соответствует О – точке
 дисперсионного уравнения дисперсионного уравнения острова в экваториальной
 (4.114), $P_i^{th} = 24\text{кВт}$ (4.116). (4.121), $P_i^{th} = 4\text{кВт}$ (4.124). плоскости.

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} + v_{ei} a_1 = v_0 a_0(y, z) a_2, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} - u_{1y} \frac{\partial a_2}{\partial y} + v_{ei} a_2 = v_0^* a_0^*(y, z) a_1. \end{cases} \quad (4.120)$$

Как и в предыдущем случае, будем искать решение (4.120) в виде $a_{1,2}(0, y, t) \propto \exp[\gamma t]$. Дисперсионное соотношение, которое отвечает системе уравнений (4.120), удовлетворяет непрерывности решения на границе пучок-плазмы $z = \pm w$ и убыванию решения при $z \rightarrow \pm\infty$, имеет вид:

$$Q_y \tan(Q_y w) = k_y, \quad (4.121)$$

где $Q_y = u_{1y}^{-1} \sqrt{|v_0 a_0(0, 0)|^2 - (\gamma + v_{ei})^2}$ - волновой вектор при $-w < y < w$, $k_y = (\gamma + v_{ei})/U$ при $y < -w$ и $w < y$. Если мощность пучка немного превосходит энергетический порог, выражение (4.121) упрощается:

$$Q_y^2 w = k_y. \quad (4.122)$$

Решая это уравнение, получим:

$$2\gamma = 2 \left(\sqrt{|v_0 a_0(0, 0)|^2 + \left(\frac{u_{1y}}{2w}\right)^2} - v_{ei} - \frac{u_{1y}}{2w} \right). \quad (4.123)$$

Если мы положим в выражении (4.123) $\gamma = 0$, то получим условие, которое определяет порог возбуждения абсолютной неустойчивости:

$$\left| v_0 a_0(0, 0; P_i^{th}) \right|^2 = \frac{u_{1y}}{w} v_{ei} + v_{ei}^2. \quad (4.124)$$

Когда мощность пучка существенно превосходит пороговое значение, которое определяется выражением (4.124), инкремент неустойчивости имеет вид:

$$2\gamma = -2v_{ei} + 2\sqrt{\left| v_0 a_0(0, 0) \right|^2 - \left(\frac{\pi(2s+1)u_{1y}}{2w} \right)^2}, \quad (4.125)$$

где s - номер поперечной моды. Для того чтобы проверить результат аналитического анализа, мы проинтегрируем численно систему уравнений в частных производных (4.107), считая распределение поля в пучке накачки (4.89) радиуса $w = 1\text{см}$ фиксированным, а начальное распределение $a_{1,2}(y, z, 0) = const$. Мы также будем считать постоянными коэффициенты, входящие в эту систему уравнений. В результате мы найдем инкремент абсолютной неустойчивости $\gamma = 1/2 \cdot \partial \ln \int_S \frac{dydz}{S} |a_{1,2}(y, z, t)|^2 / \partial t$, который показан на рисунке 4.21 (лев. и центр. панели) для двух случаев. В первом – доминируют потери вдоль магнитного поля, что соответствует положению О - точки острова в экваториальной плоскости в момент $t = 0$. Во втором – потери поперек магнитного поля, что соответствует моменту времени $t = \pm 0.41\text{мсек}$. Кружки на этих рисунках – результат численного моделирования. Сплошные линии – результат численного решения дисперсионных уравнений (4.114) и (4.121), соответственно. В первом случае численное решение уравнений в частных производных предсказывает порог возбуждения неустойчивости - $P_i^{th} = 8\text{кВт}$, в то время как полуаналитическое рассмотрение - $P_i^{th} = 24\text{кВт}$. Однако, существенно выше порога зависимости, найденные численно и полуаналитически, демонстрируют одинаковый закон изменения с увеличением мощности накачки. Во втором случае численное решение уравнений в частных производных предсказывает порог возбуждения неустойчивости - $P_0^{th} = 36\text{кВт}$. Полуаналитическое предсказание - $P_0^{th} = 4\text{кВт}$ (см. (4.124)). Это несоответствие можно объяснить ограничениями одномерной модели, в рамках которой было проведено полуаналитическое рассмотрение. Однако, как и в первом случае, существенно выше порога зависимости, найденные численно и полуаналитически, демонстрируют одинаковый закон изменения с увеличением мощности накачки. На рисунке 4.21 (пр. панель) показана временная эволюция инкремента неустойчивости для мощности накачки $P_0 = 600\text{кВт}$. Эта зависимость построена следующим образом: Открытые кружки – выражение (4.119), адекватное при описании случая

доминирующих продольных потерь, $p = 0$; закрытые кружки – выражение (4.125), адекватное при описании случая доминирующих поперечных потерь, $s = 0$; $t = 0$ соответствует моменту, когда O – точка острова проходит экваториальную плоскость. В моменты времени, когда потери в продольном и поперечном направлениях одного порядка, аналитические зависимости, строго говоря, не применимы. Однако, эти зависимости (4.119) и (4.125) хорошо перекрываются, что позволяет интерполировать поведение $\gamma(t)$ в течении всего периода, пока $\gamma(t) > 0$ и оценить коэффициент усиления $2\Gamma = 2 \int \gamma(t) dt \approx 0.35 \times 10^5$. При такой величине инкремента неустойчивости тепловые флуктуации на верхнегибридной частоте испытывают значительный рост до уровня насыщения, который определяется вторичными нелинейными эффектами.

4.4.2. Насыщение двухплазменной неустойчивости волны накачки

В настоящем разделе приведено исследование нелинейной стадии первичной низкочастотной параметрической распадной неустойчивости ЭЦ волны необыкновенной поляризации. В качестве механизма насыщения неустойчивости рассматривается истощение накачки и каскадный распад первичных радиально локализованных ВГ волн, приводящий к возбуждению вторичных радиально локализованных ВГ волн и низкочастотных волн. Вначале мы рассмотрим случай, когда область, в которой локализованы первичные ВГ плазмоны на магнитной поверхности, велика настолько, что ее характерный размер $\sqrt{\pi} w_d$ вдоль магнитной силовой линии удовлетворяет следующему неравенству:

$$1 \ll \omega'_2 \sqrt{\pi} w_d / c, \quad (4.126)$$

где ω'_2 – частота вторичной низкочастотной волны. В этом случае в роли вторичной низкочастотной волны может выступать нижнегибридная (НГ) волна. Ключевым элементом предложенного сценария является радиальная локализация вторичных волн, – высокочастотной в окрестности локального максимума профиля плотности плазмы, низкочастотной в окрестности минимума профиля плотности плазмы, соседствующего с локальным максимумом, – которая приводит к полному подавлению потери ими энергии из области распада в направлении неоднородности и значительному снижению порога возбуждения каскадного процесса. Экспериментальные наблюдения [143], говорящие о наличии в спектре аномально рассеянных волн частот, смещённых относительно накачки на величину порядка частоты

нижнегибридного резонанса и его гармоник, также свидетельствуют об исключительной важности рассмотренного механизма насыщения параметрической неустойчивости необыкновенной волны. Аналогичный каскадный механизм был предложен ранее для описания насыщения роста параметрической неустойчивости нижнегибридной турбулентности в теории однородной плазмы [146 - 148]. Надо отметить, что в этих работах в расчет принималось бесконечно большое число ступеней каскадного процесса, что позволяло описать перекачку энергии по спектру и диссипацию возбуждаемых в результате параметрического распада шумов при их индуцированном рассеянии на ионах. Учёт конечного числа ступеней каскада в случае однородной плазмы, как это будет проиллюстрировано ниже, приводит не к стационарному, а к колебательному режиму взаимодействия дочерних волн. Однако в анализируемой нами экспериментальной ситуации волна накачки неоднородна вдоль по внешнему магнитному полю. В этом случае, в двумерно-неоднородной плазме токамака, при наличии области электронного циклотронного резонанса для ВГ волн практически исключено возвращение назад в область параметрического взаимодействия даже части вынесенной из неё энергии, что могло бы привести к возбуждению колебательного режима взаимодействия первичных и вторичных дочерних волн. Уровень насыщения определяется условием баланса мощности, которая отбирается первичной дочерней волной у волны накачки, и мощности, которая передается вторичным волнам в результате вторичного распада.

4.4.2.1. Каскадный механизм насыщения при широкой области локализации первичных волн на магнитной поверхности

Механизм насыщения неустойчивости, рассмотренный в данной главе, имеет дополнительные преимущества перед конкурирующими механизмами, поскольку порог его возбуждения может быть значительно снижен при раскачке радиально запертых вторичных дочерних волн. Локализация вторичных ВГ волн возможна из-за локального максимума профиля плотности плазмы в магнитном острове, в то время как к локализации НГ волн приводит присутствие локального минимума профиля плотности плазмы вблизи от острова. Этот механизм проиллюстрирован на рисунке 4.22, где изображены дисперсионные кривые, соответствующие первичным ВГ плазмонам (сплошные линии), вторичным ВГ (штрихпунктирная линия) и НГ (пунктирная линия) плазмонам в присутствии немонотонного профиля плотности [129, 130] для тех же параметров, что и на рисунке 4.19. Отметим, что распадётся

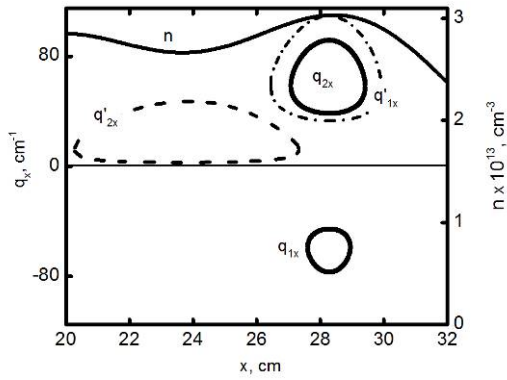


Рисунок 4.22. (а, левая и нижняя оси) – дисперсионные кривые первичных ВГ волн (сплошная линия) q_{1x} и q_{2x} , распространяющихся в противоположных направлениях. Первичная ВГ волна, чья дисперсионная кривая перекрывается с дисперсионной кривой НГ волны, данной на рисунке штрихом, может распасться на вторичную НГ волну и вторичную ВГ волну, дисперсионная кривая которой изображена штрих - пунктирной линией. Параметры разряда те же, что на рисунке 4.19; (b, правая и нижняя оси) – профиль плотности (сплошная линия) [129, 130].

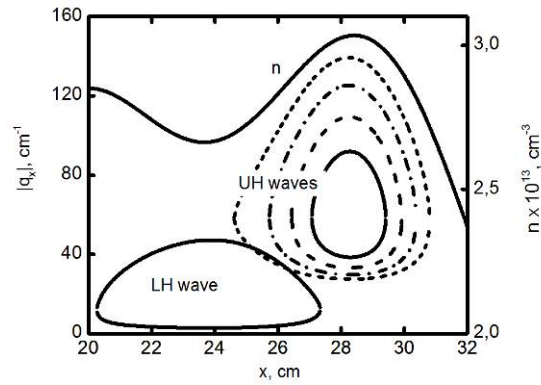


Рисунок 4.23. (а, левая и нижняя оси) – Координатная зависимость модуля радиальной компоненты волнового числа ВГ волн и НГ волны, $\omega'_2/2\pi=0.598$ ГГц, от координаты. Коротким штрихом дана дисперсионная кривая “последней” ВГ волны с частотой $(\omega_2 - 3\omega'_2)/2\pi = 68.026$ ГГц, которая может быть заперта локальным максимумом. Параметры разряда те же, что на рисунке 4.19; (b, правая и нижняя оси) – профиль плотности (сплошная линия) [129, 130].

может только тот первичный плазмон, дисперсионная кривая которого перекрывается в пространстве с дисперсионной кривой вторичной НГ волны, которая, в свою очередь, радиально локализована минимумом профиля плотности. На рисунке 4.22 этому условию соответствует первичный плазмон с частотой $\omega_2/2\pi = 69.82$ ГГц, область радиальной локализации которого больше, чем область локализации второго плазмона, имеющего частоту $\omega_1/2\pi = 70.18$ ГГц. Итак, в результате распада первичной дочерней волны ($\omega_2/2\pi = 69.82$ ГГц), возбуждаются вторичные радиально локализованные НГ ($\omega'_2/2\pi = 0.598$ ГГц) и ВГ ($\omega'_1/2\pi = 69.22$ ГГц) волны. Последняя может в дальнейшем распасться на радиально локализованную НГ волну ($\omega''_2/2\pi \leq 0.598$ ГГц) и радиально локализованную ВГ волну ($\omega''_1/2\pi = (\omega'_1 - \omega''_2)/2\pi$). Описанный каскад распадов возможен при сравнительно небольшой амплитуде ВГ волн до тех пор, пока “глубина” максимума позволяет смещенной вниз по частоте возбуждаемой вторичной ВГ волне быть радиально локализованной. На рисунке 4.23, где изображена координатная зависимость модуля радиального волнового числа дочерних ВГ волн, возбуждаемых в результате каскадного распада, дисперсионная кривая такой последней

радиально локализованной ВГ волны дается коротким пунктиром. Каждый следующий каскад, скажем для определенности k -ый, приводит к возбуждению НГ волны на одной и той же частоте $\omega'_2 / 2\pi = \omega_2^{(k)} / 2\pi = 0.598\text{ГГц}$. В итоге все ВГ волны эквидистантны по частоте, причем возбуждаемая в результате k -го каскада имеет частоту $\omega_1^{(k)} / 2\pi$, смещенную относительно частоты первичной $\omega_2 / 2\pi$ на величину $k\omega'_2 / 2\pi$. Как будет показано ниже, насыщение экспоненциального роста амплитуды дочерних плазмонов и выход на квазистационарный режим в области раскочки неустойчивости имеет место уже при первом каскаде. Учёт следующих каскадов, а их при реальных экспериментальных параметрах может быть 3 – 4 [127, 128, 143], не меняет общей картины выхода неустойчивости на насыщение. Далее мы проанализируем вторичную параметрическую неустойчивость одной из первичных дочерних волн, приводящей к возбуждению вторичных дочерних ВГ (индекс “1”) и НГ (индекс “2”) волн

$$\begin{aligned}\phi'_1(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} C'_1(y, z) \phi'_1(x) \exp(iq_y y + iq_z z + i\omega'_1 t) + c.c., \\ \phi'_2(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} C'_2(y, z) \phi'_2(x) \exp(iq_z z + i\omega'_2 t) + c.c.,\end{aligned}\quad (4.127)$$

где $\omega'_2 = \omega_2 - \omega'_1$. Потенциалы $\phi'_1(x)$ и $\phi'_2(x)$ даются выражением (4.94), где волновой вектор ВГ волны $q'_{1x} = q'_{1x}(\omega'_1, q_y(m, n), q'_z, x)$ является решением локального дисперсионного уравнения (4.95), а волновой вектор НГ волны $q'_{2x} = q'_{2x}(\omega'_2, q'_z, x)$ является решением локального дисперсионного уравнения [144] для НГ волн

$$D_{LH}(\omega'_2) = l_{T2}^2(\omega'_2) q_{\perp}^4 + \varepsilon(\omega'_2) q_{\perp}^2 + \eta(\omega'_2) q_z^2, \quad (4.128)$$

где

$$l_{T2}^2(\omega'_2) = -\frac{3}{2} \left[\frac{\omega_{pe}^2 \nu_{te}^2}{\omega_{ce}^4} + \frac{\omega_{pi}^2 \nu_{ii}^2}{\omega_2'^4} \right], \quad \varepsilon(\omega'_2) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_2'^2}, \quad \eta(\omega'_2) \approx -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_2'^2}.$$

В окрестности локального максимума и минимума плотности плазмы ВГ и НГ волны могут быть локализованы в радиальном направлении. Их собственные частоты $\omega'_1 = \omega'_1(p, s)$, $\omega'_2(p, s) = \omega_2 - \omega'_1(p, s)$ и волновые вектора $q'_z = q'_z(p, s)$, как и в случае первичного параметрического распада волны накачки, обеспечивают одновременное выполнение условий квантования Бора-Зоммерфельда для радиальных волновых чисел обеих вторичных волн:

$$\begin{aligned}\int_{x_{1l}^*}^{x_{1r}^*} q_{1x}^+(\omega'_1, q'_z, \xi) d\xi + \int_{x_{1r}^*}^{x_{1l}^*} q_{1x}^-(\omega'_1, q'_z, \xi) d\xi &= 2\pi \left(p + \frac{1}{2} \right), \\ \int_{x_{2l}^*}^{x_{2r}^*} q_{2x}^+(\omega_2 - \omega'_1, q'_z, \xi) d\xi + \int_{x_{2r}^*}^{x_{2l}^*} q_{2x}^-(\omega_2 - \omega'_1, q'_z, \xi) d\xi &= 2\pi \left(s + \frac{1}{2} \right),\end{aligned}\quad (4.129)$$

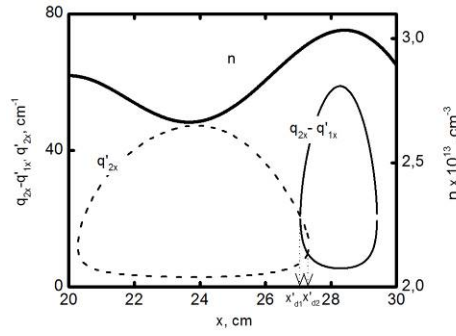


Рисунок 4.24. (а, левая и нижняя оси) – Дисперсионные кривые вторичной НГ волны $q'_{2x} = q'_{2x}(x)$ (пунктирная линия) и первичной ВГ волны $q_{2x} = q_{2x}(x)$, смещенной на величину волнового вектора вторичной $q'_{1x} = q'_{1x}(x)$, т.е. $q_{2x} - q'_{1x}$ (сплошная кривая). В точках $x'_{d1,2}$, где кривые пересекаются, выполнены условия трехволнового резонанса; (b, правая и нижняя оси) – профиль плотности (сплошная линия) [129].

