

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе
Российской академии наук

На правах рукописи

Олег Анзорович Гогличидзе

**Эволюция угла между магнитным моментом
и осью вращения радиопульсаров**

01.03.02 – Астрофизика и звёздная астрономия

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., проф.
Анатолий Иванович Цыган

Санкт-Петербург – 2016

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Инерция электромагнитного поля и аномальный электромагнитный момент	8
1.1. Введение к главе 1	8
1.2. Инерция поля ближней зоны	11
1.3. Эффективный тензор инерции	24
1.4. Уравнения движения	26
1.5. Основные результаты главы 1	36
Глава 2. Эволюция вращения нейтронных звёзд с учётом диссипации энергии в ядре	37
2.1. Введение к главе 2	37
2.2. Простейшая модель с диссипацией энергии	39
2.3. Квазистационарное приближение	42
2.4. Уравнения движения	45
2.5. Основные результаты главы 2	48
Глава 3. Вращение нейтронных звёзд с незамагниченным ядром	49
3.1. Введение к главе 3	49
3.2. Основные предположения	50
3.3. Экмановская накачка	54
3.4. Эффекты градиента химического состава	60
3.5. Эффекты сверхтекучести нейтронов	66
3.6. Эволюция угла наклона	72
3.7. Основные результаты главы 3	77
Глава 4. Вращение нейтронных звёзд с замагниченным ядром	78
4.1. Введение к главе 4	78
4.2. Основные предположения	79
4.3. Эволюция угла наклона	88
4.4. Основные результаты главы 4	91

Заключение	92
Список сокращений и условных обозначений	94
Список литературы	95
Приложение А. Шаровые векторы	104
Приложение Б. Сверхтекучесть	108
Приложение В. Свободное вращение асимметричного волчка	116

Введение

Актуальность темы исследования

Радиопульсары — космические источники периодического импульсного радиоизлучения. Периоды сигналов P , принимаемых от радиопульсаров, лежат в диапазоне от единиц миллисекунд до примерно десяти секунд [1]. Считается, что радиопульсары представляют собой быстро вращающиеся нейтронные звёзды, а радиоизлучение генерируется неким когерентным механизмом в их магнитосфере. Импульсный характер излучения объясняется моделью маяка: предполагается, что радиоизлучение генерируется только в областях над магнитными полюсами, является узконаправленным и наблюдается только тогда, когда вращающийся вместе со звездой луч попадает на наблюдателя.

Нейтронные звёзды чрезвычайно компактны и, по всей видимости, обладают колоссальными магнитными полями. Благодаря этим свойствам изучение нейтронных звёзд оказывается важным для фундаментальной физики, так как может позволить устанавливать ограничения на различные теории вещества в экстремальных условиях, не достижимых в земных лабораториях. Речь идёт как о свойствах сверхплотного вещества (плотность в центральной области может в несколько раз превосходить ядерную плотность $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14}$ г/см³), так и о различных процессах в сверхсильных магнитных полях (значения магнитной индукции на поверхности могут достигать $10^{13} - 10^{15}$ Гс). К настоящему моменту предложено несколько способов получения информации о свойствах вещества нейтронных звёзд на основе их наблюдаемых характеристик и эволюционного поведения. Например, уравнение состояния сверхплотного вещества задаёт соотношение между массой и радиусом нейтронных звёзд [2], а также во многом определяет темп их остывания [3]. Кроме того, теория внутреннего устройства нейтронных звёзд необходима для объяснения таких явлений, как глитчи (скачкообразные уменьшения периода вращения пульсара с последующей плавной релаксацией) [4–6].

Помимо внутреннего устройства крайне интересным является вопрос о структуре магнитосферы пульсаров и протекающих в ней процессах. Как уже упоминалось, считается, что радиоизлучение пульсаров генерируется в областях магнитосферы, располагающихся над магнитными полюсами звезды. Однако, несмотря на ясное понимание того, что радиоизлучение пульсара имеет когерентный характер, конкретный механизм его генерации до сих пор неизвестен [7, 8]. Другим наблюдательным проявлением магнитосферы является эволюция вращения пульсаров. Ясно, что обладая сильным магнитным полем и вра-

щаяся, нейтронная звезда должна излучать электромагнитные волны и, следовательно, терять вращательную энергию. Наиболее очевидным механизмом такой потери является магнито-дипольное излучение. Несмотря на то, что классическая формула для мощности магнито-дипольного излучения активно используется наблюдателями для определения величины магнитного поля пульсаров, наличие магнитосферы, заполненной плазмой, делает её применимость не очевидной. Существуют аргументы в пользу того, что магнито-дипольные потери могут вовсе отсутствовать [9, 10]. Это, впрочем, не означает, что пульсар не будет замедляться. Наличие плазмы создаёт дополнительные механизмы потери вращательной энергии, которые в большинстве случаев имеют мощность, совпадающую по порядку величины с мощностью магнито-дипольного излучения. Магнитное поле не только является причиной замедления вращения звезды, но заставляет её прецессировать, а также приводит к изменению со временем угла между магнитным моментом и осью вращения (угла наклона) [11, 12]. Эти процессы слишком медленные для прямого наблюдения (см., однако, работу Лайна и соавторов [13]), но могут быть исследованы статистическими методами, если имеется достаточное количество данных о пульсарах, находящихся на различных стадиях эволюции. Ситуация осложняется тем, что если на торможение звезды оказывает влияние практически исключительно дипольная компонента магнитного поля, то на прецессию может в равной степени оказывать влияние мелкомасштабное поле, на наличие которого на поверхности нейтронных звёзд указывают результаты теоретических исследований и данных наблюдений [14–22].

Цели и задачи диссертационной работы

Целью данной диссертационной работы являлось исследование влияния мелкомасштабных магнитных полей на прецессию нейтронных звёзд, а также изучение вопроса о влиянии диссипации энергии в ядрах нейтронных звёзд на эволюцию их вращения. Для достижения этих целей в работе были поставлены следующие задачи:

1. Вычисление аномальной компоненты электромагнитного момента сил, действующего на нейтронную звезду, создаваемой произвольной полоидальной и тороидальной гармониками магнитного поля.
2. Вывод системы уравнений, описывающих эволюцию вращения нейтронных звёзд с учётом диссипации вращательной энергии в их ядрах.
3. Вычисление коэффициентов взаимодействия коры и ядра в рамках конкретных моделей внутреннего устройства нейтронных звёзд с немагнитным и намагнитным

ядром.

4. Количественное моделирование эволюции вращения нейтронных звёзд.

Научная новизна

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем:

1. Впервые получено выражение для аномальной компоненты электромагнитного момента сил, создаваемого произвольной полоидальной и тороидальной гармониками магнитного поля, учитывающее магнитосферу и структуру магнитного поля внутри нейтронной звезды.
2. Впервые исследована эволюция вращения нейтронных звёзд (угловой скорости, угла наклона и прецессии) под действием электромагнитного момента сил с учётом дифференциальности вращения вещества в их ядрах.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации важны, поскольку устанавливают взаимосвязь между внутренним устройством нейтронных звёзд и темпами эволюции их вращения. При наличии достоверных статистических данных о темпах эволюции это может позволить устанавливать ограничения на модели внутреннего устройства нейтронных звёзд.

Положения, выносимые на защиту

1. Вычисление аномальной компоненты момента сил, действующего на нейтронную звезду, создаваемого произвольной гармоникой магнитного поля, с учётом магнитосферы, заполненной плазмой, и структуры магнитного поля внутри звезды.
2. Моделирование эволюции угла между магнитным моментом и осью вращения нейтронных звёзд с немагнитным ядром.
3. Моделирование эволюции угла между магнитным моментом и осью вращения нейтронных звёзд в предположении, что заряженная компонента ядра жёстко связана с корой магнитным полем.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты, представленные в диссертации, получены аналитически и с помощью численного интегрирования. Их достоверность подтверждается использованием адекватных математических и численных методов в рамках физически разумных приближений.

Результаты диссертации доложены на следующих конференциях: Физика А.СПб (Санкт-Петербург, 2011); Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра 2011 (Москва, 2011); Electromagnetic Radiation from Pulsars and Magnetars (Zielona Gora, Poland, 2012); Физика А.СПб (Санкт-Петербург, 2012); Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра 2012 (Москва, 2012); The Modern Physics of Compact Stars and Relativistic Gravity (Yerevan, Armenia, 2013); Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра 2013 (Москва, 2013); Physics of Neutron Stars – 2014 (Санкт-Петербург, 2014); Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра 2014 (Москва, 2014).

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 7 статьях [23–29], а также в тезисах ряда конференций.

Личный вклад автора.

Во всех результатах, представленных в диссертации, вклад автора является основным и определяющим. Выбор общего направления исследований, постановка задач, обсуждение полученных результатов, а также часть аналитических выводов были выполнены совместно с соавторами.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, библиографии и 3 приложений. Общий объем диссертации 118 страниц, включая 24 рисунка. Библиография включает 121 наименование.

Инерция электромагнитного поля и аномальный электромагнитный момент

1.1. Введение к главе 1

Если предположить, что при коллапсе звезды-прародителя радиуса $r_p \sim r_\odot \approx 7 \times 10^5$ км, обладающей магнитным полем $B_p \sim 1 \div 10^3$ Гс, магнитный поток сохраняется, то магнитная индукция на поверхности новорожденной нейтронной звезды (типичный радиус которой $r_* \sim 10$ км) окажется равной

$$B_* \sim \frac{r_p^2}{r_*^2} B_p = 10^{10} - 10^{13} \text{ Гс.} \quad (1.1)$$

Подобные рассуждения, однако, являются несколько наивными. В новорожденной нейтронной звезде развиваются различные гидродинамические неустойчивости и возникает турбулентность [20]. Магнитное поле нейтронной звезды на этом этапе, по всей видимости, генерируется посредством механизма турбулентного динамо [30]. Поле же коллапсирующей звезды, таким образом, является лишь затравочным и само по себе не позволяет оценить величину магнитного поля новорожденной нейтронной звезды.

Тем не менее существует ряд наблюдательных фактов, свидетельствующих в пользу магнитных полей, согласующихся с оценкой (1.1). Нейтронные звёзды, входящие в тесные двойные системы и проявляющие себя, как рентгеновские пульсары, имеют спектральные детали, которые могут быть отождествлены с циклотронными линиями. Если эта интерпретация верна, то для источника Her X-1 величина магнитного поля на поверхности составит $B = 5.3 \times 10^{12}$ Гс [31], для источника 4U 0115+63 – $B = 1.8 - 2.5 \times 10^{12}$ Гс [32]. Кроме того, если предположить, что замедление вращения нейронных звезд связано с генерируемым ими магнито-дипольным излучением, уносящим угловой момент, величину магнитного поля можно оценить, воспользовавшись формулой [33]

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{1}{6} \frac{B_0^2 r_*^6 \Omega^3}{c^3 I_*} \sin^2 \chi, \quad (1.2)$$

где $\Omega = 2\pi/P$ – угловая скорость вращения, $B_0 = 2m/r_*^3$ – магнитная индукция на магнитных полюсах, m – магнитный момент звезды, I_* – её момент инерции, χ – угол между осью вращения и магнитным моментом (угол наклона пульсара). Выражая отсюда B_0 и подставляя в формулу характерные для нейтронных звезд параметры, мы вновь получаем

магнитное поле порядка $B_0 \sim 10^{12}$ Гс. Здесь, однако, стоит сделать два замечания. Во-первых, строго говоря, с помощью этого выражения мы можем оценить только величину $B_0 \sin \chi$, или, другими словами, для измерения нам доступна только перпендикулярная к оси вращения составляющая магнитного момента. Впрочем, для не слишком малых углов χ мы получаем правильную по порядку величины оценку. Во-вторых, выражение (1.2) справедливо для магнитного диполя, вращающегося в вакууме. Его применимость для нейтронных звёзд, окружённых протяжённой плазменной магнитосферой [34] не является самоочевидной. Однако за последние пятнадцать лет были опубликованы результаты целого ряда работ по моделированию пульсарных магнитосфер [35–38], в которых было показано, что хотя, строго говоря, выражение (1.2) и не является верным для радиопульсаров, оно в большинстве случаев даёт правильный порядок величины при оценке магнитного поля.

Помимо величины поля не менее важным является вопрос о его структуре. Довольно быстро стало понятно, что чисто дипольная структура не позволяет объяснить имеющиеся наблюдательные данные. По мере развития теории и наблюдений стало появляться всё больше свидетельств в пользу того, что вблизи поверхности звезды поле может иметь довольно сложную структуру. У некоторых пульсаров оценки величины магнитного поля, полученные разными способами могут существенно различаться. Например, особенность в спектре миллисекундного пульсара В1821+24, располагающаяся чуть выше 3 кэВ, если её интерпретировать как электронную циклотронную линию, соответствует магнитному полю $\approx 3 \times 10^{11}$ Гс [14]. В тоже время оценка величины магнитного поля, полученная с использованием темпа замедления даёт величину поля всего 4.6×10^9 Гс. Гамма пульсар 1E 1207.4-5209 имеет две особенности вблизи 0.7 и 1.4 кэВ [15]. Они интерпретируются авторами наблюдений, как линии, соответствующие атомным переходам однократно ионизованного гелия в атмосфере нейтронной звезды. Это даёт величину магнитного поля $\approx 1.5 \times 10^{14}$ Гс. Согласно другой интерпретации эти особенности являются циклотронными линиями ядер водорода и гелия в магнитном поле 2.2×10^{14} Г или нейтрального и однократно ионизованного ядра гелия в магнитном поле 4.4×10^{14} Гс. При этом оценка по темпу замедления даёт поле $\approx 3 \times 10^{12}$ Гс. Такое несоответствие может говорить о наличии на поверхности нейтронных звёзд сильных мелкомасштабных магнитных полей, возможно, в 10-100 раз превосходящих по величине дипольное поле. Такие поля очень быстро спадают с расстоянием и фактически не участвуют в торможении звезды, но при этом именно они определяют свойства вещества вблизи самой поверхности. Наблюдаемая у некоторых ней-

тронных звёзд асимметрия расположения горячих пятен может быть объяснена наличием квадрупольной компоненты магнитного поля [16–18].

Модель частичного экранирования электрического поля, развиваемая группой Януша Гиля [19] и достигшая в настоящий момент наибольших успехов в объяснении явления дрейфа субимпульсов, требует кривизны силовых линий порядка $\sim 10^6$ см, что на два порядка меньше, чем кривизна силовых линий дипольного магнитного поля нейтронных звёзд. Кроме того эта модель предполагает, что величина поля на поверхности составляет $10^{13} - 10^{14}$ Гс, что на один-два порядка больше типичных полей радиопульсаров. Таким образом, данная модель, по всей видимости, может быть верна только при наличии на поверхности нейтронных звёзд сильным мелкомасштабных полей.

Мелкомасштабные магнитные поля могут генерироваться в приповерхностных слоях на стадии протонейтронной звезды в процессе работы механизма турбулентного динамо [20]. Практически сразу после остановки динамо звезда становится достаточно холодной для того, чтобы началась кристаллизация коры. В результате мелкомасштабные поля оказываются замороженными в кору, где ввиду её очень хорошей электрической проводимости могут существовать достаточно долго. Расчёты показывают, что поля с характерным масштабом 1 – 3 км могут выживать на временных масштабах 10 – 100 миллионов лет [20, 39]. Более того, мелкомасштабные структуры могут образовываться в коре на протяжении всей жизни нейтронной звезды в результате развития неустойчивостей, связанных с Холловским дрейфом [21, 22].

Как уже упоминалось, в генерации дипольного излучения пульсаров участвует крупномасштабное магнитное поле. Вклад гармоник выше дипольной в потерю вращательной энергии незначителен. Однако мелкомасштабные поля могут оказывать существенное влияние на динамику вращения радиопульсаров. Помимо магнито-дипольного механизма потери вращательной энергии, радиопульсары могут замедлять своё вращение под действием так называемого токового механизма, величина которого пропорционально силе продольных (текущих вдоль магнитных силовых линий) токов в магнитосфере. В работе Барсукова, Поляковой и Цыгана [40] было показано, что наличие мелкомасштабных аномалий на поверхности звезды может приводить к существенной модуляции этих токов в течение периода прецессии. Такая модуляция, в свою очередь, меняет закон эволюции вращения и способна, в частности, порождать равновесные углы наклона. Другой механизм, в рамках которого мелкомасштабное поле может влиять на динамику вращения пульсаров наравне с крупномасштабным дипольным полем – прецессия звезды, вызываемая инерци-

ей магнитного поля. Этому эффекту посвящена первая глава диссертации.

1.2. Инерция поля ближней зоны

Запишем уравнение баланса углового момента для нейтронной звезды в следующем виде:

$$d_t \mathbf{M}_* + d_t \mathbf{M}_f = \mathbf{K}_L. \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{M}_* – момент импульса звезды, \mathbf{M}_f – момент импульса поля, содержащийся внутри сферы радиуса $r_L = c/\Omega$, \mathbf{K}_L – поток момента импульса вовнутрь этой сферы¹. Момент импульса поля может быть вычислен с помощью формулы [33]

$$\mathbf{M}_f = \frac{1}{4\pi c} \int_{r < r_L} \mathbf{r} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] d^3 r. \quad (1.4)$$

Высокая проводимость вещества нейтронной звезды приводит к тому, что электрическое поле внутри вращающейся звезды связано с магнитным полем соотношением

$$\mathbf{E} = -\frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]}{c} \times \mathbf{B}. \quad (1.5)$$

фактически означающим отсутствие электрического поля во вращающейся вместе со звездой системе отсчёта [33]. Будем предполагать, что нейтронная звезда окружена магнитосферой, заполненной плазмой. Будем считать, что высокая продольная проводимость магнитосферы в совокупности с эквипотенциальностью поверхности звезды согласно модели Голдрайха-Джулиана [34] приводит к тому, что соотношение (1.5) справедливо не только внутри звезды, но и по крайней мере вплоть до расстояний r_L .

Введём малый параметр $\varepsilon = (\Omega r_*/c)$ и разложим по нему электрическое и магнитное поля:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots \quad (1.6)$$

Здесь нижний индекс обозначает степень ε . Поля \mathbf{B}_0 , \mathbf{E}_0 представляют собой магнитное и электрические поля невращающейся звезды, остальные члены разложения являются

¹ Обычно под величиной r_L понимают радиус так называемого светового цилиндра (цилиндра на поверхности которого скорость вращения формально сравнивается со скоростью света), измеряя при этом расстояние от оси вращения. Нам однако же удобнее будет работать в сферической геометрии. Это не должно создать никаких сложностей, поскольку очевидно, что все допущения, разумные внутри светового цилиндра будут таковыми и внутри сферы, вписанной в этот цилиндр.

поправками к \mathbf{B}_0 и \mathbf{E}_0 , возникающими из-за вращения. Мы будем предполагать, что вращение является единственным источником электрических токов в магнитосфере. Следовательно, поле \mathbf{B}_0 вне звезды должно быть вакуумным (удовлетворяющим уравнению $\text{rot } \mathbf{B}_0 = 0$).

Электрическое поле невращающейся звезды \mathbf{E}_0 будем считать пренебрежимо малым, так как звезда не заряжена и является очень хорошим электрическим проводником. Говоря о малости, мы имеем ввиду, что

$$E_0 \ll \frac{\Omega r}{c} B_0. \quad (1.7)$$

В самом деле, если звезда не вращается, наибольшее электрическое поле имеет место в её коре, вблизи поверхности (там где проводимость наихудшая). Электрическое поле коры, связано с магнитным полем уравнением [41]

$$\mathbf{E}_0 = \frac{c}{4\pi\sigma_{\parallel}} (\text{rot } \mathbf{B}_0 - \omega_B \tau_r [\mathbf{e}_B \times \text{rot } \mathbf{B}_0]), \quad (1.8)$$

где σ_{\parallel} – продольная проводимость, ω_B – электронная ларморовская частота, τ_r – электронное время релаксации, $\mathbf{e}_B = \mathbf{B}_0/B_0$. С помощью этого уравнения, условие (1.7) можно переписать в виде

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma_{\parallel}} \frac{\omega_B \tau_r}{r_* \ell_B \Omega} \ll 1, \quad (1.9)$$

где ℓ_B – характерный масштаб изменения магнитного поля. Легко убедиться, что это условие с огромным запасом выполняется для любых разумных значений параметров: $\sigma_{\parallel} = 10^{18} - 10^{23} \text{ s}^{-1}$ [42], $\omega_B \tau_r = 1 - 10^3$ [41], $\ell_B = r_* - 0.01r_*$. Что касается магнитосферы, мы автоматически положили $\mathbf{E}_0 = 0$, предположив, что вне звезды справедливо уравнение $\text{rot } B_0 = 0$.

Внутри сферы радиуса r_L величина магнитного поля спадает с расстоянием примерно как r^{-3} . Следовательно, электрическое поле, согласно соотношению (1.5), спадает примерно как r^{-2} . Таким образом, основной вклад в интеграл (1.4) даёт поле вблизи поверхности звезды. В этой области поправки к \mathbf{B}_0 , вызванные вращением звезды малы [43]. Это означает, что если разложить подынтегральное выражение в формуле (1.4) в ряд по параметру ε , достаточно будет оставить только первый член:

$$\mathbf{M}_f \approx \frac{1}{4\pi c} \int_{r < r_L} \mathbf{r} \times [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0] d^3 r. \quad (1.10)$$

Выражая \mathbf{E}_1 через \mathbf{B}_0 с помощью соотношения (1.5), формулу (1.10) можно переписать в

следующем виде:

$$\mathbf{M}_f = \frac{1}{c^2} \int_0^{r_L} \langle B_n^2 \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{B}_n) \mathbf{B}_n + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{B}_t) \mathbf{B}_t \rangle_r r^4 dr, \quad (1.11)$$

где мы ввели нормальную $\mathbf{B}_n = (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{r})/r$ и тангенциальную $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_n$ компоненты поля \mathbf{B}_0 , а также обозначили через $\langle \rangle_r$ операцию усреднения по сфере радиуса r . Таким образом, для того, чтобы вычислить с хорошей точностью момент импульса, запасённый в поле внутри сферы радиуса r_L , нам достаточно знать только структуру магнитного поля, вычисленную в приближении невращающейся звезды.

Производная этого момента по времени фактически равняется

$$d_t \mathbf{M}_f = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M}_f]. \quad (1.12)$$

Учитывая то, что основное количество момента импульса поля находится вблизи звезды и используя формулы (1.12), (1.10) и (1.5) можно получить следующую оценку для этой производной:

$$d_t \mathbf{M}_f \sim \varepsilon^2 B_*^2 r_*^3, \quad (1.13)$$

где B_* – типичное значение магнитного поля на поверхности. Поток момента импульса \mathbf{K}_L можно вычислить с помощью формулы [33]

$$\mathbf{K}_L = r_L^3 \langle (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E})[\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}] + (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{B})[\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}] \rangle_{r_L}. \quad (1.14)$$

Учитывая, что $B \sim B_*(r_*/r_L)^3$ и на расстояниях порядка r_L электрическое поле $E \sim B$, величину \mathbf{K}_L можно оценить как

$$K_L \sim \varepsilon^3 B_*^2 r_*^3. \quad (1.15)$$

Таким образом, поток содержит в себе лишнюю степень малого параметра ε . Следовательно, с точностью до ε^2 справедливым будет соотношение

$$d_t \mathbf{M}_* \approx -[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M}_f] = \mathbf{K}_\perp, \quad (1.16)$$

где вектор \mathbf{K}_\perp может быть интерпретирован, как момент сил, действующий на нейтронную звезду [44].

Полученное выражение – самая большая компонента электромагнитного момента сил, действующего на нейтронную звезду. Прочие компоненты этого вектора, перпендикулярные к \mathbf{K}_\perp и представляющие собой сумму вектора \mathbf{K}_L и следующих членов разложения $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M}_f$, содержат как минимум одну дополнительную степень малого параметра

ε . В частности, множитель ε содержит момент, связанный с магнито-дипольным излучением звезды. Таким образом, момент сил \mathbf{K}_\perp “аномально” большой. Именно поэтому он в литературе иногда называется аномальным моментом сил.

Произвольное магнитное поле может быть представлено в виде [45]

$$\mathbf{B}_0 = -\nabla \times [\mathbf{r} \times \nabla \Phi] - \mathbf{r} \times \nabla \Psi, \quad (1.17)$$

где функции Φ и Ψ описывают полоидальное и тороидальное поля соответственно. Если ввести зафиксированный в звезде ортонормированный базис $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ и связанную с ним сферическую систему координат (r, θ, ϕ) , функции Φ и Ψ могут быть представлены в виде рядов сферических функций:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \sum_{l,m} \Phi_{lm} R_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (1.18)$$

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \sum_{l,m} \Psi_{lm} S_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (1.19)$$

где для краткости мы обозначили

$$\sum_{l,m} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l. \quad (1.20)$$

Здесь мы разделяем амплитуды Φ_{lm} и Ψ_{lm} и радиальные функции, нормируя последние таким образом, чтобы функции $R_{lm}(r)$ равнялись единице на поверхности звезды, а функции $S_{lm}(r)$ равнялись единице в собственном максимуме. Радиальные функции могут также зависеть от времени, если мы хотим учитывать эволюцию магнитного поля. Подставляя эти разложения в выражение (1.17), произвольное магнитное поле можно представить в виде суммы сферических гармоник. Удобнее будет написать такое разложение отдельно для нормальной и тангенциальной компонент, воспользовавшись при этом формализмом шаровых векторов (см. приложение А):

$$\mathbf{B}_n = \sum_{l,m} l(l+1) \Phi_{lm} \frac{R_{lm}}{r^2} \mathbf{Y}_{lm}^{(-1)} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{B}_t = \sum_{l,m} \sqrt{l(l+1)} \left\{ \Phi_{lm} \frac{1}{r} \frac{dR_{lm}}{dr} \mathbf{Y}_{lm}^{(1)} - i \Psi_{lm} \frac{1}{r} \frac{dS_{lm}}{dr} \mathbf{Y}_{lm}^{(0)} \right\} \quad (1.22)$$

Напомним, что вне звезды поле \mathbf{B}_0 должно переходить в вакуумное магнитное поле, т.е.

$$R_{lm} = (r^*/r)^l \quad (1.23)$$

при $r > r_*$. Требование непрерывности тангенциальной компоненты поля даёт граничное условие

$$\frac{d}{dr}R_{lm}(r_*) + \frac{l}{r_*}R_{lm}(r_*) = 0, \quad (1.24)$$

Для формулирования граничного условия для тороидального поля запишем выражение для порождающего его тока:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \sum_{l,m} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r S_{lm}) \nabla Y_{lm} - \frac{l(l+1)}{r^2} S_{lm} Y_{lm} \mathbf{e}_r \right\} \quad (1.25)$$

Для того, чтобы радиальный ток исчезал на поверхности звезды, должно выполняться граничное условие

$$S_{lm}(r_*) = 0, \quad (1.26)$$

фактически означающее, исчезновение на поверхности тороидального поля.

Для того, чтобы оценить вклад полей различных масштабов, вычислим угловой момент \mathbf{M}_f для произвольной полоидальной гармоник, пропорциональной $\cos(m\phi)$ (которая может быть получена, как сумма Y_{lm} и $Y_{l,-m}$ гармоник). Если $m \neq 1$, результат может быть представлен виде

$$\mathbf{M}_f = I_f \boldsymbol{\Omega} + \delta I_f \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\Omega}), \quad (1.27)$$

где

$$I_f = \frac{r_*^4 \langle B^2 \rangle_{r_*}}{c^2} \frac{(l+1)}{(2l+3)(2l+1)(2l-1)} \times \quad (1.28)$$

$$\left\{ \frac{2l^4 + 4l^3 - l^2 - 3l + m^2(2l^2 + 2l + 3)}{2l^2(l+1)^2} \int_0^{r_L} \left(r \frac{dR_{lm}}{dr} \right)^2 dr + (3l^2 + 3l - m^2 - 2) \int_0^{r_L} R_{lm}^2 dr \right\}$$

и

$$\delta I_f = \frac{r_*^4 \langle B^2 \rangle_{r_*}}{c^2} \frac{(l+1)(l^2 + l - 3m^2)}{(2l+3)(2l+1)(2l-1)} \left\{ \frac{2l^2 + 2l + 3}{2l^2(l+1)^2} \int_0^{r_L} \left(r \frac{dR_{lm}}{dr} \right)^2 dr - \int_0^{r_L} R_{lm}^2 dr \right\}. \quad (1.29)$$

Здесь амплитуды Φ_{lm} были выражены через средний квадрат индукции поверхностного поля $\langle B^2 \rangle_{r_*}$.

Согласно формуле (1.27) поле может быть описано тремя главными моментами инерции $I^{xx} = I^{yy} = I_f$, $I^{zz} = I_f + \delta I_f$. Эти моменты можно грубо оценить как

$$I_f, I_f + \delta I_f \sim 10^{32} r_6^5 B_{12}^2 \frac{1}{\ell_B^2} \left(\frac{r_*}{\ell_B} \right)^2 \text{ г см}^2, \quad (1.30)$$

где $r_6 = r_*/10^6$ см, $B_{12} = \sqrt{\langle B^2 \rangle_{r_*}}/10^{12}$ Гс, ℓ_B – характерный масштаб изменения магнитного поля. Все эти моменты на много порядков меньше момента инерции звезды $I_* \sim 10^{45}$ г

см². Заметим, что коэффициент δI_f может быть как положительным, так и отрицательным. В дальнейшем будет удобно использовать коэффициент эффективной сплюснутости

$$\epsilon = \frac{\delta I_f}{I_*}. \quad (1.31)$$

Согласно выражению (1.16), аномальный момент будет равен

$$\mathbf{K}_\perp = -\delta I_f (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_z) [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_z]. \quad (1.32)$$

Он может быть направлен как вдоль $[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_z]$, так и в противоположную сторону, в зависимости от знака δI_f . Октупольная гармоника с $m = 2$ не порождает аномального момента вовсе.

Для гармоник с $m = 1$ момент импульса имеет более сложный вид:

$$\mathbf{M}_f = I'_f \boldsymbol{\Omega} + \delta I_{fx} \mathbf{e}_x (\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \delta I_{fy} \mathbf{e}_y (\mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\Omega}), \quad (1.33)$$

где

$$I'_f = \frac{r_*^4 \langle B^2 \rangle_{r_*}}{c^2} \frac{(l+1)}{(2l+3)(2l+1)(2l-1)} \times \left\{ \frac{2l^4 + 4l^3 - 2l - 3}{2l^2(l+1)^2} \int_0^{r_L} \left(r \frac{dR_{lm}}{dr} \right)^2 dr + l(l+1) \int_0^{r_L} R_{lm}^2 dr \right\}, \quad (1.34)$$

$$\delta I_{fx} = \frac{(l-2)(l+3)}{2(l^2+l-3)} \delta I_f, \quad \delta I_{fy} = \frac{3(l-1)(l+2)}{2(l^2+l-3)} \delta I_f. \quad (1.35)$$

Для этих гармоник все три главных момента инерции оказываются различными. В этом случае требуется вводить два параметра эффективной сплюснутости.

Таким образом в общем случае аномальный момент, создаваемый одной произвольной полоидальной гармоникой может быть вычислен с помощью формулы

$$\mathbf{K}_\perp = \frac{r_*^4 \langle B^2 \rangle_{r_*}}{c^2} \frac{(l+1)}{(2l+3)(2l+1)(2l-1)} \left\{ \int_0^{r_L} R_{lm}^2 dr - \frac{2l^2 + 2l + 3}{2l^2(l+1)^2} \int_0^{r_L} \left(r \frac{dR_{lm}}{dr} \right)^2 dr \right\} \mathbf{k}, \quad (1.36)$$

где вектор \mathbf{k} равен

$$\mathbf{k} = \begin{cases} (l^2 + l - 3m^2)(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_z) [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_z] & (m \neq 1) \\ \frac{1}{2}(l-2)(l+3)(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_y) [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_y] + & (m = 1) \\ \quad + \frac{3}{2}(l-1)(l+2)(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_x) [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_x] & \end{cases} \quad (1.37)$$

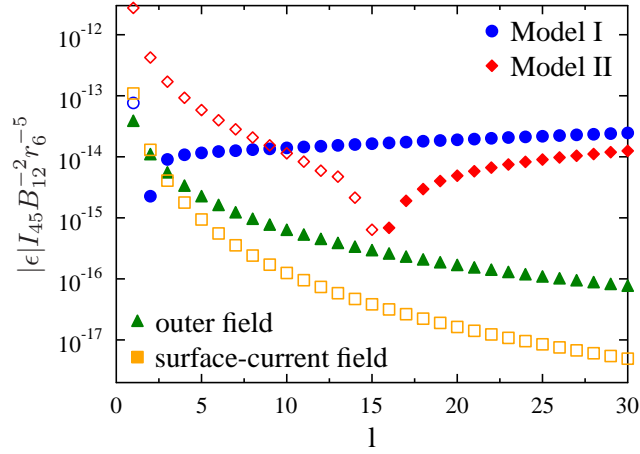


Рис. 1.1. Эффективная сплюснутость различных осесимметричных ($m = 0$) полоидальных гармоник, вычисленная в рамках различных моделей конфигурации магнитного поля. Закрашенные символы соответствуют отрицательным значениям ϵ , не закрашенные – положительным значениям. Для того, чтобы получить величину эффективной сплюснутости, создаваемой не осесимметричной гармоникой, соответствующее значение нужно умножить на $(l^2 + l - 3m^2)/(l^2 + l)$. Здесь $r_6 = r_*/10^6$ см, $I_{45} = I_*/10^{45}$ г см².

Важно обратить внимание, что в качестве нижнего предела интегрирования в выражении (1.36) стоит 0, а не r_* . Таким образом, внутреннее магнитное поле должно учитываться при вычислении аномального момента. Оценим, однако, для начала вклады внешних полей различным масштабам. Подставляя функции (1.23) в выражение (1.36) и интегрируя от r_* до бесконечности, получим

$$\mathbf{K}_{\perp(out)} = \frac{r_*^5 \langle B_*^2 \rangle_{r_*}}{2c^2} \frac{\mathbf{k}}{(2l+3)(2l+1)(2l-1)(l+1)} \quad (1.38)$$

Видно, что величина момента K_{\perp} с ростом l уменьшается примерно как l^{-2} (см. рис. 1.1, модель outer field). Это означает, что мелкомасштабная гармоника, например, с $l = 10$ даёт вклад, сравнимый с дипольным полем, если величина мелкомасштабного магнитного поля на поверхности в десять раз больше величины дипольного поля.

С вкладами внутренних полей дело обстоит сложнее, поскольку в настоящий момент нет единой точки зрения на их структуру [46]. Мы будем считать, что магнитное поле генерируется электрическими токами, текущими в области коры ($r_c < r < r_*$). Выберем функции R_{lm} в этой области в виде

$$R_{lm}^{(c)}(r) = a \left(r j_l(\mu_l r) - \frac{j_{l-1}(\mu_l r_*)}{n_{l-1}(\mu_l r_*)} r n_l(\mu_l r) \right) \quad (1.39)$$

где j_l и n_l – сферические функции Бесселя первого и второго рода, a – нормировочный множитель. Функции (1.39) удовлетворяют граничному условию (1.24). Коэффициенты μ_l

определяются граничным условием на внутренней поверхности коры. Выражения (1.39) представляют собой собственные функции уравнения индукции с постоянной и изотропной проводимостью. Из бесконечного множества коэффициентов μ_l , формально удовлетворяющих граничному условию, для каждого индекса l мы выберем минимальное значение, поскольку оно соответствует наиболее долгоживущей моде.

Рассмотрим две модели внутреннего поля, отличающиеся друг от друга способностью поля проникать в ядро. В *Модели №1* предполагается, что поле коры продолжается в ядро как потенциальное. Согласно *Модели №2* магнитное поле не проникает в ядро вовсе (см. две первых колонки на рис. 1.2). *Модель №1* соответствует ядру в нормальном состоянии, в то время как *Модель №2* может подойти для описания ядра в состоянии сверхпроводимости первого типа. В первом случае

$$R_{lm}(r) = R_l^{(c)}(r_c) \left(\frac{r}{r_c} \right)^{(l+1)} \quad \text{для } r < r_c, \quad (1.40)$$

и μ_l определяется граничным условием

$$\frac{d}{dr} R_l^{(c)}(r_c) - \frac{(l+1)}{r_c} R_l^{(c)}(r_c) = 0. \quad (1.41)$$

Во втором случае

$$R_l^{(c)}(r) = 0 \quad \text{для } r \leq r_c, \quad (1.42)$$

константы μ_l определяются из требования справедливости этого равенства при $r = r_c$. В обоих случаях предполагается, что толщина коры $h_c = r_* - r_c$ равна $0.1r_*$.

В нашей работе мы интересуемся прежде всего мелкомасштабными полями. По всей видимости, такие поля генерируются на стадии протонейтронной звезды в приповерхностных областях и позже оказываются замороженными в кору [20]. Мелкомасштабные поля также могут генерироваться на протяжении жизни нейтронной звезды благодаря Холловской неустойчивости [21, 22]. Таким образом, две предложенные нами модели внутренней структуры магнитного поля кажутся вполне обоснованными для мелкомасштабных гармоник. Что касается крупномасштабного поля, его источник может располагаться как в коре, так и в ядре звезды. Мы предполагаем, что источник находится в коре просто из соображений унификации модели. Кажется, что это допущение не должно существенно влиять на результат. Момент инерции поля можно грубо оценить, умножив $B^2/8\pi c^2$ на квадрат плеча и на занимаемый полем объём. Таким образом, до тех пор, пока реальное внутреннее поле не будет превосходить в несколько раз принятое в нашей Модели №1 однородное поле, данная модель будет давать правильный по порядку величины результат.

Результаты вычислений, представленные в форме эффективных сплюснутостей, показаны на рисунке 1.1. Видно, что они очень существенно зависят от внутренней структуры поля. В *Модели №1* эффективная сплюснутость меняет знак между дипольной и квадрупольной гармониками. В случае дипольного поля наибольшее количество момента импульса содержится в однородном поле ядра, которое даёт отрицательный вклад в $\delta I_{\perp} < 0$. Для остальных гармоник наибольший и положительный вклад в этот коэффициент даёт поле в коре.