где две пары координат (x'_{1l}, x'_{1r}) и (x'_{2l}, x'_{2r}) являются решениями уравнений $D'_{1q}(\omega'_1, x'_{1l,r}) = \partial D_{UH}(x'_{1l,r}) / \partial q_x |_{\omega=\omega'_1, q_x=q'_{1x}(x)} = 0$, $D'_{2q}(\omega'_2, x'_{2l,r}) = \partial D_{LH}(x'_{2l,r}) / \partial q_x |_{\omega=\omega'_2, q_x=q'_{2x}(x)} = 0$ и отвечают

точкам поворота вторичных ВГ и НГ волн в радиальном направлении. Потенциалы $\phi'_{1,2}(x)$ этих радиально запертых плазмонов даются выражением, аналогичным выражению (4.101):

$$\phi'_j(x) = \frac{1}{\sqrt{|L_j^+(x)|}} \exp\left(i \left[\int_{x'_{jl}}^x q'_{jx} d\xi - \frac{\pi}{4} \right]\right) + \frac{1}{\sqrt{|L_j^-(x)|}} \exp\left(i \left[\int_{x'_{jl}}^x q'_{jx} d\xi + \frac{\pi}{4} \right]\right), \quad (4.130)$$

где $L_j^\pm(x) = D'_{jq}(q'_{jx}(x)) \int_{x'_{jl}}^{x'_{jr}} d\xi \left(|D'_{jq}(q'_{jx}(\xi))|^{-1} + |D'_{jq}(q'_{jx}(\xi))|^{-1} \right)$, $j = (1, 2)$. Используя нормировку медленно меняющихся амплитуд $C'_{1,2}$ вторичных ВГ и НГ волн на число плазмонов:

$$a'_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{16\pi}} < D'_{1,2\omega} > C'_{1,2}, \quad (4.131)$$

где $D'_{1\omega} = \partial D_{UH} / \partial \omega'_1$, $D'_{2\omega} = \partial D_{LH} / \partial \omega'_2$, получим систему восьми уравнений, первые четыре из которых имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} - i\Lambda_{1z} \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} = v_0 a_0(y, z) a_2, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} - u_{2y} \frac{\partial a_2}{\partial y} + i\Lambda_{2z} \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} = v_0^* a_0^*(y, z) a_1 - v_1^* a_1' a_2', \\ \frac{\partial a_1'}{\partial t} - u'_{1y} \frac{\partial a_1'}{\partial y} + i\Lambda'_{1y} \frac{\partial^2 a_1'}{\partial y^2} + u'_{1z} \frac{\partial a_1'}{\partial z} = v_1 a_2 a_2'^*, \\ \frac{\partial a_2'}{\partial t} + i\Lambda'_{2y} \frac{\partial^2 a_2'}{\partial y^2} - u'_{2z} \frac{\partial a_2'}{\partial z} = v_1 a_2 a_1'^*, \end{cases} \quad (4.132)$$

а вторые четыре – комплексно сопряжены уравнениям (4.132). В системе уравнений (4.132) мы ввели новые обозначения. Среди этих обозначений:

$$v_1 = \frac{2\sqrt{2}\pi c}{H\sqrt{\langle D_{1\omega} \rangle \langle D'_{1\omega} \rangle \langle D'_{2\omega} \rangle \omega_{pe}^2 |\omega_{ce}|}} \exp\left(i\frac{3\pi}{4}\right) \times \quad (4.133)$$

$$\left[\frac{q_{2x}^- q_{1x}'^- (q_{2x}^+)^2 l_{r1}' \exp\left(i\Psi^s(x) - i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{|L_2^-(x)| |L_1^-(x)| |L_2^+(x)|}} \Big|_{x=x'_{d1}} + \frac{q_{2x}^- q_{1x}'^- (q_{2x}^-)^2 l_{r2}' \exp\left(i\Psi^s(x) + i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{|L_2^-(x)| |L_1^-(x)| |L_2^-(x)|}} \Big|_{x=x'_{d2}} \right]$$

- нелинейный матричный элемент, где $\Psi^s(x'_{d1}) = \int_{x_{2l}^*}^{x'_{d1}} q_{2x}^+ dx - \int_{x_{2l}}^{x'_{d1}} q_{2x}^- dx + \int_{x_{1l}^*}^{x'_{d1}} q_{1x}^- dx$,

$\Psi^s(x'_{d2}) = \int_{x_{2l}^*}^{x'_{d2}} q_{2x}^- dx - \int_{x_{2l}}^{x'_{d2}} q_{2x}^- dx + \int_{x_{1l}^*}^{x'_{d2}} q_{1x}^- dx$, $x'_{d1,2}$ - как уже упоминалось выше (см. также рисунок

4.24), координаты двух точек, в которых выполнены распадные резонансные условия

$q_{2x}'(x'_{d1,2}) - q_{2x}(x'_{d1,2}) + q_{1x}'(x'_{d1,2}) = 0$, $l'_{r1,2} = \left| \partial(q_{2x}'(x) - q_{2x}(x) + q_{1x}'(x)) / \partial x \right|_{x=x'_{d1,2}}^{-1/2}$ - размер

резонансного слоя, где параметрический распад дочерней волны возможен,

$$u'_{1y} = \left\langle \frac{\partial D_{UH}(\omega_1')}{\partial q_y} \right\rangle \frac{1}{\langle D'_{1\omega} \rangle}, \Lambda'_{1y} = \left\langle \frac{\partial^2 D_{UH}(\omega_1')}{2\partial q_y^2} \right\rangle \frac{1}{\langle D'_{1\omega} \rangle}, \Lambda'_{2y} = \left\langle \frac{\partial^2 D_{LH}(\omega_2')}{2\partial q_y^2} \right\rangle \frac{1}{\langle D'_{2\omega} \rangle} \quad (4.134)$$

- усредненные по области радиальной локализации плазмонов групповая скорость, описывающая конвективные потери ВГ вторичной волны в полоидальном направлении, и коэффициенты, описывающие «дифракционные» потери соответствующих плазмонов в направлении y ,

$$u'_{1z} = \left\langle \frac{\partial D_{UH}(\omega_1')}{\partial q_z} \right\rangle \frac{1}{\langle D'_{1\omega} \rangle}, u'_{2z} = \left\langle \frac{\partial D_{LH}(\omega_2')}{\partial q_z} \right\rangle \frac{1}{\langle D'_{2\omega} \rangle} \quad (4.135)$$

- усредненные по области локализации плазмонов в радиальном направлении их групповые скорости, описывающие конвективные потери в тороидальном направлении, процедура усреднения определена в (4.106) и $a_{1,2}$ определяются выражением (4.102). Первое и второе из уравнений (4.132) описывают эволюцию амплитуд первичных плазмонов. Первые члены в правой части этих уравнений описывают нелинейную связь необыкновенной волны и первичных ВГ волн. Второй член в правой части второго уравнения, также как и первые члены в правой части третьего и четвертого уравнений, описывающих эволюцию амплитуды вторичных плазмонов, отвечают за нелинейную связь первичной ВГ волны и вторичных ВГ и НГ волн. Эффект истощения накачки в данном случае не играет существенной роли при насыщении неустойчивости, поэтому при выводе уравнений (4.132) мы его не учли.

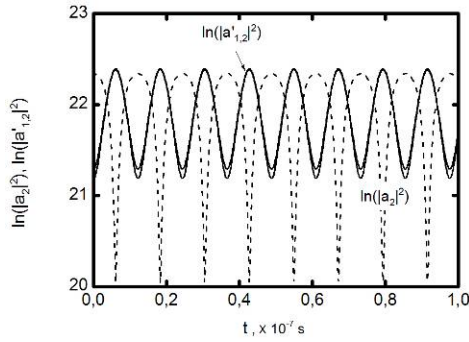


Рисунок 4.25. В логарифмическом масштабе изображена эволюция числа первичных (пунктир) и вторичных дочерних (сплошные линии) плазмонов в случае отсутствия накачки $a_0 = 0$. Полная энергия в системе (4.137) в этом случае сохраняется. Решения могут быть интерпретированы как многокомпонентные кноидальные волны.

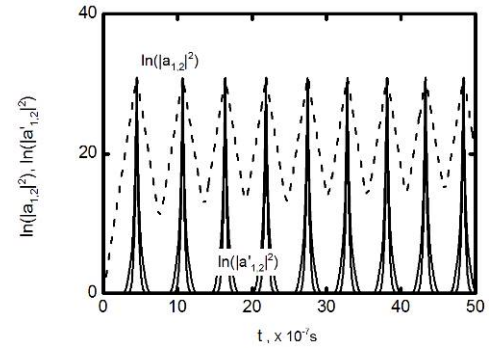


Рисунок 4.26. В логарифмическом масштабе изображена эволюция числа первичных (пунктир) и вторичных (сплошные линии) плазмонов в случае однородной накачки $a_0 = const \neq 0$. Полная энергия в системе (4.137) в этом случае не сохраняется.

При решении системы восьми уравнений в частных производных, первые четыре из которых – уравнения (4.132), а вторые четыре – уравнения, полученные из (4.132) комплексным сопряжением, воспользуемся стандартным пакетом Mathematica[®]. Будем пренебрегать потерями энергии дочерних волн в направлении y по сравнению с доминирующими потерями вдоль магнитного поля (z). Наложим «периодические» граничные условия на границах «бокса» z_B и $-z_B$ в виде $a_{1,2}(-z_B) = a_{1,2}(z_B)$, $a_{1,2}^*(-z_B) = a_{1,2}^*(z_B)$, $a'_{1,2}(-z_B) = a'_{1,2}(z_B)$, $a'_{1,2}*(-z_B) = a'_{1,2}*(z_B)$, позволяющие улучшить устойчивость численной схемы. Формально это условие отражает свойство периодичности координат на магнитной поверхности. Уравнения (4.132) с такими граничными условиями могут описывать многократную циркуляцию ВГ плазмонов вдоль оси магнитного острова. Следует отметить, однако, что область применимости уравнений (4.132) вдоль силовой линии магнитного поля ограничена, поскольку они были получены в предположении о «запертости» ВГ плазмонов в радиальном направлении, которое может нарушаться из-за полоидальной неоднородности магнитного поля в токамаке. Более того, при распространении вдоль магнитного острова плазмы будут пересекать слой электронного циклотронного резонанса и испытывать сильное поглощение, которое не учитывается нашими уравнениями. В силу сказанного физический смысл будет иметь лишь промежуточная асимптотика решений уравнений (4.132) на временах, которые много меньше времени циркуляции ВГ плазмонов вдоль силовой линии магнитного поля. Будем считать, что

начальные условия, с которых раскачивается неустойчивость двухплазмонного распада, определяются тепловыми флуктуациями плазмы:

$$\sqrt{\langle\langle |a_j|^2(\mathbf{r}) \rangle\rangle} = \sqrt{\frac{T_e}{\omega_j^{m,n}} \frac{1}{\pi w^2}}, \quad \sqrt{\langle\langle |a'_j|^2(\mathbf{r}) \rangle\rangle} = \sqrt{\frac{T_e}{\omega_j^{p,s}} \frac{1}{\pi w^2}}. \quad (4.136)$$

Начальное распределение первичных и вторичных дочерних плазмонов будем считать однородным, а все коэффициенты, входящие в систему уравнений, константами (*const*). Вначале мы рассмотрим случай однородной накачки $a_0 = const$. В этом случае с учетом однородного начального распределения взаимодействующих волн система (4.132) сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} &= \nu_0 a_0 a_2, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} &= \nu_0^* a_0^* a_1 - \nu_1^* a'_1 a'_2, \\ \frac{\partial a'_1}{\partial t} &= \nu_1 a_2 a_2^*, \\ \frac{\partial a'_2}{\partial t} &= \nu_1 a_2 a_1^*. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Важные характеристики решения для случая начальной задачи (4.137) могут быть найдены и аналитически. В силу того, что поле накачки a_0 считается заданным, не сохраняется полная плотность энергии взаимодействующих плазмонов:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\omega_1 |a_1|^2 + \omega_2 |a_2|^2 + \omega'_1 |a'_1|^2 + \omega'_2 |a'_2|^2 \right] = \omega_0 (\nu_0 a_0 a_1^* a_2 + \nu_0^* a_0^* a_1 a_2^*). \quad (4.138)$$

При этом имеются следующие интегралы движения системы (4.137):

$$\begin{aligned} I_1 &= |a'_1|^2 - |a'_2|^2, \\ I_2 &= |a_1|^2 - |a_2|^2 - (|a'_1|^2 + |a'_2|^2) / 2, \\ I_3 &= \omega_2 (|a_1|^2 - |a_2|^2) - (\omega'_1 |a'_1|^2 + \omega'_2 |a'_2|^2). \end{aligned} \quad (4.139)$$

Повысим порядок 1 и 2 уравнений из системы (4.137), продифференцировав их по времени, что в итоге приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2} &= |\nu_0|^2 |a_0|^2 a_1 - \nu_0 \nu_1^* a_0 a'_1 a'_2 \\ \frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2} &= \left\{ |\nu_0|^2 |a_0|^2 - |\nu_1|^2 (|a'_1|^2 + |a'_2|^2) \right\} a_2 \end{aligned} \quad (4.140)$$

Аналогично, для амплитуд вторичных дочерних плазмонов можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 a_1'}{\partial t^2} &= \left[|v_1|^2 |a_2|^2 - |v_1|^2 |a_2'|^2 \right] a_1' + v_1 v_0^* a_0^* a_1 a_2'^* \\ \frac{\partial^2 a_2'}{\partial t^2} &= \left[|v_1|^2 |a_2|^2 - |v_1|^2 |a_2'|^2 \right] a_2' + v_1 v_0^* a_0^* a_1 a_1'^*\end{aligned}\quad (4.141)$$

В частном случае отсутствия внешнего источника $a_0 = 0$ энергия в системе (4.137) сохраняется

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\omega_1 |a_1|^2 + \omega_2 |a_2|^2 + \omega_1' |a_1'|^2 + \omega_2' |a_2'|^2 \right] = 0,$$

решение уравнений (4.140) и (4.141) можно выразить через функции Якоби и интерпретировать как многокомпонентные кноидальные волны (см. рисунок 4.25) [149 - 151]. К сожалению, в случае $a_0 \neq 0$ решение уравнений (4.140) и (4.141) не может быть найдено аналитически. Численное решение исходной системы (4.137), результаты которого приведены на рисунке 4.26, свидетельствуют об осцилляторном режиме взаимодействия первичных и вторичных волн в присутствии однородной накачки.

Далее, мы рассмотрим случай неоднородной накачки, адекватный экспериментальной ситуации. Выберем радиус пучка накачки $w = 1\text{см}$, что соответствует условиям экспериментов на токамаке TEXTOR. В результате расчета для мощности $P_0 = 600\text{кВт}$ получены зависимости

$$\ln \left[\langle |a_{1,2}(t)|^2 \rangle \right], \ln \left[\langle |a_{1,2}'(t)|^2 \rangle \right] \text{ от времени, где } \langle \dots \rangle = \int_{-z_B}^{z_B} \frac{dz}{\sqrt{\pi w^2}} \dots \exp(-z^2 / w^2) - \text{усреднение}$$

найденных амплитуд в пределах пучка накачки, которые приведены на рисунке 4.27. Можно видеть, что на первом этапе имеет место экспоненциальный рост количества первичных плазмонов. На рисунке 4.28 в более крупном масштабе приведено сравнение коэффициента усиления для первичной неустойчивости, полученного аналитически - γt , где γ - инкремент (4.119) для фундаментальной моды $p = 0$, и численно. Таким образом, показано, что закон роста числа первичных плазмонов от момента возбуждения двухплазменной неустойчивости необыкновенной волны до момента насыщения с хорошей точностью описывается аналитической формулой. Когда количество первичных плазмонов становится большим настолько, что оказывается превзойденным порог вторичной неустойчивости, начинается рост числа вторичных плазмонов, который в условиях резко растущей амплитуды накачки оказывается сильнее, чем экспоненциальный. При значительном превышении порога вторичной неустойчивости коэффициент усиления можно оценить следующим образом

$$\ln \left(\frac{\langle |a_1'(t)|^2 \rangle}{\langle |a_1'(0)|^2 \rangle} \right) = 2\Gamma_s(t) = 2 \int_{-\infty}^t \gamma_s(t') dt' \approx 2 \frac{|v_1|}{|\gamma|} \sqrt{\langle |a_2(t)|^2 \rangle}. \quad (4.142)$$

На рисунке 4.29 приведено сравнение аналитической оценки $2\Gamma_s(t)$ с данными, полученными в результате численного моделирования. Сплошные линии – численное решение, пунктирная

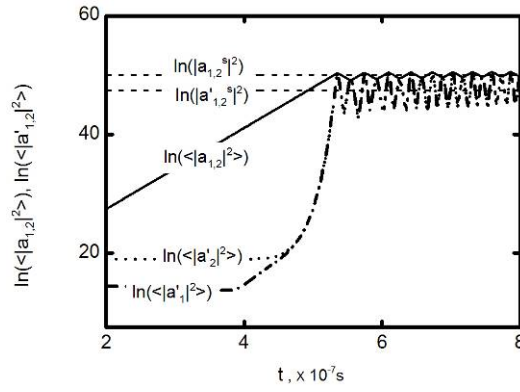


Рисунок 4.27. В логарифмическом масштабе изображена эволюция числа первичных (сплошные линии) и вторичных дочерних (ВГ плазмоны - штрих-пунктир, НГ плазмоны – пунктир) плазмонов. Горизонтальными пунктирными линиями изображены уровни насыщения для первичных плазмонов (4.147) (верхняя линия) и вторичных плазмонов (4.148) (нижняя линия).

линия - асимптотическое выражение (4.142). Как можно видеть, закон роста числа вторичных плазмонов на этапе от возбуждения неустойчивости до насыщения описан асимптотической формулой (4.142) в целом верно. Количество вторичных плазмонов растет от начала возбуждения неустойчивости до насыщения на уровне

$$\langle |a'_{1,2}|^2 \rangle \propto a'_{1,2}(0)^2 \exp\left(2 \int_{t_{th}}^{t_s} |v_1| \sqrt{\langle |a_2(t)|^2 \rangle} dt\right) \quad (4.143)$$

Основной вклад в интеграл в выражении (4.143) вносит верхний предел, в окрестности которого функция растет экспоненциально $\sqrt{\langle |a_2(t)|^2 \rangle} \propto \exp(|v_0| a_0 t)$, что позволяет приближенно вычислить

$$\int_{t_{th}}^{t_s} \sqrt{\langle |a_2(t)|^2 \rangle} dt \approx \frac{1}{|v_0| a_0} \sqrt{\langle |a_2(t_s)|^2 \rangle} = \frac{1}{|v_0| a_0} a_2^s, \quad (4.144)$$

где амплитуда с индексом s соответствует уровню насыщения. Соответственно, (4.143) с учетом (4.144) имеет вид

$$\langle |a'_{1,2}|^2 \rangle \approx a'_{1,2}(0)^2 \exp(2|v_1| a_2^s / |v_0| a_0) \quad (4.145)$$

Для первичной волны уровень насыщения определим из условия баланса мощности получаемой первичной ВГ волной и вторичной ВГ волной

$$2\gamma w_2^s S_2 = 2\gamma_s w_1^s S_1', \quad (4.146)$$

где $2\gamma = 2|v_0| a_0$ - инкремент первичной неустойчивости, $2\gamma_s = 2|v_1| a_2^s$ - инкремент вторичной неустойчивости, $w_2^s = \omega_2 |a_2^s|^2$ - энергия первичного плазмона в насыщении, $w_1^s = \omega_1 |a_1^s|^2$ -

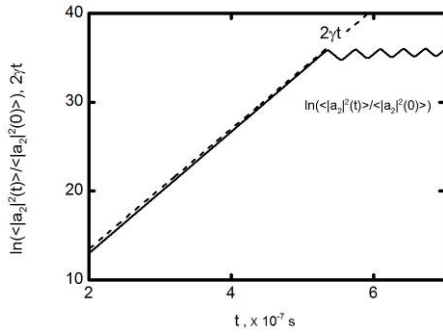


Рисунок 4.28. Коэффициент усиления первичных волн. Сплошные линии (сливаются) – численное решение, пунктирная линия – аналитическое выражение $2\gamma t$, где γ - инкремент (4.119) для фундаментальной моды $p = 0$.

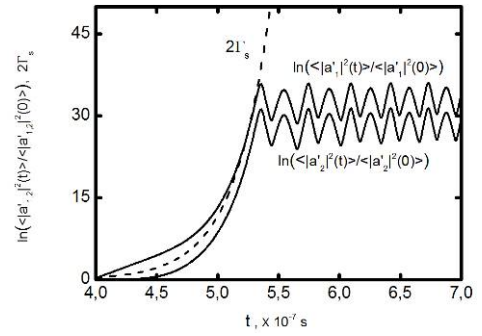


Рисунок 4.29. Коэффициент усиления вторичных волн. Сплошные линии – численное решение, пунктирная линия - асимптотическое выражение (4.142).

энергия вторичного плазмона в насыщении, $S'_1 = \pi w^2$ и $S_2 = \pi w^2$ - площади «пятен», в которых на магнитной поверхности локализованы эти плазмоны. В итоге, получим оценку для уровня насыщения первичного и вторичного плазмонов

$$|a_2^s|^2 = \left[\frac{|v_0|}{|v_1|} a_0 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|v_0|}{|v_1|} \frac{a_0}{a'_1(0)} \sqrt{\frac{S_2}{S'_1}} \right) \right]^2, \quad (4.147)$$

$$|a_1^s|^2 = |a_0|^2 \frac{|v_0|^2}{|v_1|^2} \frac{S_2}{S'_1} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|v_0|}{|v_1|} \frac{a_0}{a'_1(0)} \sqrt{\frac{S_2}{S'_1}} \right) \quad (4.148)$$

На рисунке 4.27 оценки уровней насыщения (4.147) и (4.148) изображены горизонтальными пунктирными линиями – верхней и нижней, соответственно. Можно видеть, что эти оценки с хорошей точности совпадают с результатом моделирования. Надо отметить, что в режиме насыщения имеют место квазипериодические осцилляции уровня насыщения как первичных, так и вторичных плазмонов. Эти осцилляции, особенно осцилляции числа первичных плазмонов, намного более слабые, нежели в случае однородной накачки. Это позволяет линеаризовать систему уравнений (4.132) вокруг уровня насыщения (4.147). Представим амплитуды $a_{1,2}$ и $a'_{1,2}$ в форме:

$$a_{1,2} = a_{1,2}^s + \delta a_{1,2}^s, a'_{1,2} = a_{1,2}^s + \delta a_{1,2}^s \quad (4.149)$$

Подставим (4.149) в (4.132) и, усредняя систему уравнений с весом $|a_0(y, z)|^2$, получим:

$$\frac{\partial^2 \langle \delta a_2^s \rangle}{\partial t^2} = \left\{ |v_0|^2 |a_0|^2 - |v_1|^2 \left(|a_1^s|^2 + |a_2^s|^2 \right) \right\} \langle \delta a_2^s \rangle, \quad (4.150)$$

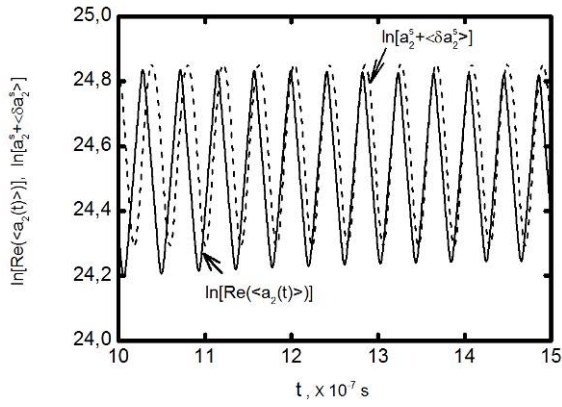


Рисунок 4.30. Квазистационарный режим. Эволюция функции $\ln[\langle \text{Re}[a_2(t)] \rangle]$ и функции $\ln(a_2) = \ln(a_2^s + \langle \delta a_2^s \rangle)$, где $\langle \delta a_2^s \rangle$ определена выражением (4.151).

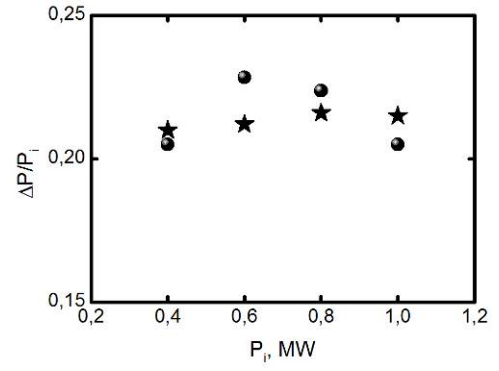


Рисунок 4.31. Зависимость $\Delta P/P_i$ (ΔP - мощность, которую волна накачки теряет в результате насыщения неустойчивости волны накачки однокаскадным распадом - (4.152), кружки, и трехкаскадным распадом, звезды) от мощности волны накачки P_i .

где $|v_0|^2 |a_0|^2 - |v_1|^2 (|a_1^{ts}|^2 + |a_2^{ts}|^2) < 0$. Частное решение уравнения (4.150) имеет вид:

$$\langle \delta a_2^s \rangle = \delta a_{20}^s \sin \left\{ \sqrt{|v_1|^2 (|a_1^{ts}|^2 + |a_2^{ts}|^2) - |v_0|^2 |a_0|^2} t \right\}. \quad (4.151)$$

Амплитуду δa_{20}^s выберем таким образом, чтобы описать осцилляции, полученные численно. Частота осцилляций в выражении (4.151) не зависит от амплитуды δa_{20}^s , которая служит подгоночным параметром. На рисунке 4.30 показана временная эволюция функции $\ln[\langle \text{Re}[a_2(t)] \rangle]$, полученной в результате численного моделирования, и функции $\ln(a_2) = \ln(a_2^s + \langle \delta a_2^s \rangle)$, где $\langle \delta a_2^s \rangle$ дается выражением (4.151). Можно видеть разумное согласие в частоте осцилляций двух функций. Далее, определим численно мощность, которую волна накачки теряет в результате развития неустойчивости. Она равна

$$\Delta P = \sqrt{\pi} w \frac{\partial}{\partial t} \int_{-z_B}^{z_B} dz \int_{t-\Delta\tau/2}^{t+\Delta\tau/2} \frac{d\tau}{\Delta\tau} \left[\omega_1 |a_1(z, \tau)|^2 + \omega_2 |a_2(z, \tau)|^2 + \omega'_1 |a'_1(z, \tau)|^2 + \omega'_2 |a'_2(z, \tau)|^2 \right], \quad (4.152)$$

где интегрирование по быстрому времени производится в интервале $\Delta\tau$, позволяющем сгладить малые колебания уровня насыщения. На рисунке 4.31 приведена зависимость относительных потерь мощности волной накачки как функция самой мощности для типичных условий разряда на токамаке TEXTOR (кружки). Видно, что для мощности пучка порядка 600-750 кВт можно ожидать, что порядка 20 - 22 % вводимой мощности будет рассеиваться или поглощаться аномально. Рассмотрим далее двух шаговое каскадное насыщение абсолютной

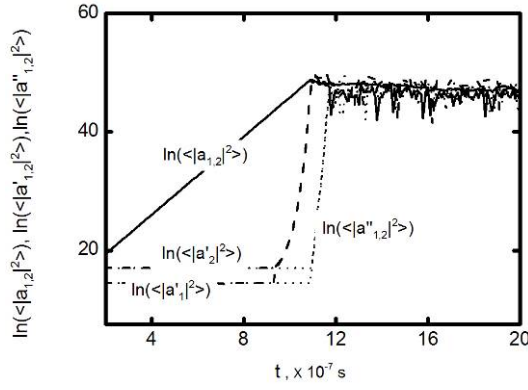


Рисунок 4.32. В логарифмическом масштабе изображена эволюция числа первичных (сплошные линии), вторичных дочерних плазмонов (пунктирные линии) и третичных дочерних плазмонов (короткие пунктирные линии).

неустойчивости необыкновенной волны, при котором вторичная ВГ волна распадается на третичные ВГ и НГ волны. Система уравнений в частных производных, которую можно получить по аналогии с системой уравнений (4.132), описывает нелинейную связь первичных, вторичных и третичных волн в присутствии фиксированной накачки:

$$\begin{cases}
 \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} - i\Lambda_{1z} \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} = \nu_0 a_0(y, z) a_2 - \nu_{0d} |a_2|^2 a_1, \\
 \frac{\partial a_2}{\partial t} - u_{2y} \frac{\partial a_2}{\partial y} + i\Lambda_{2z} \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} = \nu_0^* a_0^*(y, z) a_1 - \nu_{0d} |a_1|^2 a_2 - \nu_1 a_1' a_2^*, \\
 \frac{\partial a_1'}{\partial t} + i\Lambda_{1y}' \frac{\partial^2 a_1'}{\partial y^2} - u_{1z}' \frac{\partial a_1'}{\partial z} = \nu_1^* a_2 a_2' - \nu_2 a_1'' a_2'', \\
 \frac{\partial a_2'}{\partial t} + u_{2y}' \frac{\partial a_2'}{\partial y} - i\Lambda_{2y}' \frac{\partial^2 a_2'}{\partial y^2} + u_{2z}' \frac{\partial a_2'}{\partial z} = \nu_1 a_2^* a_1', \\
 \frac{\partial a_1''}{\partial t} + u_{1y}'' \frac{\partial a_1''}{\partial y} + i\Lambda_{1y}'' \frac{\partial^2 a_1''}{\partial y^2} - u_{1z}'' \frac{\partial a_1''}{\partial z} = \nu_2^* a_2' a_2'', \\
 \frac{\partial a_2''}{\partial t} - i\Lambda_{2y}'' \frac{\partial^2 a_2''}{\partial y^2} + u_{2z}'' \frac{\partial a_2''}{\partial z} = \nu_2 a_2^* a_1'',
 \end{cases} \quad (4.153)$$

где определения $a_{1,2}$ и $a_{1,2}'$ даны в выражениях (4.102) и (4.131), и квадрат модуля амплитуды $a_{1,2}''$ - есть число $|a_{1,2}''|^2$ третичных ВГ и НГ плазмонов. Определения коэффициентов в первых четверых строках системы уравнений (4.153) даны в (4.105), (4.108), (4.134), (4.135), $\Lambda_{1,2y}''$ - описывает дифракционные потери третичных плазмонов в поперечном направлении, u_{1y}'' , $u_{1,2z}''$ - поперечная и продольная компоненты конвективных скоростей, ν_2 - член, описывающий нелинейную связь вторичных и третичных волн. Наложим «периодические» граничные условия на границах 2D «боса» $2y_B \times 2z_B$:

$$\begin{aligned}
a_{1,2}(y, -z_B) &= a_{1,2}(y, z_B), a_{1,2}^*(y, -z_B) = a_{1,2}^*(y, z_B), a'_{1,2}(y, -z_B) = a'_{1,2}(y, z_B), \\
a_{1,2}^{**}(y, -z_B) &= a_{1,2}^{**}(y, z_B), a_{1,2}(-y_B, z) = a_{1,2}(y_B, z), a_{1,2}^*(-y_B, z) = a_{1,2}^*(y_B, z), \\
a'_{1,2}(-y_B, z) &= a'_{1,2}(y_B, z), a_{1,2}^{**}(-y_B, z) = a_{1,2}^{**}(y_B, z), a''_{1,2}(y, -z_B) = a''_{1,2}(y, z_B), \\
a''_{1,2}^{**}(y, -z_B) &= a''_{1,2}^{**}(y, z_B), a''_{1,2}(-y_B, z) = a''_{1,2}(y_B, z), a''_{1,2}^{**}(-y_B, z) = a''_{1,2}^{**}(y_B, z).
\end{aligned}$$

Будем использовать начальные условия для амплитуд первичных и вторичных плазмонов (4.136). Для амплитуд третичных плазмонов примем условие:

$$\sqrt{\langle\langle |a''_{1,2}|^2 \rangle\rangle} = \sqrt{(T_e / \omega''_{1,2})(1 / \pi w^2)}. \text{ Результаты численного моделирования в реалистическом}$$

случае двумерного пространственного «бокса» показаны на рисунке 4.32, где в логарифмическом масштабе изображена эволюция числа первичных, вторичных и третичных плазмонов. Сравнивая рисунки 4.32 и 4.27 можно отметить совпадение сценариев насыщения при однокаскадном и двухкаскадном распаде. Используя результаты численного моделирования, можно вычислить полную энергию, теряемую волной накачки:

$$\begin{aligned}
\Delta P &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-y_B}^{y_B} dy \int_{-z_B}^{z_B} dz \left[\omega_1 |a_1(y, z, t)|^2 + \omega_2 |a_2(y, z, t)|^2 + \omega'_1 |a'_1(y, z, t)|^2 + \right. \\
&\quad \left. \omega'_2 |a'_2(y, z, t)|^2 + \omega''_1 |a''_1(y, z, t)|^2 + \omega''_2 |a''_2(y, z, t)|^2 \right]. \tag{4.154}
\end{aligned}$$

Результаты численного анализа потерь волны накачки показаны на рисунке 4.31. Можно видеть хорошее согласие между оценками потерь, полученными в рамках двух сценариев каскадного процесса.

Надо отметить, что для условий экспериментов на токамаке TEXTOR условие (4.126) обычно не выполняется. В этом случае реализуется другой сценарий каскадного насыщения, который будет проанализирован в следующем параграфе.