Эффективная сплюснутость, вычисленная в рамках *Модели №2*, остаётся отрицательной вплоть до гармоники $l = 15$. Для того, чтобы понять такое поведение, обратим внимание на то, что согласно выражениям (1.21) и (1.22) нормальная компонента магнитного поля B_n пропорциональна R_{lm} , в то время как тангенциальная компонента B_t пропорциональна $d_r R_{lm}$. Отсюда, глядя на выражение (1.36), можно сказать, что нормальная и тангенциальная компоненты создают аномальный момент противоположного знака. Для небольших индексов l во второй модели поле в коре в основном тангенциальное (см. рис. 1.2). С ростом l поле будет становиться всё более вертикальным. Объёмы областей, занимаемых радиальным и тангенциальным полем оказываются примерно равными, когда радиус магнитной ячейки сравнивается с толщиной коры. Для $h_c = 0.1r_*$ это происходит как раз между l равным 15 и 16. После этого перехода с ростом l результаты, полученные в рамках двух моделей становятся всё более и более близкими. Это связано с тем, что формы ячеек двух моделей становятся всё более и более похожими.

Для больших l эффективная сплюснутость слегка увеличивается с ростом l . Граничное условие (1.24) требует увеличения производной R_{lm} на поверхности звезды, а вместе с ней и значений самой функции R_{lm} внутри коры с ростом l (см. рис. 1.3). Фактически это означает, что для обеспечения той же величины поля на поверхности с ростом l требуется всё большее поле внутри. Первый интеграл в выражении (1.36) слегка растёт с ростом l , в то время как предынтегральный множитель стремится к константе. Важно, однако, заметить, что это увеличение сплюснутости, в некотором смысле, является следствием выбора нормировки гармоник. Если мы, к примеру, будем вычислять \mathbf{K}_{\perp} , фиксируя максимальное значение магнитного поля на поверхности, вместо его среднего квадрата, в знаменателе выражения (1.36) появится дополнительный множитель $(l + 1)$. В такой нормировке эффективная сплюснутость уже будет слегка уменьшаться.

Для того, чтобы продемонстрировать важность учёта конечности области генерации поля, мы также вычислили эффективную сплюснутость в приближении поверхностных

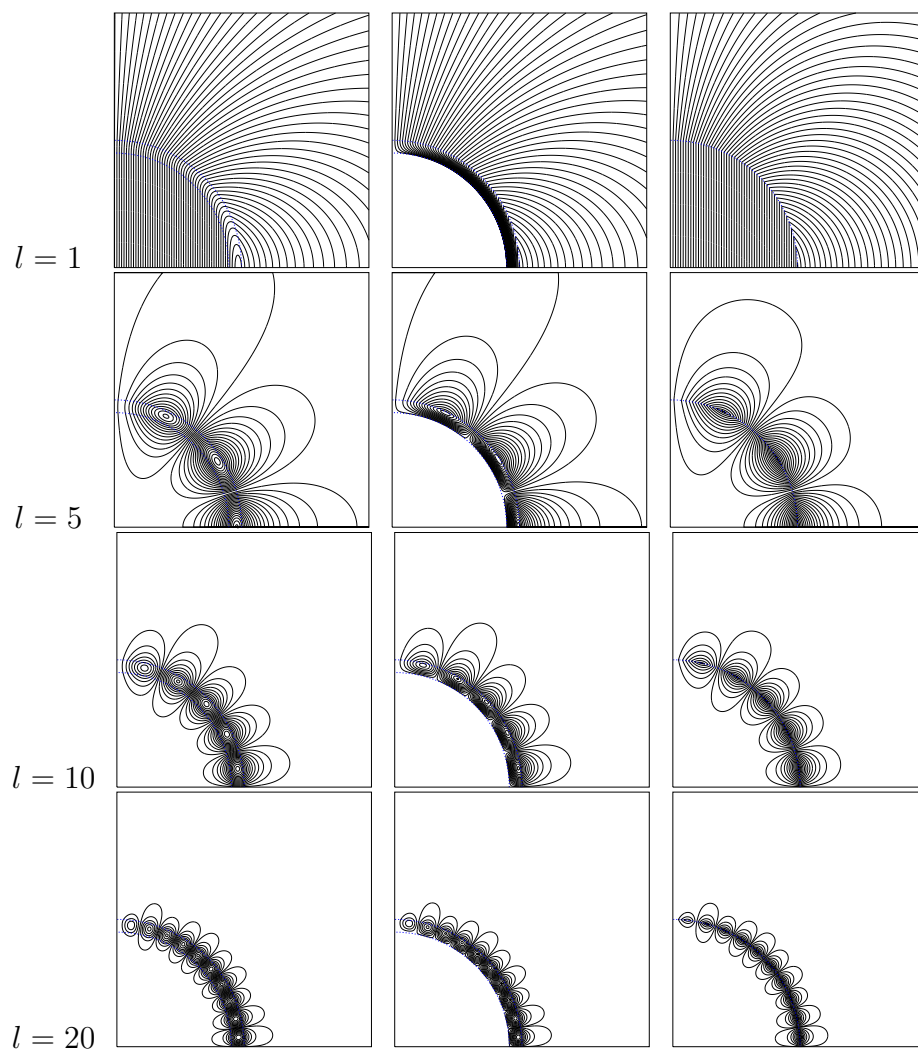


Рис. 1.2. Магнитные силовые линии в моделях с объёмными токами №1 (левый столбец), №2 (средний столбец) и в модели с поверхностными токами (правый столбец).

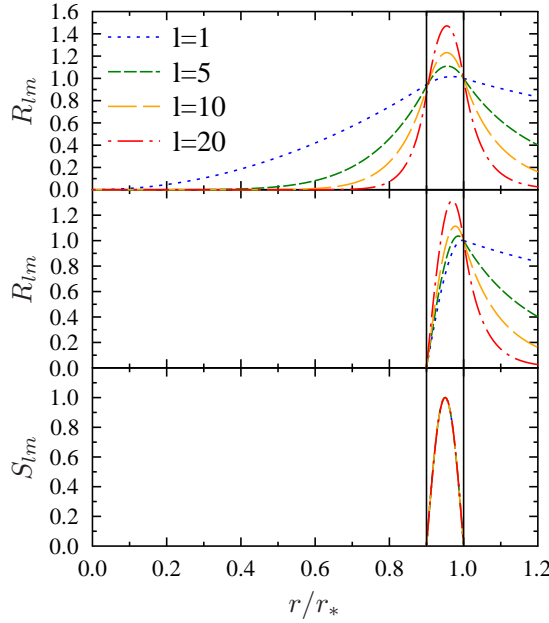


Рис. 1.3. Радиальные функции полоидального поля в *Модели №1* (верхняя панель), *Модели №2* (средняя панель), а также тороидального поля.

ТОКОВ:

$$R_{lm}(r) = \left(\frac{r_*}{r}\right)^l, \quad r > r_* \quad (1.43)$$

$$R_{lm}(r) = \left(\frac{r}{r_*}\right)^{l+1} \quad r \leq r_* \quad (1.44)$$

(правая колонка на рис. 1.2). Видно, что эффективная сплюснутость убывает с l даже быстрее чем сплюснутость, производимая только внешним полем. Это происходит потому, что внешнее и внутреннее поле (представляющие собой два вакуумных решения) дают вклады в δI_{\perp} противоположного знака и члены в наибольшей степени l сокращаются друг с другом.

Внутри нейтронной звезды может существовать также тороидальное магнитное поле. Для аномальный момента, создаваемого одиночной тороидальной гармоникой, мы получили следующее выражение:

$$\mathbf{K}_{\perp} = \langle B^2 \rangle_V \frac{r_*^3 - r_0^3}{6c^2} \frac{\int_{r_0}^{r_*} S_l^2 r^2 dr}{\int_{r_0}^{r_*} S_l^2 dr} \frac{\mathbf{k}}{l(l+1)} \quad (1.45)$$

где вектор \mathbf{k} , как и раньше, вычисляется по формуле (1.37). Тороидальные гармоники не могут быть нормированы на значение поля на поверхности. В формуле (1.45) мы фикси-

ровали средний по объёму квадрат индукции поля

$$\langle B^2 \rangle_V = \frac{3}{(r_*^3 - r_0^3)} \int_{r_0}^{r_*} \langle B^2(r, \theta, \phi) \rangle_r r^2 dr. \quad (1.46)$$

Причём усреднение проводилось по сферическому слою ($r_0 < r < r_*$), в котором тороидальное поле отлично от нуля.

Выберем вновь в качестве радиальных функций собственные функции омического распада для случая однородной изотропной проводимости:

$$S_{lm}^{(c)}(r) = b \left(r j_l(\mu_l r) - \frac{j_l(\mu_l r_*)}{n_l(\mu_l r_*)} r n_l(\mu_l r) \right), \quad (1.47)$$

где b – вновь нормировочный множитель. Функции (1.47) удовлетворяют граничному условию (1.26). На сегодняшний момент нет единой точки зрения по поводу того, насколько большую область внутри звезды может занимать тороидальное поле. Однако, согласно современным исследованиям, наиболее правдоподобной оказывается структура поля, в которой тороидальная компонента существует только в области замкнутых в звезде полоидальных силовых линий [47, 48]. В рассмотренных нами моделях такие силовые линии существуют только в коре звезды (см. рис. 1.2). В соответствии с этим мы положим $r_0 = r_c$. Следовательно, коэффициенты μ_l должны удовлетворять уравнению $S_{lm}(r_c) = 0$. И вновь для каждого значения индекса l мы будем выбирать наименьшее значение μ_l , соответствующее наиболее долгоживущей гармонике. Глядя на нижнюю панель рисунка 1.3, можно видеть, что функции различные S_l практически не отличимы друг от друга, несмотря на то, что индекс l меняется от 1 до 20. Нельзя сказать, что этот результат является совсем уж неожиданным, учитывая, что мы рассматриваем семейство колоколообразных функций зафиксированных в двух близко расположенных точках и нормированных на единицу в максимуме.

После подстановки (1.47) в (1.45) и вычисления эффективной сплюснутости, для осесимметричных гармоник получим

$$\varepsilon_l = -1.21 \times 10^{-13} \left(\frac{\langle B^2 \rangle_V}{(10^{12} \text{Гс})^2} \right) \frac{r_6^5}{I_{45}}, \quad (1.48)$$

Для не осесимметричных гармоник, как и раньше, ответ нужно умножить на $(l^2 + l - 3m^2)/(l^2 + l)$. Результаты некоторых исследований в области внутреннего устройства магнитных полей нейронных звёзд указывают на то, что тороидальное поле может быть на 1-2 порядка сильнее полоидального [49]. Если это так, тороидальное поле будет давать основной вклад в аномальный момент.

Поля реальных нейтронных звёзд, судя по всему, могут иметь довольно сложную структуру. Вообще говоря, производимый такими полями аномальный момент не равняется сумме аномальных моментов, производимых каждой отдельной сферической гармоникой. Учитывая формулы (1.21) (1.22), легко видеть, что каждая пара полоидальных гармоник создаёт в выражении (1.11) под интегралом перекрёстные слагаемые вида $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Y}_{lm}^{(-1)})(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{Y}_{l'm'}^{(-1)})$ и $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Y}_{lm}^{(1)})(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{Y}_{l'm'}^{(1)})$, где $i, j = x, y, z$. Декартовы компоненты шаровых векторов, в свою очередь, выражаются через функции $Y_{l\pm 1; m}$ and $Y_{l\pm 1; m\pm 1}$ (см. формулы (A.10)-(A.12) и (A.16)-(A.18) приложения А). Таким образом, после интегрирования выживают перекрёстные слагаемые только между l и $l \pm 2$ гармониками. Что касается тороидального поля, оно под интегралом формулы (1.11) порождает слагаемые вида $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Y}_{lm}^{(0)})(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{Y}_{l'm'}^{(0)})$. Декартовы компоненты входящих в эти выражения шаровых векторов выражаются через функции $Y_{l; m}$ и $Y_{l; m\pm 1}$. Следовательно, тороидальные гармоники с разными индексами l не пересекаются.

На сегодняшний день существует несколько работ, в которых приведены результаты вычисления аномального момента сил, создаваемого дипольным магнитным полем [11, 12, 44, 50, 51]. При этом, помимо описанного выше подхода, можно выделить ещё как минимум два метода его вычисления. Аномальный момент может быть получен путём непосредственного интегрирования силы Лоренца по объёму звезды [44, 51]:

$$\mathbf{K}_{\perp} = \int_{V_*} \mathbf{r} \times \left[\rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{c} \times \mathbf{B} \right] d^3r. \quad (1.49)$$

Этот метод является наиболее естественным, однако он оказывается более сложным, так как для его применения требуется знание поправок, квадратичных по ε . Другой подход заключается в вычислении потока момента импульса через поверхность звезды [12]:

$$\mathbf{K}_{\perp} = r_*^3 \langle (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E})[\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}] + (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{B})[\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}] \rangle_{r_*}, \quad (1.50)$$

Однако, по аналогии с уравнением (1.3), величина (1.50) представляет собой суммарное изменение момента импульса звезды и её внутреннего поля. Таким образом, внутреннее поле не даёт вклада в аномальный момент, вычисленный с помощью выражения (1.50) и при таком подходе должно быть учтено в моменте импульса звезды. Практически все авторы ограничивались вычислением аномального момента, создаваемого дипольным магнитным полем и предполагали, что звезда окружена вакуумом. Ввиду последнего факта, прямое сравнение наших результатов с полученными ранее не представляется возможным. Только Гуд и Нг [44] при вычислении аномального момента предполагали наличие заполненной

плазмой магнитосферы. Однако они ограничились только дипольной и квадрупольной гармониками и моделью поверхностных токов. В этих частных случаях наши результаты совпадают с полученными данными авторами.

1.3. Эффективный тензор инерции

В предыдущем параграфе мы привели некоторые аргументы в пользу того, что мелко-масштабное магнитное поле может давать вклад в аномальный момент, сравнимый с вкладом крупномасштабного дипольного поля. Обсудим теперь следствия, к которым может привести отклонение поля от чисто дипольной конфигурации. Рассмотрим простейшую модель “асимметричного” аномального момента:

$$\mathbf{K}_\perp = -I_{dip} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_m) [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_m] - I_s (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_s) [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_s] \quad (1.51)$$

В этом выражении первое слагаемое описывает вклад крупномасштабного дипольного поля, \mathbf{e}_m – единичный вектор, направленный вдоль дипольного момента звезды. Второе слагаемое представляет вклад некоторой другой компоненты поля. Это может быть, к примеру, квадрупольная гармоника, ось которой наклонена к \mathbf{e}_m на некоторый угол, или некоторая мелкомасштабная аномалия (в обоих случаях перекрёстных членов в \mathbf{K}_\perp не возникает, см. конец предыдущего параграфа). Вектор \mathbf{e}_s – некоторый единичный вектор, в общем случае не совпадающий с вектором \mathbf{e}_m .

Допуская, что звезда имеет идеально сферическую форму, уравнение (1.3) можно переписать в следующем виде:

$$I_* d_t \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{K}_\perp = 0. \quad (1.52)$$

Если подставить выражение (1.51) в уравнение (1.52) и добавить к его левой части пренебрежимо малые слагаемые $I_{dip} (d_t \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_m) \mathbf{e}_m$ и $I_s (d_t \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_s) \mathbf{e}_s$, оно может быть представлено в компактной форме:

$$d_t^* \mathbf{M}_{\text{eff}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M}_{\text{eff}} = 0, \quad (1.53)$$

где с помощью d_t^* здесь и далее мы будем обозначать производную по времени во вращающейся со звездой системе отсчёта. В этом уравнении мы ввели эффективный момент импульса звезды $M_{\text{eff}}^i = I_{\text{eff}}^{ij} \Omega^j$, где эффективный тензор момента инерции равен

$$I_{\text{eff}}^{ij} = \begin{pmatrix} I_* + I_s \sin^2 \alpha & 0 & I_s \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & I_* & 0 \\ I_s \sin \alpha \cos \alpha & 0 & I_* + I_{dip} + I_s \cos^2 \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

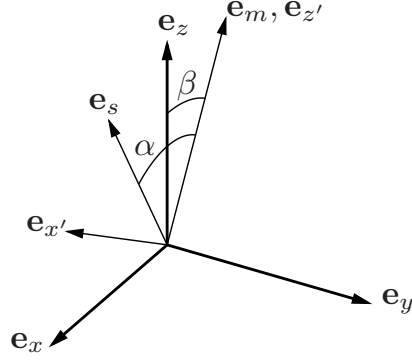


Рис. 1.4. Взаимная ориентация двух ортонормированных базисов: $(\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'})$ – базиса, связанного с магнитным диполем и $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, базис, в котором ортогонален тензор I_{eff}^{ij} .

Здесь базис $(\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'})$ выбран таким образом, чтобы $\mathbf{e}_{z'} = \mathbf{e}_m$ и вектор \mathbf{e}_s лежал в плоскости $X'Z'$, α – угол между векторами \mathbf{e}_s и \mathbf{e}_m .

Тензор (1.54) может быть диагонализирован путём поворота базиса вокруг $\mathbf{e}_{y'}$ на угол β (см. рис. 1.4), тангенс которого определяется соотношением

$$\tan \beta = \frac{I_s \sin(2\alpha)}{I_{dip} + I_s \cos(2\alpha) + \sqrt{I_{dip}^2 + I_s^2 + 2I_s I_{dip} \cos(2\alpha)}}. \quad (1.55)$$

Соответствующие главные моменты инерции будут равны

$$I_{\text{eff}}^{xx} = I_* + \frac{I_{dip} + I_s - \sqrt{I_{dip}^2 + I_s^2 + 2I_s I_{dip} \cos(2\alpha)}}{2}, \quad (1.56)$$

$$I_{\text{eff}}^{yy} = I_*, \quad (1.57)$$

$$I_{\text{eff}}^{zz} = I_* + \frac{I_{dip} + I_s + \sqrt{I_{dip}^2 + I_s^2 + 2I_s I_{dip} \cos(2\alpha)}}{2}. \quad (1.58)$$

Таким образом, вращение нейтронной звезды под действием аномального момента может быть описано, как свободное вращение трёхосного эллипсоида. В общем случае аномальный момент сил не представим в форме (1.51). Это означает, что эффективный тензор инерции, вообще говоря, имеет более сложную форму и требует более сложной процедуры диагонализации, однако сам принцип остаётся верным.

Реальные нейтронные звёзды не являются идеально сферически симметричными. Во-первых, нейтронная звезда должна деформироваться вращением. Однако такое изменение формы никак не сказывается на прецессии, поскольку звезда остаётся симметричной относительно оси вращения. Во-вторых, нейтронная звезда деформируется собственным магнитным полем [52–55]. В-третьих, не гидростатические отклонения формы звезды от

сферической могут поддерживаться кристаллической корой [56]. В самом общем случае тензор I_{eff}^{ij} может быть получен путём суммирования тензора инерции звезды и тензора, описывающего инерцию поля.

1.4. Уравнения движения

Вернёмся вновь к уравнению баланса момента импульса

$$d_t^* \mathbf{M}_{\text{eff}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M}_{\text{eff}} = \mathbf{K}. \quad (1.59)$$

Здесь \mathbf{M}_{eff} – эффективный момент импульса общего вида. Мы также добавили в правую часть уравнения “внешний” момент сил, представляющий собой следующий член разложения электромагнитного момента по параметру ε . Несмотря на его малость по сравнению с аномальным моментом (включённым здесь в слагаемое $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M}_{\text{eff}}$), момент \mathbf{K} играет важную роль в процессах вековой эволюции вращения пульсаров. Именно он приводит к замедлению вращения нейтронной звезды, а также к эволюции её угла наклона.

Во том случае, если $\mathbf{e}_m \neq \mathbf{e}_\Omega$, произвольный момент сил \mathbf{K} можно представить в виде [40]

$$\mathbf{K} = K_0 \left(\tilde{k}_\Omega \mathbf{e}_\Omega + \tilde{k}_m \mathbf{e}_m + \tilde{k}_p [\mathbf{e}_\Omega \times \mathbf{e}_m] \right), \quad (1.60)$$

где введён множитель $K_0 = \varepsilon^3 m^2 / r_*^3$, а \tilde{k}_Ω , \tilde{k}_m и \tilde{k}_p представляют собой некоторые безразмерные функции. Если, при этом, момент сил \mathbf{K} является исключительно следствием вращения звезды, такое его представление оказывается наиболее удобным. Заметим, далее, что третье слагаемое в выражении (1.60) совпадает по направлению (с точностью до знака) с дипольным вкладом в аномальный момент, но благодаря лишней степени ε в множителе K_0 , намного меньше его. Это позволяет нам в дальнейших рассуждениях положить $\tilde{k}_p = 0$.

Представим эффективный момент импульса в виде двух слагаемых:

$$\mathbf{M}_{\text{eff}} = I_* \boldsymbol{\Omega} + \delta \mathbf{M}^{(nsp)}. \quad (1.61)$$

Здесь первое слагаемое – вектор \mathbf{M}_{eff} в приближении идеально сферического распределения момента импульса. Символом I_* можно обозначить здесь любой из главных эффективных моментов инерции (их величины очень близки друг к другу). Положим для определённости $I_* = I_{\text{eff}}^{zz}$. Второе слагаемое в выражении (1.61) представляет собой малую поправку на несферичность.

$$\delta \mathbf{M}^{(nsp)} = -\epsilon_x I_* (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x - \epsilon_y I_* (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y, \quad (1.62)$$

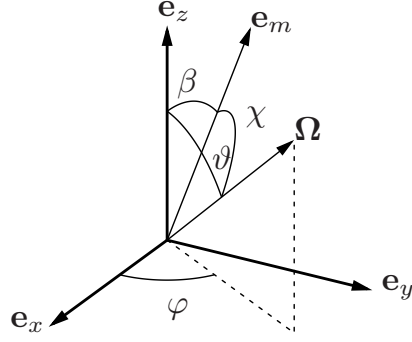


Рис. 1.5. Векторы и углы, используемые для описания вращения нейтронной звезды: $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ – базис, построенный на главных осях инерции, $\mathbf{e}_m = \mathbf{m}/m$, β – угол между магнитным моментом и вектором \mathbf{e}_z , χ – угол наклона, ϑ – прецессионный угол, φ – азимутальный угол.

где $\epsilon_x = (I_{\text{eff}}^{zz} - I_{\text{eff}}^{xx})/I_{\text{eff}}^{zz}$, $\epsilon_y = (I_{\text{eff}}^{zz} - I_{\text{eff}}^{yy})/I_{\text{eff}}^{zz}$.

Продифференцировав эффективный момент импульса по времени, получим

$$d_t \mathbf{M}_{\text{eff}} = I_* \dot{\boldsymbol{\Omega}} - \epsilon_x I_* (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x - \epsilon_y I_* (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{M}^{(nsp)}. \quad (1.63)$$

Малость параметров ϵ_x и ϵ_y позволяет пренебречь в этом выражении вторым и третьим слагаемыми, ничтожно малыми по сравнению с первым, что, в свою очередь, позволяет упростить уравнение (1.59) (см. подробнее в приложении В):

$$I_* \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{M}^{(nsp)} = \mathbf{K}. \quad (1.64)$$

Вектор угловой скорости может быть задан его абсолютно величиной и двумя углами ϑ и φ , определёнными так, как это показано на рисунке 1.5. Эволюция вращения звезды в терминах этих трёх параметров может быть описана системой уравнений

$$d_t \Omega = \frac{K_0}{I_*} (\tilde{k}_\Omega + \tilde{k}_m \cos \chi), \quad (1.65)$$

$$d_t \vartheta = \frac{K_0}{I_* \Omega} (\mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_m) \tilde{k}_m + (\epsilon_y - \epsilon_x) \Omega \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi, \quad (1.66)$$

$$d_t \varphi = \frac{K_0}{I_* \Omega} \frac{\tilde{k}_m}{\sin \vartheta} (\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_m) + [\epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi] \Omega \cos \vartheta, \quad (1.67)$$

которая получается проектированием уравнения (1.64) на соответствующие базисные векторы

$$\mathbf{e}_\Omega = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega}, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\Omega \sin \vartheta} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial \varphi}. \quad (1.68)$$

Здесь $\cos \chi = (\mathbf{e}_\Omega \cdot \mathbf{e}_m)$ – косинус угла наклона радиопульсара.

Рассмотрим сначала “свободное” вращение звезды, положив $K_0 = 0$. Решение уравнений (1.65)-(1.67) для этого частного случая приведено в приложении В. Согласно ему

вектор угловой скорости будет вращаться вокруг главной оси, соответствующей либо наибольшему, либо наименьшему главному моменту инерции. Ось определяется начальными условиями. Если вектор $\mathbf{\Omega}$ вращается вокруг вектора \mathbf{e}_z , углы ϑ и φ имеют простое и понятное значение. Изменение угла φ описывает прецессию звезды. Амплитуда прецессии задаётся углом ϑ . Следуя Мелатосу [12], осцилляции этого угла мы будем называть нутацией. Амплитуда этих осцилляций определяется величиной $(\epsilon_y - \epsilon_x)$.

Используя формулу (В.11) можно оценить период прецессии:

$$T_p \approx \frac{f}{\sqrt{\epsilon_x \epsilon_y} \cos \vartheta_0} \frac{P}{\cos \vartheta_0} = 3.17 \times 10^4 \frac{f}{\cos \vartheta_0} \left(\frac{10^{-13}}{\sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}} \right) \left(\frac{P}{0.1c} \right) \text{лет}$$

где P – период вращения нейтронной звезды, величина f вычисляется с помощью интеграла (В.12). Как правило, величина f довольно близка к единице. Наблюдаемым параметром является угол наклона χ . Он, вообще говоря, осциллирует с тем же периодом.

Если мы теперь “подключим” к звезде момент сил \mathbf{K} , в дополнение к T_p в системе появится ещё один временной масштаб

$$\tau_x = \frac{I_* \Omega}{K_0} \approx 8.6 \times 10^5 \frac{I_{45}}{r_6 B_{12}^2} \left(\frac{P}{0.1c} \right)^2 \text{лет.} \quad (1.69)$$

Напомним, что параметры ϵ_x и ϵ_y включают в себя несферичность распределения момента импульса поля. Если основной вклад в несферичность даёт именно поле, временной масштаб τ_x превосходит по порядку величины период прецессии в ε^{-1} раз. А следовательно, он практически всегда (кроме случая $\cos \vartheta \approx 0$) многократно превосходит период прецессии T_p .

Если система является осесимметричной в том смысле, что $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_m$ ($\theta = \chi$) и $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon$, система уравнений (1.65)-(1.67) несколько упрощается:

$$d_t \Omega = \frac{K_0}{I_*} \left(\tilde{k}_\Omega + \tilde{k}_m \cos \chi \right), \quad (1.70)$$

$$d_t \chi = -\frac{K_0}{I_* \Omega} \tilde{k}_m \sin \chi, \quad (1.71)$$

$$d_t \varphi = \epsilon \Omega \cos \chi. \quad (1.72)$$

Заметим, что если при этом функции \tilde{k}_Ω и \tilde{k}_m не зависят от угла φ , торможение и эволюция угла наклона оказываются независимыми от прецессии и характеризуются только одним временным масштабом τ_x . В такой ситуации прецессия оказывается вообще не наблюдаемой [57].

Торможение и эволюция угла наклона зависят от конкретного вида функций \tilde{k}_Ω и \tilde{k}_m , которые, в свою очередь, определяются моделью магнитосферы. Простейшей такой моделью являются модель вакуумной магнитосферы. В этом случае на звезду действует только

радиативный момент сил, связанный с магнито-дипольным излучением, генерируемым её вращением [11]:

$$\mathbf{K} = \frac{2}{3} \frac{\Omega^2}{c^3} \mathbf{m} \times [\mathbf{m} \times \boldsymbol{\Omega}]. \quad (1.73)$$

Сравнивая это выражение с (1.60), легко видеть, что $\tilde{k}_\Omega = -3/2$, $\tilde{k}_m = (3/2) \cos \chi$ и уравнения примут следующий вид:

$$d_t \Omega = -\frac{2}{3} \frac{K_0}{I_*} \sin^2 \chi, \quad (1.74)$$

$$d_t \chi = -\frac{2}{3} \frac{K_0}{I_* \Omega} \sin \chi \cos \chi. \quad (1.75)$$

Если бы угол наклона не менялся, индекс торможения $n = \Omega \ddot{\Omega} / \dot{\Omega}^2$ был бы равен ровно 3. Магнитодипольное излучение, однако, заставляет угол наклона эволюционировать. Согласно уравнению (1.75) все пульсары должны становиться соосными ($\chi = 0$) за время порядка τ_x . Существует также неустойчивый равновесный угол 90° . Здесь и дальше мы будем считать, что $\chi \leq 90^\circ$. При $\chi \geq 90^\circ$ эволюция будет выглядеть зеркальным образом. Индекс торможения в данной модели оказывается равен [11]

$$n = 3 + 2 \operatorname{ctg}^2 \chi. \quad (1.76)$$

Он существенно отличается от тройки для малых углов наклона. Согласно уравнению (1.74), после того, как пульсар становится соосным, он вовсе перестаёт терять вращательную энергию.

Реальные нейтронные звёзды вращаются не в вакууме. Они окружены протяжённой магнитосферой, заполненной плазмой. Наличие плазмы проявляет себя в двух аспектах. Во-первых, она модифицирует магнитное и электрическое поля, влияя тем самым на магнитодипольное излучение. Бескин и др. [9, 10] показали, что при наличии магнитосферы, заполненной частицами, магнитодипольные потери могут отсутствовать вовсе. Во-вторых, наличие плазмы приводит к появлению дополнительных механизмов потери углового момента, связанных с токами, текущими в магнитосфере [44, 58]. Пусть магнитное поле звезды имеет чисто дипольную форму. Плотность продольного электрического тока ($j_{\parallel} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{B}/B$) в области открытых силовых линий вблизи поверхности звезды приблизительно можно представить в виде [43]

$$j_{\parallel} = j_S \cos \chi + j_A \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \quad (1.77)$$

где углы θ и ϕ представляют собой углы сферической системы координат в системе отсчёта, ось z которой направлена вдоль магнитного момента, а ось x лежит в плоскости

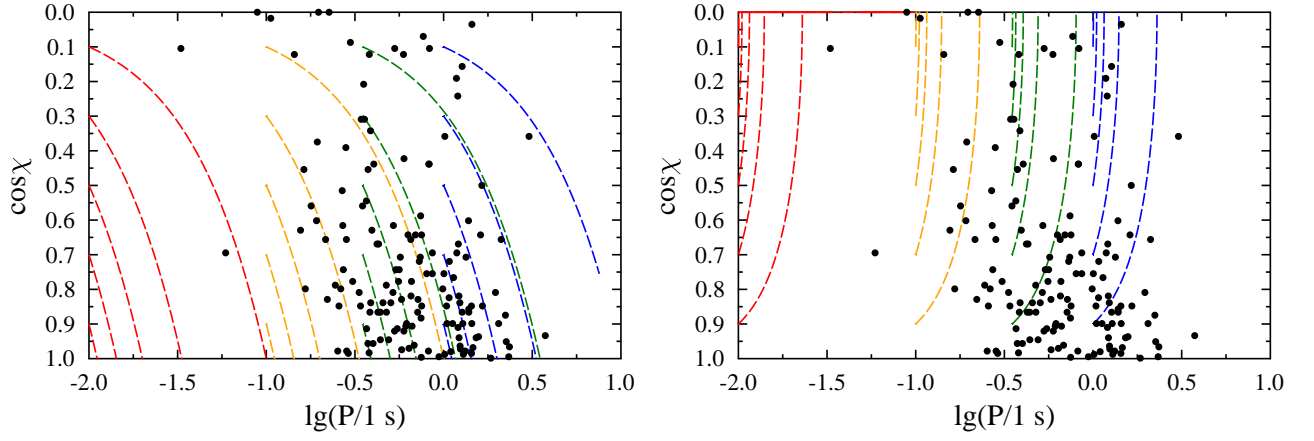


Рис. 1.6. Эволюционные кривые в координатах $\cos \chi - P$ для пульсаров с различными начальными значениями периодов и углов наклона. Левая панель соответствует модели магнитодипольных потерь, правая – модели токовых потерь. Точки представляют собой наблюдательные данные для 149 пульсаров, взятые из работы Ранкин [60]

$\Omega - \mathbf{m}$ таким образом, что $(\mathbf{e}_x \cdot \Omega) > 0$. Функции j_S и j_A задают амплитуды симметричной и асимметричной компонент тока. Потери момента импульса, связанные с этим током можно описать моментом сил [43]

$$\mathbf{K}_{cur} = -K_0 \{c_{\perp} \varepsilon j_A \sin \chi \mathbf{e}_{\Omega} + (c_{\parallel} j_S \cos \chi - c_{\perp} \varepsilon j_A \sin \chi) \mathbf{e}_m\} \quad (1.78)$$

где c_{\parallel} и c_{\perp} – коэффициенты порядка единицы. Заметим, что если $j_S \sim j_A$, вкладом асимметричного тока можно пренебречь из-за содержащегося в соответствующем слагаемом малого параметра ε . Если плотность тока вблизи поверхности звезды, согласно модели свободного истечения заряда [59], равна так называемому Голдрайх-Джулиановскому току $j_{GJ} = (\mathbf{B} \cdot \Omega)/2\pi$, момент сил (1.78) будет равен

$$\mathbf{K}_{cur} \approx -c_{\parallel} \frac{\Omega^3 m}{c^3} \cos \chi \mathbf{m}. \quad (1.79)$$

Под действием такого момента сил пульсары будут эволюционировать к ортогональному состоянию. Индекс торможения будет равен

$$n = 3 + 2 \operatorname{tg}^2 \chi \quad (1.80)$$

Ортогональные пульсары не будут терять вращательную энергию.

Главной проблемой обеих этих моделей является слишком быстрая эволюция угла наклона, после которой пульсар практически перестаёт замедляться. Это означает что для большинства пульсаров, рождающихся с периодом вращения порядка нескольких десятков

миллисекунд (таких, как пульсар в крабовидной туманности), оказывается проблематичным достигнуть типичных значений периодов порядка 1 с (см. рис. 1.6).

Барсуков, Полякова и Цыган [40] предположили, что на самом деле магнитодипольные и токовые потери углового момента складываются друг с другом. В этом случае электромагнитный момент сил представим в виде

$$\mathbf{K}_{BPT} = \frac{2K_0}{3} \{(1 - \alpha(\chi, \varphi)) \cos \chi \mathbf{e}_m - \mathbf{e}_\Omega\}. \quad (1.81)$$

Здесь введена функция α , которая фактически представляет собой сумму токов, текущих по обеим пульсарным трубкам, нормированную на j_{GJ} . Заметим, что эта функция, вообще говоря, может зависеть от угла φ (величина продольного тока может меняться в течении периода прецессии). Такая зависимость может иметь место, например, при наличии мелкомасштабных магнитных аномалий вблизи полярных шапок пульсаров. Барсуковым, Поляковой и Цыганом была построена модель такой зависимости. Заметим, что поскольку в этой модели функция \tilde{k}_m зависит (через функцию α) от прецессионного угла ϕ , эволюция угла наклона будет “чувствовать” прецессию и на медленную вековую эволюцию будут накладываться небольшие осцилляции с периодом T_p . Если же нас интересует только вековая составляющая эволюции, уравнения (1.70) и (1.71) можно усреднить по углу φ . На рисунке 1.7 представлено семейство функций

$$\bar{\alpha}_{\nu_{nd}}(\chi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\chi, \varphi) d\varphi, \quad (1.82)$$

вычисленных в рамках модели Барсукова, Поляковой и Цыгана. Данные функции зависят от так называемого параметра недипольности ν_{nd} , представляющего собой отношение величин мелкомасштабной и дипольной компонент магнитного поля на поверхности полярных шапок. Интересно, что в такой системе для некоторого диапазона параметров недипольности появляется устойчивый равновесный угол наклона, отличный от 0° и 90° , определяемый уравнением $\bar{\alpha}(\chi_{eq}) = 1$.

Начиная с работы Контополоса и соавторов, опубликованной в 1999 году [61], стало развиваться компьютерное моделирование пульсарных магнитосфер. Симуляции проводились как в бессиловом приближении [35, 37, 61], так и в рамках полных магнитогидродинамических моделей [62, 63]. В последнее время стали появляться работы по PIC симуляциям [64, 65].

Филиппов, Чеховской и Ли [38] предположили следующее выражение для момента

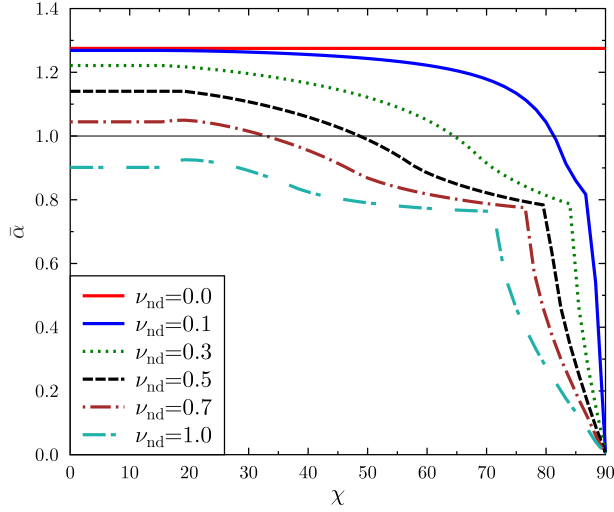


Рис. 1.7. Зависимость функции $\bar{\alpha}_{\nu_{nd}}$ от угла наклона χ для различных значений параметра недипольности ν_{nd} .

сил, действующего на нейтронную звезду:

$$\mathbf{K}_{PTL} = \frac{m^2 \Omega^3}{c^3} \left\{ \mathbf{e}_m k_2 \cos \chi - \mathbf{e}_z (k_0 + k_1 \sin^2 \chi + k_2 \cos^2 \chi) \right\}. \quad (1.83)$$

Значения коэффициентов в этом выражении были получены на основе результатов проведённой авторами МГД симуляции: $k_0 = 1$, $k_1 = 1.2$, $k_2 = 1$. При этом авторы утверждают, что их исследование подтверждает результат группы Гуревича [9] об отсутствии магнитодипольного излучения. Таким образом, момент \mathbf{K}_{PTL} порождается токовым механизмом. Его отличие от момента (1.79) объясняется тем, что продольный электрический ток, полученный при моделировании магнитосферы существенно отличается от j_{GJ} . Наиболее сильно это отличие проявляется при углах наклона, близких к 90° , когда ток оказывается больше j_{GJ} примерно в ε^{-1} раз. Момент \mathbf{K} обеспечивает достаточно медленную эволюцию угла наклона. Угол при этом эволюционирует к 0° (см рис. 1.8).