4.4.2.2. Каскадный механизм насыщения при узкой области локализации первичных волн на магнитной поверхности

В случае сравнительно узкой области локализации на магнитной поверхности возбуждаемых первичных дочерних волн, когда не выполняется неравенство (4.126), генерируемые вторичные низкочастотные волны имеют широкий спектр по продольным волновым векторам, что, как правило, реализуется для большинства типичных разрядов на токамаке TEXTOR, в которых наблюдалось аномальное рассеяние волны накачки. В этом случае, НГ колебания, поведение которых является очень чувствительными к значению

продольного волнового вектора, не могут обеспечить эффективного нелинейного взаимодействия с первичными и вторичными ВГ волнами. Низкочастотным сателлитом в этом случае является ионная бернштейновская (ИБ) волна, для которой значение продольного волнового вектора не играет критической роли при описании распространения и является существенным при учете затухания. Однако, в отличие от предыдущего случая, ИБ волна не может быть локализована той плавной не монотонностью профиля плотности, которая наблюдалась в обсуждаемых экспериментах [129]. Система уравнений, описывающих распад ВГ волны (4.93) на ВГ волну

$$\phi'_1(\mathbf{r}, t) \propto \exp(i\omega'_1 t) \quad (4.155)$$

и ИБ волну

$$\phi'_2(\mathbf{r}, t) \propto \exp(-i\omega'_2 t), \quad (4.156)$$

где $\omega'_2 = \omega_2 - \omega'_1$, имеет вид:

$$\begin{cases} \hat{D}(x, \omega_2) \phi_2(\mathbf{r}) = 4\pi\rho_2(\omega_2, \mathbf{r}), \\ \hat{D}(x, \omega'_1) \phi'_1(\mathbf{r}) = 4\pi\rho'_1(\omega'_1, \mathbf{r}), \\ \hat{D}(x, \omega'_2) \phi'_2(\mathbf{r}) = 4\pi\rho'_2(\omega'_2, \mathbf{r}). \end{cases} \quad (4.157)$$

Интегральные операторы \hat{D} в (4.157) определены согласно выражению (4.47), дисперсионные функции $D(\omega_2), D(\omega'_1)$ даются выражением (4.95) и $D(\omega'_2)$ следующим выражением [144]:

$$D'_2 = D(\omega'_2) = q^2 + \chi_e(\omega'_2, x) + \chi_i(\omega'_2, x). \quad (4.158)$$

Явные выражения для нелинейных плотностей заряда ρ_2, ρ'_1, ρ'_2 имеют вид:

$$\rho_2 = \frac{\omega_2 \omega'_1}{\omega_{pe}^2 |\omega_{ce}|} \frac{c q_{2x} q'_{1x} q_{2x}^2}{4\pi H} \phi'_1 \phi_2^*, \rho'_1 = \frac{\omega_2 \omega'_1}{\omega_{pe}^2 |\omega_{ce}|} \frac{c q_{2x} q'_{1x} q_{2x}^2}{4\pi H} \phi_2 \phi'_2, \rho'_2 = \frac{\omega_2 \omega'_1}{\omega_{pe}^2 |\omega_{ce}|} \frac{c q_{2x} q'_{1x} q_{2x}^2}{4\pi H} \phi_2^* \phi'_1. \quad (4.159)$$

Будем анализировать вторичную неустойчивость, описываемую системой уравнений (4.157), с помощью метода, предложенного в [132]. На первом шаге, мы пренебрежем нелинейной накачкой в системе уравнений (4.157) и будем искать решение однородных уравнений $\hat{D}\phi'_{i2} = 0$, описывающих невзаимодействующие ВГ и НГ волны, с помощью ВКБ приближения:

$$\phi_2(\mathbf{r}, t) = \frac{C_2}{2} \varphi_2(x) \exp(iq_y^{m,n} y + i\omega_2 t) + c.c., \quad (4.160)$$

$$\phi'_1(\mathbf{r}, t) = \frac{C'_1(p)}{2} \varphi'_1(x) \exp(iq_y^{m,n} y - i\omega'_1 p t) + c.c., \quad (4.161)$$

$$\phi'_2(\mathbf{r}, t) = \frac{C'_2}{2\sqrt{D'_{2q}(x)}} \exp\left(i \int^x q'_{2x}(x') dx' + i\omega'_2 p t\right) + c.c. \quad (4.162)$$

Собственная функция $\varphi_2(x)$ в выражении (4.160) дается выражением (4.101). Собственная

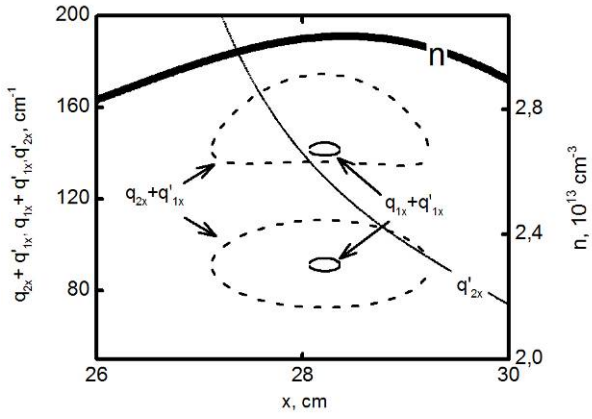


Рисунок 4.33. (а, левая и нижняя оси) – Дисперсионные кривые вторичной ИБ волны $q'_{2x} = q'_{2x}(x)$ (сплошная линия) и первичных ВГ волн $q_{1x} = q_{1x}(x)$, $q_{2x} = q_{2x}(x)$, смещенные вверх на величину радиального волнового вектора вторичной ВГ волны $q'_{1x} = q'_{1x}(x)$; (b, правая и нижние оси) – профиль плотности плазмы (толстая сплошная линия) [129, 130].

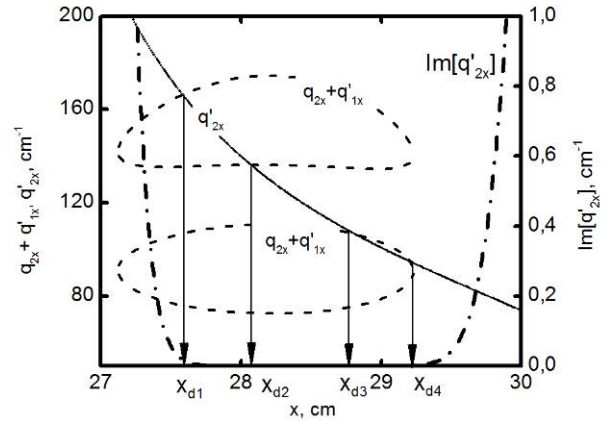


Рисунок 4.34. (а, левая и нижняя оси) – Дисперсионные кривые вторичной ИБ волны $q'_{2x} = q'_{2x}(x)$ (сплошная линия) и первичных ВГ волн $q_{1x} = q_{1x}(x)$, $q_{2x} = q_{2x}(x)$, смещенные вверх на величину радиального волнового вектора вторичной ВГ волны $q'_{1x} = q'_{1x}(x)$; (b, правая и нижние оси) – мнимая часть волнового вектора ИБ волны $\text{Im}[q'_{2x}] = \text{Im}[D(\omega'_2)]/D'_{2q}$; $q'_{2z} = 0.6 \text{ cm}^{-1}$.

функция $\phi'_1(x)$ в выражении (4.161), описывающем потенциал вторичной ВГ волны, запертой в радиальном направлении, имеет вид:

$$\phi'_1(x) = \frac{1}{\sqrt{|L_1^+(x)|}} \exp\left(-i \left[\int_{x_{1l}^*}^x q_{1x}^+ d\xi - \frac{\pi}{4} \right]\right) + \frac{1}{\sqrt{|L_1^-(x)|}} \exp\left(-i \left[\int_{x_{1l}^*}^x q_{1x}^- d\xi + \frac{\pi}{4} \right]\right), \quad (4.163)$$

где $L_1^\pm(x) = D'_{1q}(q_{1x}^\pm(x)) \int_{x_{1l}^*}^{x_{1r}^*} d\xi \left(|D'_{1q}(q_{1x}^+(\xi))|^{-1} + |D'_{1q}(q_{1x}^-(\xi))|^{-1} \right)$, q_{1x}^\pm – радиальная компонента волнового вектора, выражение для которой получено в (4.96), $D'_{1q} = \partial D_{UH}(\omega'_1)/\partial q'_{1x}$ и собственная частота ω_1^p выбрана таким образом, чтобы удовлетворять условию квантования:

$$\int_{x_{1l}^*}^{x_{1r}^*} q_{1x}^+(\omega_1^p, \xi) d\xi + \int_{x_{1l}^*}^{x_{1r}^*} q_{1x}^-(\omega_1^p, \xi) d\xi = \pi(2p+1). \quad (4.164)$$

Координаты (x_{1l}^*, x_{1r}^*) в (4.164) являются решениями уравнения $D'_{1q}(\omega_1^p, x_{1l,r}^*) = 0$ и отвечают точкам поворота вторичной ВГ волны в радиальном направлении. В выражении (4.162) q'_{2x} – радиальная компонента волнового вектора, которая является решением локального дисперсионного уравнения ИБ волны $\text{Re}[D'_2] = 0$ и $D'_{2q} = \partial D(\omega'_2)/\partial q'_{2x}$. На рисунке 4.33

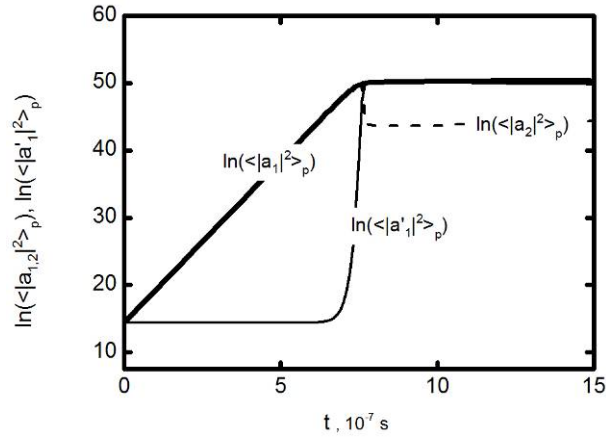


Рисунок 4.35. Эволюция числа первичных плазмонов $\langle |a_{1,2}(t)|^2 \rangle_p$ (сплошная толстая и штрихованная линии) и числа вторичных плазмонов $\langle |a'_1(t)|^2 \rangle_p$ (сплошная тонкая линия) в пределах пучка накачки.

приведены дисперсионные кривые ИБ волны и обеих первичных ВГ волн $q_{1x} = q_{1x}(x)$ и $q_{2x} = q_{2x}(x)$, смещенные вверх на величину радиального волнового вектора вторичной ВГ волны $q'_{1x} = q'_{1x}(x)$. Видно, что первичная ВГ волна на частоте $\omega_1 / (2\pi) = 70.18 \text{ GHz}$ не способна распасться. В то же время, первичная ВГ волна на частоте $\omega_2 / (2\pi) = 69.82 \text{ GHz}$ нелинейно связана в окрестностях точек пересечения сплошной и штрихованной линий с вторичной ВГ волной и ИБ волной. Для того, чтобы описать эту нелинейную связь, на следующем шаге процедуры теории возмущений мы примем во внимание нелинейную накачку и потери энергии из области нелинейного взаимодействия. В этом случае амплитуды C_2 , C'_1 и C'_2 потенциалов взаимодействующих волн перестают быть константами. Кроме того, ионное циклотронное затухание ИБ волн в области нелинейного взаимодействия остается малым даже для больших продольных компонент волнового вектора (рисунок 4.34, правая и нижняя оси, где показана мнимая часть радиального волнового вектора ИБ волн $\text{Im}[q'_{2x}] = \text{Im}[D'_2] / D'_{2q}$ при $q'_{2z} = 0.6 \text{ cm}^{-1}$). Используя решение (4.162) невозмущенного низкочастотного уравнения в системе (4.157), проведем процедуру укорачивания, которая приводит к уравнению для амплитуды низкочастотного потенциала:

$$\left[iD'_{2q}(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_2^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] C'_2 = 8\pi\rho'_2(\omega'_2, \mathbf{r}) \sqrt{D'_{2q}(x)} \exp\left(-i \int^x q'_{2x}(x') dx' + i\omega_2' t\right). \quad (4.165)$$

В уравнении (4.165) мы опустили член, описывающий пренебрежимо малые потери из области взаимодействия в поперечном направлении (y). Первый и второй члены в левой части уравнения (4.165) описывают конвективные потери ИБ волн в радиальном направлении и

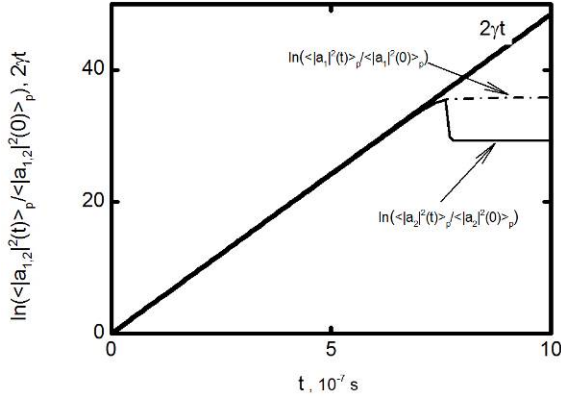


Рисунок 4.36. Коэффициенты усиления первичных ВГ волн (штрих - пунктирная и сплошная тонкая линии) в пределах пучка накачки. Сплошная толстая линия – аналитическое выражение $2\gamma t$, γ - инкремент первичной неустойчивости (4.119), $p = 0$.

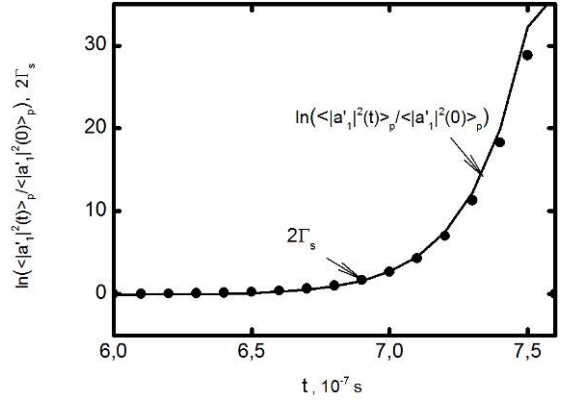


Рисунок 4.37. Коэффициенты усиления вторичной ВГ волны в пределах пучка накачки: кружки – численное решение, сплошная линия – асимптотическая зависимость (4.173).

дифракционные потери вдоль магнитного поля. Для типичных параметров экспериментов на токамаке TEXTOR и выбранных параметров ИБ волны конвективные потери в радиальном направлении являются доминирующими. В этом случае мы можем найти амплитуду ИБ волны в явном виде:

$$C'_2(\mathbf{r}) = -ia_2^*(y, z) a'_1(y, z) \int_{-\infty}^x ds \tilde{v}_1(s), \quad (4.166)$$

$$\tilde{v}_1(s) = \frac{2\sqrt{\pi}}{H} \frac{c\omega_2\omega'_1}{2\omega_{pe}^2|\omega_{ce}|} \frac{q_{2x}(s)q'_{1x}(s)q_{2x}^2(s)}{\sqrt{\langle D_{2\omega}(s) \rangle \langle D'_{1\omega}(s) \rangle}} \frac{\varphi_2^*(s)\varphi'_1(s)}{\sqrt{D'_{2q}(s)}} \exp\left(-i \int^s q'_{2x}(x') dx'\right), \quad (4.167)$$

$$a'_1 = C'_1 \sqrt{\frac{\langle D'_{1\omega} \rangle}{16\pi}} \text{ и } |a'_1|^2 \text{ - число вторичных ВГ плазмонов и } D'_{1\omega} = \partial D_{UH} / \partial \omega'_1. \text{ Далее, подставим}$$

выражения (4.162) и (4.166), а также радиальные собственные функции φ_2 и φ'_1 , определенные выражениями (4.101) и (4.163), в высокочастотные уравнения системы (4.157). Умножим эти уравнения, соответственно, на φ_2^* и $\varphi_1'^*$. Далее, проинтегрируем по координате x . В результате, получим систему шести уравнений, первые три из которых имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} - i\Lambda_{1z} \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} = v_0 a_0(y, z) a_2 - v_{0d} |a_2|^2 a_1 \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} - u_{2y} \frac{\partial a_2}{\partial y} + i\Lambda_{2z} \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} = v_0^* a_0^*(y, z) a_1 - v_{0d} |a_1|^2 a_2 - v_1 |a_1'|^2 a_2 \\ \frac{\partial a_1'}{\partial t} + u'_{1y} \frac{\partial a_1'}{\partial y} + i\Lambda'_{1z} \frac{\partial^2 a_1'}{\partial z^2} = v_1 |a_2|^2 a_1' \end{cases} \quad (4.168)$$

а оставшиеся три получаются из системы (4.168) комплексным сопряжением. В системе уравнений (4.168)

$$v_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{v}_1^*(x) \int_{-\infty}^x ds \tilde{v}_1(s), \quad (4.169)$$

амплитуды a_1 и a_2 определены выражением (4.102),

$$u'_{1y} = \left. \frac{\partial D_{UH}(\omega'_1)}{\partial q_{2y}} \right|_{q_{2y}=q_y^{m,n}} > \frac{1}{\langle D'_{1\omega} \rangle}, \quad \Lambda'_{1z} = \left. \frac{\partial^2 D_{UH}(\omega'_1)}{2\partial q_{1z}^2} \right|_{q_{1z}=q_z^{m,n}} > \frac{1}{\langle D'_{1\omega} \rangle} \quad (4.170)$$

- усредненные групповая скорость и коэффициент дифракции, а процедура усреднения определена в (4.106). Первое и второе уравнения в системе (4.168) описывают эволюцию первичных плазмонов. Первые члены в правых частях этих уравнений описывают первичную неустойчивость, вторые члены – истощение накачки. Третий член в правой части второго уравнения и первый член в правой части третьего уравнения – вторичную неустойчивость. При решении системы шести уравнений в частных производных, как и в предыдущем случае, рассмотренном в п. 4.4.2.1., воспользуемся стандартным пакетом Mathematica[®]. Начальное распределение первичных и вторичных дочерних плазмонов, которое определяется тепловыми флуктуациями, будем считать однородным:

$$\sqrt{\langle\langle |a_{1,2}|^2 \rangle\rangle} = \sqrt{\frac{T_e}{\omega_{1,2}^{m,n}} \frac{1}{\pi w^2}}, \quad \sqrt{\langle\langle |a'_1|^2 \rangle\rangle} = \sqrt{\frac{T_e}{\omega_1^{p}} \frac{1}{\pi w^2}}, \quad (4.171)$$

а все коэффициенты, входящие в систему уравнений, константами (*const*). Граничные условия на границах 2D бокса $2y_B \times 2z_B$ выберем в виде:

$$\begin{aligned} a_{1,2}(y, -z_B) &= a_{1,2}(y, z_B), \quad a_{1,2}^*(y, -z_B) = a_{1,2}^*(y, z_B), \quad a'_1(y, -z_B) = a'_1(y, z_B), \\ a_{1,2}^*(y, -z_B) &= a_{1,2}^*(y, z_B), \quad a_{1,2}(-y_B, z) = a_{1,2}(y_B, z), \quad a_{1,2}^*(-y_B, z) = a_{1,2}^*(y_B, z), \\ a'_1(-y_B, z) &= a'_1(y_B, z), \quad a_{1,2}^*(-y_B, z) = a_{1,2}^*(y_B, z). \end{aligned} \quad (4.172)$$

Результаты численного моделирования системы уравнений (4.168) для мощности накачки $P_0 = 600$ кВт показаны на рисунке 4.35, где приведены временные зависимости среднего числа дочерних плазмонов. Процедура усреднения определена следующим образом:

$$\langle f \rangle_p = (\pi w^2)^{-1} \int_{-y_B}^{y_B} \int_{-z_B}^{z_B} dy dz f(y, z) \exp(-(y^2 + z^2)/w^2).$$

Можно видеть, что вначале наблюдается экспоненциальный рост числа первичных плазмонов, что показано в большем масштабе на рисунке 4.36, где изображен коэффициент усиления первичных ВГ волн (штрих-пунктирная и сплошная тонкая линии) в пределах пучка накачки вместе с аналитическим выражением $2\gamma t$. Инкремент первичной неустойчивости γ дается выражением (4.119) для фундаментальной моды. Как только число первичных плазмонов

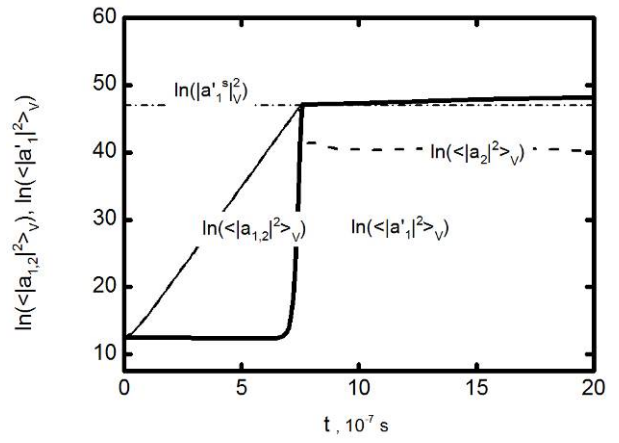
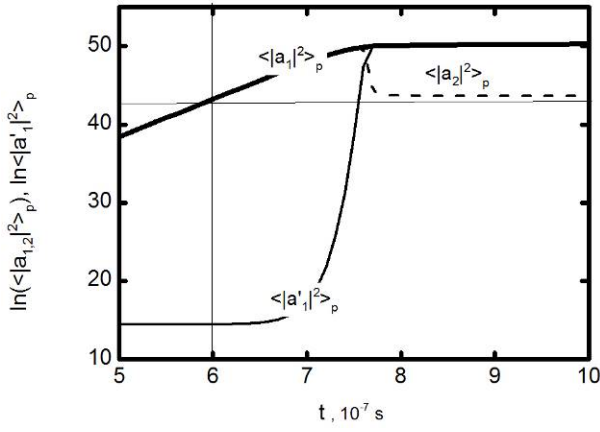


Рисунок 4.38. Переход к режиму насыщения. Толстая сплошная и штрихованная линии – число первичных плазмонов $\langle |a_{1,2}(t)|^2 \rangle_p$; тонкая сплошная линия – число вторичных плазмонов $\langle |a'_1(t)|^2 \rangle_p$. Вертикальная тонкая линия – момент начала возбуждения вторичной неустойчивости.

Рисунок 4.39. Временная эволюция среднего числа первичных плазмонов $\langle |a_{1,2}(t)|^2 \rangle_v$ (сплошная тонкая и штрихованная линии) и вторичных плазмонов $\langle |a'_1(t)|^2 \rangle_v$ (сплошная толстая линия). Горизонтальная линия – уровень насыщения в однородной плазме (4.176).

становится большим настолько, что оказывается превзойденным порог вторичного распада, мы наблюдаем быстрый рост числа вторичных ВГ плазмонов. Коэффициент усиления вторичной волны можно оценить следующим образом:

$$\ln \left(\frac{\langle |a'_1(t)|^2 \rangle_p}{\langle |a'_1(0)|^2 \rangle_p} \right) = 2\Gamma_s(t) = 2 \int_{-\infty}^t \gamma_s(t') dt' \approx \frac{|v_1|}{|\gamma|} \langle |a_2(t)|^2 \rangle_p. \tag{4.173}$$

На рисунке 4.37 приведено сравнение аналитического выражения (4.173) с данными, полученными в результате моделирования. Можно видеть разумное совпадение этих зависимостей. На рисунке 4.38 в большем масштабе показано поведение среднего числа дочерних плазмонов. Видно, что имеет место сложная нелинейная динамика, при которой число первичных распадающихся плазмонов уменьшается, а число вторичных плазмонов возрастает. В итоге, число всех взаимодействующих плазмонов выходит на насыщение. Отметим, что число первичных распадающихся плазмонов насыщается на уровне, который выше порога возбуждения вторичной неустойчивости. На рисунке 4.39 показано среднее значение числа дочерних плазмонов $\langle |a_{1,2}(t)|^2 \rangle_v$ и $\langle |a'_1(t)|^2 \rangle_v$ в 2D боксе. Процедура усреднения определена следующим образом:

$$\langle f \rangle_v = \int_{-y_B}^{y_B} \int_{-z_B}^{z_B} \frac{dydz}{2y_B 2z_B} f(y, z). \tag{4.174}$$

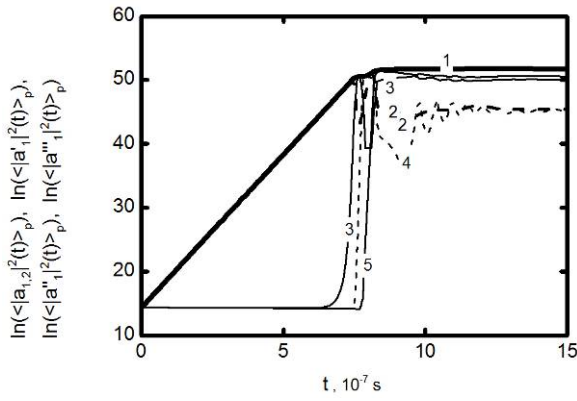


Рисунок 4.40. Временная эволюция среднего числа различных дочерних плазмонов в пределах пучка накачки. (1) - $\langle |a_1(t)|^2 \rangle_p$, (2) - $\langle |a_2(t)|^2 \rangle_p$, (3) - $\langle |a'_1(t)|^2 \rangle_p$, (4) - $\langle |a''_1(t)|^2 \rangle_p$, (5) - $\langle |a'''_1(t)|^2 \rangle_p$.

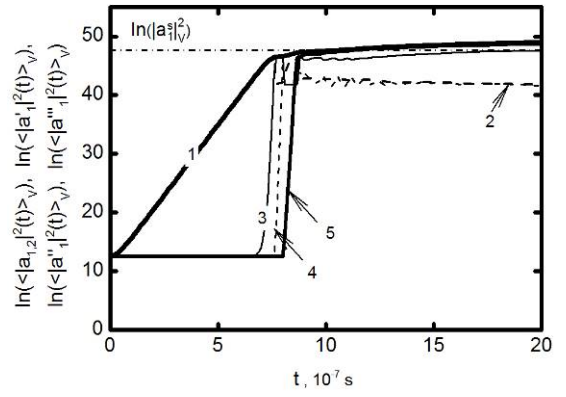


Рисунок 4.41. Временная эволюция среднего числа различных дочерних плазмонов в 2D боксе. (1) - $\langle |a_1(t)|^2 \rangle_V$, (2) - $\langle |a_2(t)|^2 \rangle_V$, (3) - $\langle |a'_1(t)|^2 \rangle_V$, (4) - $\langle |a''_1(t)|^2 \rangle_V$, (5) - $\langle |a'''_1(t)|^2 \rangle_V$. Горизонтальная линия – уровень насыщения в однородной плазме (4.179).

В случае отсутствия конвективных и дифракционных потерь дочерних волн из области распада существует интеграл системы уравнений (4.168):

$$\langle |a_1|^2 \rangle_V = \langle |a_2|^2 \rangle_V + \langle |a'_1|^2 \rangle_V.$$

В этом случае число плазмонов в насыщении можно оценить из баланса мощности, вкладываемой в первичные плазмоны в результате первичного распада, и мощности, которая передается вторичным плазмонам в результате вторичного распада:

$$2\gamma w_2^s S_2 = 2\gamma_s w_1^{s'} S_1', \quad (4.175)$$

где $2\gamma = 2|v_0||a_0|$ - инкремент первичной неустойчивости, $2\gamma_s = 2|v_1||a_2^s|^2$ - инкремент вторичной неустойчивости, $w_2^s = \omega_2 |a_2^s|^2$, $w_1^{s'} = \omega_1 |a_1^{s'}|^2$ - плотность энергии первичных и вторичных плазмонов в насыщении, S_1' и S_2 - площади магнитной поверхности, где локализованы соответствующие плазмоны. В результате найдем уровень насыщения вторичных плазмонов:

$$\left| a_1^{s'} \right|_V^2 = \frac{S_2}{S_1'} \frac{|v_0||a_0|}{|v_1|}. \quad (4.176)$$

В случае неоднородной накачки потери дочерних волн из области взаимодействия, где число плазмонов поддерживается на уровне насыщения (см. рисунок 4.35), приводят к тому, что число дочерних плазмонов в объеме не сохраняется. На рисунке 4.39 значение уровня насыщения (4.176) показано штрих - пунктирной линией. Отклонение зависимостей, которые

даны сплошными линиями, от уровня насыщения определяет мощность, передаваемую дочерним волнам:

$$\Delta P = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-y_B}^{y_B} dy \int_{-z_B}^{z_B} dz \left[\omega_1 |a_1(y, z, t)|^2 + \omega_2 |a_2(y, z, t)|^2 + \omega'_1 |a'_1(y, z, t)|^2 \right]. \quad (4.177)$$

Для условий токамака TEXTOR [143] в случае насыщения первичной неустойчивости в результате одношагового каскада до 7.3 % мощности накачки передается дочерним волнам. Хотя насыщение экспоненциального роста амплитуд дочерних волн может быть достигнуто уже после одношагового каскадного распада первичной ВГ волны, амплитуда вторичной ВГ волны большая настолько, что порог параметрической неустойчивости этой волны также оказывается превзойденным. Как было показано в предыдущих параграфах, для типичных условий токамака TEXTOR возможен трехступенчатый каскадный распад первичной ВГ волны, который описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} - i\Lambda_{1z} \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} = \nu_0 a_0(y, z) a_2 - \nu_{0d} |a_2|^2 a_1 \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} - u_{2y} \frac{\partial a_2}{\partial y} + i\Lambda_{2z} \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} = \nu_0^* a_0^*(y, z) a_1 - \nu_{0d} |a_1|^2 a_2 - \nu_1 |a'_1|^2 a_2 \\ \frac{\partial a'_1}{\partial t} + u'_{1y} \frac{\partial a'_1}{\partial y} + i\Lambda'_{1z} \frac{\partial^2 a'_1}{\partial z^2} = \nu_1 |a_2|^2 a'_1 - \nu_2 |a''_1|^2 a'_1, \\ \frac{\partial a''_1}{\partial t} - u''_{2y} \frac{\partial a''_1}{\partial y} + i\Lambda''_{2z} \frac{\partial^2 a''_1}{\partial z^2} = \nu_2 |a'_1|^2 a''_1 - \nu_3 |a'''_1|^2 a''_1, \\ \frac{\partial a'''_1}{\partial t} + u'''_{2y} \frac{\partial a'''_1}{\partial y} - i\Lambda'''_{2z} \frac{\partial^2 a'''_1}{\partial z^2} = \nu_3 |a''_1|^2 a'''_1, \end{cases} \quad (4.178)$$

где $a_{1,2}$ и $a'_{1,2}$ определены в (4.102) и (4.131), a''_1 , a'''_1 связаны с числом $|a'_{1,2}|^2$, $|a''_1|^2$ третичных и четверичных ВГ плазмонов. Коэффициенты в первых трех уравнениях определены в выражениях (4.105), (4.108), (4.170); $\Lambda''_{1z}, \Lambda'''_{1z}$ - коэффициенты, описывающие дифракцию соответствующих плазмонов вдоль магнитной силовой линии; u''_{1y}, u'''_{1y} - поперечные компоненты скорости, описывающие конвективные потери энергии; $\nu_{2,3}$ - коэффициенты, которые определяют нелинейную связь различных плазмонов. При численном решении системы уравнений (4.178) мы будем использовать граничные условия (4.172) и условия для дочерних плазмонов более высокого порядка:

$$\begin{aligned} a''_1(y, -z_B) &= a''_1(y, z_B), \quad a'''_1(y, -z_B) = a'''_1(y, z_B), \quad a''_1(-y_B, z) = a''_1(y_B, z), \quad a'''_1(-y_B, z) = a'''_1(y_B, z), \\ a'''_1(y, -z_B) &= a'''_1(y, z_B), \quad a''_1(y, -z_B) = a''_1(y, z_B), \quad a'''_1(-y_B, z) = a'''_1(y_B, z), \quad a''_1(-y_B, z) = a''_1(y_B, z). \end{aligned}$$

Кроме того, воспользуемся начальными условиями (4.171) и условиями

$$\sqrt{\langle\langle |a_1^m|^2 \rangle\rangle} = \sqrt{\frac{T_e}{\omega_1^m} \frac{1}{\pi w^2}}, \quad \sqrt{\langle\langle |a_1^m|^2 \rangle\rangle} = \sqrt{\frac{T_e}{\omega_1^m} \frac{1}{\pi w^2}}.$$

Результаты численного моделирования приведены на рисунке 4.40, свидетельствующем о насыщении среднего числа дочерних плазмонов в пределах пучка накачки. По аналогии с оценкой (4.176), получим уровень насыщения при трехступенчатом каскадном насыщении первичной неустойчивости в случае однородной плазмы:

$$|a_1^{ms}|_v^2 \approx |v_0| |a_0| / |\tilde{v}_3|. \quad (4.179)$$

Этот уровень показан на рисунке 4.41 штрих-пунктирной линией вместе с временными зависимостями среднего числа дочерних плазмонов $\langle |a_{1,2}(t)|^2 \rangle_v$, $\langle |a_1'(t)|^2 \rangle_v$, $\langle |a_1''(t)|^2 \rangle_v$, $\langle |a_1'''(t)|^2 \rangle_v$. Отклонение зависимостей, которые даны сплошными линиями, от уровня насыщения определяет мощность, передаваемую дочерним волнам в случае неоднородной накачки:

$$\Delta P = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-y_B}^{y_B} dy \int_{-z_B}^{z_B} dz \times \quad (4.180)$$

$$\left[\omega_1 |a_1(y, z, t)|^2 + \omega_2 |a_2(y, z, t)|^2 + \omega_1' |a_1'(y, z, t)|^2 + \omega_1'' |a_1''(y, z, t)|^2 + \omega_1''' |a_1'''(y, z, t)|^2 \right].$$

Результаты численного анализа показывают, что до 22 % вводимой мощности рассеивается или поглощается аномально при мощности накачки 600 кВт.