Перейдём теперь к обсуждению более общего случая, когда $\mathbf{e}_m \neq \mathbf{e}_z$. В работе Голрайха [56] было показано, что электромагнитный момент сил, вообще говоря, может как подавлять прецессию, так и вызывать рост её амплитуды в зависимости от относительной ориентации магнитного момента \mathbf{m} и главных осей инерции. В своей работе он рассматривал осесимметричную звезду ($\epsilon_x = \epsilon_y$) и предполагал, что на неё действует момент (1.73). Пусть для простоты вектор \mathbf{m} располагается в плоскости xz . Тогда справедливыми будут соотношения $\cos \chi = \sin \beta \sin \vartheta \cos \varphi + \cos \beta \cos \vartheta$, $(\mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_m) = \sin \beta \cos \vartheta \cos \varphi - \cos \beta \sin \vartheta$,

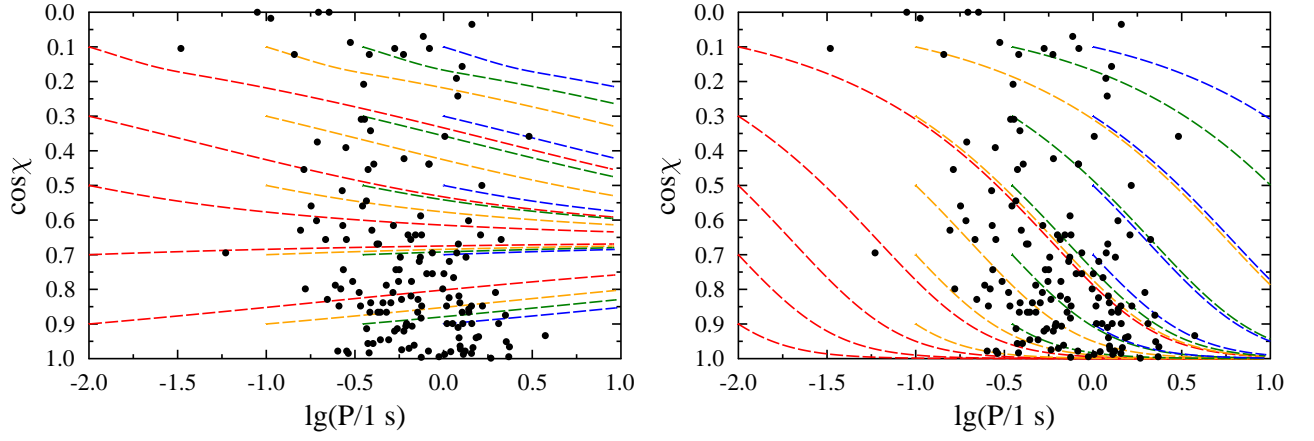


Рис. 1.8. То же, что на рисунке 1.6, но для модели Барсукова, Поляковой и Цыгана (ВРТ-момент) с параметром недипольности $\nu_{nd} = 0.5$ (левая панель) и модели Филиппова, Чеховского и Ли (РТЛ-момент, правая панель).

где β – угол между вектором \mathbf{m} и осью z . Так как $\tau_x \gg T_p$, на временах порядка T_p вращение звезды мало отличается от свободного. Это позволяет в случае, если нас интересует только вековая эволюция, подставить в правую часть уравнения (1.66) решение для свободной прецессии ($\Omega = \Omega_0$, $\theta = \theta_0$, $\varphi = 2\pi t/T_p$) и усреднить его по T_p . Прделав это, получим, что $\langle (\mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_m) \tilde{k}_m \rangle_{T_p}$ оказывается меньше нуля, если $\beta < \arccos(3^{-\frac{1}{2}}) \approx 55^\circ$ и больше нуля в противном случае. Таким образом, амплитуда будет нарастать, если угол β больше критического значения 55° и уменьшаться, если меньше. Очевидно, что критический угол остаётся тем же самым для всех моделей электромагнитного момента сил, в которых $\tilde{k}_m \propto \cos \chi$. Однако, если коэффициент пропорциональности отрицателен, всё будет в точности до наоборот: прецессия будет затухать, если $\beta > 55^\circ$, и нарастать в противном случае. Такая ситуация имеет место, например, для токовых потерь (1.79). Отметим, что Голдрайх в своих вычислениях не учитывал аномальный момент, что корректно только в том случае, если реальная деформация звезды многократно превосходит эффективную деформацию, порождаемую магнитным полем. Если это не так, и по какой-то причине ось симметрии звезды не совпадает с осью симметрии магнитного поля, звезда эффективно становится трёхосным эллипсоидом. Для такой звезды вопрос о нарастании или затухании прецессии становится более комплексным и требует учёта большего количества параметров.

Типичная эволюционная кривая с затухающей прецессией приведена на рисунке 1.9. Здесь для вычисления параметров ϵ_x и ϵ_y мы использовали моменты инерции, вычисленные с помощью формул (1.56)-(1.58). При этом предполагалось, что $\alpha = 30^\circ$, $\delta I_{dip} =$

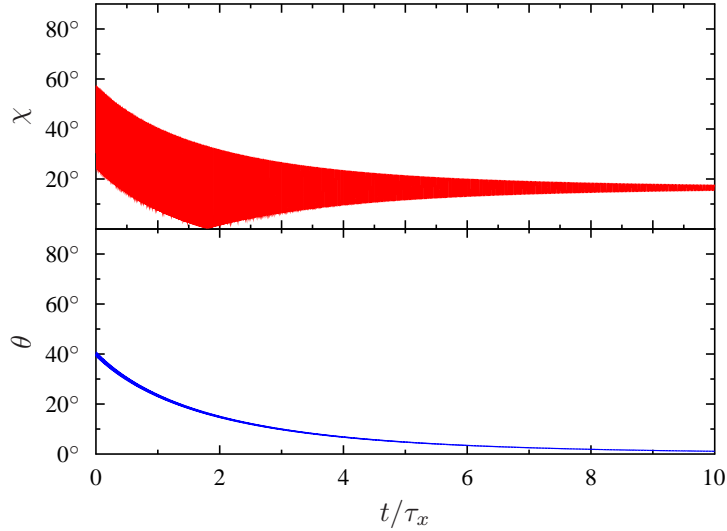


Рис. 1.9. Эволюция угла наклона χ и прецессионного угла ϑ со временем для пульсара со следующими параметрами: $\epsilon_x = 1.9 \times 10^{-13} I_{45}^{-1}$, $\epsilon_y = 2.05 \times 10^{-13} I_{45}^{-1}$, $\beta = 16.5^\circ$, и начальными значениями: $P_0 = 0.1$ с, $\vartheta_0 = 40^\circ$, $\varphi_0 = 45^\circ$. Время на графике измеряется в единицах τ_x .

$0.36 K_0 (c/r_* \Omega^3)$, $\delta I_s = 1.2 \delta I_{dip}$. Время на графике измеряется в единицах τ_x , что делает траектории независимыми от момента инерции I_* . Более того, если параметры ϵ_x и ϵ_y определяются магнитным полем (пропорциональны B^2), траектории не будут зависеть также от величины магнитного поля. Кроме того, в таких временных единицах огибающие осцилляций углов не зависят от Ω . Сам период прецессии T_p/τ_x , однако, пропорционален Ω .

Для выбранной конфигурации $\epsilon_y \approx \epsilon_x$. По этой причине осцилляции угла θ практически неразличимы. Угол наклона, однако, на первом этапе осциллирует с амплитудой около 30° . Поведение огибающей его осцилляций легко понять, взглянув на рисунок 1.10. До тех пор, пока $\vartheta > \beta$, за период прецессии угол наклона изменяться от $\vartheta - \beta$ до $\vartheta + \beta$. Следовательно, амплитуда осцилляций постоянна и равна 2β . Однако после того, как угол ϑ окажется меньше угла β , угол наклона начнёт меняться от $\beta - \vartheta$ и до $\vartheta + \beta$. В этом случае амплитуда будет равна 2ϑ , и, следовательно, она будет затухать вместе с прецессией.

При построении эволюционных траекторий мы предполагали, что на звезду действует вакуумный момент сил (1.73). Если вместо него использовать момент Филиппова-Чеховского-Ли (1.83), эволюция углов будет происходить медленнее, но качественно графики будут иметь такой же вид. Однако если приложить к звезде момент сил (1.79), в совокупности с теми же начальными условиями это приведёт к нарастанию прецессии со временем. Данный результат согласуется с критерием Голдрайха, который ввиду слабо выраженной

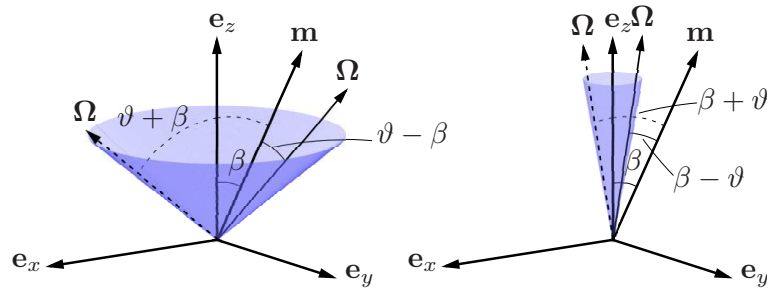


Рис. 1.10. Прецессия вектора угловой скорости Ω для случая $\vartheta > \beta$ (слева) и для случая $\vartheta < \beta$ (справа). Раствор прецессионного конуса равен 2ϑ .

трёхосности данной конкретной системы ($\epsilon_x \approx \epsilon_y$) оказывается неплохо применим. Важно обратить внимание, что из-за наличия аномального момента сил, после того, как прецессия затухнет, звезда, вообще говоря, не будет вращаться вокруг ни одной из своих главных осей инерции. Вращение будет происходить вокруг одной из *эффективных* главных осей системы звезды и поля.

На рисунке 1.11 приведён пример эволюционной траектории с нарастающей прецессией. В этом примере разница между ϵ_x и ϵ_y значительно больше и, как следствие, осцилляции угла ϑ гораздо заметнее. В момент времени $t/\tau_x \approx 4$ угол ϑ достигает значения 90° и происходит переключение оси прецессии с e_z на e_x . После этого угол ϑ (отмеряемый от оси Z) теряет смысл прецессионного угла.

Полный анализ вращения трёхосной звезды под действием внешнего момента сил вида (1.60) не входит в цели данной диссертации. Это довольно комплексная задача ввиду того, что в ней содержится большое количество параметров. Одно из существенных допущений, сделанных в данной главе, заключается в том, что сама вращающаяся звезда рассматривается как абсолютно твёрдое тело. В реальности это, разумеется, не так, и при вращении внутри звезды могут проявляться различные диссипационные механизмы. Это может быть внутреннее трение в коре [66, 67], трение между корой и ядром [66, 68], взаимное трение между сверхтекучими нейтронами и заряженной компонентой ядра [69] и т.д. По крайней мере нарастающую прецессию имеет смысл рассматривать только после того, как диссипационные механизмы будут включены в модель. Следующие главы диссертации посвящены исследованию влияния некоторых внутренних диссипационных механизмов на эволюцию вращения радиопульсаров.

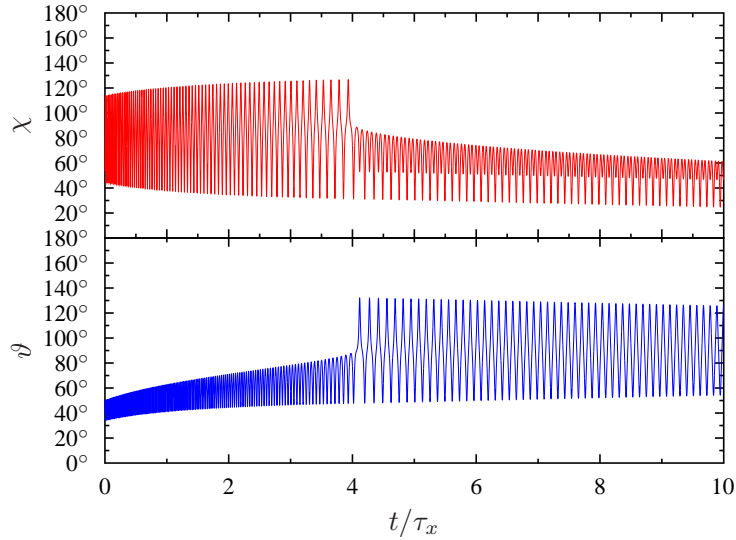


Рис. 1.11. Эволюция угла наклона χ и прецессионного угла ϑ со временем для пульсара со следующими параметрами: $\epsilon_x = 2.06 \times 10^{-13} I_{45}^{-1}$, $\epsilon_y = 1.13 \times 10^{-13} I_{45}^{-1}$, $\beta = 79^\circ$, и следующими начальными значениями: $P_0 = 0.1$ с, $\vartheta_0 = 40^\circ$, $\varphi_0 = 45^\circ$. Время измеряется в единицах τ_x .

1.5. Основные результаты главы 1

В главе 1 получены следующие основные результаты.

1. Получено выражение для аномальной компоненты электромагнитного момента сил, создаваемого произвольной полоидальной и тороидальной гармониками. При выводе были учтены как внутреннее поле звезды, так и наличие магнитосферы, заполненной плазмой.
2. Показано, что мелкомасштабное магнитное поле может давать вклад в аномальный момент, сравнимый с вкладом крупномасштабной дипольной компоненты. Также существенную роль может играть внутреннее тороидальное поле.
3. Прецессия, вызываемая мелкомасштабными магнитными полями, может приводить к осцилляции угла наклона с периодом прецессии и амплитудой в десятки градусов.

Эволюция вращения нейтронных звёзд с учётом диссипации энергии в ядре

2.1. Введение к главе 2

В предыдущей главе при выводе уравнений движения предполагалось, что нейтронная звезда вращается как абсолютно твердое тело. Такое упрощённое описание исключает из рассмотрения возможную в её внутренних слоях диссипацию вращательной энергии. Предполагается, что реальные нейтронные звёзды состоят из твёрдой коры и жидкого ядра [70]. Кора имеет толщину порядка одного километра и представляет собой кулоновский кристалл, составленный из полностью ионизованных атомов различных химических элементов. При плотностях выше так называемой плотности нейтронизации $\rho_{ND} \approx 4 \times 10^{11} \text{ г см}^{-3}$ кора также содержит в себе свободные нейтроны. Ядро нейтронной звезды вплоть до плотностей $\approx 2\rho_0$, где $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14} \text{ г см}^{-3}$ – ядерная плотность, представляет собой ферми-жидкость, состоящую в основном из нейтронов с небольшой примесью протонов, электронов и мюонов. Область плотностей, превышающих границу $\approx 2\rho_0$, называется внутренним ядром. В настоящий момент нет единой точки зрения на состав внутреннего ядра. Предполагается, что оно может содержать гипероны, там может происходить бозонная конденсация различных коллективных возбуждений и даже иметь место деконфайнмент кварков. Особенно следует отметить, что в недрах нейтронных звёзд протоны могут переходить в сверхпроводящее состояние, а нейтроны могут становиться сверхтекучими. Причём, по всей видимости, имеют место два типа нейтронной сверхтекучести: синглетное спаривание происходит во внутренней коре, триплетное спаривание – в ядре звезды [71].

Целый ряд диссипационных механизмов может оказывать влияние на вращение нейтронных звёзд, проявляясь на различных временных масштабах. По мере движения вектора угловой скорости Ω по поверхности нейтронной звезды, кора деформируется под действием центробежной силы. Постоянное изменение формы должно приводить к диссипации энергии и затуханию прецессии [66, 67].

Нейтронная сверхтекучесть также может оказывать влияние на вращательную динамику одновременно на нескольких временных масштабах. Предполагается, что сверх-

текучесть ответственна за так называемые глитчи, скачкообразное уменьшение периода вращения пульсара с последующей плавной релаксацией (на масштабах от нескольких дней до нескольких месяцев) к изначальному значению. Наиболее распространённая точка зрения заключается в том, что глитчи связаны с так называемым пиннингом вихревых нитей Фейнмана-Онзагера, их фиксацией относительно заряженной компоненты звезды, и последующим лавинообразным отрывом [72].

Пиннинг вихревых нитей также может приводить к прецессии. Шахам показал [73], что если реальная деформация звезды мала, частота прецессии, вызванной пиннингом, будет равна $\omega_p = \Psi\Omega$, где Ψ – отношение момента инерции части сверхтекучей жидкости, охваченной пиннингом, к полному моменту инерции нейтронной звезды. Период такой прецессии должен быть очень малым ($\Psi \sim 10^{-2}$). Все имеющиеся наблюдательные свидетельства в пользу прецессии дают значения периодов, как минимум на несколько порядков превосходящие данные значения [74, 75]. Таким образом, выводы Шахама, по всей видимости, противоречат наблюдениям. Более детальное теоретическое изучение этой проблемы, учитывающее неидеальный пиннинг не позволило разрешить эту проблему [69, 76].

Влияние внутренней структуры нейтронных звёзд на вековую эволюцию их вращения также изучалось. Яссон в своей работе [77] исследовал взаимодействие ядра нейтронной звезды с корой, на которую действует внешний момент сил. При этом рассматривалось как взаимодействие через магнитное поле, так и вязкое взаимодействие, однако автор ограничился только тормозящим (параллельным вектору Ω) моментом сил. Было показано, что какой бы из этих двух механизмов взаимодействия ни доминировал, кора и ядро очень близки к коротации и при торможении звезда может рассматриваться как твёрдое тело.

Касини и Монтемейер [68] исследовали эволюцию вращения нейтронной звезды, представив её в виде двухкомпонентной системы, каждая из компонент которой вращается твердотельно со своей угловой скоростью и взаимодействует со второй компонентой посредством линейного трения, пропорционального разности угловых скоростей. Предполагалось, что на компоненту, включающую в себя кору, действует внешний момент сил, состоящий из аномального момента и момента вида (1.36). Авторы показали, что аномальный момент, направленный перпендикулярно к векторам Ω и \mathbf{m} , в такой системе может влиять на эволюцию угла наклона. Эта модель рассматривается в разделе 2.2.

В разделах 2.3 и 2.4 настоящей главы обсуждаются некоторые общие закономерности вращения нейтронных звёзд с ядром, не идеально жёстко связанным с корой. Главы 3 и 4 посвящены конкретным физическим механизмам передачи углового момента из ядра в

кору и влиянию этих процессов на эволюцию вращения нейтронных звёзд.

2.2. Простейшая модель с диссипацией энергии

Будем считать, что нейтронная звезда состоит из коры и ядра. Пусть кора, как и раньше, вращается как твердое тело и направление вектора \mathbf{m} жёстко фиксировано в коре. При помощи вектора $\mathbf{\Omega}$ будем обозначать угловую скорость вращения коры. Наблюдательные параметры вращения, такие как период и угол наклона, определяются вектором $\mathbf{\Omega}$ (его величиной и ориентацией относительно фиксированного в коре вектора \mathbf{m}). Таким образом, нашей целью являются уравнения, описывающие эволюцию вектора $\mathbf{\Omega}$ в системе отсчёта коры нейтронной звезды.

Запишем уравнения баланса углового момента для нейтронной звезды:

$$d_t \mathbf{M}_* = \mathbf{K}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{M}_* – момент импульса звезды, \mathbf{K} – количество момента импульса, втекающего в звезду в единицу времени. Представив вектор \mathbf{M}_* в виде суммы моментов импульса коры \mathbf{M}_{crust} и ядра \mathbf{M}_{core} , перепишем это уравнение следующим образом:

$$d_t \mathbf{M}_{crust} = \mathbf{K} + \mathbf{N}, \quad (2.2)$$

формально введя обозначение

$$d_t \mathbf{M}_{core} = -\mathbf{N}. \quad (2.3)$$

Если вектор \mathbf{K} представляет собой момент сил, приложенный к коре, то фактически выражения (2.2) и (2.3) являются уравнениями баланса момента импульса для коры и для ядра соответственно. В такой интерпретации вектор \mathbf{N} представляет собой момент сил, описывающий взаимодействие компонент звезды.

Ряд утверждений относительно момента сил \mathbf{N} можно сформулировать, не привлекая никаких конкретных моделей взаимодействия, основываясь только на общих особенностях вращения нейтронных звёзд. Главной такой особенностью является сильная иерархия временных масштабов. В предыдущей главе уже упоминалось, что период прецессии T_p , как правило, на 2 – 4 порядка меньше временного масштаба вековой эволюции τ_x . Теперь же у нас появляется ещё один временной масштаб, характеризующий механизм передачи углового момента из ядра в кору. Обозначим его через τ_{rel} . Строго говоря, в ядре может действовать несколько механизмов и тогда не всегда возможно ввести один временной масштаб. В этом случае, через τ_{rel} будем обозначать наибольший из них.

Определим параметр τ_{rel} как временной масштаб на котором ядро после малого возмущения приходит к состоянию стационарного вращения, при условии, что кора вращается равномерно.

Основным нашим предположением, на котором будут основываться все дальнейшие выводы, является справедливость неравенства

$$\tau_{rel} \ll T_p. \quad (2.4)$$

Это неравенство позволяет существенно упростить задачу.

Рассмотрим сначала простейший пример [68]. Пусть кора и ядро имеют идеально сферическую форму и характеризуются моментами инерции I_{crust} и I_{core} соответственно. Пусть ядро нейтронной звезды также вращается как твёрдое тело, но с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, вообще говоря отличной от $\boldsymbol{\Omega}$. В этом случае уравнение (2.3) примет вид

$$I_{core} d_t \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{N}, \quad (2.5)$$

Пусть взаимодействие осуществляется посредством простого линейного трения: $\mathbf{N} = \alpha(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})$. Тогда, если мы обозначим разность угловых скоростей $(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})$ через $\boldsymbol{\mu}$ и перейдём в систему отсчёта, вращающуюся вместе с корой, мы получаем следующую систему уравнений:

$$d_t^* \boldsymbol{\Omega} = \frac{I_{core}}{I_*} \frac{\boldsymbol{\mu}}{\tau_{rel}} + \frac{\mathbf{K}}{I_{crust}}, \quad (2.6)$$

$$d_t^* \boldsymbol{\mu} + [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\mu}] + \frac{\boldsymbol{\mu}}{\tau_{rel}} = -\frac{\mathbf{K}}{I_{crust}}. \quad (2.7)$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\tau_{rel} = \frac{1}{\alpha} \frac{I_{core} I_{crust}}{I_*}, \quad (2.8)$$

и $I_* = I_{crust} + I_{core}$.

Пусть в начальный момент времени справедливо неравенство $\mu \ll \Omega$. Рассмотрим уравнение (2.7) и предположим сначала, что входящие в него величины $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{K} постоянны. В этом случае его решение будет иметь вид

$$\boldsymbol{\mu} = \Re \left\{ \mu_{0\perp} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) e^{i\Omega t} + \mu_{0\parallel} \mathbf{e}_z \right\} e^{-t/\tau_{rel}} + \boldsymbol{\mu}_{stat}, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{e}_z = \boldsymbol{\Omega}/\Omega$, $\mu_{0\parallel} = \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \mathbf{e}_z$, $\boldsymbol{\mu}_{0\perp} = \boldsymbol{\mu} - \mu_{0\parallel} \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_x = \boldsymbol{\mu}_{0\perp}/\mu_{0\perp}$ и

$$\boldsymbol{\mu}_{stat} = -\frac{1}{1 + \Omega^2 \tau_{rel}^2} \frac{\tau_{rel}}{I_{crust}} \left\{ \mathbf{K} + \tau_{rel}^2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{K}) \boldsymbol{\Omega} - \tau_{rel} [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K}] \right\}. \quad (2.10)$$

За время порядка τ_{rel} разность угловых скоростей $\boldsymbol{\mu}$ проэволюционирует к стационарной величине $\boldsymbol{\mu}_{stat}$. В частности, при $\mathbf{K} = 0$, величина $\boldsymbol{\mu}_{stat}$ будет равна нулю. Взглянув теперь

на уравнение (2.6), можно сказать, что за тот же промежуток времени вектор $\boldsymbol{\Omega}$ изменится на величину такого же порядка: $\delta\boldsymbol{\Omega} \sim (I_{core}/I_*)\boldsymbol{\mu} \approx \boldsymbol{\mu} \ll \boldsymbol{\Omega}$. То есть относительное изменение угловой скорости коры будет мало и, рассматривая уравнение (2.7), её действительно можно считать постоянной величиной на временах порядка τ_{rel} . Изменение вектора \mathbf{K} за тот же промежуток времени можно оценить как $\delta K \sim I_{crust}\delta\boldsymbol{\Omega}/T_p \sim I_{crust}\boldsymbol{\mu}/T_p$. Принимая во внимание неравенство (2.4), видим, что $\delta K/I_{crust}$ мало по сравнению со слагаемым $\boldsymbol{\mu}/\tau_{rel}$ и вектор \mathbf{K} в уравнении (2.7) также можно считать постоянным на масштабах времени релаксации.

Предположим теперь, что разность угловых скоростей $\boldsymbol{\mu}$ близка к (2.10) и оценим поправку к этой величине μ_{cor} , компенсирующую медленное изменение $\boldsymbol{\Omega}$. Взяв производную $d_t^*\boldsymbol{\mu}_{stat}$ и предполагая, что $d_t^*\boldsymbol{\Omega} \sim \boldsymbol{\Omega}/T_p$, получим следующие оценки:

$$\mu_{cor} \sim \frac{\tau_{rel}}{T_p^2} \quad (2.11)$$

в случае $\tau_{rel} \gg \Omega^{-1}$ и

$$\mu_{cor} \sim \frac{\tau_{rel}^2}{T_p^2} \Omega \quad (2.12)$$

в случае $\tau_{rel} \ll \Omega^{-1}$. В обоих случаях поправка оказывается много меньше, чем $\mu_{stat} \sim (\tau_{rel}/T_p)\Omega$.

Таким образом, мы видим, что спустя время $t \gg \tau_{rel}$, разность угловых скоростей $\boldsymbol{\mu}$ с хорошей точностью будет равна $\boldsymbol{\mu}_{stat}$, а слагаемое $d_t^*\boldsymbol{\mu}$ становится мало по сравнению с остальными членами уравнения (2.7). Пренебрежение слагаемыми, содержащими производную по времени во вращающейся с корой системе отсчёта, в уравнениях, описывающих отклонение вращения ядра от твердотельного вращения с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ мы будем называть *квазистационарным приближением*.

В дальнейшем нам будет удобнее выражать квазистационарные отклонения от твердотельного вращения через вектор $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ вместо \mathbf{K} . Для величины $\boldsymbol{\mu}$ это легко сделать при помощи уравнения (2.6):

$$\boldsymbol{\mu}_{stat} = -\frac{\alpha I_{core}}{\alpha^2 + \Omega^2 I_{core}^2} \left\{ \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \left(\frac{I_{core}}{\alpha} \right)^2 \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}) - \frac{I_{core}}{\alpha} [\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}] \right\}. \quad (2.13)$$

Таким образом, в квазистационарном приближении момент импульса ядра $I_{core}(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\mu})$ и момент сил $\mathbf{N} = \alpha\boldsymbol{\mu}$ определяются мгновенными значениями $\boldsymbol{\Omega}$ и $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ и фактически не зависят от предыстории.

2.3. Квазистационарное приближение

Вектор $\dot{\Omega}$ является источником отклонения вращения ядра звезды от коротации с корой. Так как величина $|\dot{\Omega}|/\Omega^2$ для нейтронных звёзд крайне мала, мы будем рассматривать только линейные отклонения. Это означает, что момент импульса ядра представим в виде

$$\mathbf{M}_{core} \approx I_{core}\Omega + \delta\mathbf{M}_{core}^{(nsp)} + \mathbf{M}_{core}^{(1)}. \quad (2.14)$$

Здесь нулевое приближение (по аналогии с предыдущей главой диссертации) разбито на два слагаемых: момент импульса в приближении сферического ядра $I_{core}\Omega$, и малую поправку на несферичность $\delta\mathbf{M}_{core}^{(nsp)}$. Третье слагаемое в этом выражении – линейная по $\dot{\Omega}$ поправка, описывающая «нетвердотельность» вращения. Момент сил \mathbf{N} также можно представить в виде суммы

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}^{(0)} + \mathbf{N}^{(1)} \quad (2.15)$$

где $\mathbf{N}^{(0)}$ – не зависящая от $\dot{\Omega}$ часть, $\mathbf{N}^{(1)}$ – часть, линейная по $\dot{\Omega}$. Представим $\mathbf{N}^{(1)}$ в виде $N^{(1)i} = S^{ij}\dot{\Omega}^j$, где S^{ij} – тензор, не зависящий от $\dot{\Omega}$. Представим тензор S^{ij} в виде

$$S^{ij} = \begin{pmatrix} T^{kl} & \mathbf{V} \\ \mathbf{U} & -S_1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

где T^{kl} – двумерный тензор, \mathbf{V} и \mathbf{U} – двумерные векторы, S_1 – скалярный коэффициент. Здесь ось z выбрана вдоль направления Ω . Будем далее предполагать, что в системе отсутствуют какие-либо выделенные направления, кроме векторов Ω и $\dot{\Omega}$. Если это предположение верно, поворот системы координат вокруг оси z не должен приводить к изменению тензора S^{ij} . Следовательно, единственными возможными векторами \mathbf{V} и \mathbf{U} являются нулевые векторы, тензор T^{kl} должен быть представим в виде $T^{kl} = -S_2\delta^{kl} - S_3e^{kl}$, где δ^{kl} – двумерный тензор Кронекера, e^{kl} – двумерный символ Леви-Чивиты. Таким образом, получаем

$$\mathbf{N}^{(1)} = -S_1I_{core}\dot{\Omega}_{||} - S_2I_{core}\dot{\Omega}_{\perp} + S_3I_{core}[\mathbf{e}_{\Omega} \times \dot{\Omega}_{\perp}], \quad (2.17)$$

где S_1 , S_2 и S_3 – некоторые безразмерные функции, не зависящие от $\dot{\Omega}$, и введены обозначения: $\dot{\Omega}_{||} = \Omega(\Omega \cdot \dot{\Omega})/\Omega^2$ и $\dot{\Omega}_{\perp} = \dot{\Omega} - \dot{\Omega}_{||}$. Здесь вектор $\dot{\Omega}_{||}$ представляет собой скорость замедления вращения нейтронной звезды, а вектор $\dot{\Omega}_{\perp}$ описывает поворот оси вращения.

Продифференцируем (2.14) по времени:

$$\begin{aligned} d_t\mathbf{M}_{core} &\approx I_{core}\dot{\Omega} + d_t^*\delta\mathbf{M}_{core}^{(nsp)} + \Omega \times \delta\mathbf{M}_{core}^{(nsp)} + d_t^*\delta\mathbf{M}_{core}^{(1)} + \Omega \times \delta\mathbf{M}_{core}^{(1)} \\ &\approx I_{core}\dot{\Omega} + \Omega \times \delta\mathbf{M}_{core}^{(nsp)} + \Omega \times \delta\mathbf{M}_{core}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь мы вновь в рамках квазистационарного приближения пренебрегли слагаемыми $d_t^* \delta \mathbf{M}_{core}^{(nsp)}$ и $d_t^* \delta \mathbf{M}_{core}^{(1)}$, содержащими дополнительную степень малого параметра $(T_p \Omega)^{-1}$, по сравнению со слагаемыми $\boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{M}_{core}^{(nsp)}$ и $\boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{M}_{core}^{(1)}$. Подставляя (2.18) в (2.3), складывая результат с (2.2) и умножая всё на $\boldsymbol{\Omega}$, получим

$$I_* (\boldsymbol{\Omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}) = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{K}. \quad (2.19)$$

С другой стороны, подставляя (2.17) в (2.2) и вновь умножая результат на $\boldsymbol{\Omega}$, получим

$$(I_{crust} + S_1 I_{core}) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}) = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{K}. \quad (2.20)$$

Сравнивая (2.20) с (2.19), видим, что $S_1 = 1$. Таким образом, уравнение, описывающее торможение звезды, ничем не отличается от соответствующего уравнения для звезды, вращающейся твердотельно. С физической точки зрения пренебрежение производными d_t^* означает пренебрежение диссипацией вращательной энергии. В отсутствие диссипации механическая энергия может убывать только благодаря внешним силам.

Подставим (2.17) и (2.18) в уравнение (2.3):

$$\boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{M}_{core}^{(nsp)} + \mathbf{N}^{(0)} + \boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{M}_{core}^{(1)} + (1 - S_2) I_{core} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp} + S_3 I_{core} [\mathbf{e}_{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp}] = 0 \quad (2.21)$$

Отсюда, во-первых, видим, что

$$\mathbf{N}^{(0)} = -\boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{M}_{core}^{(nsp)}. \quad (2.22)$$

Во-вторых, умножая выражение (2.21) поочередно на $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp}$ и $\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp}$, получаем

$$S_2 = 1 - \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp}] \cdot \delta \mathbf{M}_{core}^{(1)}}{I_{core} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp}^2}, \quad S_3 = -\frac{\boldsymbol{\Omega} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp} \cdot \delta \mathbf{M}_{core}^{(1)}}{I_{core} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp}^2}. \quad (2.23)$$

Отсюда легко видеть, что пределу идеально жёсткой связи ядра с корой соответствуют значения $S_2 = 1$, $S_3 = 0$. В этом пределе мы получаем уравнения, обсуждавшиеся в предыдущей главе.

Обсудим противоположный предельный случай. Формально он соответствует бесконечно большому времени релаксации. Мы, однако, должны помнить, что квазистационарное приближение справедливо до тех пор, пока выполняется неравенство (2.4). Поэтому более аккуратным будет говорить о случае $\Omega \tau_{rel} \gg 1$. Обратимся сначала вновь к описанной выше простейшей модели и рассмотрим случай $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp}$. При $\Omega \tau_{rel} \gg 1$ третье слагаемое в левой части уравнения (2.7) оказывается много меньше второго слагаемого. Квазистационарное решение этого уравнения будет стремиться к конечному пределу

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\perp}}{\Omega^2}, \quad (2.24)$$

формально не зависящему от коэффициента α . Нужно, однако, помнить, что от этого коэффициента зависит время релаксации решения к (2.24).

Пусть теперь ядро не твёрдый шар, а жидкость, способная, вообще говоря, вращаться дифференциально. Будем постепенно уменьшать взаимодействие таким образом, что силы, участвующие в передаче углового момента будут становиться все меньше по сравнению с силой Кориолиса. Это значит, что в пределе в выражение для поля скоростей в основном объёме ядра не будут входить никакие величины, описывающие взаимодействие (коэффициенты вязкости, величина магнитного поля и т. п.). Взаимодействие может сильно влиять на поле скоростей только вблизи коры, где течение должно подстраиваться под её вращение. С другой стороны, несмотря на то, что взаимодействие мало, оно имеет место и стремится подавить любое дифференциальное вращение. Источником же дифференциального вращения могут быть только граничные условия на границе ядра с корой, которые в основном объёме ядра жидкость не чувствует из-за малости сил взаимодействия. Таким образом, в квазистационарном приближении ядро должно вращаться «твердотельно». Естественно предположить, что угловая скорость такого вращения будет равна (2.24). В следующей главе это утверждение будет обосновано более строго. Подставив (2.24) в (2.23), получим $S_2 = 0$, $S_3 = 0$. То есть в пределе слабого взаимодействия оба коэффициента малы.

Если $\dot{\Omega}_{||} \neq 0$, квазистационарное решение (2.13) расходится при $\alpha \rightarrow 0$. Это связано с тем, что $\dot{\Omega}_{||}$ в отличие от $\dot{\Omega}_{\perp}$ не может быть скомпенсировано силой Кориолиса (см. подробнее в следующей главе).

Обращаясь вновь к рассмотренной простейшей модели, подставляя (2.13) в $\mathbf{N} = \alpha\mu$, видим, что

$$S_1 = 1, \quad S_2 = \frac{Y^2}{Y^2 + 1}, \quad S_3 = \frac{Y}{Y^2 + 1}, \quad (2.25)$$

где величину $Y = (I_{crust}/I_*)(\tau_{rel}\Omega)^{-1}$ можно назвать параметром связи. Устремляя Y к бесконечности получаем как и полагается $S_2 = 1$, $S_3 = 0$.

Прежде чем двигаться дальше, следует сделать одно важное замечание. Мы ввели τ_{rel} , как временной масштаб релаксации ядра к стационарному вращению при условии, что кора вращается равномерно. Тем самым мы постулировали, что при $\dot{\Omega} = 0$ система всегда приходит к стационарному вращению. Нас, однако, интересует случай $\dot{\Omega} \neq 0$. Технически мы должны рассматривать уравнения типа (2.7) с ненулевой правой частью. Для рассмотренной простейшей модели мы в явном виде получили нестационарное решение (2.9), доказав тем самым, что оно релаксирует к μ_{stat} . В общем же случае нет гарантии

того, что даже при $\dot{\Omega} = const \neq 0$, и даже несмотря на формальное наличие стационарного решения, не будет возникать каких-нибудь осцилляций, не позволяющих системе прийти к квазистационарному состоянию за время, удовлетворяющее условию (2.4). Более того, ряд пульсаров, по-видимому, демонстрирует невыполнение этого условия. Речь идёт о так называемых глитчах, спонтанных сбоях частоты вращения. В настоящее время нет общепринятой теории, описывающей данное явление. Однако чаще всего предполагается, что механизм возникновения глитчей связан с явлением так называемого пиннинга вихревых нитей Фейнмана-Онзагера, существующих во вращающейся сверхтекучей нейронной жидкости. Под пиннингом понимается «прилипание» вихревых нитей к каким-либо объектам (атомным ядрам в коре, магнитным флаксоидам в ядре). Скачки частоты вращения пульсара связывают с чередованием стадии пиннинга и лавинообразным отрывом вихревых нитей. Отрыв, в свою очередь, связывают с достижением в следствие замедления вращения коры критической разности угловых скоростей коры и сверхтекучей жидкости. Таким образом, говоря с использованием введённых нами терминов, ненулевой вектор $\dot{\Omega}$ приводит к осцилляциям, препятствующим релаксации ядра к квазистационарному вращению с корой. Для изучения вековой эволюции вращения таких систем, по-видимому, следует вводить некоторую процедуру усреднения уравнений. Данный вопрос, однако, выходит за рамки настоящей диссертации и является материалом для будущих исследований. В дальнейшем же мы будем считать, что квазистационарный режим вращения достигается и рассматриваемые системы приходят к нему за время, малое по сравнению с характерными временами эволюции вращения.