4.4.3. Нелинейное взаимодействие дочерних плазмонов, приводящее к генерации необыкновенной волны

Нелинейное взаимодействие различных дочерних волн, возбуждаемых в результате каскадного насыщения первичной низкопороговой двухплазмонной неустойчивости волны накачки, может приводить к генерации необыкновенной волны, частота которой смещена вниз относительно частоты волны накачки и которая распространяется из области взаимодействия наружу. Этот механизм позволяет воспроизвести в деталях спектр аномально рассеянных волн, измеренный в эксперименте [143], и с хорошей точностью оценить мощность принимаемых сигналов. Наблюдение аномального рассеяния на токамаке TEXTOR [143] было сделано с помощью Томсоновской диагностики, детальное описание которой может быть найдено в [152]. Принципиальная схема эксперимента показана на рисунке 4.42. Аномально рассеянный сигнал регистрируется приемной антенной, расположенной выше экваториальной плоскости, в

которой установлен гиротрон, на 20 см. В рамках рассматриваемой модели нелинейное взаимодействие вторичной ВГ волны ($\omega'_1/2\pi = 69.22\text{ГГц}$) и первичной ВГ волны ($\omega_2/2\pi = 69.82\text{ГГц}$) к возбуждению электромагнитной волны необыкновенной поляризации, распространяющейся наружу. Частота этой необыкновенной волны $(\omega'_1 + \omega_2)/2\pi = 139.04\text{ГГц}$ с хорошей точностью воспроизводит частоту первой линии в спектре, измеренном в эксперименте (рисунок 9 в работе [143]). Можно показать, что при трехступенчатом каскадном насыщении к возбуждению различных волн необыкновенной поляризации, распространяющихся наружу, могут приводить только такие взаимодействия, при которых частоты этих электромагнитных волн равны: $(\omega_2 + \omega'_1)/2\pi = 139.04\text{ГГц}$, $(\omega_2 + \omega'_1)/2\pi = 138.44\text{ГГц}$, $(\omega_2 + \omega'_1)/2\pi = 137.84\text{ГГц}$, что воспроизводит спектр, полученный экспериментально (рисунок 9 в работе [143]). Далее, мы сосредоточимся на первой частотной линии, т.е. $(\omega_2 + \omega'_1)/2\pi = 139.04\text{ГГц}$, наблюдаемой в эксперименте, и вычислим амплитуду сигнала, регистрируемого приемной антенной. Согласно работе [11], амплитуда сигнала, принятого приемной антенной, равна:

$$A(\omega_i) = \frac{1}{4} \int \mathbf{j}_s(\omega_i, \mathbf{r}) \mathbf{E}^+(\omega_i, \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.181)$$

Выражение имеет прозрачный физический смысл. Оно служит одной из возможных формулировок теоремы взаимности и связывает вклад данной точки \mathbf{r} в процесс формирования сигнала излучения, описываемого плотностью тока $\mathbf{j}_s(\omega_i, \mathbf{r})$, со способностью антенны, если она работает в режиме излучения, где $\mathbf{E}^+(\omega_i, \mathbf{r})$ - поле антенного пучка, осветить эту точку \mathbf{r} в “гипотетической” плазме. “Гипотетическая” плазма отличается от реальной плазмы изменением направления внешнего магнитного поля. Интегрирование в выражении (4.181) производится по всему объему плазмы. В окрестности O – точки магнитного острова \mathbf{E}^+ можно представить в виде:

$$\mathbf{E}^+ = \mathbf{e}^+(\omega_a, x) \sqrt{\frac{8\pi}{c} \frac{1}{\pi w_a^2}} \sqrt{\frac{\omega_a}{c k_a(x)}} \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{2w_a^2} - iK_a y - i \int^x k_a(x', K_a) dx'\right), \quad (4.182)$$

где $w_a = \sqrt{2}\text{см}$, $\omega_a/2\pi = (\omega'_1 + \omega_2)/2\pi = 139.04\text{ГГц}$,

$$\mathbf{e}^+(\omega_a, x) = i \frac{\mathbf{g}(\omega_a, x)}{\varepsilon(\omega_a, x)} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \quad (4.183)$$

- вектор поляризации,

$$k_a(x, K_a) = \sqrt{k_0^2(x) - K_a^2}, \quad (4.184)$$

- радиальная компонента волнового вектора, $k_0^2(x)$ (см. (4.90)),

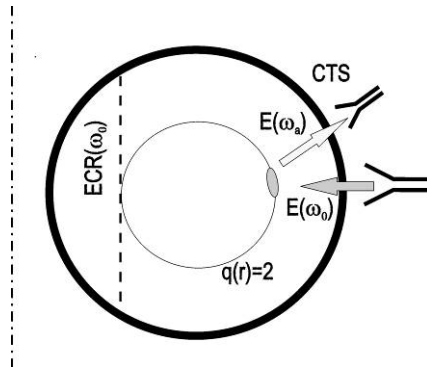


Рисунок 4.42. Полоидальное сечение токамака, иллюстрирующее схему эксперимента на токамаке TEXTOR [127, 128, 143] по наблюдению аномального рассеяния волны накачки $E(\omega_0)$ в присутствии магнитного острова $q = 2$ (серый эллипс). Аномально рассеянный сигнал $E(\omega_a)$ регистрируется приемной антенной, расположенной выше экваториальной плоскости на 20 см.

$$K_a = \frac{\omega_a}{c} \sin \theta = \frac{\omega_a}{c} \frac{y_a}{\sqrt{y_a^2 + (a - |x_{ECR}|)^2}}, \quad (4.185)$$

$y_a = 20$ см, $|x_{ECR}| = 28$ см, и a - малый радиус токамака TEXTOR. Плотность тока $\mathbf{j}_s(\omega_i, \mathbf{r})$, который возбуждается в результате нелинейного взаимодействия первичной $\phi_1(\mathbf{r})$ и вторичной $\phi'_1(\mathbf{r})$ ВГ волн и описывает генерацию X волны, распространяющейся наружу, может быть представлена в виде [144]:

$$j_{sk} = \sigma_{kxx} \frac{q'_{1x} q_{1x}}{4\pi H} \phi_1^* \phi'_1, \quad (4.186)$$

где $\sigma_{xxx} = -c[q'_{1x}\omega_1 - q_{1x}\omega'_1]|\omega_{ce}|/\omega_{pe}^2$, $\sigma_{yxx} = i|\omega_{ce}|^2 c[q'_{1x} - q_{1x}]/\omega_{pe}^2$. Подставим (4.182) и (4.186) в (4.181) и выполним интегрирование по объему плазмы. В результате получим амплитуду регистрируемого сигнала на частоте $(\omega'_1 + \omega_2)/2\pi = 139.04$ ГГц:

$$A(\omega_a) = \sqrt{\frac{8\pi}{c\pi w^2}} \sqrt{\frac{\omega_a}{ck_a}} \frac{e_j^+ \sigma_{jxx}}{H} \Big|_{x_{\max}} \sqrt{2\pi} \times$$

$$\left[\frac{q_{2x}^+ q_{1x}^+ \Big|_{x=x_{c1}} l_{r1} \exp\left(i\Psi(x_{c1}) - i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\langle D'_{1\omega} \rangle \langle D_{2\omega} \rangle \Big|_{x=x_{c1}}} \sqrt{|L_2^+| |L_1^+| \Big|_{x=x_{c1}}} + \frac{q'_{1x} q_{2x}^+ \Big|_{x=x_{c2}} l_{r2} \exp\left(i\Psi(x_{c2}) + i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\langle D'_{1\omega} \rangle \langle D_{2\omega} \rangle \Big|_{x=x_{c2}}} \sqrt{|L_2^+| |L_1^+| \Big|_{x=x_{c2}}} \right] \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy dz a_2^*(y, z) a_1'(y, z) \exp\left(-iK_a y + iq_z^{p,s} z - \frac{y^2 + z^2}{2w_a^2}\right), \quad (4.187)$$

где величины $l_{r,2}$ и Ψ определены так же, как и в выражении (4.108), a_1^* и a_1' - амплитуды плазмонов, найденные в результате численного моделирования в предыдущем параграфе. В случае квазимонохроматического излучения мощность сигнала $p_s = |A(\omega_a)|^2$ равна:

$$p_s(\omega_a) = \left| e_j^+ \sigma_{jxx} \right|_{x_{\max}}^2 \frac{\alpha}{c\pi w^2} \frac{W_2 W_1'}{w_H}, \quad (4.188)$$

где

$$\alpha = \frac{4\pi\omega_a}{ck_a(x_{\max})} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} dydz a_2^*(y,z) a_1'(y,z) \exp\left(-iK_a y + iq_z^{p,s} z - \frac{y^2 + z^2}{2w_a^2}\right) \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} dydz |a_2(y,z)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dydz |a_1'(y,z)|^2} \times \quad (4.189)$$

$$\frac{\left| q_{2x}^+ q_{1x}^+ \Big|_{x=x_{c1}} l_{r1} \exp\left(i\Psi(x_{c1}) - i\frac{\pi}{4}\right) + q_{1x}^+ q_{2x}^+ \Big|_{x=x_{c2}} l_{r2} \exp\left(i\Psi(x_{c2}) + i\frac{\pi}{4}\right) \right|^2}{\sqrt{\omega_2 < D_{2\omega} > \omega_1' < D_{1\omega}' > L_1^+ L_1^+ \Big|_{x=x_{c1}}} + \sqrt{\omega_2 < D_{2\omega} > \omega_1' < D_{1\omega}' > L_1^+ L_1^+ \Big|_{x=x_{c2}}}}$$

- безразмерный геометрический фактор,

$$\left| e_j^+ \sigma_{jxx} \right| = \frac{|\omega_{ce}|^2}{\omega_{pe}^2} ck_a \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2(\omega_a^2 - \omega_{ce}^2 - \omega_{pe}^2)} \right) \approx \frac{|\omega_{ce}|^2}{\omega_{pe}^2} ck_a \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_a^2} \right), \quad (4.190)$$

$$W_2 = \omega_2 \int_{-\infty}^{\infty} |a_2(y,z)|^2 dydz, \quad W_1' = \omega_1' \int_{-\infty}^{\infty} |a_1'(y,z)|^2 dydz \quad (4.191)$$

- энергия радиально локализованных первичных и вторичных плазмонов, $w_H = H^2/4\pi$ - плотность энергии магнитного поля. Вычисляя интегралы в выражениях (4.190) - (4.191) с использованием $|a_2(y,z)|^2$ и $|a_1'(y,z)|^2$, полученных при моделировании насыщения абсолютной неустойчивости, получим следующую оценку

$$p_s(\omega_a) / \Delta\nu = 0.902 \text{ МэВ}, \quad (4.192)$$

где $\Delta\nu \approx 0.12 \text{ ГГц}$ - спектральная ширина частотной линии, измеряемой в эксперименте. Это значение (4.192) хорошо согласуется одно с другим и близко к значению, измеренному в эксперименте $p_s(\omega_a) / \Delta\nu \approx 1 \text{ МэВ}$ (рисунки 9, 11 в [143]).

4.4.4. Выводы

1) Проанализирован параметрический распад ЭЦ волны необыкновенной поляризации на два ВГ плазмона. Показано, что при немонотонном профиле плотности плазмы, часто наблюдаемом при ЭЦ нагреве на различных установках, имеет место радиальная локализация дочерних ВГ волн, что приводит к полному подавлению их энергетических потерь из области параметрического распада вдоль направления неоднородности плазмы. Радиально локализованные ВГ плазмоны, распространяющиеся на магнитной поверхности в противоположные стороны, оказываются дополнительно локализованными в области локализации пучка накачки. В результате возбуждается абсолютная неустойчивость. Энергия, при которой она возбуждается (десятки кВт), существенно ниже, чем в случае монотонного профиля плазмы (несколько МВт).

2) В качестве механизма насыщения этой неустойчивости рассматривается каскадный распад дочерних ВГ волн, приводящий к возбуждению вторичных низкочастотных и ВГ волн. Рассмотрены два случая: широкой и узкой области локализации первичных ВГ волн на магнитной поверхности. В первом случае роль низкочастотного сателлита играет НГ волны. Получена и численно решена система уравнений, описывающих вторичную неустойчивость первичной ВГ волны, которая, в свою очередь, влияет на эффективность первичного параметрического распада волны накачки. Показано, что в случае неоднородной накачки насыщение экспоненциального роста первичной параметрической неустойчивости необыкновенной волны и выход на стационарный режим имеет место уже при учёте первого вторичного распада одной из дочерних волн (первой ступени каскада). Получены асимптотические аналитические выражения, которые адекватно описывают закон нарастания первичных и вторичных дочерних волн до момента насыщения, и оценки для уровня насыщения числа дочерних плазмонов. В результате численно определена мощность, которую волна накачки теряет в результате развития насыщения неустойчивости при более реалистичном двух каскадном распаде, и получена зависимость этой величины от мощности волны накачки. Для мощности пучка порядка 600-750 кВт можно ожидать, что порядка 20 – 22 % вводимой мощности будет рассеиваться или поглощаться аномально. Во втором, более реалистичном, случае узкой области локализации на магнитной поверхности первичных ВГ волн роль низкочастотного сателлита играет ИБ волна. Аналитически и численно исследован каскадный механизм насыщения неустойчивости волны накачки, приводящий к возбуждению вторичных ВГ волн, запертых в радиальном волноводе, и ИБ волн. Получена и численно решена система уравнений, описывающих трехступенчатую вторичную неустойчивость

первичной ВГ волны. Результаты численного моделирования свидетельствуют о том, что для типичных условий токамака TEXTOR [143] до 22% мощности накачки рассеивается или поглощается аномально.

3) Показано, что нелинейное взаимодействие различных дочерних волн, возбуждаемых в результате абсолютной двухплазмонной неустойчивости волны накачки и каскадного механизма ее насыщения, может приводить к генерации необыкновенной волны, частота которой смещена вниз относительно частоты волны накачки. Этот механизм позволяет воспроизвести в деталях спектр аномально рассеянных волн, измеренный в эксперименте [143], и с хорошей точностью оценить мощность принимаемых сигналов.

Основные публикации

- 1) Gusakov E.Z., Popov A.Yu. On possibility of low-threshold two-plasmon decay instability in 2nd harmonic ECRH experiments at toroidal devices // EPJ Web of Conferences. - 2012. - Vol.32. - P.01007.
- 2) Попов А.Ю., Гусаков Е.З. О возможности снижения порога неустойчивости параметрического распада необыкновенной волны на две верхнегибридные в неоднородной плазме // ЖЭТФ. - 2015. - Т.147. - С.165-173.
- 3) Popov A.Yu. and Gusakov E.Z. Low-threshold absolute two-plasmon decay instability in the second harmonic electron cyclotron resonance heating experiments in toroidal devices // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2015. - Vol.57. - P.025022.
- 4) Попов А.Ю., Гусаков Е.З. Насыщение низкопороговой двухплазмонной параметрической неустойчивости необыкновенной волны в неоднородной плазме // ЖЭТФ. - 2015. - Т. 148. - С. 415 - 428.

Заключение

1. Развита теория распространения и трансформации пучков электромагнитных волн в неоднородной турбулентной плазме в условиях сильной рефракции, что позволило получить теоретическое описание разных сценариев реализации флуктуационной рефлектометрии:

- Найден критерий перехода флуктуационной рефлектометрии в режим сильного малоуглового рассеяния.
- Получено значение критического угла наклона зондирующей антенны, при превышении которого происходит подавление вклада слабо локализованного малоуглового рассеяния в рефлектометрический сигнал при линейном режиме рассеяния.
- Получено выражение для корреляционной длины радиальной корреляционной рефлектометрии при нелинейном режиме рассеяния, которое зависит от уровня и радиальной корреляционной длины флуктуаций. Показана высокая локальность получаемой при этом информации.
- Получены выражения для ширины частотного спектра и сдвига частотного спектра регистрируемого сигнала доплеровской рефлектометрии при нелинейном режиме рассеяния. Показано, что величина сдвига определяется усредненной по области распространения волны скоростью полоидального вращения, ширина частотного спектра зависит от параметров турбулентности и параметров невозмущенной плазмы. Продемонстрирована возможность измерения полоидальной скорости плазменных флуктуаций.
- Найден критерий перехода рефлектометрии в сильно нелинейный режим рассеяния «назад» в присутствии квазикогерентных возмущений плотности.

В итоге, полученные результаты позволили объяснить основные закономерности работы данной диагностики.

Кроме того развиты: метод реконструкции профиля флуктуаций плотности и полоидальной скорости их вращения из данных полоидальной рефлектометрии при линейном режиме рассеяния; метод реконструкции радиального профиля турбулентности на основании результатов измерений зависимости уровня флуктуаций фазы рефлектометрического сигнала от частоты зондирования; схема усиленного рассеяния флуктуационной рефлектометрии.

2. Решена задача о линейной трансформации нормальных мод в окрестности критической поверхности в трехмерно-неоднородной плазме. Получены уравнения, описывающие электрические поля взаимодействующих волн с учетом шири магнитного поля и кривизны

магнитной силовой линии. В результате решения этих уравнений получены интегральные выражения для амплитуд взаимодействующих полей, коэффициенты трансформации и отражения. Основные предсказания теоретической модели подтверждены сравнением с результатами полноволнового моделирования. Получен критерий на относительную амплитуду флуктуаций, когда рассеяние взаимодействующих волн переходит в нелинейный режим, что приводит к деградации эффективности трансформации.

В итоге, удалось развить существовавшие теоретические представления и заполнить пробел в теории линейной трансформации нормальных мод.

3. Получила дальнейшее развитие линейная теория распространения пучков электронных бернштейновских волн в двумерно-неоднородной плазме с учетом пространственной дисперсии и слабых релятивистских эффектов:

- Получена замкнутая форма представления дисперсионного уравнения электронных бернштейновских волн с учетом слабых релятивистских эффектов. Действительная часть дисперсионного уравнения, ответственная за описание распространения электронных бернштейновских волн, имеет удобное интегральное представление. Мнимая часть дисперсионного уравнения, описывающая затухание, дается явным аналитическим выражением.
- Показано, что в случае вогнутых магнитных поверхностей, свойственных равновесным магнитным конфигурациям в токамаках с малым аспектным соотношением, для электронных бернштейновских волн в экваториальной плоскости установки возбуждается плазменный волновод, параметры которого слабо меняются вдоль большого радиуса. Затухание низких мод этого волновода сильно отличается от предсказаний, полученных с помощью приближения геометрической оптики.
- Показано, что в равновесной магнитной конфигурации с немонотонным радиальным профилем модуля магнитного поля, которая реализуется в токамаках с малым аспектным соотношением, для электронных бернштейновских волн существует область прозрачности между поверхностью верхнего гибридного резонанса и поверхностью гармоники электронного циклотронного резонанса. Получено дисперсионное соотношение, адекватно описывающее электронную бернштейновскую волну в этой области. Аналитически и численно найден коэффициент отражения электронной бернштейновской волны от электронного циклотронного слоя в этом случае.

В результате, развиты существовавшие теоретические представления и дано объяснение поведение ЭБВ в плазме токамаков с малым аспектным отношением.

4. Развита теория низкороговой нелинейной трансформации пучков электронных циклотронных волн с учетом особенностей профиля плотности плазмы:

- Предложен параметрический механизм, объясняющий аномальное отражения волны накачки и нагрев ионов в экспериментах по ЭЦ нагреву плазмы в тороидальных ловушках.

При учете реальных особенностей профиля плотности плазмы получено:

- а) выражение для порога и инкремента низкороговой отражательной параметрической неустойчивости необыкновенной волны, приводящей к возбуждению резонатора ионной бернштейновской волны;
 - б) выражение для порога и инкремента низкороговой параметрической неустойчивости необыкновенной волны, приводящей к возбуждению ионной бернштейновской волны и резонатора электронной бернштейновской волны.
- Предложен механизм трехмерной локализации электронной бернштейновской волны в дрейфовой ячейке, который может быть ответственным за возбуждение низкороговой абсолютной параметрической неустойчивости необыкновенной волны.
 - Теоретически предсказан и подтвержден в численном эксперименте механизм трехмерной локализации двух дочерних верхнегибридных плазмонов. Данный механизм может объяснить возбуждение низкороговой абсолютной двухплазмонной параметрической неустойчивости необыкновенной волны в присутствии немонотонного профиля плазмы. Предложен каскадный механизм насыщения низкороговой абсолютной параметрической неустойчивости. Показано, что взаимодействие дочерних волн, возбуждающихся в результате первичного распада необыкновенной волны и каскадного механизма насыщения абсолютной первичной неустойчивости, может объяснить в деталях спектр аномально рассеянных необыкновенных волн, наблюдаемых в эксперименте.

В результате, развиты существовавшие теоретические представления о роли параметрических неустойчивостей при мощном ЭЦ нагреве плазмы.

Благодарности

Я глубоко признателен своим учителям Алексею Дмитриевичу Пилю и Евгению Зиновьевичу Гусакову, сыгравшим огромную роль в моей научной карьере. Благодарю и всех других коллег, в соавторстве с которыми получены использованные в диссертации результаты, а также коллектив сотрудников лаборатории физики высокотемпературной плазмы ФТИ им.А.Ф.Иоффе за поддержку и доброе отношение к автору этой работы.

Список литературы

- 1) Doyle E., Lehecka T., Luhmann N. et. al. Reflectometry density fluctuation measurements on DIII-D // Rev. Sci. Instrum. - 1990. - Vol.61. - P.3016.
- 2) Mazzucato E., Nazikian R. Radial scale length of turbulent fluctuations in the main core of TFTR plasmas // Phys. Rev. Lett. - 1993. - Vol.71. - P.1840.
- 3) Costley A., Cripwell P., Prentice R., Sips A. Recent developments in microwave reflectometry at JET // Rev. Sci. Instrum. - 1990. - Vol.61. - P.2823.
- 4) Vershkov V., Soldatov S., Shelukhin D. et.al. Experimental investigation of ion-temperature-gradient-like turbulence characteristics in T-10 core plasmas with toroidal and poloidal correlation reflectometry // Nucl. Fusion. - 1999. - Vol. 39. - P. 1775.
- 5) Gusakov E.Z., Tyntarev M.A. The two-dimensional theory of reflectometry diagnostics of plasma fluctuations // Fusion Engineering and Design. - 1997. - Vol. 34-35. - P.501.
- 6) Hutchinson I. One-dimensional full-wave analysis of reflectometry sensitivity and correlations // Plasma Phys. Control Fusion. - 1992. - Vol. 34. - P. 1225.
- 7) Vershkov V., Soldatov S., Shelukhin D. et.al. Direct comparison of turbulence measurements with Langmuir probe and reflectometry at the same radial localization in T-10 reflectometry simulations with 2D full-wave code // Proceedings of 30th Conf. Control. Fusion Plasma Phys. - 2003. - Vol. ECA 27A. - P-2.56.
- 8) Devynck P., Garbet X., Laviron C. et.al. Localized measurements of turbulence in the TORE SUPRA tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion. - 1993. - Vol. 35. - P. 63.
- 9) Gusakov E.Z., Popov A.Yu. Theory of radial correlation Doppler reflectometry // Proceedings of 10th International Reflectometry Workshop, Padova, Italy. - 2011.
- 10) Schirmer J., Conway G.D. et al. Radial correlation length measurements on ASDEX Upgrade using correlation Doppler reflectometry // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2007. - Vol. 49. - P. 1019.
- 11) Piliya A.D., Popov A.Yu. On application of the reciprocity theorem to calculation of a microwave radiation signal in inhomogeneous hot magnetized plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2002. -Vol. 44. - P. 467.
- 12) Gusakov E.Z., Yakovlev B.O. Two-dimensional linear theory of radial correlation reflectometry // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2002. -Vol. 44. - P. 2525.
- 13) Fernandez F., Estrada T. and Blanco E. Turbulence Radial Correlation Length Measurements Using Doppler Reectometry In TJ-I // Proceedings of 11th International Reflectometry Workshop Palaiseau, France. - 2013.

- 14) Gurchenko A.D., Gusakov E.Z., Kouprienko D.V. et. al. Observation of turbulence exponential wave number spectra at ion sub-larmor scales in FT-2 tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2010. - Vol. 52. - P. 035010.
- 15) Gurchenko A.D. and Gusakov E.Z. Evolution of ETG mode scale turbulence and anomalous electron transport in dynamic tokamak experiments // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2010. Vol. 52. - P.124035.
- 16) Blanco E., Estrada T. Study of Doppler reflectometry capability to determine the perpendicular velocity and the k-spectrum of the density fluctuations using a 2D full-wave code // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2008. -Vol. 50. - P. 095011.
- 17) Blanco E., Estrada T. and Happel T. Study of radial correlation reflectometry using a 2D full-wave code // Proceedings of 9th International Reflectometry Workshop Lisbon, Portugal. -2009.
- 18) Gusakov E., Leclert G., Boucher I. et. al. Small-angle scattering and spatial resolution of fluctuation reflectometry: comparison of 2D analytical theory with numerical calculations // Plasma Phys. Control Fusion. - 2002. - Vol. 44. - P. 1565.
- 19) Gusakov E., Yakovlev B. Two dimensional theory of correlation reflectometry scattering diagnostic // Proceedings of 27th EPS Conf. Contr. Fusion Plasma Phys. - 2000. - Vol. ECA 24B. - P.428-431.
- 20) Gusakov E., Yakovlev B. Two dimensional theory of fluctuation reflectometry diagnostic// Proceedings of 28th EPS Conf. Contr. Fusion Plasma Phys. - 2001. - Vol. ECA 25A. - P.361.
- 21) Tatarskiy V. Wave Propagation in Turbulent Atmosphere // M.: Nauka. - 1967.
- 22) Nazikian R., Mazzucato E. Reflectometer measurements of density fluctuations in tokamak plasmas // Rev. Sci. Instrum. - 1995. - Vol. 66. - P. 392.
- 23) Leclert G., Heuraux S., Gusakov E., Popov A. et.al. Comparison of full-wave simulations and 1D nonlinear theory of correlation reflectometry // Proceedings of 30th EPS Conf. Control. Fusion Plasma Phys. - 2003. - Vol. ECA 27A. - P 1.079.
- 24) Valeo E., Kramer G. and Nazikian R. Two-dimensional simulations of correlation reflectometry in fusion plasmas // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2002. - Vol.44. - P. L1.
- 25) Hirsch M., Holzhauser E., Baldzuhn J. et al. Doppler reflectometry for the investigation of propagating density perturbations // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2001. - Vol. 43. - P. 1641.
- 26) Гельфанд И.М., Яглом А.М. Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике // УМН. - 1956. - Т. 11. - С. 77–114.
- 27) Feynman R.P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. - 1948. - V. 20. - P.367–387.
- 28) Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме // М.: Наука, 1967.

- 29) Clairet F., Bottereau C., Chareau J.M. and Sabot R. Advances of the density profile reflectometry on TORE SUPRA // *Rev. Scient. Instrum.* - 2003. - Vol. 73. - P. 1481.
- 30) Boucher I., Fanack C., Heuraux S. et.al. One-dimensional analytical model of the phase shift due to Bragg backscattering of an ordinary wave by large amplitude density fluctuations // *Plasma Phys. Control. Fusion.* - 1998. - Vol. 40. - P. 1489.
- 31) Gusakov E.Z. Theory of Cross-Polarization Scattering at the Upper Hybrid Resonance // *Plasma Phys. Reports.* -2002. -Vol. 28. - P. 580.
- 32) Piliya A.D. // *Proceedings of 10th Conf. Phenomena in Ionized Gases (Oxford).* - 1971. - P. 320.
- 33) Rosenbluth M. Parametric Instabilities in Inhomogeneous Media // *Phys. Rev. Lett.* - 1972. - Vol. 29. - P. 565.
- 34) Пилия А. Нестационарная теория параметрической неустойчивости в слабо неоднородной плазме // *ЖЭТФ.* – Т. 64 – С. 1237.
- 35) Erdelyi A. (Ed.), *Higher Transcendental Functions*, vol 2 // McGraw-Hill, New York, 1953.
- 36) Hacquin S., Heuraux S., Colin M., Leclert G. Fast Computations of Wave Propagation in an Inhomogeneous Plasma by a Pulse Compression Method // *Journal of Computational Phys.* 2001. - Vol. 174. - P.1.
- 37) Chou A.E., Afeyan B.B., Cohen B.I. The Bragg resonance picture of one-dimensional fluctuation reflectometry beyond the Born approximation // *Rev. Sci. Instrum.* -1995. -Vol. 66. - P. 1216.
- 38) Polevoi A.R., Shimada V. et. al. Requirements for pellet injection in ITER scenarios with enhanced particle confinement // *Nucl. Fusion.* -2005. -Vol. 45. - P. 1451.
- 39) Boucher I., Fanack C., Heuraux S. et. al. One-dimensional analytical model of the phase shift due to Bragg backscattering of an ordinary wave by large amplitude density fluctuations // *Plasma Phys. Control. Fusion.* - 1998. -Vol. 40. - P. 1489.
- 40) Gusakov E.Z., Kosolapova N.V. Fluctuation reflectometry theory and the possibility of turbulence wave number spectrum reconstruction using the radial correlation reflectometry data // *Plasma Phys. Control. Fusion.* -2011. -Vol. 53. -P. 045012.
- 41) Teplova (Kosolapova) N., Itoh K., Itoh S-I. et. al. On turbulence-correlation analysis based on correlation reflectometry // *Phys. Scr.* - 2013. -Vol. 87. - P. 045502.
- 42) Kosolapova N.V., Gusakov E.Z. and Heuraux S. Numerical modeling of microturbulence wave number spectra reconstruction using radial correlation reflectometry: I. O-mode reflectometry at the linear plasma density profile // *Plasma Phys. Control. Fusion.* -2012. -Vol. 54. - P. 035008.

- 43) Kosolapova N., Altukhov A., Gurchenko A. et.al. Turbulence Wave Number Spectra Reconstruction from Radial Correlation Reflectometry Data at Tore Supra and FT-2 Tokamaks // Proceedings of IAEA FEC Conf. San Diego, USA, 8-13 October. - 2012. - EX/P7-04. -P.230.
- 44) Gusakov E.Z., Altukhov A.B., Bulanin V.V. et. al. Anomalous transport and multi-scale drift turbulence dynamics in tokamak ohmic discharge as measured by high resolution diagnostics and modeled by full-f gyrokinetic code // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2013. -Vol. 55. - P. 124034.
- 45) Sysoeva E.V., Gusakov E.Z., Heuraux S. Transition into diffusive regime of propagation of probing electromagnetic waves in a turbulent inhomogeneous plasma and limitations for microwave reflectometry in reactor scale devices // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2013. - Vol. 55. - P. 115001.
- 46) Vermare L., Hennequin P., Gürçan Ö.D. et.al. Impact of collisionality on fluctuation characteristics of micro-turbulence // Phys. Plasmas. - 2011. - Vol. 18. - P. 012306.
- 47) Fanack C., Boucher I., Clairet F. et.al. Ordinary-mode reflectometry: modification of the scattering and cut-off responses due to the shape of localized density fluctuations // Plasma Phys. Control. Fusion. - 1996. - Vol. 38. - P.1915.
- 48) Coleman T.F. and Li Y. A Reflective Newton Method for Minimizing a Quadratic Function Subject to Bounds on Some of the Variables // SIAM Journal on Optimization. - 1996. - Vol. 6. - P. 418.
- 49) Lin Y., Nazikian R., Irby J.H. and Marmor E.S. Plasma curvature effects on microwave reflectometry fluctuation measurements // Plasma Phys. Control Fusion. - 2001. - Vol. 43. - P.L1-8.
- 50) Hacquin S., da Silva F., Heuraux S. et.al. 1D and 2D Full-Wave Simulations of O-Mode Reflectometry Experiments in the Presence of Non-Coherent Fluctuations // Proceedings of 28th EPS Conf. - 2001. - Vol.25A. - P.3.078.
- 51) Vermare L., Heuraux S., Clairet F. et.al. Density fluctuation measurements using X-mode fast sweep reflectometry on Tore Supra // Nucl. Fusion. - 2006. - Vol. 46. - P. S743.
- 52) Gerbaud T., Clairet F., Sirinelli A. et.al. Comparison of density fluctuation measurements between O-mode and X-mode reflectometry on Tore Supra // Rev. Sci. Instrum. - 2006. - Vol. 77. - P.10E928.
- 53) Пилия А.Д. Рассеяние волн в плазме при наличии трансформации // ЖТФ. - 1966. - Т. 36. - С. 2195.
- 54) Fidone I. Enhanced incoherent scattering at the upper-hybrid resonance. I. Cold plasma theory // Phys. Fluids. - 1973. - Vol. 16. - P.1680.

- 55) Fidone I. and Granata G. Enhanced incoherent scattering at the upper-hybrid resonance. II. Warm plasma theory // *Phys. Fluids*. - 1973. - V. 16. - P. 1685.
- 56) Novik K.M. and Piliya A.D. Enhanced microwave scattering in plasmas // *Plasma Phys. Contr. Fusion*. - 1994. - V. 35. - P. 357.
- 57) Irzak M.A., Shcherbinin O.N. Theory of waveguide antennas for plasma heating and current drive // *Nucl. Fusion*. - 1995. - V. 35. - P. 1341.
- 58) Irzak M.A. Full-wave 2D modeling of LH heating in Globus-M tokamak // *Proceedings of the 30th EPS Conference on Contr. Fusion and Plasma Physics, St.Petersburg*. - 2003. - ECA Vol. 27A. - P-2.175.
- 59) Gusakov E.Z., Dyachenko V.V., Irzak M.A. et.al. Lower hybrid wave excitation and propagation in the spherical tokamak Globus-M // *Plasma Phys. Contr. Fusion*. - 2010. - V. 52. - P. 075018.
- 60) Brambilla M. and Krücken T. Numerical simulation of ion cyclotron heating of hot tokamak plasmas // *Nucl. Fusion*. - 1988. - V. 28. - P. 1813.
- 61) Laqua H.P., Erckmann V., Hartfufi H.J. et.al. Electron Bernstein Wave Emission from an Overdense Plasma at the W7-AS Stellarator // *Phys. Rev. Lett.* - 1997. - V. 78. - P. 3467.
- 62) Laqua H.P., the W7-AS Team, and ECRH Group. Electron Bernstein wave heating and emission via the OXB process at W7-AS // *Plasma Phys. Contr. Fusion*. - 1999. - Vol. 41. - P. A273.
- 63) Laqua H.P. Electron Bernstein wave heating and diagnostic // *Plasma Phys. Control. Fusion*. - 2007. - Vol. 49. - P. R1.
- 64) Jones B., Taylor G., Efthimion P. and Munsat T. Measurement of the magnetic field in a spherical torus plasma via electron Bernstein wave emission harmonic overlap // *Phys. Plasmas*. - 2004. - Vol. 11. - P.1028.
- 65) Shevchenko V., Baranov Y., O'Brien M., and Saveliev A. Generation of Noninductive Current by Electron-Bernstein Waves on the COMPASS-D Tokamak // *Phys. Rev. Lett.* - 2002. - Vol. 89. - P. 265005.
- 66) Гинзбург В.И. О влиянии земного магнитного поля на отражение радиоволн от ионосферы // *ЖЭТФ*. - 1943. - Т. 7. - С. 289.
- 67) Пилия А.Д. О трансформации волн в слабо неоднородной плазме // *ЖТФ*. -1966. - Т. 36. - С. 2103.
- 68) Пилия А.Д., Федоров В.И. Линейная конверсия волн в неоднородной магнитоактивной плазме // *ЖЭТФ*. - 1971. - Т. 60 (1). - С. 389.
- 69) Kopecky V., Preinhaelter J. and Vaclavik J. Transformation of waves and electron heating in a radially inhomogeneous plasma // *J. Plasma Phys.* - 1969. - Vol. 3. - P. 179-188.