2.4. Уравнения движения

Подставим в уравнение (2.2) выражение для момента сил \mathbf{N} , перенеся его в левую часть и учитывая (2.22):

$$d_t \mathbf{M}_{crust} + \Omega \times \delta \mathbf{M}_{core}^{(nsp)} + I_{core} \dot{\Omega}_{||} + S_2 I_{core} \dot{\Omega}_{\perp} - S_3 I_{core} [\mathbf{e}_z \times \dot{\Omega}_{\perp}] = \mathbf{K}. \quad (2.26)$$

Первое слагаемое представим в виде

$$d_t \mathbf{M}_{crust} = I_{crust} \dot{\Omega} + d_t^* \delta \mathbf{M}_{crust}^{(nsp)} + \Omega \times \delta \mathbf{M}_{crust}^{(nsp)}. \quad (2.27)$$

Второе слагаемое в выражении (2.27) пренебрежимо мало по сравнению с третьим (см. параграф 1.4). Учитывая это, после подстановки (2.27) в (2.26) получим

$$I_{crust} \dot{\Omega} + \Omega \times \delta \mathbf{M}^{(nsp)} + I_{core} \dot{\Omega}_{||} + S_2 I_{core} \dot{\Omega}_{\perp} + S_3 I_{core} [\mathbf{e}_z \times \dot{\Omega}_{\perp}] = \mathbf{K}. \quad (2.28)$$

В это уравнение входит только общая поправка на несферичность звезды $\delta\mathbf{M}^{(nsp)} = \delta\mathbf{M}_{crust}^{(nsp)} + \delta\mathbf{M}_{core}^{(nsp)}$. Это значит, что нет необходимости вычислять данные поправки отдельно для коры и ядра. В это же слагаемое может быть включена эффективная несферичность, создаваемая магнитным полем.

Мы получили уравнение на вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$. Как и в предыдущей главе, будем задавать этот вектор с помощью его абсолютного значения Ω и двух углов ϑ и φ . Разрешим (2.28) относительно $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ и представим результат в виде трёх скалярных уравнений:

$$d_t\Omega = \frac{K_0}{I_*} \left(\tilde{k}_\Omega + \tilde{k}_m \cos \chi \right) \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} & \{ (I_{crust} + S_2 I_{core})^2 + S_3^2 I_{core}^2 \} d_t\vartheta = \\ & (I_{crust} + S_2 I_{core}) \left\{ (\mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_m) \frac{K_0 \tilde{k}_m}{\Omega} + (\epsilon_x - \epsilon_y) I_* \Omega \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \right\} - \\ & - S_3 I_{core} \left\{ \frac{K_0 \tilde{k}_m}{\Omega} (\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_m) + (\epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi) I_* \Omega \sin \vartheta \cos \vartheta \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} & \{ (I_{crust} + S_2 I_{core})^2 + S_3^2 I_{core}^2 \} \sin \vartheta d_t\varphi = \\ & (I_{crust} + S_2 I_{core}) \left\{ (\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_m) \frac{K_0 \tilde{k}_m}{\Omega} + (\epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi) I_* \Omega \sin \vartheta \cos \vartheta \right\} + \\ & + S_3 I_{core} \left\{ (\mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_m) \frac{K_0 \tilde{k}_m}{\Omega} + (\epsilon_x - \epsilon_y) I_* \Omega \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \right\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

В дальнейшем мы, однако же, ограничимся рассмотрением более простых систем, в которых звезда и её магнитное поле симметричны относительно оси \mathbf{e}_m . В этом случае $\chi = \vartheta$, $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon$, и уравнения принимают вид

$$d_t\Omega = \frac{K_0}{I_*} \left(\tilde{k}_\Omega + \tilde{k}_m \cos \chi \right), \quad (2.32)$$

$$d_t\chi = -\frac{1}{\Omega} \frac{(I_{crust} + S_2 I_{core}) K_0 \tilde{k}_m + \epsilon S_3 I_{core} I_* \Omega^2 \cos \chi}{(I_{crust} + S_2 I_{core})^2 + S_3^2 I_{core}^2} \sin \chi, \quad (2.33)$$

$$d_t\varphi = \frac{1}{\Omega} \frac{\epsilon (I_{crust} + S_2 I_{core}) I_* \Omega^2 \cos \chi - S_3 I_{core} K_0 \tilde{k}_m}{(I_{crust} + S_2 I_{core})^2 + S_3^2 I_{core}^2}, \quad (2.34)$$

Как уже отмечалось ранее, первое уравнение не отличается от «твердотельного» аналога. Заметим, однако, что это, вообще говоря, не означает, что замедление вращения звезды будет происходить точно также, как если бы она была твёрдым телом. Величина тормозящего звезду момента сил зависит от углов χ и φ , чья эволюция отличается от «твердотельной».

Диссипация энергии вследствие дифференциальности вращения звезды приводит к двум основным изменениям в эволюции её вращения. Во-первых, как мы увидим в следующих главах и как мы можем убедиться, воспользовавшись выражениями (2.25), значения коэффициентов S_2 и S_3 таковы, что

$$\frac{I_{crust} + S_2 I_{core}}{(I_{crust} + S_2 I_{core})^2 + S_3^2 I_{core}^2} > \frac{1}{I_*}. \quad (2.35)$$

Это означает, что эволюция угла наклона под действием $K_0 \tilde{k}_m$ будет происходить быстрее, чем в «твердотельном» случае. Аналогично быстрее будет происходить прецессия. В пределе слабой связи ($S_2, S_3 \ll I_{crust}/I_{core}$) характерный временной масштаб обоих процессов уменьшится в I_*/I_{crust} раз.

Во-вторых, в уравнение (2.33) через коэффициент S_3 теперь входит эффективная сплюснутость звезды. Даже в отсутствии внешнего момента сил угол наклона будет эволюционировать. Наличие диссипации приводит к затуханию прецессии. Система стремится выстроить угловую скорость Ω вдоль главной оси, соответствующей наибольшему моменту инерции. Такое состояние соответствует минимуму механической энергии при заданном угловом моменте. В случае $\epsilon > 0$ угол будет эволюционировать к 0° , в противном случае – к 90° . При не равном нулю внешнем моменте сил этот эффект становится доминирующим, когда

$$S_3 > \left(\frac{I_{crust}}{I_{core}} + S_2 \right) \frac{K_0 \tilde{k}_m}{\epsilon I_* \Omega^2 \cos \chi}. \quad (2.36)$$

Формально таким же образом $K_0 \tilde{k}_m$ влияет на прецессию звезды. Однако для того, чтобы это влияние оказалось существенным, требуется выполнение условия

$$S_3 \gtrsim \left(\frac{I_{crust}}{I_{core}} + S_2 \right) \frac{\epsilon I_* \Omega^2 \cos \chi}{K_0 \tilde{k}_m}. \quad (2.37)$$

На практике, принимая во внимание то, что, как мы увидим дальше, $S_2, S_3 < 1$, это условие вряд ли может выполняться.

В пределе слабой связи ($S_2, S_3 \ll I_{crust}/I_{core}$) период прецессии будет равен

$$T_p = \frac{I_{crust}}{I_*} \frac{P}{\epsilon \cos \chi}. \quad (2.38)$$

Таким образом, он оказывается в $I_*/I_{crust} \sim 10^2$ раз меньше, чем период прецессии «твёрдой» звезды.

2.5. Основные результаты главы 2

В главе 2 получены следующие основные результаты.

1. Выведены уравнения, описывающие эволюцию вращения нейтронной звезды, имеющей форму трёхосного эллипсоида, под действием внешнего электромагнитного момента сил, учитывающие внутреннюю диссипацию энергии.
2. Финальной стадией эволюции угла наклона является состояние, в котором звезда вращается вокруг главной оси инерции, соответствующей наибольшему моменту инерции. В случае осесимметричной звезды с осью симметрии, совпадающей с магнитной осью финальной стадией является либо соосный пульсар (при эффективно сплюснутой звезде), либо ортогональный пульсар (при эффективно вытянутой звезде).

Вращение нейтронных звёзд с немагнитным ядром

3.1. Введение к главе 3

Как уже упоминалось, в настоящий момент нет ясного понимания того, как устроено магнитное поле внутри нейтронной звезды. Ситуацию ещё больше осложняет то, что протоны в ядре звезды по всей видимости должны находиться в сверхпроводящем состоянии. Хорошо известно, что в природе возможны два типа сверхпроводимости [78]. Принадлежность сверхпроводника к определённому типу определяется величиной параметра Гинзбурга-Ладнау κ_{GL} , представляющего собой отношение глубины проникновения магнитного поля к параметру порядка. Если $\kappa_{GL} < 1/\sqrt{2}$, сверхпроводник относится к первому типу. В этом случае магнитное поле вытесняется из объёма сверхпроводника. Если $\kappa_{GL} > 1/\sqrt{2}$, мы имеем дело со сверхпроводником второго типа. Такие материалы пропускают через себя магнитное поле, организуя его в так называемые флаксоиды, нитеподобные структуры, каждая из которых несёт квант потока магнитного поля, равный $\Phi_0 = 2\pi\hbar c/2e \sim 2 \times 10^{-7}$ Гс см². Микроскопические расчёты показывают, что в ядрах нейтронных звёзд должна иметь место сверхпроводимость второго типа [4]. Однако этот вывод сталкивается с определёнными сложностями. В частности, как уже упоминалось, пиннинг вихревых нитей Фейнмана-Онзагера на флаксоидах должен приводить к очень быстрой прецессии, что противоречит наблюдениям [69, 73, 76]. Так или иначе, в литературе время от времени рассматриваются модели, в которых предполагается, что внутреннее магнитное поле нейтронной звезды располагается в её коре [22, 79, 80]. Разумеется, даже в случае наличия в ядре сверхпроводника первого типа такая конфигурация является упрощённой. Дело в том, что хотя формально магнитное поле и должно выталкиваться из ядра, характерные времена этого процесса многократно превосходят время жизни радиопульсаров. По всей видимости, в ядро нейтронной звезды должно представлять собой некую доменную структуру, в которой области сверхпроводимости чередуются с веществом в нормальном состоянии [81, 82]. В любом случае изучение моделей без магнитного поля можно рассматривать как первый шаг к более реалистичным моделям, учитывающим магнитное поле. Данная глава посвящена исследованию вращательной эволюции радиопульсаров с магнитным полем, не проникающим в ядро нейтронной звезды.

3.2. Основные предположения

Будем рассматривать нейтронную звезду, как абсолютно твёрдую оболочку (кору), содержащую жидкое ядро. Будем считать, что внутренняя граница коры идеально сферически симметрична и имеет радиус r_c . Будем предполагать, что магнитное поле не проникает в ядро или оно настолько слабо, что не оказывает влияния на взаимодействие коры и ядра. Согласно оценкам Яссона [77] в случае пульсара в крабовидной туманности в ядро должно проникать магнитное поле слабее 10^9 Гс, если протоны ядра находятся в нормальном состоянии, и поле слабее 10^3 Гс, если имеет место протонная сверхпроводимость второго рода. Подробнее магнитное взаимодействие обсуждается в главе 4.

Для описания вращения жидкого ядра воспользуемся уравнением Навье-Стокса

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla P / \rho + \nabla \Phi = \mathbf{f}_v \quad (3.1)$$

и уравнением неразрывности

$$\partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь \mathbf{v} – скорость течения, ρ – массовая плотность, P – давление,

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' - \quad (3.3)$$

гравитационный потенциал, \mathbf{f}_v – сила вязкости, действующая на единицу массы жидкости. Кроме того, поле скоростей должно удовлетворять граничному условию $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ при $r = r_c$. Здесь и далее все уравнения формулируются в Ньютоновском приближении. Эффекты ОТО не учитываются.

Всюду далее мы будем считать, что вещество ядра нейтронной звезды состоит только из протонов, нейтронов и электронов. С хорошей точностью ядро нейтронной звезды можно считать изотермичным [83]. Более того, это вещество очень сильно вырождено. Два этих факта позволяют переписать градиент давления в виде

$$\nabla P = \rho_n \nabla \mu_n + \rho_p \nabla \mu_p + \rho_e \nabla \mu_e, \quad (3.4)$$

пренебрегнув в нём температурным слагаемым $S \nabla T$. Здесь μ_n , μ_p и μ_e – химические потенциалы нейтронов, протонов и электронов, приходящиеся на единицу массы, ρ_n , ρ_p и ρ_e – соответствующие массовые плотности. Используя условие квазинейтральности $\rho_p = (m_p/m_e)\rho_e$, тот же градиент можно переписать в следующем виде:

$$\nabla P = \rho \nabla \mu_n + y \rho \nabla (\mu_c - \mu_n), \quad (3.5)$$

где мы формально ввели эффективный химический потенциал заряженной компоненты

$$\mu_c = \frac{m_p \mu_p + m_e \mu_e}{m_p + m_e}. \quad (3.6)$$

Здесь также через y мы обозначили соотношение ρ_c/ρ , где $\rho_c = \rho_p + \rho_e$ – массовая плотность заряженной компоненты.

Предположим сначала, что химический состав постоянен во всём объёме ядра ($y = const$). Перепишем уравнения (3.1) и (3.2) во вращающейся вместе с корой системе отсчёта:

$$\partial_t^* \mathbf{u} + 2[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}] + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \varkappa = -[\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}] + \mathbf{f}_v, \quad (3.7)$$

$$\partial_t^* \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.8)$$

Тут мы ввели обозначение $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ для отклонения поля скоростей от коротации с корой, а также ввели функцию $\varkappa = \mu_n + y(\mu_c - \mu_n) + \Phi - \frac{1}{2}[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]^2$. С точки зрения наблюдателя во вращающейся системе отсчёта неравномерность вращения звезды выглядит как эффективная сила $\mathbf{f}_P = -[\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}]$, подкручивающая жидкость. При решении задач о движении жидкости в прецессирующем контейнере это слагаемое иногда называется силой Пуанкаре [84, 85]. Для краткости мы будем использовать это название, несмотря на то, что не будем ограничиваться исследованием только прецессии звезды.

Пусть неравномерность вращения коры является единственным источником \mathbf{u} . Тогда, если $\dot{\mathbf{\Omega}} = 0$, уравнение (3.7) сведётся к уравнению гидростатического равновесия

$$\nabla \left(\mu_n^{(0)} + y(\mu_c^{(0)} - \mu_n^{(0)}) + \Phi^{(0)} - \frac{1}{2}[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]^2 \right) = 0. \quad (3.9)$$

Здесь и далее надстрочным индексом «(0)» мы будем обозначать гидростатические значения всех величин. Мы будем также считать, что гидростатические величины зависят только от расстояния от центра r звезды. Строго говоря, это предположение не является самосогласованным, так как в уравнении (3.9) присутствует центробежная сила, нарушающая сферическую симметрию. Однако её учёт даст поправки порядка ϵ , где ϵ – коэффициент сплюснутости (см. главу 1).

Для дальнейшего анализа удобно будет временно перейти к безразмерным величинам: $\mathbf{r} = r_c \mathbf{x}$, $\nabla = r_c^{-1} \tilde{\nabla}$, $t = \tau/\Omega$, $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$, $\dot{\mathbf{\Omega}} = |\dot{\mathbf{\Omega}}| \mathbf{e}_{\dot{\Omega}}$, $\mathbf{u} = (|\dot{\mathbf{\Omega}}|/\Omega) r_c \mathbf{q}$, $\varkappa = \Omega^2 r_c^2 \tilde{\varkappa}$, $\rho = \rho^{(b)} \tilde{\rho}$, $\mathbf{f}_v = |\dot{\mathbf{\Omega}}| r_c \tilde{\mathbf{f}}_v$, $\rho^{(b)} = \rho^{(0)}(r_c)$. В безразмерном виде уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$\partial_\tau^* \mathbf{q} + 2[\mathbf{e}_z \times \mathbf{q}] + \varepsilon(\mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla}) \mathbf{q} + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\nabla} \tilde{\varkappa} = -[\mathbf{e}_{\dot{\Omega}} \times \mathbf{r}] + \tilde{\mathbf{f}}_v, \quad (3.10)$$

$$\partial_\tau^* \tilde{\rho} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \mathbf{q}) = 0, \quad (3.11)$$

Здесь был введён параметр $\varepsilon = |\dot{\Omega}|/\Omega^2$ (не следует путать с параметром ε из главы 1). Переходя к безразмерной форме уравнений, мы формально считали векторы Ω и $\dot{\Omega}$ не зависящими от времени. Допустимость данной операции следует из предполагаемого нами выполнения условия квазистационарности.

Параметр ε , представляющий собой отношение временного масштаба изменения вектора Ω к периоду обращения пульсара, крайне мал. Все величины могут быть разложены в ряд по этому параметру:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(0)} + \varepsilon \tilde{\rho}^{(1)} + O(\varepsilon^2), \quad (3.12)$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}^{(0)} + \varepsilon \tilde{\Phi}^{(1)} + O(\varepsilon^2), \quad (3.13)$$

$$\tilde{\mu}_\alpha = \tilde{\mu}_\alpha^{(0)} + \varepsilon \tilde{\mu}_\alpha^{(1)} + O(\varepsilon^2). \quad (3.14)$$

Подставим эти разложения в уравнения (3.10) и (3.11) и пренебрежём квадратичными по ε слагаемыми:

$$\partial_\tau^* \mathbf{q} + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{q} + \tilde{\nabla} \tilde{\varkappa}^{(1)} = -[\mathbf{e}_\Omega \times \mathbf{x}] + \tilde{\mathbf{f}}_v^{(1)}, \quad (3.15)$$

$$\partial_\tau^* \tilde{\rho}^{(1)} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}^{(0)} \mathbf{q}) = 0 \quad (3.16)$$

Здесь мы также учли соотношение (3.9).

Поскольку интересующие нас скорости много меньше скорости звука, слагаемым с производной по времени в уравнении (3.16) можно пренебречь:

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}^{(0)} \mathbf{q}) = 0. \quad (3.17)$$

Перейдём обратно к размерным величинам:

$$\partial_t^* \mathbf{u} + 2\Omega \times \mathbf{u} + \nabla \varkappa^{(1)} = -[\dot{\Omega} \times \mathbf{r}] + \mathbf{f}_v^{(1)}, \quad (3.18)$$

$$\text{div} (\rho^{(0)} \mathbf{u}) = 0. \quad (3.19)$$

Эти два уравнения вместе с уравнением (2.2) и граничным условием

$$\mathbf{u}|_{r=r_c} = 0 \quad (3.20)$$

определяют динамику вращения нейтронной звезды. Пренебрежение температурным слагаемым в градиенте давления фактически позволило исключить из этой системы уравнение (3.3), связывающее $\rho^{(1)}$ с $\Phi^{(1)}$. Это уравнение необходимо только для вычисления величин $\rho^{(1)}$, $\mu^{(1)}$ или $\Phi^{(1)}$, которыми мы интересоваться не будем. Таким образом, уравнение (3.15) формально выглядит точно также, как если бы мы рассматривали несжимаемую жидкость, не подверженную действию сил гравитации. Уравнение (3.19), однако,

отличается от уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости из-за зависящей от координат функции $\rho^{(0)}$.

Единственное, что осталось определить, это момент сил \mathbf{N} , входящий в уравнение (2.2). Для этого рассмотрим подробнее вязкое взаимодействие. Сила вязкости, действующая на жидкость, может быть представлена в следующем виде [86]:

$$f_v^i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r^k} \pi^{ik}, \quad (3.21)$$

где

$$\pi^{ik} = \eta \left(\frac{\partial v^i}{\partial r^k} + \frac{\partial v^k}{\partial r^i} - \frac{2}{3} \delta^{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \zeta \delta^{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (3.22)$$

– вязкий тензор натяжений, η и ζ – коэффициенты сдвиговой и объёмной вязкостей. Здесь верхний индекс означает номер компоненты в некотором декартовом базисе и предполагается суммирование по дважды повторяющимся индексам.

Если перейти к безразмерным величинам и пренебречь слагаемыми порядка ε^2 , тензор натяжений и сила вязкости примут следующие вид:

$$\pi^{ij(1)} \approx E \tilde{\eta}^{(0)} \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^k} + \frac{\partial q^k}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta^{ik} \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{q} \right) + E' \tilde{\zeta}^{(0)} \delta^{ik} \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{q}, \quad (3.23)$$

$$\tilde{f}_v^{i(1)} = \frac{1}{\tilde{\rho}^{(0)}} \left\{ E \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\tilde{\eta}^{(0)} \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^k} + \frac{\partial q^k}{\partial x^i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\left(\frac{2E}{3} \tilde{\eta}^{(0)} - E' \tilde{\zeta}^{(0)} \right) \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{q} \right] \right\} = \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\tilde{\rho}^{(0)}} \left\{ E \left[\tilde{\eta}^{(0)} \tilde{\nabla}^2 q^i \right] + E \left(\frac{\partial q^i}{\partial x^k} + \frac{\partial q^k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial \tilde{\eta}^{(0)}}{\partial x^k} + \left(\frac{2E}{3} \frac{\partial \tilde{\eta}^{(0)}}{\partial x^i} - E' \frac{\partial \tilde{\zeta}^{(0)}}{\partial x^i} \right) (\mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla}) \ln \tilde{\rho}^{(0)} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{E}{3} \tilde{\eta}^{(0)} + E' \tilde{\zeta}^{(0)} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \left[(\mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla}) \ln \tilde{\rho}^{(0)} \right] \right\} \quad (3.25) \end{aligned}$$

где $\eta = \eta^{(b)} \tilde{\eta}$, $\zeta = \zeta^{(b)} \tilde{\zeta}$, $\nu^{(b)}$ и $\zeta^{(b)}$ – значения коэффициентов вязкостей на границе коры и ядра. Последнее слагаемое в (3.25) было получено с использованием уравнение неразрывности (3.19). Здесь также были введены два так называемых числа Экмана

$$E = \frac{\eta^{(b)}}{\rho^{(b)} \Omega r_c^2}, \quad E' = \frac{\zeta^{(b)}}{\rho^{(b)} \Omega r_c^2}. \quad (3.26)$$

Для нейтронных звёзд, как мы увидим далее, эти числа малы. Для не очень старых пульсаров число E находится в диапазоне $10^{-6} - 10^{-2}$ (см. параграф 3.6), постепенно увеличиваясь по мере остывания и замедления вращения нейтронной звезды.

Угловой момент передаётся из глубины ядра в тормозящуюся внешним моментом сил кору через вязкие натяжения. Глядя на уравнение (3.15) и выражение (3.24), временной

масштаб, характеризующий этот процесс, можно оценить как $t_v \sim (E\Omega)^{-1} \sim (10 - 10^5)P$. Несмотря на то, что он многократно превосходит период обращения звезды, этот масштаб оказывает на много порядков меньше периода прецессии. В этом легко убедиться, воспользовавшись формулой (2.38) и значениями параметра сплюснутости, полученными в главе 1. Естественно предположить, что $\tau_{rel} \sim t_v$. В этом случае квазистационарное приближение будет с хорошей точностью применимо. Это позволяет нам вместо уравнения (3.18) использовать «стационарное» уравнение

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \nabla \varkappa^{(1)} = -[\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}] + \mathbf{f}_v^{(1)}. \quad (3.27)$$

При малых числах Экмана помимо вязких натяжений, однако, возможен более эффективный механизм релаксации дифференциальных вращений, так называемая Экмановская накачка [87].

3.3. Экмановская накачка

Поскольку E и $E' \ll 1$, естественно предположить, что сила $\mathbf{f}_v^{(1)}$ много меньше остальных членов уравнения (3.27), то есть жидкость фактически можно считать идеальной. Сила вязкости, однако, оказывается важной в тонком приграничном слое вблизи коры, где происходит подстройка течения под граничное условие (3.20), вследствие чего радиальные производные становятся большими. Для описания этого явления поле скоростей и функцию $\tilde{\varkappa}$ удобно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{(in)} + \mathbf{q}_{(l)}, \quad \tilde{\varkappa}^{(1)} = \tilde{\varkappa}_{(in)} + \tilde{\varkappa}_{(l)} \quad (3.28)$$

где $\mathbf{q}_{(in)}$ и $\tilde{\varkappa}_{(in)}$ являются решением уравнений идеальной гидродинамики, а $\mathbf{q}_{(l)}$ и $\tilde{\varkappa}_{(l)}$ представляют собой поправку к этому решению, описывающую поведение решения в вязком приграничном слое.

Уравнения идеальной гидродинамики в нашем случае выглядят следующим образом:

$$2[\mathbf{e}_z \times \mathbf{q}_{(in)}] + \tilde{\nabla} \tilde{\varkappa}_{(in)} = -[\mathbf{e}_{\dot{\Omega}} \times \mathbf{x}], \quad (3.29)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}^{(0)} \mathbf{q}_{(in)}) = 0. \quad (3.30)$$

Также для $\mathbf{q}_{(in)}$ ставится граничное условие

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{q}_{(in)} \Big|_{r=r_c} = 0, \quad (3.31)$$

где $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$.

Поскольку поправка к невязкому течению существенно отлична от нуля только в тонком приграничном слое, делается предположение, что вместо обычной радиальной координаты x они зависят от «растянутой» (внутрислоевой) координаты $\xi = E^{-1/2}(1 - x)$. Таким образом, справедливыми будут соотношения

$$(\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\nabla})\mathbf{q}_{(l)} = -E^{-1/2}\partial_\xi\mathbf{q}_{(l)} \sim O(E^{-1/2}), \quad (3.32)$$

$$(\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\nabla})\tilde{\chi}_{(l)} = -E^{-1/2}\partial_\xi\tilde{\chi}_{(l)} \sim O(E^{-1/2}). \quad (3.33)$$

Тангенциальные координаты в слое остаются теми же самыми. Следовательно,

$$\tilde{\nabla}_\perp(\mathbf{q}_{(l)}, \tilde{\chi}_{(l)}) \sim O(1). \quad (3.34)$$

Подставляя (3.29) и (3.25) в (3.27), используя (3.34), (3.32) и (3.28) и пренебрегая всеми слагаемыми, содержащими положительные степени E и E' , получим

$$2[\mathbf{e}_z \times \mathbf{q}_{(l)}] - \mathbf{e}_r E^{-1/2}\partial_\xi\tilde{\chi}_{(l)} = \partial_\xi^2\mathbf{q}_{(l)} \quad (3.35)$$

Правая часть этого уравнения представляет собой первое слагаемое выражения (3.25). Только это слагаемое содержит вторую производную $\mathbf{q}_{(l)}$ по ξ , остальные имеют порядок малости как минимум $E^{1/2}$.

Уравнение непрерывности может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^{(0)}(\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\nabla})(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{q}_{(l)}) + (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{q}_{(l)})\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho}^{(0)}\mathbf{e}_r) + \\ + \tilde{\rho}^{(0)}\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\nabla} \times [\mathbf{e}_r \times \mathbf{q}_{(l)}] = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Первое слагаемое в этом уравнении превышает второе на величину порядка $E^{-1/2}$ (см. (3.32)). Вторым, следовательно, можно пренебречь. Это даёт нам простое уравнение, связывающее нормальную $\mathbf{q}_{r(l)}$ и тангенциальную $\mathbf{q}_{tg(l)}$ компоненты $\mathbf{q}_{(l)}$:

$$E^{-1/2}\partial_\xi q_{r(l)} = \mathbf{e}_r \cdot [\tilde{\nabla} \times [\mathbf{e}_r \times \mathbf{q}_{tg(l)}]]. \quad (3.37)$$

Полная скорость должна равняться нулю на границе коры с ядром:

$$(\mathbf{q}_{(in)} + \mathbf{q}_{(l)})_{r_c} = 0. \quad (3.38)$$

А значит, учитывая выражения (3.31) и (3.38), получим, что $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{q}_{(l)}|_{r=r_c} = 0$. Принимая во внимание (3.37), можно оценить: $q_{r(l)} \sim E^{1/2}q_{tg(l)}$, то есть слоевая поправка с хорошей точностью является тангенциальной. Следовательно, вместо (3.35) можно написать

$$2[\mathbf{e}_z \times \mathbf{q}_{tg(l)}] - \mathbf{e}_r E^{-1/2}\partial_\xi h_{(l)} = \partial_\xi^2\mathbf{q}_{tg(l)}. \quad (3.39)$$

Интегрирование этого уравнения с учётом (3.38) даёт

$$\begin{aligned} (i\mathbf{q}_{tg(l)} + \mathbf{e}_r \times \mathbf{q}_{tg(l)}) &= \\ &= -(i\mathbf{q}_{tg(in)} + \mathbf{e}_r \times \mathbf{q}_{tg(in)})_{r_c} \exp \left[-(1 \pm i)|\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z|^{1/2} \xi \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Здесь символом « \pm » обозначен знак скалярного произведения $(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z)$.

Подставляя (3.40) в (3.37), интегрируя по ξ от 0 до ∞ и учитывая граничное условие (3.38), получаем

$$q_{r(in)}|_{r_c} = -q_{r(l)}|_{r_c} = -\frac{1}{2}E^{1/2}\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\nabla} \times \left[\frac{\mathbf{e}_r \times \mathbf{q}_{tr(in)} \pm \mathbf{q}_{tr(in)}}{|\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z|^{1/2}} \right]_{r_c}. \quad (3.41)$$

Фактически мы видим, что наличие приграничного слоя свелось к специфическому граничному условию для невязкого решения. В размерных величинах мы получаем следующую систему уравнений:

$$2[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}] + \nabla \varkappa^{(1)} = -[\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}], \quad (3.42)$$

$$\operatorname{div} (\rho^{(0)} \mathbf{u}) = 0, \quad (3.43)$$

$$(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{u})_{r_c} = -\frac{1}{2}r_c E^{1/2} \mathbf{e}_r \cdot \operatorname{rot} \left[\frac{\mathbf{e}_r \times \mathbf{u} \pm \mathbf{u}}{|\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z|^{1/2}} \right]_{r_c}. \quad (3.44)$$

Заметим, что теперь мы через \mathbf{u} и $\varkappa^{(1)}$ вместо полного решения обозначили размерные аналоги $\mathbf{q}_{(in)}$ и $\tilde{\varkappa}_{(in)}$. Фактически здесь мы воспроизвели рассуждения из книги Гринспена [87], приведённые там для несжимаемой жидкости, заменив только ∇P на $\nabla \mu$.

С физической точки зрения под экмановской накачкой понимают следующий набор процессов. Пусть для простоты момент сил \mathbf{K} параллелен угловой скорости $\mathbf{\Omega}$. Из-за внешнего момента сил, кора вращается немного медленнее ядра. Напрямую через вязкие натяжения вслед за корой тормозится только тонкий приграничный слой. Однако это приводит к уменьшению в этом слое силы Кориолиса, что порождает в нём поток жидкости в направлении к оси вращения. В свою очередь это приводит к тому, что жидкость всасывается в слой вдали от оси вращения и выталкивается из неё вблизи оси. Таким образом, возникает небольшое ($\sim E^{1/2}$) вторичное течение в объёме ядра, непосредственно переносящее угловой момент из объёма в ядра к коре. В не осесимметричном случае ($\mathbf{K} \nparallel \mathbf{\Omega}$) структура вторичного течения будет более сложной, но качественно будет происходить аналогичные процессы.

Используя векторы $\dot{\mathbf{\Omega}}_{\parallel}$ и $\dot{\mathbf{\Omega}}_{\perp}$, определённые в предыдущей главе, введём ортонормированный базис $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, где $\mathbf{e}_z = \mathbf{\Omega}/\Omega$, $\mathbf{e}_x = \dot{\mathbf{\Omega}}_{\perp}/\dot{\Omega}_{\perp}$, $\mathbf{e}_y = [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x]$. Введём также цилиндрическую (ϖ, ϕ, z) и сферическую (r, θ, ϕ) системы координат так, как показано

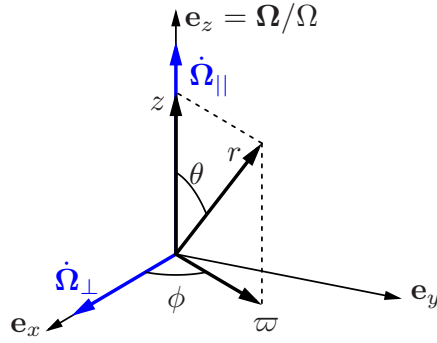


Рис. 3.1. Векторы $\dot{\Omega}_{\parallel}$ и $\dot{\Omega}_{\perp}$, а также декартова, сферическая и цилиндрическая системы координат, построенные на их основе.

на рисунке 3.1. Система уравнений (3.42)-(3.44) позволяет выразить величины \mathbf{u} и \varkappa через векторы Ω , $\dot{\Omega}_{\parallel}$ и $\dot{\Omega}_{\perp}$:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{w} \times \mathbf{r}] - \frac{\dot{\Omega}_{\parallel}}{2\Omega} \left[\mathbf{e}_{\varpi} \varpi + \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho^{(0)}} \int_0^z \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi^2 \rho^{(0)}) dz' \right] - \mathbf{e}_z E^{1/2} \frac{\dot{\Omega}_{\perp} \rho^{(b)}}{4\Omega \rho^{(0)}} \left(\frac{r_c}{z_c} \right)^{3/2} \left(3\varpi \sin \phi + \frac{r_c}{z_c} \varpi \cos \phi \right), \quad (3.45)$$

$$\varkappa^{(1)} = -\dot{\Omega}_{\perp} z \varpi \sin \phi - \dot{\Omega}_{\parallel} \int_0^{\varpi} \psi(\varpi) \varpi d\varpi, \quad (3.46)$$

где

$$\mathbf{w} = -\frac{\dot{\Omega}_{\parallel}}{2\Omega} \psi(\varpi) \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \times \frac{\dot{\Omega}_{\perp}}{\Omega}, \quad (3.47)$$

$$\psi(\varpi) = \left(\frac{|\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z|}{E} \right)^{1/2} \frac{2J_{\rho}}{\rho^{(b)} r_c} - \frac{1}{\rho^{(b)} r_c} \frac{1}{\varpi} \frac{d}{d\varpi} (\varpi^2 J_{\rho} - r_c^2 \rho^{(b)} z_c) \approx \left(\frac{|\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z|}{E} \right)^{1/2} \frac{2J_{\rho}}{\rho^{(b)} r_c}, \quad (3.48)$$

$$J_{\rho} = \int_0^{z_c} \rho^{(0)} dz, \quad z_c = \sqrt{r_c^2 - \varpi^2}, \quad (3.49)$$

Выражения приведены с точностью до слагаемых $\sim E^{1/2}$.

Решение состоит из двух частей, пропорциональных $\dot{\Omega}_{\parallel}$ и $\dot{\Omega}_{\perp}$. Первая часть представляет собой отклик ядра на замедление вращения коры. Вторая вызвана поворотом оси вращения. Для краткости мы будем называть соответствующие части «параллельным» и «перпендикулярным» течениями. Каждое из этих течений состоит из небольшого дополнительного вращения и вторичного полоидального течения, порождённого экмановской накачкой.

«Параллельное» течение осесимметрично. Угловой момент переносится в кору вторичным полоидальным течением. Однако существование такого течения из-за граничного условия (3.44) требует наличия дополнительного вращения жидкости, линейная скорость которого превосходит полоидальное течение на величину порядка $E^{-1/2}$. Это приводит к дифференциальному вращению ядра с угловой скоростью

$$\left(\Omega - \frac{\dot{\Omega}_{\parallel}}{\Omega} \psi(\varpi) \right) \mathbf{e}_z, \quad (3.50)$$

всюду превосходящей Ω ($\dot{\Omega}_{\parallel} < 0$). Чем меньше число Экмана, тем слабее взаимодействие, и тем больше развивается разница между скоростями вращения коры и ядра.

«Перпендикулярное» течение приводит к отклонению оси вращения ядра от оси вращения коры. В квазистационарном приближении вектор $\dot{\Omega}_{\perp}$ вызывает дополнительное «твердотельное» вращение ядра

$$\mathbf{u} = \left[\mathbf{e}_z \times \frac{\dot{\Omega}_{\perp}}{\Omega} \right] \times \mathbf{r} \quad (3.51)$$

Угловая скорость этого вращения совпадает с (2.24). В отличие от «параллельного» течения здесь разница между вращением коры и ядра не зависит от числа Экмана. Легко проверить, что такое вращение вместе с $\kappa^{(1)} = -\dot{\Omega}_{\perp} z \varpi \sin \phi$ является точным решением уравнений (3.42) и (3.43) при $\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{\perp}$. Малая полоидальная поправка $\sim E^{1/2}$ требуется только для того, чтобы удовлетворить граничное условие (3.44).

Поясним немного подробнее разницу между «параллельным» и «перпендикулярным» течениями. Перпендикулярная сила Пуанкаре генерирует дополнительное вращение жидкости со скоростью (3.51). Однако само по себе это вращение не переносит угловой момент в кору. Поток углового момента создаётся вторичным течением имеющем порядок величины $E^{1/2}$. Для компенсации параллельной силы Пуанкаре силой Кориолиса в жидкости создаётся полоидальное течение. Так как это течение однозначно задаётся величиной $\dot{\Omega}_{\parallel}$, оно (а вместе с ним и коэффициент S_1) не зависит от E . Но являясь вторичным течением, согласно выражению (3.44) оно должно быть вызвано вращением жидкости с большей в $E^{-1/2}$ раз скоростью.

Вторичное «перпендикулярное» течение формально расходится на экваторе ($\varpi \rightarrow r_c$). Это связано с тем, что в этом регионе перестаёт действовать приближение экмановского слоя. Согласно выражению (3.40) толщина слоя по порядку величины составляет $r_c(E/|\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r|)^{1/2}$. В экваториальной области эта толщина становится не малой по сравнению с размерами резервуара. Строго говоря, здесь нужно учитывать эффекты вертикальных

приграничных слоёв [87]. Однако, поскольку мы не будем использовать выражения для вторичных течений при вычислении потока углового момента в кору, мы не будем здесь останавливаться на методах устранения этой расходимости.

Для вычисления коэффициентов S_2 и S_3 обратимся к уравнению баланса момента импульса:

$$\partial_t \mathbf{J} + \mathbf{e}_i \nabla_j \Pi^{ij} = -\rho \nabla \Phi. \quad (3.52)$$

Здесь $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ – плотность момента импульса, $\Pi^{ij} = \rho v^i v^j + P \delta^{ij} - \pi^{ij}$ – тензор плотности потока момента импульса, содержащий в себе тензор вязких натяжений (3.22). Умножая это уравнение векторно на \mathbf{r} и интегрируя результат по объёму ядра, получим уравнение (2.3), в котором

$$\mathbf{M}_{core} = \int [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] dV \quad (3.53)$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= - \oint_{r_c} [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) + \oint_{r_c} \pi^{ij} [\mathbf{r} \times \mathbf{e}_i] (\mathbf{e}_j \cdot d\mathbf{S}) = \\ &= \oint_{r_c} \pi^{ij} [\mathbf{r} \times \mathbf{e}_i] (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_r) dS. \end{aligned} \quad (3.54)$$

В выражении (3.54) интегрирование ведётся по внутренней поверхности коры. Первый интеграл равен нулю, поскольку жидкость в кору не проникает.

Основной вклад в (3.54) дают радиальные производные слоевых поправок $\mathbf{q}_{(l)}$. Используя выражение (3.23) и пренебрегая слагаемыми порядка E , получим

$$\mathbf{N} \approx -E^{1/2} \dot{\Omega} \rho^{(b)} r_c^5 \int_{4\pi} \partial_\xi [\mathbf{e}_r \times \mathbf{q}_{(l)}] d\Theta = \quad (3.55)$$

$$= -E^{1/2} \dot{\Omega} \rho^{(b)} r_c^5 \int_{4\pi} ([\mathbf{e}_r \times \mathbf{q}_{(in)}] \mp \mathbf{q}_{(in)}) |\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z|^{1/2} d\Theta. \quad (3.56)$$

Здесь $d\Theta$ – элемент телесного угла. Для получения второго равенства было также использовано выражение (3.40)

Так как коэффициенты S_2 и S_3 описывают отклик на вектор $\dot{\Omega}_\perp$, для их вычисления требуется подставить в выражение (3.56) только «перпендикулярное» течение. Более того, поскольку вторичное течение содержит лишний малый множитель $E^{1/2}$, достаточно подставить только (3.51). Произведя интегрирование, получим

$$S_2 = \frac{8\pi}{5} \frac{\rho^{(b)} r_c^5}{I_{core}} E^{1/2}, \quad S_3 = \frac{40\pi}{21} \frac{\rho^{(b)} r_c^5}{I_{core}} E^{1/2}. \quad (3.57)$$

Таким образом, коэффициенты имеют порядок величины $E^{1/2}$.

3.4. Эффекты градиента химического состава

В реальных нейтронных звёздах отношение количества протонов к количеству нейтронов меняется с глубиной. Более реалистичная модель должна включать в себя уравнение

$$2[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}] + \nabla \chi^{(1)} - (\mu_c^{(1)} - \mu_n^{(1)}) \nabla y^{(0)} = -[\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}], \quad (3.58)$$

вместо уравнения (3.42). Здесь мы также предположили химическое равновесие для невозмущённых величин ($m_n \mu_n^{(0)} = m_p \mu_p^{(0)} + m_e \mu_e^{(0)}$). Будем кроме того предполагать, что $m_n = m_p + m_e$. Если не делать последнего предположения, то в уравнении (3.58) появится дополнительная сила, пропорциональная дефекту масс $m_n - m_p - m_e$. Однако эта сила является артефактом ньютоновской физики, возникающим при включении в модель реакций с не сохраняющейся массой. В релятивистских уравнениях подобной силы не возникает.

В дополнение к функции $\chi^{(1)}$ теперь у нас имеется ещё одна неизвестная функция, равная разности $\mu_c^{(1)} - \mu_n^{(1)}$. Следовательно, для замыкания системы требуется ещё одно уравнение. Уравнение непрерывности может быть разбито на две части:

$$\text{div}(\rho_n^{(0)} \mathbf{u}) = \Gamma_n^{(1)}, \quad (3.59)$$

$$\text{div}(\rho_c^{(0)} \mathbf{u}) = -\Gamma_n^{(1)}, \quad (3.60)$$

где введена функция источника нейтронов Γ_n . Интенсивность рождения нейтронов в данной точке пропорциональна разности химических потенциалов [88]:

$$\Gamma_n^{(1)} = \lambda_n^{(0)} (\mu_c^{(1)} - \mu_n^{(1)}) \quad (3.61)$$

Комбинируя (3.43) и (3.60), эту разность можно выразить через u_r :

$$(\mu_c^{(1)} - \mu_n^{(1)}) = -\frac{\rho^{(0)}}{\lambda_n^{(0)}} \frac{dy^{(0)}}{dr} u_r. \quad (3.62)$$

Уравнение (3.58) примет вид

$$2[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}] + g(r) u_r \mathbf{e}_r + \nabla \chi^{(1)} = -[\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}], \quad (3.63)$$

где введена функция

$$g(r) = \frac{\rho^{(0)}}{\lambda_n^{(0)}} \left(\frac{dy^{(0)}}{dr} \right)^2. \quad (3.64)$$

Нейтронная компонента переходит в заряженную и обратно через прямые и модифицированные урка-процессы. Коэффициенты $\lambda_n^{(0)}$ для различных урка-процессов были

вычислены Ханселем, Левенфиш и Яковлевым. Для нейтронной ветви модифицированного урка-процесса ($n + n \rightarrow n + p + e^- + \bar{\nu}_e$) [89] коэффициент будет равен

$$\lambda_n = 1.1 \times 10^{-14} R_f \frac{m_p^*}{m_p} \left(\frac{m_n^*}{m_n} \right)^3 \left(\frac{n_e}{n_0} \right)^{1/3} \left(\frac{T}{10^9 \text{K}} \right)^6 \text{г}^2 \text{см}^{-3} \text{с}^{-1} \text{эрг}^{-1}. \quad (3.65)$$

Для протонной ветви того же процесса ($n + p \rightarrow p + p + e^- + \bar{\nu}_e$) коэффициент будет иметь такой же порядок величины. Для прямого урка-процесса [88] –

$$\lambda_n = 5.6 \times 10^{-8} R_f \frac{m_p^* m_n^*}{m_p m_n} \left(\frac{n_e}{n_0} \right)^{1/3} \left(\frac{T}{10^9 \text{K}} \right)^4 \text{г}^2 \text{см}^{-3} \text{с}^{-1} \text{эрг}^{-1}. \quad (3.66)$$

Здесь m_n^* и m_p^* – эффективные массы нейтрона и протона, R_f – фактор, описывающий замедление реакций, вызванное протонной и нейтронной сверхтекучестями. Заметим, что прямой урка процесс разрешён, если выполняется неравенство $p_{Fp} + p_{Fe} > p_{Fn}$, где $p_{F\alpha}$ – импульс Ферми соответствующей компоненты. Эта реакция возможна только в центральной части ядер достаточно массивных нейтронных звёзд, а некоторыми уравнениями состояния она запрещены вовсе [90].

Легко проверить, что величина $g(r)/\Omega$ оказывается очень большой даже для прямого урка-процесса. А тогда, предполагая, что все слагаемые в уравнении (3.63) имеют один и тот же порядок величины, видим, что любые радиальные течения оказываются сильно подавлены ($u_r \ll u_\theta, u_\phi$) градиентом химического состава. В свою очередь это означает, что угловой момент не может передаваться в кору посредством экмановской накачки [91]. Единственным возможным механизмом остаётся непосредственно вязкость.

Теория приграничного слоя, обсуждавшаяся в предыдущем параграфе, здесь оказывается неприменима и нам нужно вернуться к рассмотрению уравнений вязкой гидродинамики. Причём везде, кроме слагаемого $g(r)u_r \mathbf{e}_r$ можно положить

$$u_r = 0 \quad (3.67)$$

В частности, справедливым становится уравнение

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (3.68)$$

Подстановка (3.68) в (3.21) позволяет исключить объёмную вязкость. Предположим также, что

$$\eta = \text{const}, \quad \rho = \text{const} \quad (3.69)$$

Это не очень реалистичное предположение, однако ниже будет видно, что в данной задаче оно оказывается вполне приемлемым.

Таким образом, теперь вращающаяся нейтронная звезда описывается уравнением

$$-\nu^{(0)}\nabla^2\mathbf{u} + 2[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}] + g(r)u_r\mathbf{e}_r + \nabla\chi^{(1)} = -[\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}], \quad (3.70)$$

уравнением неразрывности (3.68), уравнением (2.2) и граничным условием

$$\mathbf{u}|_{r=r_c} = 0. \quad (3.71)$$

Момент сил \mathbf{N} , как и раньше, рассчитывается по формуле (3.54).

Поле скоростей \mathbf{u} можно представить в виде разложения в ряд по шаровым векторам (см. приложение А):

$$\mathbf{u} = \sum_{l,m} \left\{ u_{lm}^{[-1]}(r)\mathbf{Y}_{lm}^{[-1]}(\theta, \phi) + u_{lm}^{[0]}(r)\mathbf{Y}_{lm}^{[0]}(\theta, \phi) + u_{lm}^{[1]}(r)\mathbf{Y}_{lm}^{[1]}(\theta, \phi) \right\}. \quad (3.72)$$

Из условия (3.67) автоматически следует, что $u_{lm}^{[-1]} = 0$. Подставляя (3.72) в (3.68) также получим, что $u_{lm}^{[1]} = 0$. Предположим, кроме того, что

$$\chi^{(1)} = \sum_{l,m} \chi_{lm}^{(1)}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3.73)$$

и

$$[\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}] = \sum_{l,m} F_{lm}(r)\mathbf{Y}_{lm}^{[0]}(\theta, \phi) \quad (3.74)$$

Используя формулы (А.19) и (А.20), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\Omega \times \mathbf{u} = & i \sum_{l,m} \left\{ -\frac{m}{l(l+1)}u_{lm}^{[0]}\mathbf{Y}_{lm}^{[0]} + \right. \\ & + \left(\frac{\sqrt{(l-1)(l+1)}}{l}A_{lm}u_{l-1,m}^{[0]} + \frac{\sqrt{l(l+2)}}{l+1}A_{l+1,m}u_{l+1,m}^{[0]} \right) \mathbf{Y}_{lm}^{[1]} + \\ & + \left(A_{lm}\sqrt{\frac{l-1}{l}}u_{l-1,m}^{[0]} - \sqrt{\frac{l+2}{l+1}}A_{l+1,m}u_{l+1,m}^{[0]} \right) \mathbf{Y}_{lm}^{[-1]} \left. \right\} - \\ & - i\sqrt{\frac{2}{3}}u_{1,0}^{(0)}\mathbf{Y}_{0,0}^{(-1)}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

где

$$A_{lm} = \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}}. \quad (3.76)$$

Подставив все разложения в уравнение (3.70), учтя (А.24) и приравняв к нулю множители при каждом шаровом векторе, для векторов с $l \geq 1$ получим:

$$\nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} u_{lm}^{[0]} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} u_{lm}^{[0]} \right) + 2\Omega i \frac{m}{l(l+1)} u_{lm}^{[0]} = F_{lm}(r) \quad (3.77)$$

– множитель при $\mathbf{Y}_{lm}^{[0]}$;

$$2\Omega i \left(\frac{\sqrt{(l-1)(l+1)}}{l} A_{lm} u_{l-1,m}^{[0]} + \frac{\sqrt{l(l+2)}}{l+1} A_{l+1,m} u_{l+1,m}^{[0]} \right) + \frac{l(l+1)}{r} \varkappa_{lm}^{(1)} = 0 \quad (3.78)$$

– множитель при $\mathbf{Y}_{lm}^{[1]}$;

$$2\Omega i \left(A_{lm} \sqrt{\frac{l-1}{l}} u_{l-1,m}^{[0]} - \sqrt{\frac{l+2}{l+1}} A_{l+1,m} u_{l+1,m}^{[0]} \right) + d_r \varkappa_{lm}^{(1)} + g(r) u_{l+1,m}^{[-1]} = 0 \quad (3.79)$$

– множитель при $\mathbf{Y}_{lm}^{[-1]}$. Кроме того, ещё одно уравнение получается приравниванием к нулю множителя при векторе $\mathbf{Y}_{0,0}^{(-1)}$:

$$d_r \varkappa_{0,0}^{(1)} - i \frac{2}{3} u_{1,0}^{(0)} = 0. \quad (3.80)$$

Набор уравнений (3.77) позволяет нам определить функции $u_{lm}^{[0]}(r)$, то есть определить поле скоростей. Набор уравнений (3.78) позволяет вычислить $\varkappa_{lm}^{(1)}$ с точностью до независимой от углов функции, которая, в свою очередь, определяется из уравнения (3.80). Уравнения (3.79) позволяют при необходимости найти малую радиальную поправку к полю скоростей.

Обсудим сначала «параллельное» течение. Заметим, что $[\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\parallel} \times \mathbf{r}] = F_{1,0}(r) \mathbf{Y}_{1,0}^{(0)}(\theta, \phi)$, где $F_{1,0} = i \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \dot{\Omega}_{\parallel} r$. Решение уравнения (3.77) для $(l=1, m=0)$ гармоники с учётом граничного условия (3.71), будучи умноженным на соответствующий шаровой вектор, имеет вид:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{e}_{\phi} \frac{1}{10} \frac{\dot{\Omega}_{\parallel}}{\Omega} E^{-1} \left(1 - \frac{r^2}{r_c^2} \right) r \sin \theta. \quad (3.81)$$

Мы получили дифференциальное вращение вокруг оси \mathbf{e}_{Ω} с угловой скоростью, плавно меняющейся с глубиной. В отличие от экмановской накачки, где дифференциальное вращение имело порядок величины $E^{-1/2}$, здесь оно пропорционально E^{-1} . Это вращение, однако, остаётся малым до тех пор, пока выполняется неравенство $\tau_{rel} \ll \tau_x$. Подстановка (3.81) в (3.54) даёт

$$\mathbf{N} = -\mathbf{e}_z \dot{\Omega}_{\parallel} \rho^{(b)} \frac{8\pi}{15} r_c^5 = -\mathbf{e}_z I_{core} \dot{\Omega}_{\parallel}. \quad (3.82)$$

где для момента инерции мы использовали формулу

$$I_{core} = \frac{8\pi}{15} r_c^5 \rho^{(b)}, \quad (3.83)$$

справедливую для жидкости с постоянной плотностью. Это находится в согласии со сделанным ранее предположением (3.69). Как ожидалось, коэффициент S_1 равен единице.

«Перпендикулярное» течение имеет другую структуру. Сила Пуанкаре через шаровые векторы представляется следующим образом:

$$\dot{\Omega}_\perp \times \mathbf{r} = F_{1,1}(r) \mathbf{Y}_{1,1}^{[0]}(\theta, \phi) + F_{1,-1}(r) \mathbf{Y}_{1,-1}^{[0]}(\theta, \phi) = 2\Re \left\{ F_{1,1}(r) \mathbf{Y}_{1,1}^{[0]}(\theta, \phi) \right\}, \quad (3.84)$$

где $F_{1,1} = i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\dot{\Omega}_\perp r$ и $F_{1,-1} = F_{1,1}^*$. Решение уравнения (3.77) с $m = 1$, удовлетворяющее граничному условию (3.71), будет иметь следующий вид:

$$u_{1,1}^{[0]} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{r}{r_c} - \frac{j_1(kr)}{j_1(kr_c)} \right) \dot{\Omega}_\perp r_c, \quad (3.85)$$

где

$$j_1(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x) \right) \quad (3.86)$$

– сферическая функция Бесселя, и

$$k = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{Er_c}}. \quad (3.87)$$

Для поля скоростей получаем следующее выражение:

$$\mathbf{u} = \dot{\Omega}_\perp \Re \left\{ \left(1 - \frac{r_c}{r} \frac{j_1(kr)}{j_1(kr_c)} \right) (\mathbf{e}_y - i\mathbf{e}_x) \right\} \times \mathbf{r}. \quad (3.88)$$

Заметим, что при выводе (3.88) мы не делали никаких предположений о величине E . Обсудим подробнее предельные случаи. В пределе $E \gg 1$

$$\frac{j_1(kr)}{j_1(kr_c)} = \frac{r}{r_c} + O(E^{-1}). \quad (3.89)$$

Очень вязкая жидкость вращается практически твердотельно с корой. В противоположном пределе $E \ll 1$ благодаря мнимой составляющей второе слагаемое в выражении (3.88) затухает на глубине порядка $E^{1/2}r_c$, и в основном объёме ядра поле скоростей вновь оказывается с хорошей точностью равным (3.51). Вблизи границы коры с ядром образуется тонкий слой толщиной порядка $E^{1/2}r_c$. Отметим однако, что несмотря на совпадение масштабов, этот слой имеет структуру, отличную от экмановского слоя. В частности, в нём отсутствует обмен жидкостью с объёмом ядра.

Подставляя (3.88) в (3.54), получаем значение коэффициентов:

$$S_2 = E \frac{8\pi}{3} \frac{\rho_b r_c^5}{I_{core}} \Im \left\{ \frac{1}{j_1(kr_c)} \left(\frac{dj_1}{dr} - \frac{j_1}{r} \right)_{r_c} \right\} \quad (3.90)$$

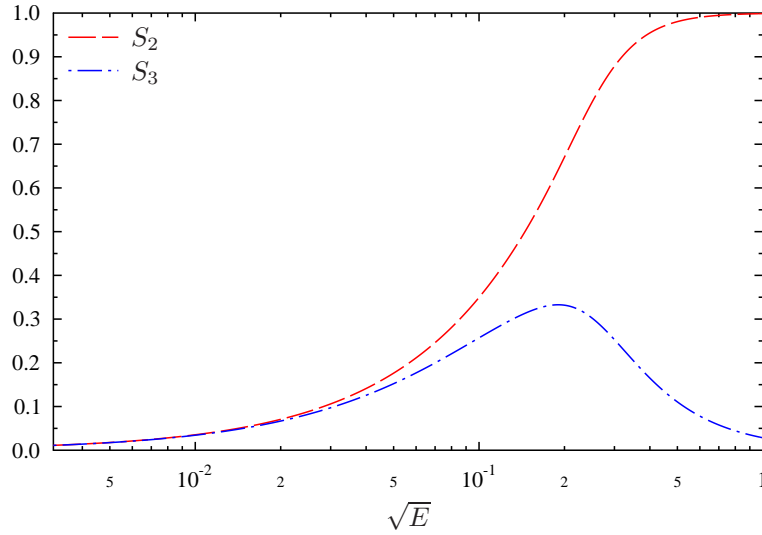


Рис. 3.2. Зависимость коэффициентов S_2 и S_3 от \sqrt{E} .

$$S_3 = -E \frac{8\pi}{3} \frac{\rho_b r_c^5}{I_{core}} \Re \left\{ \frac{1}{j_1(kr_c)} \left(\frac{dj_1}{dr} - \frac{j_1}{r} \right)_{r_c} \right\} \quad (3.91)$$

Поскольку эти значения были получены с использованием поля скоростей, вычисленного в предположениях (3.69), мы снова должны вместо I_{core} подставить выражение (3.83). На рисунке 3.2 приведены зависимости значений коэффициентов от числа Экмана. Видим, что как и ожидалось, при больших числах Экмана коэффициент S_2 стремится к единице, в то время как коэффициент S_3 стремится к нулю.

При малых числах Экмана в выражениях (3.90) и (3.91) можно оставить только первые члены разложения по параметру $E^{1/2}$, имеющие следующий вид:

$$S_2 = \frac{8\pi \rho^{(b)} r_c^5}{3\sqrt{2} I_{core}} E^{1/2}, \quad S_3 = \frac{8\pi \rho^{(b)} r_c^5}{3\sqrt{2} I_{core}} E^{1/2}. \quad (3.92)$$

В этом случае решение (3.88) будет справедливым, если коэффициент вязкости можно считать постоянным внутри тонкого приграничного слоя, там где вязкость оказывает влияние на поле скоростей. Это требование является гораздо более слабым, чем предположение (3.69), сделанное нами изначально. Что касается «параллельного» течения, то его поле скоростей конечно заметно модифицируется градиентом коэффициента вязкости. Однако параллельное течение должно давать $S_1 = 1$ всегда, когда имеет место квазистационарность. Таким образом, для изучения вращения нейтронных звёзд нет необходимости знать точное решение для параллельного течения. Легко видеть, что при малых числах Экмана «параллельное» и «перпендикулярное» течение качественно отличаются друг от друга: первое представляет собой дифференциальное вращение с плавно меняющимся профилем, во втором формируется тонкий приграничный слой, в то время как основной объём ядра

вращается «твердотельно» со скоростью (3.51). Эти различия имеют те же причины, что и в предыдущем параграфе: «параллельный» поток углового момента создаётся соответствующей силой Пуанкаре, действующей на жидкость во всём объёме ядра, в то время как «перпендикулярный» поток возникает из-за необходимости удовлетворить граничное условие (3.71). Заметим, что не смотря на то, что вязкое равновесие устанавливается гораздо дольше, чем экмановское [87], в квазистационарном режиме потоки момента импульса в обоих случаях оказываются сравнимы.

В конце параграфа стоит сделать ещё одно важное замечание. Центробежная сила, которой мы пренебрегли с самого начала, приводит к тому, что равновесный состав вещества ядра нейтронной звезды, вообще говоря, зависит от угловой скорости её вращения. Следовательно из-за торможения звезды и конечной скорости протекания урка-процессов даже в отсутствие в ядре каких-либо течений в нём отсутствует химическое равновесие [92]. Это приводит к появлению дополнительной силы $y^{(1)} \nabla(\mu_c^{(0)} - \mu_n^{(0)})$, действующей вдоль того же направления, что и сила, подавляющая радиальные течения. Однако эта сила не может сколько-нибудь заметно сказаться на течении, поскольку она квадратично мала по $\dot{\Omega}_{||}$.

3.5. Эффекты сверхтекучести нейтронов

Согласно современным теоретическим представлениям, нейтроны и протоны в некоторых областях недр нейтронных звёзд, образуя куперовские пары, могут переходить в сверхтекучее и сверхпроводящее состояние. Протонная сверхпроводимость подавляет ядерные реакции, а также влияет на различные кинетические коэффициенты [88, 89, 93–95]. Переход нейтронов в сверхтекучее состояние помимо перечисленных эффектов приводит также к появлению дополнительной гидродинамической степени свободы, связанной в некотором смысле с движением сверхтекучих нейтронов относительно прочих частиц (см. подробнее приложение Б).

Течение жидкости в целом очевидно должно подчиняться закону сохранения массы

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (3.93)$$

и закону сохранения импульса

$$\partial_t \mathbf{J} + \mathbf{e}_i \partial_k \Pi^{ik} = -\rho \nabla \Phi, \quad (3.94)$$

где \mathbf{J} – ток массы, Π^{ik} – тензор плотности потока импульса, Φ – как и ранее, гравитационный потенциал, вычисляемый с помощью интеграла (3.3). Строго говоря, к этой системе следует дописать ещё уравнение для энтропии. Однако, мы, как и раньше, будем пренебрегать температурным слагаемым в градиенте давления (см. формулу (3.4)). Поэтому распределение энтропии для нахождения формы течения нам не потребуется.

Будем считать, что все компоненты, кроме сверхтекучей нейтронной компоненты, движутся с одной скоростью \mathbf{v}_c (двухкомпонентное приближение). В двухкомпонентном приближении плотность тока массы и тензор натяжений запишутся следующим образом:

$$\mathbf{J} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_{ex} \mathbf{v}_c + \rho_c \mathbf{v}_c, \quad (3.95)$$

$$\Pi^{ij} = \rho_s v_s^i v_s^j + \rho_{ex} v_c^i v_c^j + \rho_c v_c^i v_c^j + P \delta^{ij} - \pi^{ij}, \quad (3.96)$$

где ρ_s и ρ_{ex} – массовые плотности сверхтекучих нейтронов и нейтронных температурных возбуждений, $\rho_n = \rho_s + \rho_{ex}$. Здесь мы пренебрегли эффектом увлечения Андреева-Башкина (см. приложение Б). К системе (3.93)-(3.94) должно быть добавлено уравнение для скорости сверхтекучей компоненты нейтронной жидкости. Мы будем работать в рамках макроскопической гидродинамики, в которой поле скоростей усредняется по площадкам, пронизываемым большим количеством вихревых нитей Фейнмана-Онзагера. Таким образом, за основу возьмём уравнение (Б.32). Поскольку эффектом увлечения мы пренебрегаем, следует положить $\rho_{np} = 0$, $\rho_{nn} = \rho_s$, $\rho_{pp} = \rho_p$. В результате получим уравнение

$$\partial_t \mathbf{v}_s + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s + \nabla(\mu_n + \Phi) = \mathbf{f}_{mf} + \mathbf{f}_{vs}. \quad (3.97)$$

Умножая (3.97) на ρ_s , вычитая результат из (3.94) и подставляя (3.93) и (3.4), получим

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v}_c + (\mathbf{v}_c \cdot \nabla) \mathbf{v}_c + \nabla(\mu_c + \Phi) + y' \nabla(\mu_n - \mu_c) = \\ = -\frac{\rho_s}{\rho_c + \rho_{ex}} \mathbf{f}_{mf} + \mathbf{f}_{vc} + \frac{\Gamma_s}{\rho_c + \rho_{ex}} (\mathbf{v}_c - \mathbf{v}_s), \end{aligned} \quad (3.98)$$

где $y' = \rho_{ex}/(\rho_c + \rho_{ex})$,

$$\mathbf{f}_{vc} = \mathbf{e}_i \frac{1}{\rho_c + \rho_{ex}} \frac{\partial}{\partial r^k} \pi^{ik} - \frac{\rho_s}{\rho_c + \rho_{ex}} \mathbf{f}_{vs}. \quad (3.99)$$

и

$$\Gamma_s = \partial_t \rho_s + \text{div}(\rho_s \mathbf{v}_s). \quad (3.100)$$

Воспроизводя рассуждения, проделанные в предыдущих параграфах, получим уравнения

$$2[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}_s] + \nabla \kappa_s^{(1)} = -[\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}] + \mathbf{f}_{mf}^{(1)} + \mathbf{f}_{vs}^{(1)}, \quad (3.101)$$

и

$$2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_c] + \nabla \chi_c^{(1)} + y'^{(0)} \nabla (\mu_n^{(1)} - \mu_c^{(1)}) = -[\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}] - \frac{\rho_s^{(0)}}{\rho_c^{(0)} + \rho_{ex}^{(0)}} \mathbf{f}_{mf}^{(1)} + \mathbf{f}_{vc}^{(1)}, \quad (3.102)$$

где $\chi_s^{(1)} = \mu_n^{(1)} + \Phi^{(1)}$ и $\chi_c^{(1)} = \mu_c^{(1)} + \Phi^{(1)}$, а также два уравнения неразрывности:

$$\operatorname{div}(\rho_s^{(0)} \mathbf{u}_s + \rho_{ex}^{(0)} \mathbf{u}_c) = \lambda_n^{(0)} (\mu_c^{(1)} - \mu_n^{(1)}), \quad (3.103)$$

$$\operatorname{div}(\rho_c^{(0)} \mathbf{u}_c) = -\lambda_n^{(0)} (\mu_c^{(1)} - \mu_n^{(1)}) \quad (3.104)$$

Далее мы будем рассматривать только сильную сверхтекучесть, когда все слагаемые, содержащие ρ_{ex} и λ_n , пренебрежимо малы. В этом случае эффективно имеется две жидкости, каждая из которых характеризуется собственной плотностью, собственным полем скоростей и собственным эффективным химическим потенциалом. Градиент химического состава в такой системе уже не будет подавлять радиальные течения и экмановский механизм передачи углового момента снова становится возможным. Следовательно, в соответствии с методом, описанным в параграфе 3.3, жидкость основного объёма ядра может описываться «невязкими» уравнениями:

$$2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_s] + \nabla \chi_s^{(1)} = -[\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}] + \mathbf{f}_{mf}^{(1)}, \quad (3.105)$$

$$2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_c] + \nabla \chi_c^{(1)} = -[\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}] - \frac{\rho_s^{(0)}}{\rho_c^{(0)}} \mathbf{f}_{mf}^{(1)}, \quad (3.106)$$

$$\operatorname{div}(\rho_c^{(0)} \mathbf{u}_c) = 0, \quad (3.107)$$

$$\operatorname{div}(\rho_s^{(0)} \mathbf{u}_s) = 0. \quad (3.108)$$

В выражении для силы взаимного трения (Б.34) мы пренебрежём самодействием вихревых нитей. Поскольку в рамках линейного приближения влияние различных эффектов на поле скоростей аддитивно, а самодействие вихревых нитей само по себе очевидно не может участвовать в передаче момента импульса в кору, этот эффект не представляет интереса для нашей задачи. После линеаризации выражение для силы взаимного трения примет вид

$$\mathbf{f}_{mf}^{(1)} = 2\Omega\beta'^{(0)} \mathbf{e}_z \times (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_c) + 2\Omega\beta^{(0)} \mathbf{e}_z \times [\mathbf{e}_z \times (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_c)]. \quad (3.109)$$

Здесь мы учли, что $\omega_s = 2\boldsymbol{\Omega} + \operatorname{rot} \mathbf{u}_s$ и

$$\mathbf{e}_v \approx \mathbf{e}_z - \mathbf{e}_z \times \left[\mathbf{e}_z \times \frac{\operatorname{rot} \mathbf{u}_s}{2\boldsymbol{\Omega}} \right]. \quad (3.110)$$

Подстановка (3.109) в (3.105) и (3.106) даёт уравнения

$$2\Omega[\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_s] + 2\Omega\beta^{(0)}[\mathbf{e}_z \times \delta\mathbf{u}] - 2\Omega\beta^{(0)}\mathbf{e}_z \times [\mathbf{e}_z \times \delta\mathbf{u}] + \nabla\kappa_s = -[\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}] \quad (3.111)$$

и

$$2\Omega[\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_c] - 2\Omega\beta^{(0)}\frac{\rho_s^{(0)}}{\rho_c^{(0)}}[\mathbf{e}_z \times \delta\mathbf{u}] - 2\Omega\beta^{(0)}\frac{\rho_s^{(0)}}{\rho_c^{(0)}}\mathbf{e}_z \times [\mathbf{e}_z \times \delta\mathbf{u}] + \nabla\kappa_c = -[\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}], \quad (3.112)$$

где мы ввели обозначение $\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_s$. Эти уравнения вместе с (3.107) и (3.108) и граничными условиями позволяют выразить \mathbf{u}_c и \mathbf{u}_s через $\mathbf{\Omega}$ и $\dot{\mathbf{\Omega}}$.

Предположим сначала, что нейтронная сверхтекучесть простирается вплоть до внутренней границы коры. В этом случае будем считать, что поле скоростей заряженной компоненты удовлетворяет экмановскому граничному условию (3.44). Данное предположение будет справедливым, если в приграничном слое величина сила взаимного трения \mathbf{f}_{mf} намного меньше силы вязкости \mathbf{f}_{vc} . Простая оценка показывает, что это условие выполняется, если β , $\beta \ll 1$. Что касается нейтронов, в сверхтекучей жидкости отсутствует сдвиговая вязкость [96], следовательно сверхтекучая компонента должна удовлетворять условию непротекания:

$$\rho_s^{(0)}(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{u}_s)|_{r=r_c} = 0 \quad (3.113)$$

Обсудим сначала «перпендикулярное» течение. Оно имеет следующий вид:

$$\mathbf{u}_{c\perp} = \left[\mathbf{e}_z \times \frac{\dot{\mathbf{\Omega}}}{\Omega} \right] \times \mathbf{r} - \mathbf{e}_z \frac{\dot{\Omega}_\perp}{4\Omega} E^{1/2} \frac{\rho_{cb}^{(0)}}{\rho_c^{(0)}} \left(\frac{r_c}{z_c} \right)^{3/2} \left(3\varpi \sin \phi + \frac{r_c}{z_c} \varpi \cos \phi \right), \quad (3.114)$$

$$\mathbf{u}_{s\perp} = \left[\mathbf{e}_z \times \frac{\dot{\mathbf{\Omega}}}{\Omega} \right] \times \mathbf{r}, \quad (3.115)$$

$$\kappa_{c\perp} = \kappa_{s\perp} = -\dot{\Omega}_\perp z \varpi \sin \phi. \quad (3.116)$$

Вновь получаем, что жидкость в основном объёме ядра вращается «твёрдотельно» всё с той же дополнительной угловой скоростью

$$\mathbf{e}_z \times \frac{\dot{\mathbf{\Omega}}_\perp}{\Omega}. \quad (3.117)$$

Вторичное течение возникает только в заряженной компоненте, поскольку только эта компонента взаимодействует с корой посредством трения. В линейном приближении это вторичное течение направлено строго вдоль вихревых нитей. По этой причине нейтронная компонента его не чувствует. Вторичное течение имеет структуру, аналогичную случаю

обычной жидкости. Следовательно и коэффициенты S_2 и S_3 будут аналогичны (3.57) с точностью до замены $\rho_c^{(b)}$ на $\rho_c^{(b)}$:

$$S_2 = -\frac{8\pi}{5} \frac{\rho_c^{(b)} r_c^5}{I_{core}} E^{1/2}, \quad S_3 = \frac{40\pi}{21} \frac{\rho_c^{(b)} r_c^5}{I_{core}} E^{1/2}. \quad (3.118)$$

«Параллельное» течение имеет более сложную структуру. Положив $\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{||}$, получим следующее решение:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{s||} = & -(\psi_s + K\delta\psi) \frac{\dot{\Omega}_{||}}{2\Omega} \varpi \mathbf{e}_\phi - (1 + A\delta\psi) \frac{\dot{\Omega}_{||}}{2\Omega} \varpi \mathbf{e}_\varpi + \\ & + \mathbf{e}_z \frac{\dot{\Omega}_{||}}{2\Omega \rho_s^{(0)}} \int_0^z \left[\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \varpi^2 (\rho_s^{(0)} + \rho_s^{(0)} A\delta\psi) \right] dz' + \frac{H_s(\varpi, \phi)}{\rho_s^{(0)}} \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{c||} = & -\left(\psi_c - K \frac{\rho_s^{(0)}}{\rho_c^{(0)}} \delta\psi \right) \frac{\dot{\Omega}_{||}}{2\Omega} \varpi \mathbf{e}_\phi - \left(1 - A \frac{\rho_s^{(0)}}{\rho_c^{(0)}} \delta\psi \right) \frac{\dot{\Omega}_{||}}{2\Omega} \varpi \mathbf{e}_\varpi + \\ & + \mathbf{e}_z \frac{\dot{\Omega}_{||}}{2\Omega \rho_c^{(0)}} \int_0^z \left[\frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \varpi^2 (\rho_c^{(0)} - \rho_s^{(0)} A\delta\psi) \right] dz' + \frac{H_c(\varpi, \phi)}{\rho_c^{(0)}} \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (3.120)$$

где H_s и H_c – функции ϖ и ϕ , которые далее будут определены из граничных условий, функции ψ_α вводятся через уравнения

$$\varkappa_{\alpha||} = -\dot{\Omega}_{||} \int_0^{\varpi} \psi_\alpha(\varpi') \varpi' d\varpi'. \quad (3.121)$$

Здесь мы также ввели обозначения: $\delta\psi = \psi_c - \psi_s$,

$$A = \frac{[\rho_c^{(0)}]^2 \beta^{(0)}}{[\beta^{(0)} \rho^{(0)}]^2 + [\rho_c^{(0)} - \beta^{(0)} \rho^{(0)}]^2}, \quad (3.122)$$

$$K = \frac{\rho_c^{(0)}}{\rho^{(0)}} - \frac{\rho_c^{(0)}}{\rho^{(0)}} \frac{[\rho_c^{(0)}]^2 - \rho_c^{(0)} \rho^{(0)} \beta^{(0)}}{[\beta^{(0)} \rho^{(0)}]^2 + [\rho_c^{(0)} - \beta^{(0)} \rho^{(0)}]^2}. \quad (3.123)$$

Учитывая для $\mathbf{u}_{s||}$ граничное условие (3.113), получим

$$\delta\psi = - \left[\int_0^{z_c} \rho_s^{(0)} dz' \right] \left[\int_0^{z_c} A \rho_s^{(0)} dz' \right]^{-1}, \quad H_s = 0 \quad (3.124)$$

Далее, учитывая граничное условие (3.44), можем определить функции ψ_c и H_c :

$$\psi_c(\varpi) = \left(K \frac{\rho_s^{(0)}}{\rho_c^{(0)}} \right)_{r_c} \delta\psi(\varpi) + \left(\frac{|\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z|}{E} \right)^{1/2} \frac{2J_\rho}{\rho_{sb}^{(0)} r_c} - \frac{1}{\rho_{sb}^{(0)} r_c} \frac{1}{\varpi} \frac{d}{d\varpi} (\varpi^2 J_\rho) - \frac{r_c}{z_c} \approx \quad (3.125)$$

$$\approx \left(K \frac{\rho_s^{(0)}}{\rho_c^{(0)}} \right)_{r_c} \delta\psi(\varpi) + \left(\frac{|\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z|}{E} \right)^{1/2} \frac{2J_\rho}{\rho_{sb}^{(0)} r_c}, \quad (3.126)$$

и $H_c = 0$. Здесь

$$J_\rho = \int_0^{z_b} (\rho_c^{(0)} + \rho_s^{(0)}) dz'. \quad (3.127)$$

Из полученного решения видно, что обе компоненты вращаются дифференциально. Заряженная компонента вращается с угловой скоростью

$$\Omega - \frac{\dot{\Omega}_{\parallel}}{2\Omega} \left(\psi_c - K \frac{\rho_s^{(0)}}{\rho_c^{(0)}} \delta\psi \right), \quad (3.128)$$

которая чуть больше, чем Ω . Сверхтекучая компонента вращается с угловой скоростью

$$\Omega - \frac{\dot{\Omega}_{\parallel}}{2\Omega} (\psi_c - \delta\psi + K\delta\psi), \quad (3.129)$$

которая, в свою очередь, чуть больше, чем (3.128).