- 70) Preinhaelter J. and Kopecky V. Penetration of Nigh-frequency waves into a weakly inhomogeneous magnetized plasma at oblique incidence and their transformation to Bernstein modes // *J. Plasma Phys.* - 1973. - Vol. 10. - P. 1.
- 71) Weitzner H. and Batchelor D.B. Conversion Between Cold Plasma Modes in an Inhomogeneous Plasma // *Phys. Fluids.* - 1979. - Vol. 22. - P. 1355.
- 72) Mjølhus E. Coupling to z mode near critical angle // *J. Plasma Phys.* - 1984. - Vol. 31. - P. 7.
- 73) Токман М.Д. О линейной трансформации электромагнитных волн в магни-тоактивной плазме при распространении под углом к градиенту концентрации // *Физика плазмы.* - 1985. - Т. 10. - С. 1205.
- 74) Тимофеев А.В. О прохождении электромагнитных колебаний через критическую поверхность // *Физика плазмы.* - 2000. - Т. 26. - С. 874.
- 75) Тимофеев А.В. Волны в плазме в магнитном поле вблизи критической поверхности // *УФН.* - 2004. - Т. 174. - С. 609.
- 76) Жаров А.А. Линейная трансформация электромагнитных волн в магнитоактивной плазме вблизи поверхности критической концентрации // *Физика плазмы.* - 1984. - Т. 10. - С. 1109.
- 77) Weitzner H. O-X mode conversion in an axisymmetric plasma // *Phys. Plasmas.* - 2004. -Vol. 11. - P. 866.
- 78) Cairns R.A. and Lashmore-Davies C.N. The prospects for electron Bernstein wave heating of spherical tokamaks // *Phys. Plasmas.* - 2000. - Vol. 7. - P. 4126.
- 79) Попов А.Ю., Пилия А.Д. О-Х трансформация в двумернонеоднородной плазме // Тезисы Докладов XXXIII Звенигородской конференции по физике плазмы и УТС г. Звенигород, 13-17 февраля 2006 г. ЗАО НТЦ «ПЛАЗМАИОФАН» - с. 71.
- 80) Господчиков Е.Д., Суворов Е.В. О-Х трансформация в двумерно-неоднородной магнитоактивной плазме // Тезисы Докладов XXXIII Звенигородской конференции по физике плазмы и УТС г. Звенигород, 13-17 февраля 2006 г. ЗАО НТЦ «ПЛАЗМАИОФАН» - с.323.
- 81) Gospodchikov E.D., Shalashov A.G., Suvorov E.V. On Influence of 2D Inhomogeneity on Electromagnetic Mode Conversion near the Cut Off Surfaces in Magnetized // *Plasmas Plasma Physics and Controlled Fusion.* - 2006. - Vol. 48. - P. 869-883.
- 82) Шалашов А.Г., Господчиков Е.Д., Суворов Е.В. О структуре волновых полей в области линейного взаимодействия О- и Х- волн в двумерно-неоднородной магнитоактивной плазме // *ЖЭТФ.* - 2006. - Т. 130(3). - С. 544-572.
- 83) Shalashov A.G. and Gospodchikov E.D. On perfect O–X mode conversion near the cut-off surfaces in magnetized plasmas // *Plasma Phys. Control. Fusion.* - 2008. - Vol. 50. - P. 045005.

- 84) Shalashov A.G. and Gospodchikov E.D. Linear coupling of electromagnetic waves in gyrotropic media // *Phys. Rev. E.* - 2008. - Vol. 78. - P. 065602.
- 85) Shalashov A.G. and Gospodchikov E.D. On O-X mode conversion near the cut-off surfaces in 3D sheared magnetic field // *Plasma Phys. Control. Fusion.* - 2010. - Vol. 52. - P.115001.
- 86) Gospodchikov E.D., Khusainov T.A. and Shalashov A.G. Impact of poloidal curvature on linear mode conversion of quasi-optical wave beams in tokamak plasmas // *Plasma Phys. Control. Fusion.* - 2012. - Vol. 54. - P. 045009.
- 87) Shalashov A.G., Gospodchikov E.D., Theory of the ordinary and extraordinary mode coupling in fluctuating plasma // *Plasma Phys. Control. Fusion.* - 2014. - Vol. 56. - P. 25011.
- 88) Gospodchikov E.D., Khusainov T.A., Shalashov A.G. Impact of poloidal curvature on linear mode conversion of quasi-optical wave beams in tokamak plasmas // *Plasma Phys. Control. Fusion.* - 2012. - Vol. 54. - P. 045009.
- 89) Appert K., Hellsten T., Vaclavik J. and Villard L. Textbook finite element methods applied to linear wave propagation problems involving conversion and absorption // *Comput. Phys. Commun.* - 1986. - Vol. 40. - P. 73-93.
- 90) Nazarenko S. On exact solutions for near-wall turbulence theory // *Physics Letters A.* - 2000. - V. 264 - P. 444-448.
- 91) Kim E. and Dubrulle B. Turbulent transport and equilibrium profiles in two-dimensional magnetohydrodynamics with background shear // *Physics of Plasmas.* - 2001. - V. 8. - P. 813.
- 92) Swanson D. G. *Plasma waves* // Boston: Academic Press Inc. - 1989.
- 93) Swanson D.G. Cyclotron absorption and emission in mode conversion layers—a new paradigm // *Mod. Rev. Phys.* - 1995. - Vol. 67. - P. 837.
- 94) Swanson D.G. Exact and moderately relativistic plasma dispersion functions // *Plasma Phys. Control. Fusion.* - 2002. - Vol. 44. - P. 1329.
- 95) Georgiou A. Dispersion relations for electron Bernstein waves in a relativistic plasma // *Plasma Phys. Control. Fusion.* - 1996. - Vol. 38. - P. 347.
- 96) Shkarofsky I.P. Dielectric tensor in Vlasov plasmas near cyclotron harmonics // *Phys. Fluids.* - 1966. - Vol. 9. - P. 561.
- 97) Schmitt J.P.M. The magnetoplasma dispersion function: some mathematical properties // *J. Plasma Physics.* - 1974. - V. 12. - P. 51.
- 98) Bravo-Ortega A., Swanson D.G., Glasser A.H. Asymptotic approximation for the dispersion relation of a hot magnetized plasma // *J. Plasma Physics.* - 1987. - V. 38. - P. 275.
- 99) Gradshteyn I. S. and Ryzhik I. M., *Tables of Integrals, Series, and Products*, 6th Edition // Academic Press, New York, 2000.

- 100) Dykhne A.M. Квантовые переходы в адиабатическом приближении // ЖЭТФ. - 1960. - Т. 38. - С. 570.
- 101) Попов В.С., Переломов А.М. Параметрическое возбуждение квантовых осцилляторов // ЖЭТФ. - 1969. - Т. 56. - С. 1375.
- 102) Khandaker D.C. and Lavande S.V. Exact propagator for a time - dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation // J. Math. Phys. - 1975. - Vol. 16. - P. 384.
- 103) Khandaker D.C. and Lavande S.V. Exact solution of a time-dependent quantal harmonic oscillator with damping and a perturbative force // J. Math. Phys. - 1979. - Vol. 20. - P. 1870.
- 104) Rezende J. Quantum systems with time-dependent harmonic part and the Morse index // J. Math. Phys. - 1984. - Vol. 25. - P. 3264.
- 105) Bateman H. High transcendental functions // MC Graw-Hill Book Company, Inc, 1953.
- 106) Jones B., Taylor G., Efthimion P.C. and Munsat T. Measurement of the Magnetic Field in a Spherical Torus Plasma via Electron Bernstein Wave Emission Harmonic Overlap // Physics of Plasmas. - 2004. - Vol. 11. - P. 1028-1032.
- 107) Allis W. P., Buchsbaum S. J., Bers A. Waves in Anisotropic Plasmas // M.I.T. Press., Cambridge, Massachusetts, 1963.
- 108) Piliya A.D., Tregubova E.N. Linear conversion of electromagnetic waves into electron Bernstein waves in an arbitrary inhomogeneous plasma slab // Plasma Phys. Control Fusion. - 2003. - Vol. 45. - P. 143-154.
- 109) Piliya A.D. Parametric decay in inhomogeneous plasmas // Proc. 10th Conf. on Phenomena in Ionized Gases (Oxford, UK, 13–18 September 1971) ed R N Franklin (Oxford: Donald Parsons). – 1971. – P. 320.
- 110) Perkins F. W. and Flick J. Parametric Instabilities in Inhomogeneous Plasmas // Phys. Fluids. – 1971. – Vol. 14. – P. 2012.
- 111) Rosenbluth M. N. Parametric Instabilities in Inhomogeneous Media // Phys. Rev. Lett. – 1972. – Vol. 29. – P. 565.
- 112) Rosenbluth M. N., White R. B., and Liu C. S. Temporal Evolution of a Three-Wave Parametric Instability // Phys. Rev. Lett. – 1973. – Vol. 31. – P. 1190.
- 113) Пилия А.Д. Нестационарная теория параметрической неустойчивости в слабо неоднородной плазме // ЖЭТФ. - 1973 – Т.64. - С.1237.
- 114) Pesme D., Laval G., and Pellat R. Parametric Instabilities in Bounded Plasmas // Phys.Rev.Lett.- 1973 – Vol. 31 – P. 203.
- 115) Горбунов Л.М. Развитие параметрической неустойчивости в ограниченной области пространства // ЖЭТФ. - 1974. - Т. 67. - С. 1386.

- 116) Захаров В.Е., Манаков С.В. Теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейной среде // ЖЭТФ. – 1975. – Т. 69. – С. 1654.
- 117) Reiman A. Space-time evolution of nonlinear three-wave interactions. II. Interaction in an inhomogeneous medium // Rev. Mod. Phys. – 1979. – Vol. 51. P. 311.
- 118) Porkolab M., Cohen B.I. Parametric instabilities associated with intense electron cyclotron heating in the MTX tokamak // Nucl. Fusion. - 1988. - Vol. 28. - P. 239.
- 119) Cohen B.I., Cohen R.H., Nevins W.M. and Rognlien T.D. Theory of free-electron-laser heating and current drive in magnetized plasmas // Rev. Mod. Phys. – 1991. – Vol. 63. – P. 949.
- 120) Litvak A.G., Sergeev A.M., Suvorov E.V. et al. On nonlinear effects in electron cyclotron resonance plasma heating by microwave radiation // Phys. Fluids B. - 1993. - Vol. 5. - P. 4347.
- 121) McDermott F.S., Bekefi G., Hackett K.E. et al. Observation of the parametric decay instability during electron cyclotron resonance heating on the Versator II tokamak // Phys. Fluids. - 1982. - Vol. 25. - P. 1488.
- 122) Булыгинский Д.Г., Дьяченко В.В., Ирзак М.А., Ларионов М.М., Левин Л.С., Серебрянный Г.А. и Шустова Н.В. Нелинейные явления при ЭЦ-нагреве плазмы в токамаке ФТ-1 // Физика плазмы. - 1986. - Т. 12. - Стр. 138.
- 123) Laqua H.P., Erckmann V., Hartfuß H.J. et. al. Resonant and Nonresonant Electron Cyclotron Heating at Densities above the Plasma Cutoff by O-X-B Mode Conversion at the W7-AS Stellarator // Phys. Rev. Lett. - 1997. -Vol. 78. - P. 3467.
- 124) Gusakov E.Z. and Surkov A.V., Induced backscattering in an inhomogeneous plasma at the upper hybrid resonance // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2007. - Vol. 49 - P. 631–639.
- 125) Rapisarda D., Zurro B., Tribaldos V. et. al. The role of a fast ion component on the heating of the plasma bulk // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2007. - Vol. 49. - P. 309.
- 126) Karpushov A.N., Duval B.P., Goodman T.P. et.al. // Proceedings of the 33rd EPS Conference on Plasma Physics, Rome, Italy, Rome, 19 - 23 June, 30I. - 2006. - P–1.152.
- 127) Oosterbeek J.W., Burger A., Westerhof E. et al. Heat pulse propagation studies around magnetic islands induced by the Dynamic Ergodic Divertor in TEXTOR // Rev. Sci. Instrum. - 2008. - V. 79. - P. 093503.
- 128) Westerhof E., Nielsen S., Oosterbeek J. W. et. al. Strong scattering of high power millimeter waves in tokamak plasmas with tearing modes // Phys. Rev. Lett. - 2009. - Vol. 103. - P. 125001.
- 129) Kantor M.Yu., Donne A.J.H., Jaspers R. et. al. Thomson scattering system on the TEXTOR tokamak using a multi-pass laser beam configuration // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2009. - Vol. 51. - P. 055002.

- 130) Kantor M.Yu., Bertschinger G., Bohm P., et. al. // Proceedings of the 36th EPS and Plasma Phys. Sofia, Bulgaria, June 29 - July 3, 2009. - 2009. - ECA Vol. 33D. - P1.184.
- 131) Piliya A.D. Saveliev A.N. High-order ion Bernstein waves in a non-uniform magnetic field // Plasma Phys. Control. Fusion. -1994. - V. 36. - P. 2059.
- 132) Гусаков Е.З., Федоров В.И. О распадных неустойчивостях в неоднородной плазме при наличии запертых колебаний // Физика плазмы. - 1979. - Т. 5. - С. 827.
- 133) Силин В.П.. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму // «Наука» Москва. - 1973.
- 134) Karney C.F.F. and Bers A. Stochastic ion heating by a perpendicularly propagating electrostatic wave // Phys. Rev. Lett. - 1977. - V. 39. - P. 550-554.
- 135) Andreev V.F., Dnestrovskij Yu.N., Ossipenko M.V. et. al. The ballistic jump of the total heat flux after ECRH switching on in the T-10 tokamak // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2004. - V. 46. - P. 319.
- 136) Jha R., Kaw P. K., Mattoo S.K. et al. Intermittency in tokamak edge turbulence // Phys. Rev. Lett. - 1992. - Vol. 69. - P. 1375.
- 137) Benkadda S., Dudok de Wit T., Verga A. et. al. Characterization of Coherent Structures in Tokamak Edge Turbulence // Phys. Rev. Lett. - 1994. - Vol. 73. - P. 3403.
- 138) Carreras B.A., Milligen B.V., Pedrosa M.A. et. al. Long-Range Time Correlations in Plasma Edge Turbulence // Phys. Rev. Lett. - 1998. -Vol. 80. - P. 4438.
- 139) Saveliev A.N. Simple and accurate approximate relativistic dispersion relation for electron Bernstein waves // Plasma Phys. Control. Fusion. -2007. -Vol. 49. -P.1061.
- 140) Decker J. and Ram A. Relativistic description of electron Bernstein waves // Phys. Plasmas. - 2006. -Vol. 13. - P. 112503.
- 141) Coda S., Klimanov I., Alberti S. et. al. The effect of ECRH on the electron velocity distribution function // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2006. - Vol. 48. - P. B359.
- 142) Karpushov A.N., Coda S. and Duval B.P. Observations of suprathermal ions in the TCV during ECH and ECCD// Proc. 30th EPS Conf. on Plasma Physics (St. Petersburg). - 2003. -Vol 27A. - P-3.123.
- 143) Nielsen S.K., Salewski M., Westerhof E. et. al. Experimental characterization of anomalous strong scattering of mm-waves in TEXTOR plasmas with rotating islands // Plasma Phys. Control. Fusion. - 2013. - Vol. 55. - P. 115003.
- 144) Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др. Электродинамика плазмы // Наука, Москва. 1974.
- 145) Kroll N.M. Excitation of Hypersonic Vibrations by Means of Photoelastic Coupling of High-Intensity Light Waves to Elastic Waves // J. Applied. Phys. - 1965. - Vol. 36. - P. 34.

- 146) Ковалев В.Ф., Пустовалов В.В., Романов А.Б. и др. Насыщение параметрической турбулентности перекачкой энергии в мелкомасштабные возмущения // Препринт ФИАН. - 1975. - №177.
- 147) Ковалев В.Ф., Пустовалов В.В., Романов А.Б., Савченко М.А., Тихончук В.Т. О перекачке энергии в коротковолновую область при параметрической турбулентности магнитоактивной плазмы // Письма в ЖТФ. - 1975. - С. 1009-1013.
- 148) Кольчугина И.А., Литвак А.Г., Хазанов И.В. Многоволновое распадное взаимодействие // Письма в ЖЭТФ. – 1975. - Т.21. – С. 321.
- 149) Петникова В.М., Шувалов В.В. Нелинейное уравнение Шредингера и многокомпонентные кноидальные волны в процессах параметрического преобразования частоты// Квантовая Электроника. - 2007 - Т. 37. - С. 266.
- 150) Петникова В.М., Шувалов В.В. Многокомпонентные кноидальные волны при каскадном параметрическом преобразовании частоты // Квантовая Электроника. - 2008 - Т. 38. - С. 1135-1141.
- 151) Петникова В.М., Шувалов В.В. Эффективная кубическая нелинейность, фотоиндуцированная анизотропия и эллиптически поляризованные кноидальные волны при удвоении частоты// Квантовая Электроника. - 2009 - Т. 39. - С. 1137.
- 152) Nielsen S.K. et. al. Modification of the collective Thomson scattering radiometer in the search for parametric decay on TEXTOR // Rev. Sci. Instrum. - 2012. - Vol. 83. - P. 113508.