Вторичные течения компонент также отличаются друг от друга. Однако полный вторичный ток массы

$$\rho_c^{(0)} \mathbf{u}_c + \rho_s^{(0)} \mathbf{u}_s = \rho^{(0)} \frac{\dot{\Omega}_{\parallel}}{2\Omega} \mathbf{e}_\varpi \varpi + \mathbf{e}_z \frac{\dot{\Omega}_{\parallel}}{2\Omega} \int_0^z \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} (\varpi^2 \rho^{(0)}) dz' \quad (3.130)$$

совпадает со случаем обычной жидкости (см. параграф 3.3). Это вполне ожидаемый результат, поскольку вторичное «параллельное» течение, переносящее угловой момент к коре, должно переносить в единицу времени ровно столько углового момента, сколько нужно, чтобы выполнялось равенство $S_1 = 1$.

В реальных нейтронных звёздах, по крайней мере пока они не остыли в достаточной степени, область нейтронной сверхтекучести не достигает коры. Между сверхтекучим ядром и корой имеется прослойка с нормальными нейтронами (см. рис. 3.3). Таким образом, вообще говоря, структура течения может быть достаточно сложной. Однако, если нас интересует только вековая эволюция вращения нейтронных звёзд, нам не требуется знать точную форму течения. Достаточно оказываются результаты, полученные выше. Для этого нужно иметь в виду два пункта. Во-первых, если течение с достаточной точностью квазистационарное, как уже не раз отмечалось, коэффициент S_1 близок к единице. В этом случае нет необходимости в знании структуры «параллельного» течения. Во-вторых, как опять же уже не раз отмечалось, «перпендикулярное» течение практически во всём объёме представляет собой «твердотельное» вращение с угловой скоростью (3.117) с возможным добавлением малых полоидальных вторичных течений. Заметное отличие от этой угловой скорости происходит только в приграничных слоях. Вообще говоря, должны возникать как минимум два приграничных слоя. Первый возникает вблизи границы коры

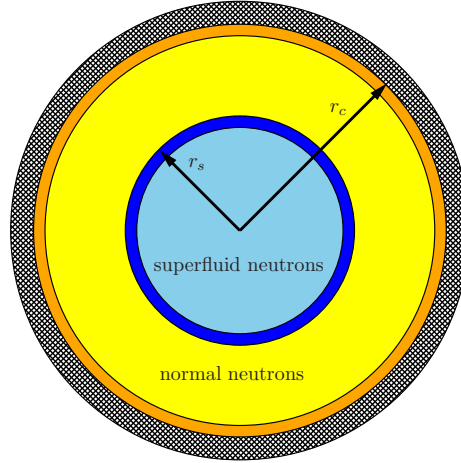


Рис. 3.3. Расположение области нейтронной сверхтекучести и приграничных слоёв в ядре нейтронной звезды.

и ядра. Второй слой должен появляться вблизи поверхности, на которой происходит фазовый переход от сверхтекучего состояния нейтронов к нормальному. Несмотря на то, что мы не знаем точную структуру второго слоя, мы можем с уверенностью утверждать, что его влияние на вращение жидкости затухает на масштабе порядка $r_c E^{1/2}$ при удалении от него. Это означает, что внешний слой не чувствует наличия сверхтекучих нейтронов в глубине коры до тех пор, пока поверхность фазового перехода не приблизится к коре на расстояние порядка $E^{1/2} r_c$. До тех пор, пока это не произойдёт, для вычисления коэффициентов S_2 и S_3 можно использовать формулы (3.92). После того, как это случилось, справедливыми будут выражения (3.118).

3.6. Эволюция угла наклона

Получив выражения для коэффициентов S_2 и S_3 , можно переходить к решению уравнений (2.32)-(2.34). Коэффициент вязкости, входящий в формулы (3.92) и (3.118), зависит от температуры. Следовательно, для того, чтобы замкнуть систему уравнений, нам нужно учесть также тепловую эволюцию нейтронной звезды. Последняя, к счастью, фактически не зависит от вращательной эволюции и определяется в основном массой звезды. Это означает, что температуру ядра, а вместе с ней и коэффициент вязкости можно рассматривать как известные функции времени. Для нахождения этих функций мы использовали код, моделирующий тепловую эволюцию нейтронных звёзд, разработанный Гнединым, Яко-

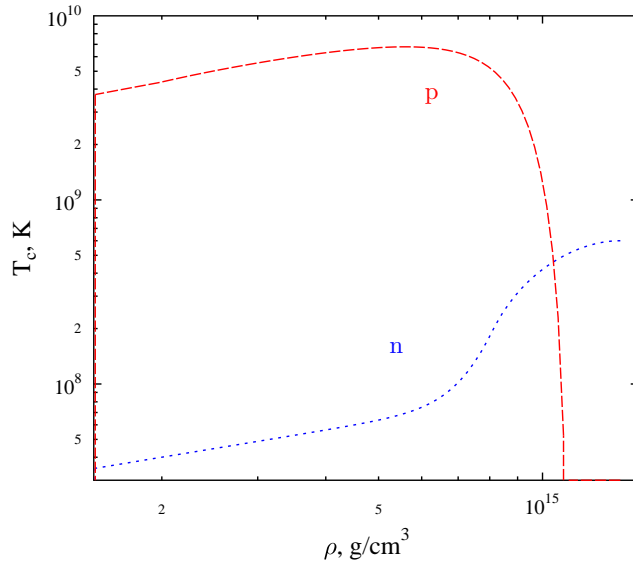


Рис. 3.4. Критические температуры для протонов (p) и нейтронов (n), как функции плотности ρ из работы Гусакова и др. [98]

влевым и Потехиным [83]. Для расчётов мы взяли легкую нейтронную звезду с массой $\approx 1M_{\odot}$. В качестве уравнения состояния мы взяли уравнение *APR I* [97, 98], а также использовали кривые критических температур для протонной сверхпроводимости и нейтронной сверхтекучести, приведённые на рисунке 3.4 [98]. Для вычисления коэффициента вязкости мы воспользовались формулой [99]

$$\eta = 6 \cdot 10^{18} \left(\frac{\rho}{10^{15} \text{g/cm}^3} \right)^2 \left(\frac{T}{10^9 \text{K}} \right)^{-2} \left(\frac{T_{cp}}{2 \cdot 10^9 \text{K}} \right)^{1/3} \frac{\text{г}}{\text{см с}}, \quad (3.131)$$

основанной на результатах, полученных в работе Штернина и Яковлева [95]. Отметим, что эта формула справедлива, когда $T < 0.2T_{cp}$. Если $\rho^{(b)} = 1.5 \times 10^{14} \text{ г/см}^3$, то в рамках заданной модели протонной сверхпроводимости (см. рис. 3.4) это неравенство становится справедливым во всём объёме ядра, когда его температура опускается ниже $8 \times 10^8 \text{ К}$, что происходит примерно через 10 лет, после рождения звезды (см. рис. 3.5 далее).

На рисунке 3.5 приведены траектории, построенные с различными начальными параметрами для пульсаров, испытывающих на себе действие момента сил (1.83). Легко видеть, что эти траектории принципиально отличаются от траекторий, полученных с использованием того же момента сил в приближении абсолютно твёрдой звезды (правая панель рис. 1.8). Как и следовало ожидать в случае слабого взаимодействия коры с ядром ($S_2, S_3 \ll I_{crust}/I_{core}$), временной масштаб эволюции угла наклона уменьшился примерно в I_{crust}/I_{core} раз. В то же время темп замедления вращения остался тем же самым. Вследствие этого траектории в координатах $P - \cos \chi$ стали гораздо более крутыми. Та-

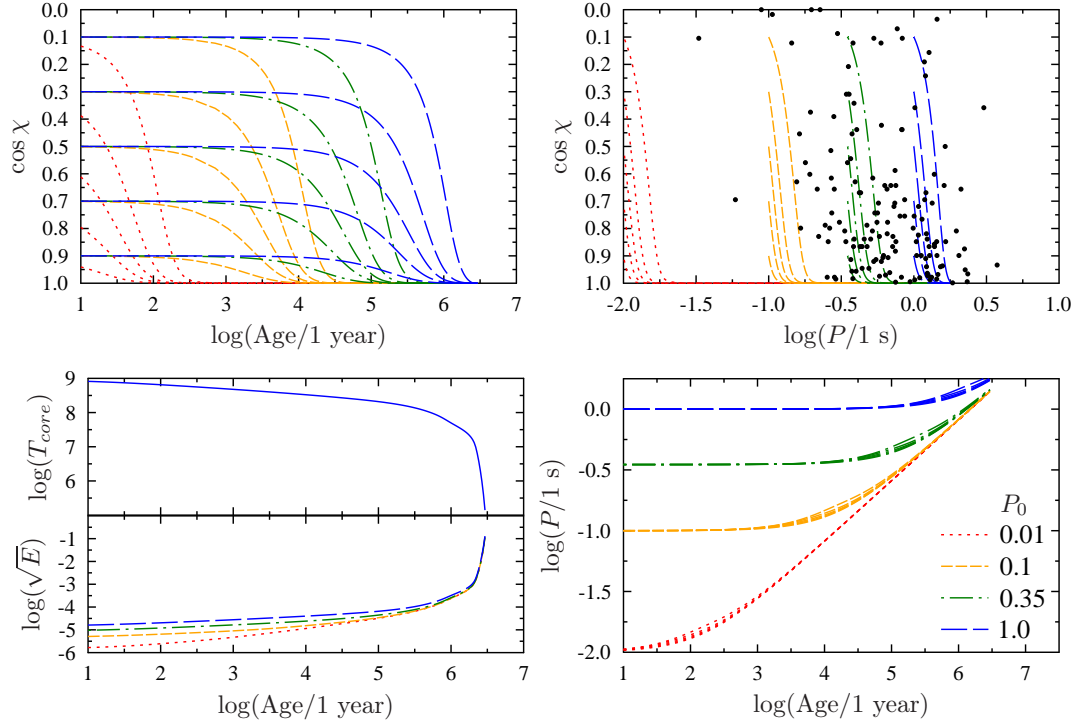


Рис. 3.5. Эволюционные траектории для пульсаров с различными начальными периодами и углами наклона в координатах $\cos \chi$ –возраст (верхняя левая панель), P –возраст (нижняя правая панель) и $\cos \chi$ – P (верхняя правая панель). Наблюдательные значения для 149 пульсаров [60] показаны точками, отношение I_{crust}/I_{core} принято равным 0.1, $\epsilon = 10^{-13}$, пульсары эволюционируют под действием ВРТ-момента, величина магнитного поля на полюсах принята равной 10^{12} Гс. На нижней левой панели показано, как меняются с течением времени температура ядра и \sqrt{E} .

ким образом, согласно правой верхней панели рисунка 3.5 пульсары не успевают сколько-нибудь существенно замедлить своё вращение перед тем, как окажутся соосными (т.е. перестанут быть радиопульсарами). Это означает, что все пульсары имели начальные периоды близкие к их современным значениям. Другими словами распределение пульсаров по начальным периодам должно быть близко к распределению по действительным периодам. Заметим, в частности, что примерно четверть среди всех известных пульсаров имеют период $P \gtrsim 1$ с. В то же время независимые методы дают совершенно иные распределения по начальным периодам. Например, Попов и Туролла [100] рассмотрели выборку, состоящую из 30 молодых нейтронных звёзд, возраст которых оценивается по возрасту ассоциированных с ними остатков сверхновых ($10^3 - 10^4$ лет). Начальные периоды для этой выборки были получены авторами в предположении, что пульсары замедляются согласно магнито-дипольной формуле (1.2). Полученное распределение неплохо описывается Гауссовой функцией с $\langle P_0 \rangle = 0.1$ с и $\sigma_{p_0} = 0.1$ (см. рис. 3.6).

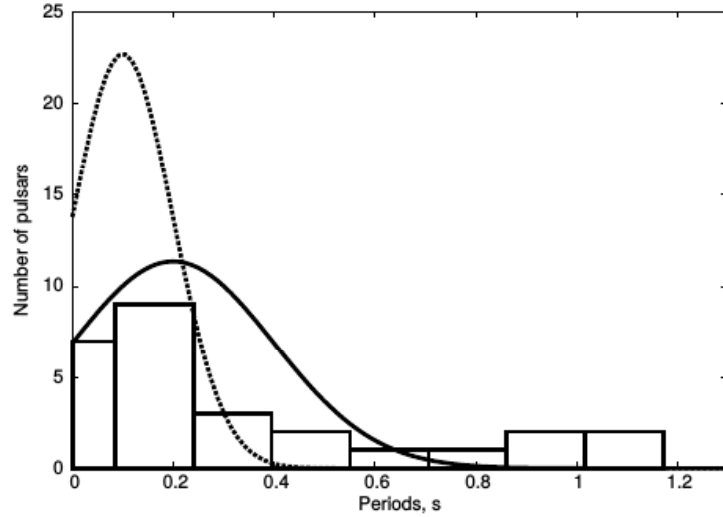


Рис. 3.6. Распределения пульсаров по начальным периодам: две кривые – нормальные распределения с $\langle P_0 \rangle = 0.1$ с, $\sigma_{p_0} = 0.1$ с (пунктирная линия) и $\langle P_0 \rangle = 0.2$ с, $\sigma_{p_0} = 0.2$ с (сплошная линия), предлагаемые Поповым и Туроллой [100], а также гистограмма, полученная в работе Натсоса и др. [101]. Рисунок из работы Игошева и Попова [102].

Другой метод был использован Натсосом и соавторами [101]. В своей работе авторы рассмотрели выборку старых пульсаров (старше 10^5 лет), находящихся над плоскостью Галактики. Для таких пульсаров, зная их скорость собственного движения и предположив, что они родились в плоскости Галактики, можно оценить кинетический возраст, проследив их траекторию назад во времени. Для построения распределения по начальным периодам авторы также предполагали справедливость магнито-дипольной формулы. Полученное распределение представлено в виде гистограммы на рисунке 3.6.

Следует прежде всего заметить, что распределения полученные Поповым и Туроллой, и Натсосом и соавторами также не совпадают друг с другом. Причина этого разногласия, однако, может заключаться в том, что Натсос и др. не учитывали распад магнитного поля, который может быть существенным в случае выборки старых пульсаров. Игошев и Попов [102] показали, что учёт распада поля может привести в согласие распределения, полученные двумя группами. Так или иначе, согласно результатам обеих групп пульсары практически не рождаются с периодами $P_0 \gtrsim 1$ с, что, по всей видимости, противоречит эволюционным кривым, представленным на рисунке 3.5.

Как уже говорилось, причиной укрупнения эволюционных кривых в координатах $P - \cos \chi$ является ускорение по сравнению с приближением твёрдой звезды эволюции угла наклона. Угол при этом стремится к равновесному значению. В случае РТЛ-момента рав-

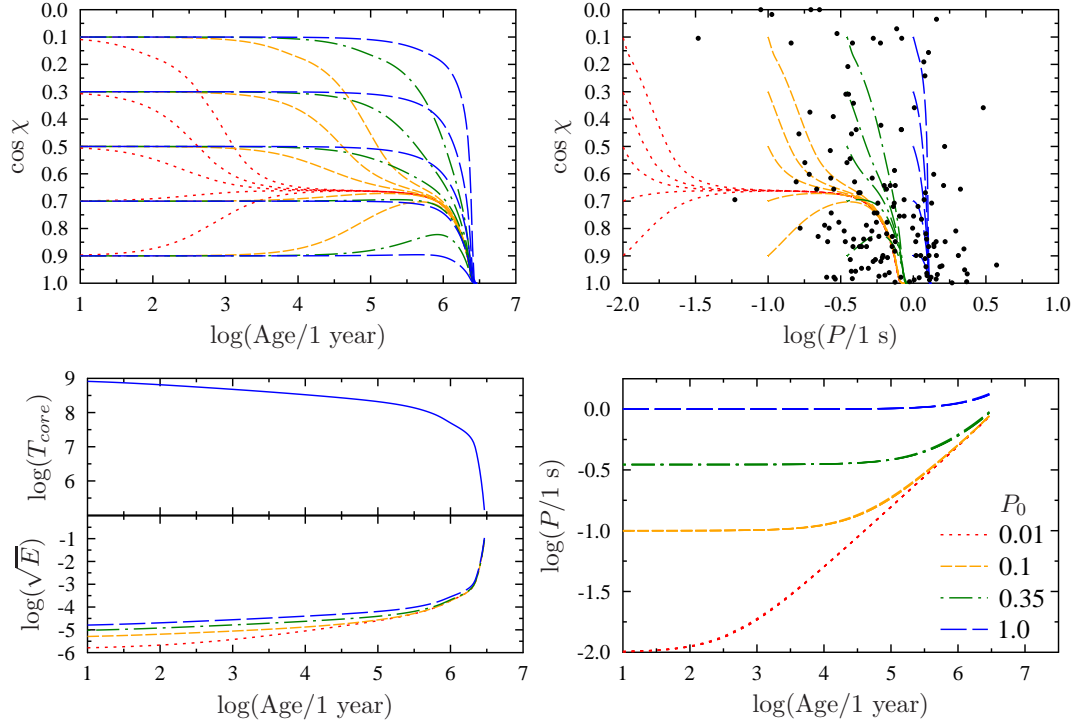


Рис. 3.7. То же, что на рис. 3.5, но для ВРТ-момента с параметром недипольности $\nu_{nd} = 0.5$.

новесным значением является $\chi_{eq} = 0^\circ$. Существуют, однако, модели приложенного к звезде момента сил с конечными равновесными углами. Таковым является момент, предложенный Барсуковым, Поляковой и Цыганом (см. параграф 1.4). Примеры эволюционных кривых пульсаров, испытывающих на себе действие этого момента сил, представлены на рисунке 3.7. При построении этих кривых предполагалось, что для всех пульсаров параметр недипольности равен 0.5, что соответствует равновесному углу $\chi_{eq} \approx 50^\circ$. В самом деле, взглянув на левую верхнюю панель рисунка (3.7), мы увидим, что пульсары с малыми начальными периодами быстро достигают равновесного угла и довольно долго остаются в этом состоянии. Однако при характерных возрастах порядка 1 млн. лет кривые начинают загибаться вниз и пульсары вновь устремляются к соосному состоянию. Это происходит за-за второго слагаемого в числителе уравнения (2.33). Для молодых нейтронных звёзд это слагаемое мало по сравнению с первым. Однако по мере остывания звезды и замедления её вращения отношение второго слагаемого к первому увеличивается. Наличие этого слагаемого заставляет звезду выстраивать ось вращения вдоль главной оси, соответствующей наибольшему главному моменту инерции. Поскольку при выводе уравнения (2.33) предполагалось, что ось симметрии звезды совпадает с направлением магнитной оси, и при построении кривых мы считали, что $\epsilon > 0$, угол наклона стремится к 0° . Пульсары, родившиеся с большими периодами, не успевают приблизиться к χ_{eq}

(характерный масштаб эволюции P^3), сразу сваливаясь к соосному состоянию. Таким образом, под действием ВРТ-момента пульсары с $P < 1$ с, успевают замедлиться перед тем, как стать соосными (разброс по углам наклона может быть обеспечен варьированием параметра недипольности ν_{nd}). Однако для пульсаров с $P > 1$ с проблема сохраняется.

Таим образом, рассматриваемая в данной главе модель, судя по всему противоречит наблюдательным данным. По-видимому, единственная возможность привести её в согласие с ними, предположить, что направление магнитного момента не совпадает с главными осями инерции. В этом случае после затухания прецессии будет сохраняться конечный угол наклона.

3.7. Основные результаты главы 3

В главе 3 получены следующие основные результаты.

1. В предположении, что магнитное поле нейтронной звезды не проникает в её ядро рассчитаны значения коэффициентов S_2 и S_3 как в случае отсутствия нейтронной сверхтекучести, так и в случае её наличия.
2. Показано, что пульсары, не имеющие других выделенных направлений, кроме оси вращения и магнитного момента, в данной модели очень быстро выходят на режим соосного или ортогонального вращения, что противоречит наблюдательным данным. Это означает, что либо магнитное поле играет ведущую роль во взаимодействии коры и ядра, либо большинство пульсаров являются эффективно трёхосными.

Вращение нейтронных звёзд с замагниченным ядром

4.1. Введение к главе 4

В предыдущей главе было рассмотрено вращение нейтронной звезды, магнитное поле которой не проникает в ядро и, следовательно, не принимает участия в переносе углового момента из ядра в кору. Такая конфигурация является довольно специфической и вряд ли в полной мере может реализовываться в природе. Настоящая глава посвящена изучению противоположного предельного случая, в котором проникающее в ядро магнитное поле жёстко связывает заряженную компоненту ядра с корой.

Впервые магнитное взаимодействие коры с ядром в приложении к задаче о вековой эволюции вращения нейтронной звезды было рассмотрено Яссоном [77]. В его работе изучалась осесимметричная модель, в которой ось вращения совпадает с осью симметрии магнитного поля и с направлением приложенного к звезде момента сил. Было показано, что если отсутствуют замкнутые внутри ядра силовые линии и величина внутреннего магнитного поля многократно превосходит некоторое пороговое значение (для нейтронной звезды в Крабовидной туманности приводилась оценка 10^9 Гс), звезда будет вращаться как твёрдое тело. Яссон, при этом, ограничился рассмотрением нескольких простых конфигураций магнитного поля. Глампедакис и Ласки [103] показали, что любая осесимметричная конфигурация магнитного поля (включающая полоидальную и тороидальную компоненты) обеспечивает коротацию коры и заряженной компоненты ядра, если только отсутствуют замкнутые в ядре силовые линии. Данные авторы, однако, также ограничились рассмотрением частного случая совпадения магнитной оси и оси вращения. В главе 2 мы привели некоторые аргументы (не представляющие собой строгое доказательство) в пользу того, что при выполнении условия квазистационарности (2.4), замедление вращения звезды под действием внешнего момента сил на достаточно больших временах всегда будет происходить с тем же темпом, как и если бы звезда представляла собой твёрдое тело. Законы эволюции угла наклона и прецессии, однако, могут модифицироваться. В случае сильно связанной с корой заряженной компоненты эффект будет создаваться только слабо связанными с остальным веществом сверхтекучими нейтронами.

4.2. Основные предположения

В данной главе мы вновь будем считать, что ядро нейтронной звезды представляет собой двухкомпонентную систему, состоящую из заряженной компоненты (включающей в себя нормальные нейтроны) и сверхтекучей нейтронной компоненты. Тогда, если протоны не находятся в сверхпроводящем состоянии, для заряженной компоненты можно сформулировать следующее линейаризованное квазистационарное уравнение баланса сил

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_c + \nabla \chi_c + y' \nabla (\mu_c - \mu_n) = \quad (4.1)$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho_c^{(0)}} \mathbf{B}^{(1)} \times \text{rot } \mathbf{B}^{(0)} - \frac{1}{4\pi\rho_c^{(0)}} \mathbf{B}^{(0)} \times \text{rot } \mathbf{B}^{(1)} + \frac{\rho_s}{\rho_c} \mathbf{f}_{mf}^{(1)} + \mathbf{f}_{vc}^{(1)} - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r},$$

отличающееся от уравнения (3.102) наличием силы Лоренца. Появление силы Лоренца позволяет предположить, что сила Пуанкаре может быть скомпенсирована напряжениями, возникающими при деформации магнитного поля. Исследование классов конфигураций поля, допускающих такую компенсацию, выходит за рамки данной диссертации. Приведём здесь для иллюстрации такой возможности простейший пример, рассмотренный Яссоном, Глампедакисом и Ласки [77, 103]. Пусть $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\parallel}$. Тогда, умножив уравнение (4.1) скалярно на \mathbf{e}_{ϕ} и положив $\mathbf{u} = 0$, получим

$$\mathbf{B}_p^{(0)} \cdot \nabla \left(\varpi B_{\phi}^{(1)} \right) + \mathbf{B}_p^{(1)} \cdot \nabla \left(\varpi B_{\phi}^{(0)} \right) = -4\pi\varpi \left\{ \rho_c \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{\parallel} \varpi - \rho_s (\mathbf{f}_{mf} \cdot \mathbf{e}_{\phi}) \right\}. \quad (4.2)$$

Здесь индексами « p » и « ϕ » обозначены полоидальная и тороидальная компоненты поля. Это уравнение формально позволяет определить поправку к магнитному полю $\mathbf{B}^{(1)}$, необходимую для компенсации силы Пуанкаре. Однако, вообще говоря, не очевидно, что данное уравнение будет иметь решение при произвольной конфигурации невозмущённого поля $\mathbf{B}^{(0)}$. Пусть для простоты поле $\mathbf{B}^{(0)}$ имеет чисто полоидальную конфигурацию и пусть внутри ядра имеются замкнутые силовые линии. Проинтегрируем уравнение (4.2) вдоль какой-нибудь из таких силовых линий. Тогда левая часть уравнения, представляющая собой интеграл от градиента по замкнутому контуру, будет равна нулю. Правая же часть, вообще говоря, нулю равняться не будет. Это означает, что уравнение (4.2) не имеет решения, а, следовательно, не верно изначальное предположение о том, что сила Пуанкаре может быть скомпенсирована силой Лоренца. Таким образом, в областях замкнутых силовых линий магнитное поле не может связать заряженную компоненту с корой и там должно возникнуть дифференциальное вращение.

Рассмотрим теперь простейший пример конфигурации поля без замкнутых в ядре

силовых линий, а именно однородное поле

$$\mathbf{B}^{(0)} = B_0 \mathbf{e}_z. \quad (4.3)$$

Подставив выражение (4.3) в уравнение (4.2) и проинтегрировав его по z , получим

$$B_\phi^{(1)} = -\frac{4\pi}{B_0} \left\{ \dot{\Omega}_{||} \varpi \int_0^z \rho_c dz' - \int_0^z \rho_s (\mathbf{f}_{mf} \cdot \mathbf{e}_\phi) dz' \right\} \quad (4.4)$$

Момент сил можно вычислить как поток момента импульса в кору (ср. с формулой (1.50)):

$$\mathbf{N} = -r_c^3 \langle (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{B}) [\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}] \rangle_{r_c}, \quad (4.5)$$

Ввиду осевой симметрии задачи, очевидно, что момент будет направлен вдоль оси z . В линейном приближении он будет иметь вид

$$\mathbf{N} = r_c^3 \langle \sin \theta B_\phi^{(1)} B_r^{(0)} \rangle_{r_c}. \quad (4.6)$$

Подставив сюда выражения (4.3) и (4.4) и проинтегрировав, получим

$$\mathbf{N} = -I_c \dot{\Omega}_{||} - I_s S_s \dot{\Omega}_{||}, \quad (4.7)$$

где I_c и I_s – моменты инерции заряженной и сверхтекучей компонент, а коэффициент S_s вычисляется с помощью формулы

$$S_s = -\frac{1}{I_s} \int_{core} \varpi \rho_s (\mathbf{f}_{mf} \cdot \mathbf{e}_\phi) d^3 r. \quad (4.8)$$

Подставив полученный момент (4.7) в уравнение (2.2), видим, что, как это и должно быть в случае жёсткой связи, момент инерции I_c просто добавляется к моменту инерции коры. Что касается второго слагаемого, коэффициент S_s должен равняться единице, если выполнено условие квазистационарности (см. главу 2). Таким образом, момент инерции I_s также просто следует прибавить к моменту инерции коры, и вся звезда будет тормозиться как твёрдое тело. Однако последнее утверждение верно только в случае $\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{||}$. Сверхтекучесть нейтронов будет влиять на эволюцию угла наклона и прецессию. Этому влиянию посвящена данная глава.

Итак, в качестве предположения примем, что магнитное поле в нейтронной звезде устроено таким образом, что обеспечивает жёсткую связь заряженной компоненты с корой. Это конечно не означает, что скорость заряженной компоненты строго равна нулю.

Однако, в дальнейшем, получив выражение для u_s мы сможем непосредственно убедиться в том, что $u_c \ll u_s$.

Мы будем предполагать, что величина силы взаимного трения между сверхтекучими нейтронами и заряженной компонентой ядра определяется эффектом увлечения (см. приложение (Б)). Поэтому более последовательным будет учесть этот эффект также и в гидродинамике. Введём скорости и массовые токи во вращающейся вместе с корой системе отсчёта:

$$\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}], \quad (4.9)$$

$$\mathbf{J}_\alpha^* = \mathbf{J}_\alpha - \rho_\alpha [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]. \quad (4.10)$$

Здесь α – индекс, обозначающий компоненту ($\alpha = e, s, p(s), ex$). Будем считать, что все компоненты кроме сверхтекучих нейтронов движутся с одной и той же скоростью \mathbf{v}_c :

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_{ex} = \mathbf{J}_{p(s)}/\rho_{p(s)} = \mathbf{v}_c. \quad (4.11)$$

Как и в предыдущей главе для краткости будем называть этот конгломерат заряженной компонентой. Введём также для этой компоненты скорость и ток массы во вращающейся системе отсчёта:

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{v}_c - [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}], \quad (4.12)$$

$$\mathbf{J}_c^* = \mathbf{J}_c - \rho_c [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}], \quad (4.13)$$

где

$$\rho_c = \sum_{\alpha \neq s} \rho_\alpha. \quad (4.14)$$

Важно обратить внимание, что символом \mathbf{u}_c мы обозначили величину \mathbf{J}_c^*/ρ_c . Следовательно, если имеет место эффект увлечения, скорость \mathbf{u}_p , вообще говоря, не будет совпадать с \mathbf{u}_c .

Уравнения (Б.32)-(Б.34) во вращающейся с корой системе отсчёта примут вид

$$\partial_t^* \mathbf{u}_s + 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_s] + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s + \nabla \chi = -[\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}] + \quad (4.15)$$

$$+ \frac{\rho_{np}}{\rho_s} (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_s) \times (2\boldsymbol{\Omega} + \text{rot } \mathbf{u}_s) + \mathbf{f}_{mf},$$

$$\partial_t^* \rho_s + \text{div } \mathbf{J}_s^* = \Gamma_s, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{f}_{mf} = (2\boldsymbol{\Omega} + \text{rot } \mathbf{u}_s) \times \left\{ \beta' \left(\frac{\rho_{nn}}{\rho_s} \mathbf{u}_s + \frac{\rho_{np}}{\rho_s} \mathbf{u}_p - \mathbf{u}_e \right) + \right. \quad (4.17)$$

$$\left. + \beta \frac{2\boldsymbol{\Omega} + \text{rot } \mathbf{u}_s}{|2\boldsymbol{\Omega} + \text{rot } \mathbf{u}_s|} \times \left(\frac{\rho_{nn}}{\rho_s} \mathbf{u}_s + \frac{\rho_{np}}{\rho_s} \mathbf{u}_p - \mathbf{u}_e \right) \right\},$$

где $\varkappa = -(1/2)[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]^2 + \mu_n + \Phi$, $\dot{\mathbf{\Omega}} = d_t \mathbf{\Omega}$.

Вновь представим вектор $\dot{\mathbf{\Omega}}$ в виде суммы $\dot{\mathbf{\Omega}} = \dot{\mathbf{\Omega}}_{\parallel} + \dot{\mathbf{\Omega}}_{\perp}$ и, используя это разложение, введём ортонормированный базис \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z следующим образом:

$$\mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{\Omega}}{\Omega}, \quad \mathbf{e}_x = \frac{\dot{\mathbf{\Omega}}_{\perp}}{\dot{\Omega}_{\perp}}, \quad \mathbf{e}_y = [\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x]. \quad (4.18)$$

На основе этого базиса введём также цилиндрическую систему координат (ϖ, ϕ, z) и задаваемые этой системой единичные векторы \mathbf{e}_{ϖ} , \mathbf{e}_{ϕ} и \mathbf{e}_z . (см. рис. 3.1).

Так как мы предполагаем, что

$$\Omega \varpi \gg u_s \gg u_c, \quad (4.19)$$

сохраним в уравнениях (4.15)-(4.17) только линейные по u_s слагаемые, а слагаемыми, содержащими u_e и u_{ex} , пренебрежём вовсе. Что касается протонов, то для них малой величиной будет ток массы:

$$\mathbf{J}_{p(s)}^* / \rho_{p(s)} = \rho_e \mathbf{u}_e = \rho_{ex} \mathbf{u}_{ex} \approx 0. \quad (4.20)$$

Комбинируя это с (Б.27) и (Б.28) получим, что

$$\mathbf{u}_p \approx -(\rho_{pn} / \rho_{pp}) \mathbf{u}_s \quad (4.21)$$

и

$$\mathbf{J}_s^* = \frac{\varrho^2}{\rho_{pp}} \mathbf{u}_s. \quad (4.22)$$

В рассматриваемой системе релаксационным механизмом является взаимное трение между сверхтекучими нейтронами и заряженной компонентой. Этот механизм удовлетворяет условию квазистационарности (2.4) (конкретные величины времён релаксации обсуждаются в параграфе 4.3, а также в приложении Б), а следовательно в уравнениях (4.15) и (4.16) можно пренебречь производными по времени.

Уравнение неразрывности (4.16) может быть переписано следующим образом:

$$\partial_t^* \rho_s + \text{div} \mathbf{J}_s^* = \Gamma_s = -\partial_t^* \rho_c - \text{div} \mathbf{J}_c^*. \quad (4.23)$$

Здесь члены $\partial_t^* \rho_s$ and $\partial_t^* \rho_c$, как мы только что выяснили, могут быть выкинуты. Массовый ток заряженной компоненты пренебрежимо мал, согласно предположению (4.20). Следовательно, источник Γ_s равен нулю с точностью до поправок порядка u_c .

После всех упрощений мы получаем систему уравнений

$$2 \frac{\varrho^2}{\rho_{pp} \rho_s} \mathbf{\Omega} \times (\gamma \mathbf{u}_s - \beta \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_s) + \nabla \varkappa = -[\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}], \quad (4.24)$$

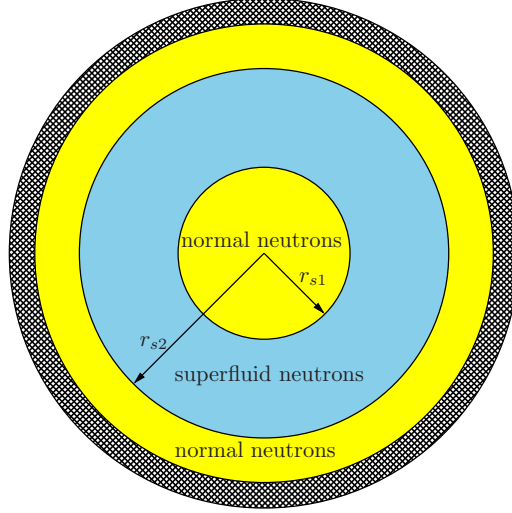


Рис. 4.1. Область, занимаемая сверхтекучими нейтронами.

$$\operatorname{div} \left(\frac{\varrho^2}{\rho_{pp}} \mathbf{u}_s \right) = 0, \quad (4.25)$$

где $\gamma = (1 - \beta')$. Здесь и далее все плотности и коэффициенты являются невозмущёнными.

Кроме того на поверхностях фазового перехода должно выполняться граничное условие

$$\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{r} \Big|_{r=r_{si}} \approx \frac{\varrho^2}{\rho_{pp}} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{r}) \Big|_{r=r_{si}} = 0, \quad (4.26)$$

обозначающее отсутствие потока сверхтекучей жидкости через эту поверхность. Вообще говоря, таких поверхностей может быть две (см. рис. 4.1). При заданной температуре сверхтекучесть разрушается, когда плотность становится меньше некоторой пороговой плотности. Обозначим радиус сферы, на которой это происходит через r_{s2} . Но так как кривая критической температуры, по всей видимости, имеет колоколообразный вид, сверхтекучесть может разрушаться и при слишком больших плотностях. Радиус внутренней границы (если она существует) области нейтронной сверхтекучести будем обозначать через r_{s1} .

Решение, удовлетворяющее уравнениям (4.24), (4.25) и граничным условиям (4.26)

имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s = & \frac{\rho_{pp}\rho_s}{\varrho^2} [\mathbf{w} \times \mathbf{r}] - \frac{\rho_{pp}\rho_s}{\varrho^2} \frac{\dot{\Omega}_{\parallel}}{2\Omega} \frac{\gamma - \beta\psi}{\gamma^2 + \beta^2} \varpi + \\ & + \mathbf{e}_z \frac{\rho_{pp}}{\varrho^2} \frac{\dot{\Omega}_{\parallel}}{2\Omega} \int_{(z/|z)z_{s1}}^z \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left(\varpi^2 \rho_s \frac{\gamma - \beta\psi}{\gamma^2 + \beta^2} \right) dz', \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{w} = -\frac{\beta + \gamma\psi}{\gamma^2 + \beta^2} \frac{\dot{\Omega}_{\parallel}}{2\Omega} - \frac{\beta}{\gamma^2 + \beta^2} \frac{\dot{\Omega}_{\perp}}{\Omega} + \frac{\gamma}{\gamma^2 + \beta^2} \left[\mathbf{e}_z \times \frac{\dot{\Omega}_{\perp}}{\Omega} \right], \quad (4.28)$$

$$\varkappa = -yz\dot{\Omega}_{\perp} - \dot{\Omega}_{\parallel} \int_0^{\varpi} \psi(\varpi') \varpi' d\varpi', \quad (4.29)$$

$$\psi(\varpi) = \left[\int_{z_{s1}}^{z_{s2}} \frac{\rho_s \gamma}{\gamma^2 + \beta^2} dz' \right] \left[\int_{z_{s1}}^{z_{s2}} \frac{\rho_s \beta}{\gamma^2 + \beta^2} dz' \right]^{-1}, \quad (4.30)$$

$$z_{s1} = \sqrt{r_{s1}^2 - \varpi^2}, \text{ если } \varpi < r_{s1} \text{ и } z_{s1} = 0, \text{ если } \varpi > r_{s1}, \quad (4.31)$$

$$z_{s2} = \sqrt{r_{s2}^2 - \varpi^2}. \quad (4.32)$$

В общем случае течение сверхтекучей нейтронной жидкости выглядит довольно сложно. Оно состоит из дифференциального вращения вокруг локальной оси \mathbf{w} и полоидального течения. Последнее, однако, есть следствие изменения с глубиной коэффициентов β и β' и исчезает, если эти коэффициенты постоянны (поскольку $\gamma - \beta\psi = 0$, если $\beta, \beta' = \text{const}$). Если мы также пренебрежём эффектом увлечения ($\rho_{pp}\rho_s/\varrho^2 = 1$), вращение жидкости окажется твердотельным. Заметим, что если коэффициенты β и β' выражаются через параметр связи σ согласно формулам (Б.20), входящие в полученное решение комбинации будут равны

$$\frac{\gamma}{\gamma^2 + \beta^2} = 1, \quad \frac{\beta}{\gamma^2 + \beta^2} = \sigma. \quad (4.33)$$

Далее будем предполагать, что эти равенства выполняются.

Если полоидальное течение отсутствует, граничные условия (4.26) выполняются автоматически. Убедимся, что они выполняются и при наличии полоидального течения. Рассмотрим сначала ток массы (4.22) в области $\varpi < r_{c1}$. На внутренней границе $z = z_{s1}$ величина $(\mathbf{J}_s^* \cdot \mathbf{e}_{\varpi})$ равна нулю т.к. на поверхности фазового перехода обнуляется плотность ρ_s , компонента $(\mathbf{J}_s^* \cdot \mathbf{e}_z)$ равна нулю, так как в интеграле в выражении (4.27) совпадают пределы интегрирования. На внешней границе $z = z_{s2}$ величина $(\mathbf{J}_s^* \cdot \mathbf{e}_{\varpi})$ обнуляется вновь из-за равенства нулю величины ρ_s . Что касается z -компоненты, вынеся дифференцирование по ϖ из-под интеграла (это можно сделать, когда $\rho_s(r_{s2}) = 0$) и учтя (4.30), легко

убедится, что

$$\int_{z_{s1}}^{z_{s2}} \rho_s \frac{\gamma - \beta\psi}{\gamma^2 + \beta^2} dz = 0. \quad (4.34)$$

В области $\varpi \geq r_{s1}$ поверхность $z = z_{s1}$ не является границей сверхтекучей фазы. Однако благодаря антисимметричности течения жидкость не пересекает поверхность $z = z_{s1}$, представляющую собой в этой области экваториальную плоскость. Таким образом, запись (4.27)-(4.30) является верной во всём сверхтекучем слое.

Как и в предыдущих главах, полученное решение представляет собой сумму «параллельного» и «перпендикулярного» течений. Рассмотрим их по отдельности. «Перпендикулярное» течение состоит из вращения с угловой скоростью

$$\mathbf{e}_z \times \frac{\dot{\Omega}_\perp}{\Omega} - \sigma \frac{\dot{\Omega}_\perp}{\Omega}. \quad (4.35)$$

Если коэффициент σ зависит от радиуса, вращение будет дифференциальным. При $\sigma \rightarrow 0$ данная угловая скорость, как и полагается, стремится к выражению (2.24). Обсудим вопрос о применимости полученного решения. С одной стороны, решётка вихревых нитей должна взаимодействовать с заряженной компонентой достаточно эффективно, для того чтобы достаточно быстро подстраиваться под изменение вектора Ω . С другой стороны, если трение вихревых нитей о заряженную компоненту будет слишком сильным, нити будут практически не способны двигаться сквозь неё. А следовательно и угловая скорость сверхтекучей жидкости практически не будет меняться, несмотря на замедление вращения коры и заряженной компоненты ядра. Таким образом, отсутствие взаимодействия (малые σ), точно так же как и очень сильное взаимодействие (большие σ) приводит к развитию существенной разницы между \mathbf{v}_s и \mathbf{v}_c и полученное решение оказывается неприменимым. Применимость решения с одной стороны ограничена малостью \mathbf{u}_s по сравнению с $\Omega \times \mathbf{r}$, с другой стороны время релаксации к квазистационарному решению должно быть много меньше временного масштаба, характеризующего внешний момент сил. Два эти условия позволяют сформулировать ограничения на параметр σ :

$$\frac{\dot{\Omega}_\perp}{\Omega^2} \ll \sigma \ll \frac{\Omega^2}{\dot{\Omega}_\perp}. \quad (4.36)$$

Интересно, что u_s растёт по абсолютной величине пропорционально параметру σ . Это является следствием особенности механизма взаимодействия: чем сильнее сила трения вихревых нитей о заряженную компоненту, тем больше они вязнут в ней, и тем сильнее вектор угловой скорости сверхтекучей компоненты не успевает поворачиваться за вектором Ω .

«Параллельное» течение традиционно оказывается более сложным и содержит как то-роидальную, так и полоидальную компоненты. Наличие последней, как уже упоминалось, связано только с изменением с глубиной коэффициентов β и β' . Как и в решении, полученном в предыдущей главе, компонента скорости вдоль оси Z не участвует в уравнении (3.1), но необходима для выполнения уравнения неразрывности. Граничное условие (4.26) выполняется благодаря соответствующему выбору функции $\psi(\varpi)$. Если $\beta, \beta' = const$ и $\rho_{pp}\rho_s/\varrho^2 \approx 1$, параллельное течение сводится просто к вращению

$$\mathbf{u}_s = \frac{\dot{\Omega}_{||} \times \mathbf{r}}{2\Omega\beta}. \quad (4.37)$$

Если $\sigma \rightarrow 0$, то $\beta \rightarrow 0$, и, как и полагается (см. подробнее главу 2), «параллельное» течение расходится. Однако, в отличие от решений, полученных в предыдущих главах, оно также расходится и при стремлении σ к бесконечности (см. формулу (Б.20)). Это вновь является следствием уже обсуждавшейся особенности взаимодействия с участием вихревых нитей.

Разумеется, протоны могут не находиться в сверхпроводящем состоянии во всём объёме ядра. Эффект увлечения исчезает в тех областях, где сверхпроводимость разрушается [104]. Полученное нами решение, однако, остаётся верным. Достаточно только сделать замены

$$\frac{\rho_{pp}\rho_s}{\varrho^2} \rightarrow 1 \quad \text{и} \quad \frac{\rho_{pp}}{\varrho^2} \rightarrow \frac{1}{\rho_s}. \quad (4.38)$$

Кроме того, в тех областях, где сверхпроводимость отсутствует, коэффициенты взаимного трения будут меньше на несколько порядков (см. приложение Б).

Полученное решение формально стремится к бесконечности на поверхности нейтронного фазового перехода. Это означает, что в приграничном слое поле \mathbf{u}_s не может рассматриваться как малое возмущение и там требуется решать нелинейные уравнения гидродинамики. Однако толщина этого слоя, судя по всему, очень мала. Более того, ток массы сверхтекучих нейтронов, который, как будет видно далее, важен для вычисления коэффициентов S_2 и S_3 , стремится к нулю на границе. Таким образом, приграничный слой не должен играть сколько-нибудь существенную роль.

Имея поле скоростей сверхтекучих нейтронов, можно перейти к вычислению коэффициентов S_2 и S_3 . Для этого представим угловой момент вращающейся звезды в виде суммы:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_c + \mathbf{M}_s + \mathbf{M}_{crust} = \int_{ns} \mathbf{r} \times (\mathbf{p}_c + \mathbf{p}_s) dV + \mathbf{M}_{crust}, \quad (4.39)$$

где \mathbf{p}_c и \mathbf{p}_s – плотность импульса заряженной и сверхтекучей компонент. Используя фор-

мулы (Б.26), это выражение можно переписать в виде

$$\mathbf{M} = \int_{ns} \mathbf{r} \times (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s) dV + \mathbf{M}_{crust}. \quad (4.40)$$

Подставив это выражение в уравнение баланса момента импульса и приняв во внимание выражения (4.20) и (4.22), получим

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{M}_{crust} = & - (I_c + I_s) \dot{\Omega} - \Omega d_t (I_c + I_s) - \\ & - \int_{ns} \frac{\rho^2}{\rho_{pp}} [\mathbf{r} \times \partial_t \mathbf{u}_s] dV - \int_{ns} [\mathbf{r} \times \mathbf{u}_s] \partial_t \left(\frac{\rho^2}{\rho_{pp}} \right) dV + \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Здесь мы ввели моменты инерции компонент

$$I_c = \frac{8\pi}{3} \int_0^{r_c} \rho_c r^4 dr \quad \text{и} \quad I_s = \frac{8\pi}{3} \int_0^{r_c} \rho_s r^4 dr. \quad (4.42)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (2.2), легко увидеть, что сумма всех слагаемых в правой части исключая последнее как раз равняется моменту сил \mathbf{N} . Здесь мы учли то обстоятельство, что моменты инерции компонент меняются со временем. По мере остывания звезды, количество сверхтекучих нейтронов увеличивается. Нормальные нейтроны, являющиеся согласно нашей модели частью заряженной компоненты, переходят в сверхтекучую компоненту, перенося с собой угловой момент. Так как суммарное количество вещества, составляющего заряженную и сверхтекучую компоненты не изменяется, второе слагаемое в правой части выражения (2.24) равно нулю. Что касается четвёртого слагаемого, то так как остывание происходит примерно на тех же временных масштабах, что и эволюция вращения, это слагаемое оказывается квадратично малым. Действительно, поле скоростей \mathbf{u}_s содержит в себе множитель $\dot{\Omega}/\Omega$, характеризующий временной масштаб. Комбинация $\partial_t \left(\frac{\rho^2}{\rho_{pp}} \right)$ содержит множитель такого же порядка.

Таким образом, всё что нам требуется, это вычислить производную $\partial_t \mathbf{u}_s$. Переписав её во вращающейся системе отсчёта, получим

$$\partial_t \mathbf{u}_s = \partial_t^* \mathbf{u}_s + \Omega \times \mathbf{u}_s - ([\Omega \times \mathbf{r}] \cdot \nabla) \mathbf{u}_s \approx \Omega \times \mathbf{u}_s - ([\Omega \times \mathbf{r}] \cdot \nabla) \mathbf{u}_s. \quad (4.43)$$

Здесь мы вновь в рамках квазистационарного приближения пренебрегли слагаемым $\partial_t^* \mathbf{u}_s$. Подставляя (4.27) в (4.43), а затем (4.43) в (4.41), сравнив результат с выражением (2.17), получим, что

$$S_1 = 1, \quad (4.44)$$

$$S_2 = \frac{I_c}{I_{core}} + \frac{8\pi}{3I_{core}} \int_{r_{s1}}^{r_{s2}} \frac{\gamma\beta' - \beta^2}{\gamma^2 + \beta^2} \rho_s r^4 dr, \quad (4.45)$$

$$S_3 = \frac{8\pi}{3I_{core}} \int_{r_{s1}}^{r_{s2}} \frac{\beta}{\gamma^2 + \beta^2} \rho_s r^4 dr. \quad (4.46)$$

Заметим, что если выражения (Б.20) справедливы, подынтегральное выражение в (4.45) обнуляется и коэффициент S_2 оказывается равным просто

$$S_2 = \frac{I_c}{I_{core}}, \quad (4.47)$$

коэффициент S_3 в этом случае будет равен

$$S_3 = \frac{8\pi}{3I_{core}} \int_{r_{s1}}^{r_{s2}} \sigma \rho_s r^4 dr. \quad (4.48)$$

4.3. Эволюция угла наклона

Для построения эволюционных кривых нам требуются значения плотностей различных компонент и коэффициентов взаимного трения. Выражение для матрицы плотностей нейтронно-протонной смеси с учётом конечности температуры было получено Гусаковым и Ханселем [104]. Мы не будем приводить здесь полученные авторами довольно громоздкие выражения. Скажем только, что элементы матрицы $\rho_{\alpha\beta}$ зависят от величин $\tau_\alpha = T/T_{c\alpha}$, где $T_{c\alpha}$ – критические температуры фазовых переходов для протонов и нейтронов ($\alpha = p, n$). Причём при $\tau_\alpha > 1$ и $\tau_\beta < 1$ нулю будут равны три из четырёх элементов матрицы: $\rho_{\alpha\alpha}$, $\rho_{\alpha\beta}$ и $\rho_{\beta\alpha}$. Это означает, что эффект увлечения исчезает, если разрушается либо нейтронная сверхтекучесть, либо протонная сверхпроводимость.

Значения критических температур зависят от плотности вещества. К сожалению, эти зависимости плохо поддаются вычислению. Кривые критических температур, полученные разными авторами, могут очень существенно отличаться друг от друга [71]. Как следствие, сильно может различаться количество сверхтекучих нейтронов в ядре. Таким образом, представляется интересным вопрос о том, насколько эволюция вращения может быть чувствительна к выбору модели сверхтекучести. Для этого рассмотрим две существенно различающиеся кривые критической температуры нейтронов, предложенные разными авторами.

Мы будем считать, что наиболее эффективным является механизм взаимного трения, предложенный Альпаром, Лангером и Саулсом [5] (см. подробнее в приложении Б). Это

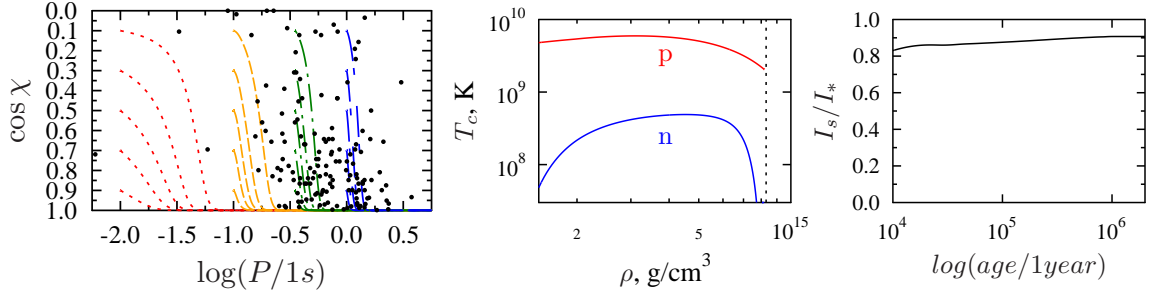


Рис. 4.2. Эволюционные кривые в плоскости $P - \cos \chi$ (левая панель), кривые критических температур, в качестве которых использовались аппроксимации Хо и др. [105] результатов, полученных в работах Элгароя и др. [106, 107] (средняя панель), зависимость отношения I_s/I_* от времени (правая панель). Параметр сплюснутости ϵ принят равным 10^{-12} , наблюдательные значения периодов и углов наклона для 149 пульсаров [60] показаны на левой панели точками, пунктирной линией на средней панели показана центральная плотность для звезды массы $1.35M_\odot$.

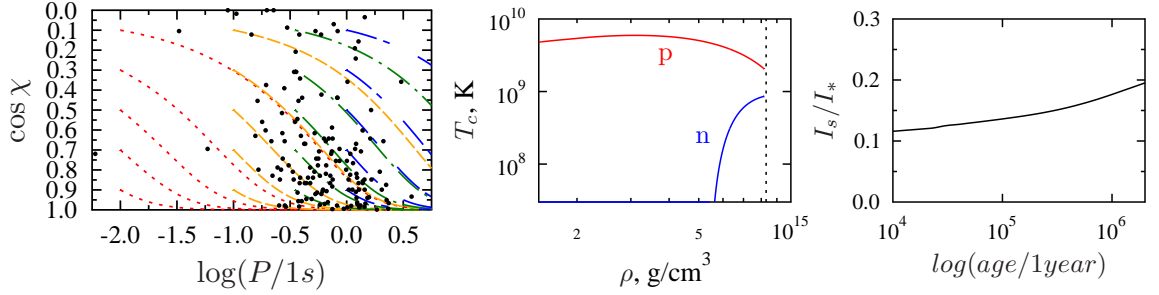


Рис. 4.3. То же, что на рисунке 4.2, но для модели нейтронной сверхтекучести из работы Штернина и др. [108, модель (a)].

позволяет нам использовать соотношения (Б.20), а, следовательно, и выражения (4.47) и (4.48). Для вычисления параметра σ воспользуемся соотношениями (Б.21) и (Б.39).

Для вычисления кривых остывания, как и в предыдущей главе, мы будем использовать код, разработанный Гнединым, Яковлевым и Потехиным [83]. Эволюционные кривые будем строить для нейтронной звезды с типичной массой $\approx 1.35M_\odot$, предполагая уравнение состояния APR I. Отношение I_{crust}/I_* возьмём равным 0.05, параметр сплюснутости ϵ – равным 10^{-12} .

На рисунках 4.2 и 4.3 представлены эволюционные кривые пульсаров под действием РТЛ-момента, вычисленные для двух различных моделей нейтронной сверхтекучести. На рисунках 4.2 и 4.3 – те же кривые, но для ВРТ-момента с параметром недипольности $\nu_{nd} = 0.5$.

Согласно модели Элгароя и др. довольно быстро практически всё ядро оказывает-

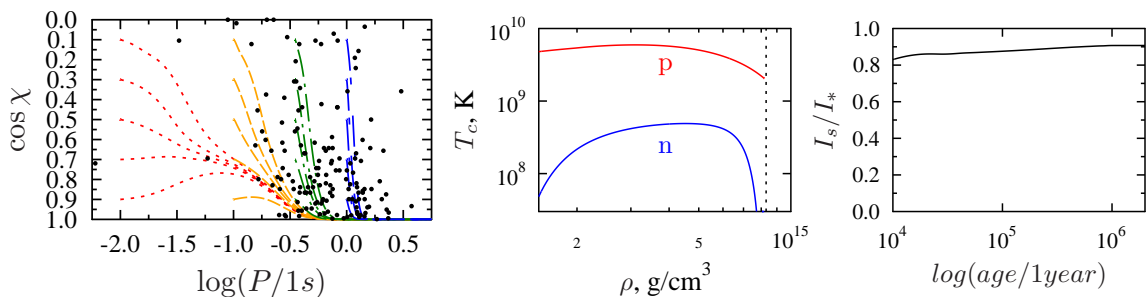


Рис. 4.4. То же, что на рисунке 4.2, но для ВРТ-момента с параметром недипольности $\nu_{nd} = 0.5$

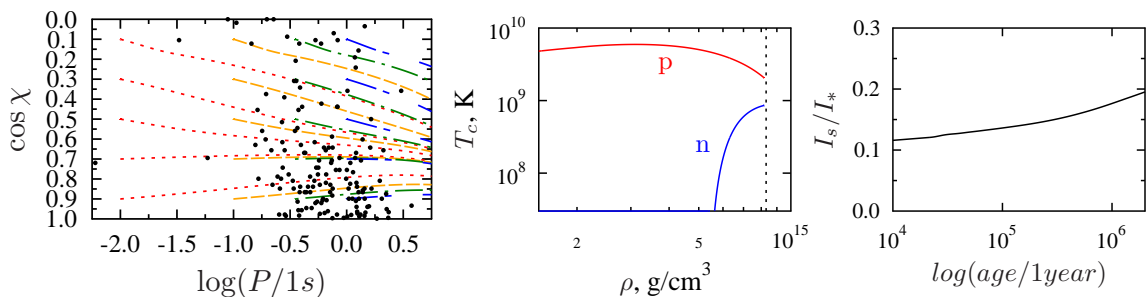


Рис. 4.5. То же, что на рисунке 4.3, но для ВРТ-момента с параметром недипольности $\nu_{nd} = 0.5$.

ся охваченным нейтронной сверхтекучестью. Момент инерции сверхтекучих нейтронов составляет 80% – 90% от полного момента инерции звезды. Согласно же кривой критической температуры из работы Штернина и др. нейтронная сверхтекучесть подавлена всюду в ядре, кроме самой центральной области. И как следствие этого, величина момента инерции сверхтекучих нейтронов не превышает 20% от полного момента инерции. Глядя на выражения (4.47) и (4.48) нетрудно увидеть, что коэффициент S_2 тем больше, чем меньше момент инерции I_s . Коэффициент S_3 наоборот растёт с увеличением I_s (при не слишком быстром уменьшении σ с ростом r). В результате на рисунках 4.2 и 4.4, на которых представлена эволюция угла нейтронных звёзд с большим сверхтекучим ядром, имеется та же проблема, что и в предыдущей главе: очень резкие траектории в области больших периодов, по всей видимости, противоречащие наблюдательным данным. На рисунках 4.3 и 4.5 представлены кривые, которые практически не отличаются от аналогичных кривых, полученных в приближении абсолютно твёрдой звезды (см. рис. 1.8). В этом случае нет никаких сложностей для согласования расчётов и наблюдательных данных. Таким образом, эволюция угла наклона пульсаров оказывается чувствительной к выбору модели нейтронной сверхтекучести. Следовательно, полученные в данной главе результаты могут позволить ставить ограничения на различные такие модели. Отметим, однако, вновь, что существует альтернативный способ согласования расчётов с наблюдениями, за-

ключающийся в предположении, что нейтронные звёзды представляют собой трёхосные эллипсоиды, направление магнитного момента которых не совпадает ни с одной из главных осей инерции.

4.4. Основные результаты главы 4

В главе 4 получены следующие основные результаты.

1. В предположении, что заряженная компонента ядра жёстко связана с корой, рассчитаны коэффициенты S_2 и S_3 . Предлагаемая модель позволяет также учитывать изменение отношения моментов инерции I_s/I_c со временем, вызванное остыванием нейтронной звезды.
2. Показано, что эволюция угла наклона происходит тем быстрее, чем больше момент инерции сверхтекучих нейтронов I_s . Поскольку слишком быстрая эволюция угла наклона, по-видимому, противоречит наблюдательным данным, данный результат может позволить ставить ограничения на различные теории нейтронной сверхтекучести в ядрах нейтронных звёзд.

Заключение

В заключении сформулируем ещё раз основные результаты, полученные в диссертации.

1. В работе было получено выражение для аномальной компоненты электромагнитного момента сил, создаваемого произвольной гармоникой магнитного поля. На основе анализа этого выражения было показано, что мелкомасштабные магнитные поля, которые, как предполагается, имеют место вблизи поверхности нейтронных звёзд, могут оказывать существенное влияние на прецессию звезды. Более того, прецессия, вызываемая мелкомасштабными полями, может приводить к осцилляциям угла между магнитной осью и осью вращения с периодом прецессии, равным

$$T_p \approx 3.17 \times 10^4 \frac{f}{\cos \vartheta_0} \left(\frac{10^{-13}}{\sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}} \right) \left(\frac{P}{0.1 \text{с}} \right) \text{лет.}$$

Это означает, что в отличие от моделей эволюции с чисто дипольным полем, временной масштаб эволюции угла наклона не совпадает с временным масштабом замедления вращения звезды, а оказывается меньше его в τ_x/T_p раз. Даже если сама звезда идеально сферически симметрична, благодаря аномальному моменту силы это соотношение будет порядка

$$\frac{\tau_x}{T_p} \sim (10^1 \div 10^3) \left(\frac{P}{1 \text{с}} \right)^{-1} \frac{B_s^2}{B_{dip}^2},$$

где B_s – характерная величина мелкомасштабного магнитного поля на поверхности звезды.

2. К ускорению эволюции угла наклона приводит также дифференциальность вращения ядра. Временной масштаб этого процесса по сравнению с приближением абсолютно твёрдой звезды оказывается меньше в

$$\frac{(I_{crust} + S_2 I_{core})^2 + S_3^2 I_{core}^2}{I_*(I_{crust} + S_2 I_{core})}$$

раз, где S_2 и S_3 – коэффициенты, описывающие взаимодействие коры с ядром ($S_2, S_3 < 1$). Кроме того диссипация энергии вследствие дифференциальности вращения звезды подавляет прецессию, заставляя вектор угловой скорости выстраиваться вдоль одной из главных осей инерции. Если при этом направление магнитного момента звезды совпадает с какой-либо из этих осей, угол наклона пульсара будет

стремиться либо к 0° , либо к 90° . Временной масштаб этого процесса пропорционален $\epsilon S_3 / ((I_{crust} + S_2 I_{core})^2 + S_3^2 I_{core}^2)$. Поскольку слишком быстрая эволюция угла наклона, по всей видимости, противоречит наблюдательным данным, этот вывод может позволить делать ограничения на допустимые величины коэффициентов S_2 и S_3 (то есть механизм диссипации энергии).

3. Рассмотрено вращение нейтронной звезды в модели немагнитного ядра. В этом случае взаимодействие коры с ядром может осуществляться только посредством вязкости вещества ядра. Были рассчитаны коэффициенты S_2 и S_3 в различных предположениях. По порядку величины они оказываются равными корню из числа Экмана. По мере остывания звезды и замедления её вращения число Экмана, а вместе с ним и коэффициент S_3 увеличиваются, что, в свою очередь, приводит к тому, что все пульсары старше $10^5 - 10^6$ лет довольно резко эволюционируют к вращению вокруг одной из главных осей инерции. Если это вращение соответствует $\chi = 0^\circ$ или 90° , такие значения S_2 и S_3 , по всей видимости, не являются реалистичными, поскольку в этой ситуации получается, что практически все пульсары, для которых измерен угол наклона, должны были родиться с периодами, очень близкими к нынешнему значению (включая пульсары с $P > 1$ с).
4. Вращение звезды с замагнитным ядром было рассмотрено в предположении, что магнитное поле жёстко связывает заряженную компоненту с корой. В этом случае эффект создаётся имеющимися в ядре сверхтекучими нейтронами. Было показано, что в данной модели коэффициенты будут равны

$$S_2 = I_c / I_{core}, \quad S_3 = \frac{8\pi}{3I_{core}} \int_{r_{s1}}^{r_{s2}} \sigma \rho_s r^4 dr,$$

где параметр σ описывает силу взаимодействия между вихревыми нитями Фейнмана-Онзагера и заряженной компонентой ядра, интеграл берётся по области нейтронной сверхтекучести. Численное интегрирование уравнений эволюции вращения показывает, что с наблюдениями лучше согласуются модели с небольшим количеством сверхтекучих нейтронов в ядре.

Список сокращений и условных обозначений

- d_t — производная по времени в инерциальной системе отсчёта
- d_t^* — производная по времени во вращающейся вместе с корой нейтронной звезды системе отсчёта
- $\dot{\Omega}$ — производная по времени от угловой скорости ($\dot{\Omega} = d_t \Omega = d_t^* \Omega$)
- \Re — реальная часть комплексной переменной
- \Im — мнимая часть комплексной переменной

Список литературы

1. Manchester R. N., Hobbs G. B., Teoh A., Hobbs M. The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue // *Astron. J.* 2005. — April. Vol. 129. P. 1993–2006.
2. Steiner A. W., Lattimer J. M., Brown E. F. The Neutron Star Mass-Radius Relation and the Equation of State of Dense Matter // *ApJ.* 2013. — March. Vol. 765. P. L5.
3. Yakovlev D. G., Gnedin O. Y., Kaminker A. D., Potekhin A. Y. Theory of cooling neutron stars versus observations // *40 Years of Pulsars: Millisecond Pulsars, Magnetars and More* / Ed. by C. Bassa, Z. Wang, A. Cumming, V. M. Kaspi. Vol. 983 of American Institute of Physics Conference Series. 2008. — February. P. 379–387.
4. Baym G., Pethick C., Pines D. Superfluidity in Neutron Stars // *Nature.* 1969. — November. Vol. 224. P. 673–674.
5. Alpar M. A., Langer S. A., Sauls J. A. Rapid postglitch spin-up of the superfluid core in pulsars // *ApJ.* 1984. — July. Vol. 282. P. 533–541.
6. Link B. Thermally Activated Post-glitch Response of the Neutron Star Inner Crust and Core. I. Theory // *ApJ.* 2014. — July. Vol. 789. P. 141.
7. Melrose D. Pulse Emission Mechanisms // *Young Neutron Stars and Their Environments* / Ed. by F. Camilo, B. M. Gaensler. Vol. 218 of IAU Symposium. 2004. P. 349.
8. Melrose D. B. Plasma processes in pulsar magnetospheres // *IAU Symposium* / Ed. by A. Bonanno, E. de Gouveia Dal Pino, A. G. Kosovichev. Vol. 274 of IAU Symposium. 2011. — June. P. 208–213.
9. Beskin V. S., Gurevich A. V., Istomin I. N. The electrodynamics of a pulsar magnetosphere // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics.* 1983. — August. Vol. 58. P. 235–253.
10. Бескин В. С., Истомин Я. Н., Филиппов А. А. Радиопульсары — поиски истины // *Успехи физических наук.* 2013. Т. 183, № 2. С. 179–194.
11. Davis L., Goldstein M. Magnetic-Dipole Alignment in Pulsars // *ApJ.* 1970. — February. Vol. 159. P. L81–L86.
12. Melatos A. Radiative precession of an isolated neutron star // *MNRAS.* 2000. — April. Vol. 313. P. 217–228.
13. Lyne A., Graham-Smith F., Weltevrede P. et al. Evolution of the Magnetic Field Structure of the Crab Pulsar // *Science.* 2013. — November. Vol. 342. P. 598–601.
14. Becker W., Swartz D. A., Pavlov G. G. et al. Chandra X-Ray Observatory Observations

- of the Globular Cluster M28 and Its Millisecond Pulsar PSR B1821-24 // *ApJ*. 2003. — September. Vol. 594. P. 798–811.
15. Sanwal D., Pavlov G. G., Zavlin V. E., Teter M. A. Discovery of Absorption Features in the X-Ray Spectrum of an Isolated Neutron Star // *ApJ*. 2002. — July. Vol. 574. P. L61–L64.
 16. Page D., Sarmiento A. Surface Temperature of a Magnetized Neutron Star and Interpretation of the ROSAT Data. II. // *ApJ*. 1996. — December. Vol. 473. P. 1067.
 17. Zane S., Turolla R. Unveiling the thermal and magnetic map of neutron star surfaces through their X-ray emission: method and light-curve analysis // *MNRAS*. 2006. — March. Vol. 366. P. 727–738.
 18. Zane S. Neutron star surface emission: Beyond the dipole model // *Astrophys. Space. Sci.* 2007. — April. Vol. 308. P. 259–265.
 19. Gil J., Melikidze G. I., Geppert U. Drifting subpulses and inner acceleration regions in radio pulsars // *A&A*. 2003. — August. Vol. 407. P. 315–324.
 20. Urpin V., Gil J. Convection in proton-neutron stars and the structure of surface magnetic fields in pulsars // *A&A*. 2004. — February. Vol. 415. P. 305–311.
 21. Rheinhardt M., Konenkov D., Geppert U. The occurrence of the Hall instability in crusts of isolated neutron stars // *A&A*. 2004. — June. Vol. 420. P. 631–645.
 22. Geppert U., Gil J., Melikidze G. Radio pulsar activity and the crustal Hall drift // *MNRAS*. 2013. — November. Vol. 435. P. 3262–3271.
 23. Barsukov D. P., Goglichidze O. A., Tsygan A. I. The Evolution of the Angle Between the Magnetic Moment and the Rotation Axis of Radio Pulsars with the Small-Scale Magnetic Field and the Superfluid Core // *Electromagnetic Radiation from Pulsars and Magnetars* / Ed. by W. Lewandowski, O. Maron, J. Kijak. Vol. 466 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*. 2012. — December. P. 219.
 24. Барсуков Д. П., Гогличидзе О. А., Цыган А. И. Влияние мелкомасштабного магнитного поля на эволюцию угла между магнитным моментом и осью вращения радиопульсаров со сверхтекучим ядром // *Астрон. Журнал*. 2013. — January. Т. 90. С. 26–39.
 25. Barsukov D. P., Goglichidze O. A., Tsygan A. I. The spin evolution of neutron stars with the superfluid core // *MNRAS*. 2013. — June. Vol. 432. P. 520–529.
 26. Barsukov D. P., Goglichidze O. A., Tsygan A. I. The influence of core superfluidity on the neutron stars long-term rotation evolution // *Journal of Physics Conference Series*. 2013. — August. Vol. 461, no. 1. P. 012012.

27. Barsukov D. P., Goglichidze O. A., Tsygan A. I. The long-term rotation dynamics of neutron stars with differentially rotating unmagnetized core // MNRAS. 2014. — October. Vol. 444. P. 1318–1333.
28. Barsukov D. P., Goglichidze O. A., Tsygan A. I. The spin evolution of the pulsars with non-rigid core // Journal of Physics Conference Series. 2014. — March. Vol. 496, no. 1. P. 012013.
29. Goglichidze O. A., Barsukov D. P., Tsygan A. I. Magnetic field inertia and rotation dynamics of radio pulsars // MNRAS. 2015. — August. Vol. 451. P. 2564–2574.
30. Thompson C., Duncan R. C. Neutron star dynamos and the origins of pulsar magnetism // ApJ. 1993. — May. Vol. 408. P. 194–217.
31. Truemper J., Pietsch W., Reppin C. et al. Evidence for strong cyclotron line emission in the hard X-ray spectrum of Hercules X-1 // ApJ. 1978. — February. Vol. 219. P. L105–L110.
32. Wheaton W. A., Doty J. P., Primini F. A. et al. An absorption feature in the spectrum of the pulsed hard X-ray flux from 4U0115 + 63 // Nature. 1979. — November. Vol. 282. P. 240–243.
33. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Москва: Наука, 1982.
34. Goldreich P., Julian W. H. Pulsar Electrodynamics // ApJ. 1969. — August. Vol. 157. P. 869.
35. Spitkovsky A. Time-dependent Force-free Pulsar Magnetospheres: Axisymmetric and Oblique Rotators // ApJ. 2006. — September. Vol. 648. P. L51–L54.
36. Kalapotharakos C., Contopoulos I. Three-dimensional numerical simulations of the pulsar magnetosphere: preliminary results // A&A. 2009. — March. Vol. 496. P. 495–502.
37. Pétri J. The pulsar force-free magnetosphere linked to its striped wind: time-dependent pseudo-spectral simulations // MNRAS. 2012. — July. Vol. 424. P. 605–619.
38. Philippov A., Tchekhovskoy A., Li J. G. Time evolution of pulsar obliquity angle from 3D simulations of magnetospheres // MNRAS. 2014. — July. Vol. 441. P. 1879–1887.
39. Mitra D., Konar S., Bhattacharya D. Evolution of the multipolar magnetic field in isolated neutron stars // MNRAS. 1999. — August. Vol. 307. P. 459–462.
40. Barsukov D. P., Polyakova P. I., Tsygan A. I. Evolution of the angle between the magnetic moment and the rotation axis of radio pulsars // Astronomy Reports. 2009. — December. Vol. 53. P. 1146–1154.
41. Geppert U., Rheinhardt M. Non-linear magnetic field decay in neutron stars. Theory and observations // A&A. 2002. — September. Vol. 392. P. 1015–1024.

42. Potekhin A. Y. Electron conduction in magnetized neutron star envelopes // *A&A*. 1999. — November. Vol. 351. P. 787–797.
43. Бескин В. С. Осесимметричные стационарные течения в астрофизике. Физматлит, 2006.
44. Good M. L., Ng K. K. Electromagnetic torques, secular alignment, and spin-down of neutron stars // *ApJ*. 1985. — December. Vol. 299. P. 706–722.
45. Geppert U., Wiebicke H.-J. Amplification of neutron star magnetic fields by thermoelectric effects. I - General formalism // *A&AS*. 1991. — February. Vol. 87. P. 217–228.
46. Reisenegger A. Magnetic fields of neutron stars // *ArXiv e-prints*. 2013. — May.
47. Braithwaite J., Nordlund Å. Stable magnetic fields in stellar interiors // *A&A*. 2006. — May. Vol. 450. P. 1077–1095.
48. Ciolfi R., Ferrari V., Gualtieri L., Pons J. A. Relativistic models of magnetars: the twisted torus magnetic field configuration // *MNRAS*. 2009. — August. Vol. 397. P. 913–924.
49. Braithwaite J. Axisymmetric magnetic fields in stars: relative strengths of poloidal and toroidal components // *MNRAS*. 2009. — August. Vol. 397. P. 763–774.
50. Istomin Y. N. Magnetodipole Oven // *Progress in Neutron Star Research* / Ed. by A. P. Wass. 2005. P. 27.
51. Beskin V. S., Zheltoukhov A. A. On the anomalous torque applied to a rotating magnetized sphere in a vacuum // *Physics Uspekhi*. 2014. — August. Vol. 57. P. 865–873.
52. Wasserman I. Precession of isolated neutron stars - II. Magnetic fields and type II superconductivity // *MNRAS*. 2003. — May. Vol. 341. P. 1020–1040.
53. Haskell B., Samuelsson L., Glampedakis K., Andersson N. Modelling magnetically deformed neutron stars // *MNRAS*. 2008. — March. Vol. 385. P. 531–542.
54. Mastrano A., Melatos A., Reisenegger A., Akgün T. Gravitational wave emission from a magnetically deformed non-barotropic neutron star // *MNRAS*. 2011. — November. Vol. 417. P. 2288–2299.
55. Mastrano A., Lasky P. D., Melatos A. Neutron star deformation due to multipolar magnetic fields // *MNRAS*. 2013. — September. Vol. 434. P. 1658–1667.
56. Goldreich P. Neutron Star Crusts and Alignment of Magnetic Axes in Pulsars // *ApJ*. 1970. — April. Vol. 160. P. L11.
57. Barsukov D. P., Tsygan A. I. The influence of nondipolar magnetic field and neutron star precession on braking indices of radiopulsars // *MNRAS*. 2010. — December. Vol. 409. P. 1077–1087.

58. Jones P. B. Pulsar magnetic alignment - The critical period and integrated pulse width // *ApJ*. 1976. — October. Vol. 209. P. 602–605.
59. Arons J., Scharlemann E. T. Pair formation above pulsar polar caps - Structure of the low altitude acceleration zone // *ApJ*. 1979. — August. Vol. 231. P. 854–879.
60. Rankin J. M. Toward an empirical theory of pulsar emission. VI - The geometry of the conal emission region: Appendix and tables // *ApJS*. 1993. — March. Vol. 85. P. 145–161.
61. Contopoulos I., Kazanas D., Fendt C. The Axisymmetric Pulsar Magnetosphere // *ApJ*. 1999. — January. Vol. 511. P. 351–358.
62. Komissarov S. S. Simulations of the axisymmetric magnetospheres of neutron stars // *MNRAS*. 2006. — March. Vol. 367. P. 19–31.
63. Tchekhovskoy A., Spitkovsky A. Time-Dependent 3D Magnetohydrodynamic Pulsar Magnetospheres: Oblique Rotators // *ArXiv e-prints*. 2012. — November.
64. Philippov A. A., Spitkovsky A. Ab Initio Pulsar Magnetosphere: Three-dimensional Particle-in-cell Simulations of Axisymmetric Pulsars // *ApJ*. 2014. — April. Vol. 785. P. L33.
65. Chen A. Y., Beloborodov A. M. Electrodynamics of axisymmetric pulsar magnetosphere with electron-positron discharge: a numerical experiment // *ArXiv e-prints*. 2014. — June.
66. Chau W. Y., Henriksen R. N. Pulsar Wobble // *Astrophysical Letters*. 1971. — March. Vol. 8. P. 49.
67. Macy W. W., Jr. Pulsar Magnetic Axis Alignment and Counteralignment. // *ApJ*. 1974. — May. Vol. 190. P. 153–164.
68. Casini H., Montemayor R. Crust-Core Interactions and the Magnetic Dipole Orientation in Neutron Stars // *ApJ*. 1998. — August. Vol. 503. P. 374.
69. Sedrakian A., Wasserman I., Cordes J. M. Precession of Isolated Neutron Stars. I. Effects of Imperfect Pinning // *ApJ*. 1999. — October. Vol. 524. P. 341–360.
70. Haensel P., Yakovlev D. G., Potekhin A. Y. *Neutron Stars 1 : Equation of State and Structure*. New York: Springer, 2007. ISBN: 0387335439.
71. Яковлев Д. Г., Левенфиш К. П., Шибанов Ю. А. Остывание нейтронных звезд и сверхтекучесть в их ядрах // *Успехи физических наук*. 1999. Т. 169, № 8. С. 825–868.
72. Baym G., Pethick C., Pines D. Spin Up in Neutron Stars : The Future of the Vela Pulsar // *Nature*. 1969. — November. Vol. 224. P. 872–874.
73. Shaham J. Free precession of neutron stars - Role of possible vortex pinning // *ApJ*. 1977. — May. Vol. 214. P. 251–260.
74. Jones D. I. Pulsar state switching, timing noise and free precession // *MNRAS*. 2012. —

- March. Vol. 420. P. 2325–2338.
75. Shabanova T. V., Lyne A. G., Urama J. O. Evidence for Free Precession in the Pulsar B1642-03 // *ApJ*. 2001. — May. Vol. 552. P. 321–325.
 76. Link B. Incompatibility of long-period neutron star precession with creeping neutron vortices // *A&A*. 2006. — November. Vol. 458. P. 881–884.
 77. Easson I. Long-term changes in pulsar periods and the plasma in neutron star interiors // *ApJ*. 1979. — October. Vol. 233. P. 711–716.
 78. Tilley D., Tilley J. Superfluidity and Superconductivity. Graduate Student Series in Physics. Hilger, 1990. ISBN: 9780750300339.
 79. Pons J. A., Miralles J. A., Geppert U. Magneto-thermal evolution of neutron stars // *A&A*. 2009. — March. Vol. 496. P. 207–216.
 80. Gourgouliatos K. N., Cumming A., Reisenegger A. et al. Hall equilibria with toroidal and poloidal fields: application to neutron stars // *MNRAS*. 2013. — September. Vol. 434. P. 2480–2490.
 81. Buckley K. B., Metlitski M. A., Zhitnitsky A. R. Vortices and type-I superconductivity in neutron stars // *Phys. Rev. C*. 2004. — May. Vol. 69, no. 5. P. 055803.
 82. Sedrakian A. Type-I superconductivity and neutron star precession // *Phys. Rev. D*. 2005. — April. Vol. 71, no. 8. P. 083003.
 83. Gnedin O. Y., Yakovlev D. G., Potekhin A. Y. Thermal relaxation in young neutron stars // *MNRAS*. 2001. — June. Vol. 324. P. 725–736.
 84. Malkus W. V. R. Precession of the Earth as the Cause of Geomagnetism // *Science*. 1968. — April. Vol. 160. P. 259–264.
 85. Zhang K., Liao X., Li L. Differential Rotation Driven by Precession // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2003. — September. Vol. 87. P. 39–51.
 86. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Москва: Наука, 1986.
 87. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Ленинград: Гидрометеиздат, 1975.
 88. Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G. Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. I. Direct Urca processes in npe mu matter // *A&A*. 2000. — May. Vol. 357. P. 1157–1169.
 89. Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G. Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. II. Modified Urca processes in npe mu matter // *A&A*. 2001. — June. Vol. 372. P. 130–137.
 90. Lattimer J. M., Prakash M., Pethick C. J., Haensel P. Direct URCA process in neutron stars // *Physical Review Letters*. 1991. — May. Vol. 66. P. 2701–2704.
 91. Abney M., Epstein R. I. Ekman pumping in compact astrophysical bodies. // *Journal of*

- Fluid Mechanics. 1996. — April. Vol. 312. P. 327–340.
92. Reisenegger A. Deviations from chemical equilibrium due to spin-down as an internal heat source in neutron stars // *ApJ*. 1995. — April. Vol. 442. P. 749–757.
 93. Baiko D. A., Haensel P., Yakovlev D. G. Thermal conductivity of neutrons in neutron star cores // *A&A*. 2001. — July. Vol. 374. P. 151–163.
 94. Shternin P. S., Yakovlev D. G. Electron-muon heat conduction in neutron star cores via the exchange of transverse plasmons // *Phys. Rev. D*. 2007. — May. Vol. 75, no. 10. P. 103004.
 95. Shternin P. S., Yakovlev D. G. // *Phys. Rev. D*. 2008. — Sep. Vol. 78. P. 063006.
 96. Халатников И. Введение в теорию сверхтекучести. Наука, 1965.
 97. Heiselberg H., Hjorth-Jensen M. Phase Transitions in Neutron Stars and Maximum Masses // *ApJ*. 1999. — November. Vol. 525. P. L45–L48.
 98. Gusakov M. E., Kaminker A. D., Yakovlev D. G., Gnedin O. Y. The cooling of Akmal-Pandharipande-Ravenhall neutron star models // *MNRAS*. 2005. — October. Vol. 363. P. 555–562.
 99. Gusakov M. E., Chugunov A. I., Kantor E. M. Explaining observations of rapidly rotating neutron stars in LMXBs // *ArXiv e-prints*. 2013. — May.
 100. Popov S. B., Turolla R. Initial spin periods of neutron stars in supernova remnants // *Astrophys. Space. Sci.* 2012. — October. Vol. 341. P. 457–464.
 101. Noutsos A., Schnitzeler D. H. F. M., Keane E. F. et al. Pulsar spin-velocity alignment: kinematic ages, birth periods and braking indices // *MNRAS*. 2013. — April. Vol. 430. P. 2281–2301.
 102. Igoshev A. P., Popov S. B. Neutron star’s initial spin period distribution // *MNRAS*. 2013. — June. Vol. 432. P. 967–972.
 103. Glampedakis K., Lasky P. D. Persistent crust-core spin lag in neutron stars // *MNRAS*. 2015. — June. Vol. 450. P. 1638–1650.
 104. Gusakov M. E., Haensel P. The entrainment matrix of a superfluid neutron proton mixture at a finite temperature // *Nuclear Physics A*. 2005. — November. Vol. 761. P. 333–348.
 105. Ho W. C. G., Elshamouty K. G., Heinke C. O., Potekhin A. Y. Tests of the nuclear equation of state and superfluid and superconducting gaps using the Cassiopeia A neutron star // *Phys. Rev. C*. 2015. — January. Vol. 91, no. 1. P. 015806.
 106. Elgarøy Ø., Engvik L., Hjorth-Jensen M., Osnes E. Model-space approach to 1S_0 neutron and proton pairing in neutron star matter with the Bonn meson-exchange potentials //

- Nuclear Physics A. 1996. — February. Vol. 604. P. 466–490.
107. Elgarøy Ø., Engvik L., Hjorth-Jensen M., Osnes E. Triplet pairing of neutrons in β -stable neutron star matter // Nuclear Physics A. 1996. — February. Vol. 607. P. 425–441.
 108. Shternin P. S., Yakovlev D. G., Heinke C. O. et al. Cooling neutron star in the Cassiopeia A supernova remnant: evidence for superfluidity in the core // MNRAS. 2011. — March. Vol. 412. P. L108–L112.
 109. Варшалович Д. А., Москалёв А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Ленинград: Наука, 1975.
 110. Лифшиц Е. М., Птаевский Л. П. Статистическая физика. Часть 2. Москва: Наука, 1978.
 111. Sonin E. B. Vortex oscillations and hydrodynamics of rotating superfluids // Reviews of Modern Physics. 1987. — January. Vol. 59. P. 87–155.
 112. Baym G., Chandler E. The hydrodynamics of rotating superfluids. I. Zero-temperature, nondissipative theory // Journal of Low Temperature Physics. 1983. — January. Vol. 50. P. 57–87.
 113. Feibelman P. J. Relaxation of Electron Velocity in a Rotating Neutron Superfluid: Application to the Relaxation of a Pulsar's Slowdown Rate // Phys. Rev. D. 1971. — September. Vol. 4. P. 1589–1597.
 114. Sauls J. A., Stein D. L., Serene J. W. Magnetic vortices in a rotating ${}^3\text{P}_2$ neutron superfluid // Phys. Rev. D. 1982. — February. Vol. 25. P. 967–975.
 115. Schwarz K. W. Three-dimensional vortex dynamics in superfluid ${}^4\text{He}$: Line-line and line-boundary interactions // Phys. Rev. B. 1985. — May. Vol. 31. P. 5782–5804.
 116. Hall H. E., Vinen W. F. The Rotation of Liquid Helium II. II. The Theory of Mutual Friction in Uniformly Rotating Helium II // Royal Society of London Proceedings Series A. 1956. — December. Vol. 238. P. 215–234.
 117. Andreev A. F., Bashkin E. P. Three-velocity hydrodynamics of superfluid solutions // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1975. — September. Vol. 42. P. 164–1967.
 118. Mendell G., Lindblom L. The coupling of charged superfluid mixtures to the electromagnetic field // Annals of Physics. 1991. — January. Vol. 205. P. 110–129.
 119. Mendell G. Superfluid hydrodynamics in rotating neutron stars. I - Nondissipative equations. // ApJ. 1991. — October. Vol. 380. P. 515–530.
 120. Mendell G. Superfluid Hydrodynamics in Rotating Neutron Stars. II. Dissipative Effects //

ApJ. 1991. — October. Vol. 380. P. 530–5402.

121. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Москва: Наука, 1988.

Приложение А

Шаровые векторы

В данном приложении даются основные сведения о сферических векторах, а также в справочном формате приводятся формулы, которые используются в диссертации.

Исследуя поведение некоторой скалярной функции F , зависящей от сферических координат r , θ и ϕ , часто бывает удобно разложить её в ряд по сферическим гармоникам:

$$F(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (\text{A.1})$$

где

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (\text{A.2})$$

– сферические функции, $P_{lm}(x)$ – присоединённые полиномы Лежандра. Сферические функции являются собственными функциями угловой части оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\phi^2} \right) Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm}. \quad (\text{A.3})$$

Совокупность сферических функций представляет собой полный ортогональный набор. Причём нормировка выбрана таким образом, чтобы справедливо было соотношение

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{A.4})$$

На ряду с комплексными иногда применяются вещественные сферические функции

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi(1+\delta_{m0})} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \times \begin{cases} P_{lm}(\cos \theta) \cos(m\phi), & m = 0, 1, \dots, l \\ P_{l|m|}(\cos \theta) \sin(|m|\phi), & m = -1, \dots, -l \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

При исследовании векторных функций $\mathbf{F}(r, \theta, \phi)$ бывает удобно разложить их по векторным сферическим гармоникам. Существует несколько способов ввести полный ортогональный набор таких гармоник. Мы будем пользоваться шаровыми векторами $\mathbf{Y}_{lm}^{(\lambda)}$,

определёнными следующим образом:

$$\mathbf{Y}_{lm}^{(1)} = \frac{r}{\sqrt{l(l+1)}} \nabla Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{Y}_{lm}^{(0)} = \frac{-i}{\sqrt{l(l+1)}} \mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{Y}_{lm}^{(-1)} = \mathbf{e}_r Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (\text{A.8})$$

Введённые таким образом шаровые векторы ортогональны по всем трём индексам:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{Y}_{lm}^{(\lambda)*}(\theta, \phi) \cdot \mathbf{Y}_{l'm'}^{(\lambda')}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (\text{A.9})$$

Далее приводятся некоторые формулы, которые либо непосредственно взяты из книги Варшаловича, Москалёва и Херсонского [109], либо получены на основе приведённых в данной книге формул.

Декартовы компоненты

Декартовы компоненты шаровых векторов могут быть выражены через сумму нескольких сферических функций:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{Y}_{lm}^{(+1)} \cdot \mathbf{e}_x \right) &= \frac{1}{2\sqrt{2l+1}} \left\{ \right. & (\text{A.10}) \\ & \left[\sqrt{\frac{(l+1)(l-m)(l-m-1)}{l(2l-1)}} Y_{l-1,m+1} - \sqrt{\frac{(l+1)(l+m)(l+m-1)}{l(2l-1)}} Y_{l-1,m-1} \right] + \\ & \left. \left[\sqrt{\frac{l(l+m+1)(l+m+2)}{(l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m+1} - \sqrt{\frac{l(l-m+1)(l-m+2)}{(l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m-1} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{Y}_{lm}^{(+1)} \cdot \mathbf{e}_y \right) &= \frac{-i}{2\sqrt{2l+1}} \left\{ \right. & (\text{A.11}) \\ & \left[\sqrt{\frac{(l+1)(l-m)(l-m-1)}{l(2l-1)}} Y_{l-1,m+1} + \sqrt{\frac{(l+1)(l+m)(l+m-1)}{l(2l-1)}} Y_{l-1,m-1} \right] + \\ & \left. \left[\sqrt{\frac{l(l+m+1)(l+m+2)}{(l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m+1} + \sqrt{\frac{l(l-m+1)(l-m+2)}{(l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m-1} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{Y}_{lm}^{(+1)} \cdot \mathbf{e}_z \right) &= \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left\{ \sqrt{\frac{(l+1)(l-m)(l+m)}{l(2l-1)}} Y_{l-1,m} - \right. & (\text{A.12}) \\ & \left. \sqrt{\frac{l(l-m+1)(l+m+1)}{(l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m} \right\} \end{aligned}$$

$$\left(\mathbf{Y}_{lm}^{(0)} \cdot \mathbf{e}_x\right) = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{(l-m)(l+m+1)}{l(l+1)}} Y_{l,m+1} + \sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{l(l+1)}} Y_{l,m-1} \right\} \quad (\text{A.13})$$

$$\left(\mathbf{Y}_{lm}^{(0)} \cdot \mathbf{e}_y\right) = -\frac{i}{2} \left\{ \sqrt{\frac{(l-m)(l+m+1)}{l(l+1)}} Y_{l,m+1} - \sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{l(l+1)}} Y_{l,m-1} \right\} \quad (\text{A.14})$$

$$\left(\mathbf{Y}_{lm}^{(0)} \cdot \mathbf{e}_z\right) = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}} Y_{lm} \quad (\text{A.15})$$

$$\left(\mathbf{Y}_{lm}^{(-1)} \cdot \mathbf{e}_x\right) = \frac{1}{2\sqrt{2l+1}} \left\{ \left[\sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)}} Y_{l-1,m+1} - \sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)}} Y_{l-1,m-1} \right] + \left[\sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+3)}} Y_{l+1,m+1} - \sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+3)}} Y_{l+1,m-1} \right] \right\} \quad (\text{A.16})$$

$$\left(\mathbf{Y}_{lm}^{(-1)} \cdot \mathbf{e}_y\right) = \frac{-i}{2\sqrt{2l+1}} \left\{ \left[\sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)}} Y_{l-1,m+1} + \sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)}} Y_{l-1,m-1} \right] + \left[\sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+3)}} Y_{l+1,m+1} + \sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+3)}} Y_{l+1,m-1} \right] \right\} \quad (\text{A.17})$$

$$\left(\mathbf{Y}_{lm}^{(-1)} \cdot \mathbf{e}_z\right) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left\{ \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)}} Y_{l-1,m} - \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+3)}} Y_{l+1,m} \right\} \quad (\text{A.18})$$

Векторное произведение

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{Y}_{lm}^{(1)} = iA_{l+1;m}B_{l+1}\mathbf{Y}_{l+1;m}^{(0)} + iA_{lm}B_l\mathbf{Y}_{l-1;m}^{(0)} - i\frac{m}{l(l+1)}\mathbf{Y}_{lm}^{(1)} - i\frac{m}{l(l+1)}\mathbf{Y}_{lm}^{(-1)}, \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{Y}_{lm}^{(0)} = iA_{l+1;m}B_{l+1}\mathbf{Y}_{l+1;m}^{(1)} + iA_{lm}B_l\mathbf{Y}_{l-1;m}^{(1)} - i\frac{m}{l(l+1)}\mathbf{Y}_{lm}^{(0)} + i\frac{l}{\sqrt{l(l+1)}}A_{l+1;m}\mathbf{Y}_{l+1;m}^{(-1)} - i\frac{l+1}{\sqrt{l(l+1)}}A_{lm}\mathbf{Y}_{l-1;m}^{(-1)}, \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{Y}_{lm}^{(-1)} = -i\frac{l+1}{\sqrt{l(l+1)}}A_{l+1;m}B_{l+1}\mathbf{Y}_{l+1;m}^{(0)} + i\frac{l}{\sqrt{l(l+1)}}A_{l;m}B_l\mathbf{Y}_{l-1;m}^{(0)} - im\mathbf{Y}_{lm}^{(1)}, \quad (\text{A.21})$$

где введены коэффициенты

$$A_{lm} = \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}}, \quad B_l = \frac{\sqrt{l^2 - 1}}{l}. \quad (\text{A.22})$$

Оператор Лапласа

$$\Delta \mathbf{Y}_{lm}^{(-1)} = -\frac{l(l+1)+2}{r^2}\mathbf{Y}_{lm}^{(-1)} + 2\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r^2}\mathbf{Y}_{lm}^{(1)} \quad (\text{A.23})$$

$$\Delta \mathbf{Y}_{lm}^{(0)} = -\frac{l(l+1)}{r^2}\mathbf{Y}_{lm}^{(0)} \quad (\text{A.24})$$

$$\Delta \mathbf{Y}_{lm}^{(1)} = -\frac{l(l+1)}{r^2}\mathbf{Y}_{lm}^{(1)} + 2\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r^2}\mathbf{Y}_{lm}^{(-1)} \quad (\text{A.25})$$

Приложение Б

Сверхтекучесть

Согласно современным теоретическим представлениям, нейтроны и протоны в некоторых областях недр нейтронных звёзд образуя куперовские пары могут переходить в сверхтекучее и сверхпроводящее состояние. При этом, протоны должны быть сверхпроводящими в некоторой области ядра. Что касается нейтронов, то, вообще говоря, по-видимому, должны существовать две области, в которых они переходят в сверхтекучее состояние: во внутренней коре происходит синглетное куперовское спаривание, в ядре – триплетное спаривание [71]. Переход нуклонов в сверхтекучее (сверхпроводящее) состояние представляет собой фазовый переход второго рода. Он происходит в тот момент, когда температура опускается ниже критической температуры $T_{c\alpha}$ ($\alpha = n, p$). Критическая температура зависит от плотности вещества. Эта зависимость очень плохо поддаётся вычислению и сильно зависит от модели межнуклонного взаимодействия. Однако принято считать, что кривые критических температур имеют, по всей видимости, имеют некую колоколообразную форму. Таким образом, по мере остывания нейтронной звезды, всё большая и большая область её недр оказывается занята сверхтекучими (сверхпроводящими) нуклонами.

Протонная сверхпроводимость подавляет ядерные реакции, а также влияет на различные кинетические коэффициенты [88, 89, 93–95]. Переход нейтронов в сверхтекучее состояние помимо перечисленных эффектов приводит также к появлению дополнительной гидродинамической степени свободы, связанной в некотором смысле с движением сверхтекучих нейтронов относительно прочих частиц. Двухкомпонентная гидродинамика сверхтекучей жидкости (в применении к гелию) была разработана Халатниковым [96]. Основная идея этой теории заключается в том, что вводятся два поля скоростей: скорость сверхтекучей движения компоненты \mathbf{v}_s и скорость движения температурных возмущений \mathbf{v}_{ex} , а также соответствующие этим компонентам массовые плотности ρ_s и ρ_{ex} . При этом полная массовая плотность равна сумме плотностей компонент:

$$\rho = \rho_{ex} + \rho_s, \quad (\text{Б.1})$$

а полный ток массы может быть вычислен с помощью формулы

$$\mathbf{J} = \rho_{ex}\mathbf{v}_{ex} + \rho_s\mathbf{v}_s. \quad (\text{Б.2})$$

При стремлении температуры жидкости к абсолютному нулю, плотность ρ_{ex} также стре-

мится к нулю. Если температура превышает критическую температуру фазового перехода, то равна нулю плотность сверхтекучей компоненты ρ_s .

Скорость сверхтекучей компоненты незаряженной жидкости выражается через градиент фазы волновой функции конденсата S [110]:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{2m_N} \nabla S, \quad (\text{Б.3})$$

где m_N – масса частиц формирующей жидкости. Отсюда автоматически следует, что течение сверхтекучей компоненты должно быть потенциальным:

$$\text{rot } \mathbf{v}_s = 0. \quad (\text{Б.4})$$

Если разность скоростей \mathbf{v}_s и \mathbf{v}_{ex} не очень велика, компоненты не взаимодействуют друг с другом. Течение сверхтекучей компоненты управляется уравнением вида

$$\partial_t \mathbf{v}_s + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s + \nabla \mu = 0, \quad (\text{Б.5})$$

которое очень похоже на уравнение Эйлера за исключением того, что вместо члена с градиентом давления в нём присутствует градиент химического потенциала μ , приходящегося на единицу массы. Это уравнение должно быть дополнено уравнением неразрывности сохранения полной массы

$$\partial_t \rho + \text{div } \mathbf{J} = 0, \quad (\text{Б.6})$$

а также законами сохранения импульса

$$\partial_t \mathbf{J} + \mathbf{e}_i \nabla_k \Pi^{ik} = 0 \quad (\text{Б.7})$$

и энергии

$$\partial_t E + \text{div } \mathbf{Q} = 0 \quad (\text{Б.8})$$

Из уравнения (Б.4) в частности следует, что твердотельное вращение сверхтекучей компоненты жидкости ($\mathbf{v}_s = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$) невозможно. Однако такая жидкость может обладать угловым моментом благодаря формированию в ней решётки вихревых нитей Фейнмана-Онзагера. Каждая такая нить представляет собой вихрь, поле скорости которого имеет вид [78]

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{2m_N \varpi_v} \mathbf{e}_{v\phi}, \quad (\text{Б.9})$$

где ϖ_v – расстояние от сердцевины вихря, $\mathbf{e}_{v\phi}$ – единичный азимутальный вектор. Здесь в знаменателе стоит $2m_N$, так как мы предполагаем, что частицы с массой m_N формируют

куперовские пары (как это происходит с нейтронами в ядрах нейтронных звёзд). Каждая вихревая нить имеет сердцевину толщиной порядка длины когерентности ξ , в которой сверхтекучесть разрушается. Каждая такая нить несёт квант циркуляции $\kappa = 2\pi\hbar/2m_N$. Это утверждение позволяет формально представить ротор скорости в виде

$$\text{rot } \mathbf{v} = \sum_i \int \kappa \mathbf{e}_k \delta(\mathbf{r}_{v_i}(l) - \mathbf{r}) dl \quad (\text{Б.10})$$

[111]. Здесь \mathbf{e}_k – единичный вектор, направленный локально вдоль вихревой нити, $\mathbf{r}_{v_i}(l)$ – уравнение, задающее форму i -й вихревой нити, параметр l задаёт точку на нити, $\delta(\mathbf{r})$ – трёхмерная дельта-функция. Отметим, что скорость сверхтекучей компоненты заряженной (сверхпроводящей) жидкости равна

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{2m_p} \nabla S - \frac{e}{m_p c} \mathbf{A}, \quad (\text{Б.11})$$

где \mathbf{A} – векторный потенциал электромагнитного поля. Для таких жидкостей $\text{rot } \mathbf{v}$ не должен быть равен нулю, и они могут, как обычные жидкости, вращаться твердотельно.

Динамика жидкости с заполняющей её решёткой вихревых нитей довольно сложна. Однако в ситуации, когда характерный масштаб задачи многократно превышает расстояние между вихревыми нитями (длинноволновый предел), можно перейти к пространственно усреднённой гидродинамике [112]. Для этого введём гладкое поле $\boldsymbol{\omega}_s = n_v \kappa \mathbf{e}_k$, где n_v – число вихревых нитей, приходящихся на единичную площадку. Закон сохранения числа вихревых нитей в дифференциальной форме можно представить в виде

$$\partial_t \boldsymbol{\omega}_s + \text{rot}[\boldsymbol{\omega}_s \times \mathbf{v}_l] = 0. \quad (\text{Б.12})$$

Здесь \mathbf{v}_l – скорость движение вихревых нитей. Формально мы можем ввести векторное поле \mathbf{v}_s таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\boldsymbol{\omega}_s = \text{rot } \mathbf{v}_s. \quad (\text{Б.13})$$

Подставляя это соотношение в уравнение (Б.12), можно убедиться, что последнее эквивалентно уравнению

$$\partial_t \mathbf{v}_s + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s + \nabla \tilde{\mu} = \mathbf{f}_{mf}, \quad (\text{Б.14})$$

где

$$\mathbf{f}_{mf} = -\boldsymbol{\omega}_s \times (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_s) \quad (\text{Б.15})$$

и $\tilde{\mu}$ – некоторая скалярная функция. Это уравнение имеет вид уравнения Эйлера для жидкости, на которую действует сила (Б.15). Заметим, однако, что соотношение (Б.13) позволяет определить поле \mathbf{v}_s только с точностью до градиента произвольной функции. Замена

$\mathbf{v}_s \rightarrow \mathbf{v}_s + \nabla\vartheta$ компенсируется заменой скалярной функции $\tilde{\mu} \rightarrow \tilde{\mu} - \partial_t\vartheta - \mathbf{v}_s \cdot \nabla\vartheta - (\nabla\vartheta)^2/2$. Поле \mathbf{v}_s может быть однозначно задано, как усреднённое по площади поле скоростей (Б.10). Усреднение следует проводить по площадкам, перпендикулярным к вихревым нитям и имеющим размер, многократно превышающий расстояние между нитями, но, при этом, много меньший, чем характерный масштаб задачи. Можно показать, что при таком выборе \mathbf{v}_s функция $\tilde{\mu}$ в полном согласии с точным уравнением (Б.5) оказывается равной химическому потенциалу, приходящемуся на единичную массу жидкости [112].

Рассмотрим уравнение баланса сил для вихревой нити. Вспомним, что сверхтекучая компонента сосуществует в одном объёме с другими жидкостями. Это может быть как компонента температурных возбуждений этой же жидкости, так другая жидкость, например, протонная. Пусть эта жидкость движется со скоростью \mathbf{v}_c (как правило можно считать, что все жидкости в ядре нейтронных звёзд кроме нейтронной сверхтекучей компоненты движутся с одной скоростью). Если скорость \mathbf{v}_c не совпадает со скоростью движения вихревых нитей \mathbf{v}_l , последние будут испытывать на себе действие силы трения. Целый набор механизмов такого трения возможен в нейтронных звёздах [5, 113, 114]. Однако, в любом случае, если трение не очень велико, сила, приходящаяся на единицу длины нити может быть представлена в виде

$$\mathbf{F}_c = \frac{\rho_c}{n_v \tau_c} \mathbf{e}_k \times [\mathbf{e}_k \times (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_c)], \quad (\text{Б.16})$$

где ρ_c – плотность трущейся о нити жидкости, τ_c – характерный временной масштаб взаимодействия. Если одновременно имеют место сразу несколько механизмов трения, обратные характерные времена суммируются: $\tau_c^{-1} = \tau_{c1}^{-1} + \tau_{c2}^{-1} + \dots + \tau_{ck}^{-1}$, где τ_{ci} – временной масштаб, характеризующий i -й механизм. С другой стороны, если вихревая нить движется относительно сверхтекучей компоненты, она будет испытывать на себе действие силы Магнуса

$$\mathbf{F}_m = \rho_s \boldsymbol{\kappa} \mathbf{e}_k \times (\mathbf{v}_l - \mathbf{v} - \text{rot } \boldsymbol{\Lambda}). \quad (\text{Б.17})$$

Здесь под \mathbf{v} следует понимать скорость натекающего на вихрь потока, то есть значение скорости сверхтекучей компоненты, взятое на таком расстоянии от сердцевины вихревой нити, на котором течение самого вихря (Б.9) уже пренебрежимо мало. Последнее слагаемое в выражении (Б.17) описывает самодействие вихря [115], вектор $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda \mathbf{e}_k$, выражение для функции Λ будет приведено ниже.

Как уже упоминалось, толщина сердцевины вихревой нити по порядку величины равна длине когерентности, которая в условиях, характерных для недр нейтронных звёзд

всего в несколько раз превосходит размер нуклона [4]. Таким образом, масса, содержащаяся в сердцевине вихря, крайне мала и его инертностью практически всегда можно пренебречь. В приближении безмассовой вихревой нити второй закон Ньютона редуцируется к уравнению

$$\mathbf{F}_m + \mathbf{F}_c = 0. \quad (\text{Б.18})$$

Разрешив уравнение (Б.18) относительно \mathbf{v}_l , произведя описанную выше процедуру усреднения и подставив результат в выражение (Б.15), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{mf} = & -\boldsymbol{\omega}_s \times \text{rot } \Lambda_n + \beta' \boldsymbol{\omega}_s \times (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_c + \text{rot } \Lambda_n) + \\ & + \beta \mathbf{e}_k \times [\boldsymbol{\omega}_s \times (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_c + \text{rot } \Lambda_n)]. \end{aligned} \quad (\text{Б.19})$$

Здесь были введены коэффициенты

$$\beta = \frac{\sigma}{1 + \sigma^2}, \quad \beta' = \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2}, \quad (\text{Б.20})$$

где

$$\sigma = \frac{\rho_c}{\rho_s} \frac{1}{\tau_c \omega_s} \quad (\text{Б.21})$$

– параметр связи (не путать с параметром Y из главы 2). Формально нам удалось исключить из рассмотрения движение вихревых нитей. Сила (Б.19) описывает взаимодействие непосредственно двух жидкостей. Подобное взаимодействие, имеющее место в системах со сверхтекучей жидкостью, обычно называется силой взаимного трения [116]. Здесь возможны два предельных случая. Режим слабой связи имеет место при $\sigma \ll 1$. В этом случае $\beta^2 \approx \beta' \ll 1$ и $\mathbf{v}_l \approx \mathbf{v}_s$. Противоположная ситуация, когда $\sigma \gg 1$, называется режимом сильной связи. В этом случае $\beta \ll 1$, $\beta' \approx 1$ и $\mathbf{v}_l \approx \mathbf{v}_c$. Таким образом, во многих задачах о вращающейся сверхтекучей жидкости нет необходимости рассматривать динамику решётки сверхтекучих нитей. Вместо этого, можно решать уравнение (Б.14), которое разумеется должно быть дополнено законами сохранения массы, импульса и энергии для всей нейтронной жидкости (включая температурные возбуждения).

Рассмотрим теперь две сверхтекучие жидкости, сосуществующие в одном объёме. Например это могут быть сверхтекучие нейтроны и сверхпроводящие протоны. Андреев и Башкин показали [117], что в таких системах из-за сильного взаимодействия частиц, формирующих две сверхтекучие жидкости, возникает так называемый эффект увлечения,

ведущий к следующим выражениям для токов массы \mathbf{J}_α и плотностей импульса \mathbf{p}_α :

$$\mathbf{J}_n = (\rho_n - \rho_{nn} - \rho_{np})\mathbf{v}_{ex} + \rho_{nn}\mathbf{v}_n + \rho_{np}\mathbf{v}_p, \quad (\text{Б.22})$$

$$\mathbf{J}_p = (\rho_p - \rho_{pp} - \rho_{pn})\mathbf{v}_{ex} + \rho_{pp}\mathbf{v}_p + \rho_{pn}\mathbf{v}_n, \quad (\text{Б.23})$$

$$\mathbf{p}_n = (\rho_n - \rho_{nn} - \rho_{np})\mathbf{v}_{ex} + (\rho_{nn} + \rho_{np})\mathbf{v}_n, \quad (\text{Б.24})$$

$$\mathbf{p}_p = (\rho_p - \rho_{pp} - \rho_{pn})\mathbf{v}_{ex} + (\rho_{pp} + \rho_{pn})\mathbf{v}_p. \quad (\text{Б.25})$$

Здесь \mathbf{v}_{ex} – скорость движения температурных возбуждений (предполагается, что возбуждения обеих жидкостей движутся с одной скоростью), $\rho_{\alpha\beta}$ – матрица массовых плотностей (также иногда называемая матрицей Андреева-Башкина), $\alpha, \beta = n, p$. Можно показать, что эта матрица симметрична ($\rho_{np} = \rho_{pn}$) [117]. Таким образом, в подобных системах токи массы каждой жидкости, вообще говоря, не параллельны скорости движения этой жидкости и не равны соответствующим плотностям импульса. Отметим, однако, что

$$\mathbf{J}_n + \mathbf{J}_p = \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_p. \quad (\text{Б.26})$$

Под скоростями сверхтекучих компонент здесь, как в случае одной сверхтекучей жидкости, понимаются выражения (Б.3) и (Б.11).

Можно формально ввести массовые токи и плотности импульса отдельно для сверхтекучих компонент и для возбуждений

$$\mathbf{J}_s = \rho_{nn}\mathbf{v}_n + \rho_{np}\mathbf{v}_p, \quad (\text{Б.27})$$

$$\mathbf{J}_{p(s)} = \rho_{pp}\mathbf{v}_p + \rho_{pn}\mathbf{v}_n, \quad (\text{Б.28})$$

$$\mathbf{p}_s = \rho_s\mathbf{v}_n, \quad (\text{Б.29})$$

$$\mathbf{p}_{p(s)} = \rho_{p(s)}\mathbf{v}_p, \quad (\text{Б.30})$$

$$\mathbf{p}_{ex} = \rho_{ex}\mathbf{v}_{ex}, \quad (\text{Б.31})$$

где мы обозначили $\rho_s = \rho_{nn} + \rho_{np}$, $\rho_{p(s)} = \rho_{pp} + \rho_{pn}$ и $\rho_{ex} = \rho_n + \rho_p - \rho_s - \rho_{p(s)}$. Здесь и далее мы будем использовать индекс “s” вместо “n(s)” для всех величин, относящихся к сверхтекучей компоненте нейтронной жидкости.

Система гидродинамических уравнений, описывающая смесь сверхтекучих нейтронов, сверхпроводящих протонов и вырожденных электронов и мюонов, учитывающая эффект увлечения, а также гравитацию была сформулирована в серии работ Менделля и Линдблома [118–120]. Они использовали феноменологический метод построения уравнений, схожий с подходом Халатникова.

Часть этой системы, описывающая течение нейтронной жидкости можно записать в виде

$$\partial_t \mathbf{v}_s + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s + \nabla(\tilde{\mu} + \Phi_G) = \frac{\rho_{np}}{\rho_s} (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_s) \times \boldsymbol{\omega}_s + \mathbf{f}_{mf}, \quad (\text{Б.32})$$

$$\partial_t \rho_s + \text{div } \mathbf{J}_s = \Gamma_s, \quad (\text{Б.33})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{mf} = & -\frac{1}{\rho_s} \boldsymbol{\omega}_s \times \text{rot } \boldsymbol{\Lambda}_n + \\ & + \beta' \left[\boldsymbol{\omega}_s \times \left(\frac{\rho_{nn}}{\rho_s} \mathbf{v}_s + \frac{\rho_{np}}{\rho_s} \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_e + \frac{1}{\rho_s} \text{rot } \boldsymbol{\Lambda}_n \right) \right] + \\ & + \beta \mathbf{e}_k \times \left[\boldsymbol{\omega}_s \times \left(\frac{\rho_{nn}}{\rho_s} \mathbf{v}_s + \frac{\rho_{np}}{\rho_s} \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_e + \frac{1}{\rho_s} \text{rot } \boldsymbol{\Lambda}_n \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.34})$$

Здесь $\boldsymbol{\Lambda}_n = \partial U_0 / \partial \boldsymbol{\omega}_s$, U_0 – плотность внутренней энергии нейтронной жидкости, \mathbf{v}_e – скорость движения электронов, Φ_G – гравитационный потенциал. Тут мы формально записали уравнение неразрывности для сверхтекучей компоненты нейтронной жидкости. В правой части этого уравнения введена функция Γ_s , равная

$$\Gamma_s = - \sum_{\alpha} (\partial_t \rho_{\alpha} + \text{div } \mathbf{J}_{\alpha}), \quad (\text{Б.35})$$

где $\alpha = p(s), ex, e, \mu$. Важно отметить, что феноменологический метод не позволяет оценить величину коэффициентов взаимного трения. В рамках этого подхода β и β' являются произвольными параметрами.

К тем же самым уравнениям можно прийти и путём рассмотрения динамики вихревых нитей. Для этого нужно предположить, что сила Магнуса имеет вид

$$\mathbf{F}_m = \varkappa \mathbf{e}_k \times (\rho_s \mathbf{v}_l - \mathbf{J}_s - \text{rot } \boldsymbol{\Lambda}_n), \quad (\text{Б.36})$$

а сила трения, действующая на нити, равна

$$\mathbf{F}_c = \frac{\rho_c}{n_v \tau_c} \mathbf{e} \times [\mathbf{e}_k \times (\mathbf{v}_l - \mathbf{v}_e)]. \quad (\text{Б.37})$$

Выражение (Б.36) может быть получено из аналогичного выражения для простой сверхтекучей жидкости заменой $\rho_s \mathbf{v}_s$ на ток массы с учётом эффекта увлечения. Согласно выражению (Б.37), предполагается, что только рассеяние электронов на вихрях играет существенную роль в силе трения.

Также, согласно Менделю [119],

$$\boldsymbol{\Lambda}_n \approx \frac{\varkappa}{4\pi} \frac{\varrho^2}{\rho_{pp}} \ln \left(\frac{l_v}{\xi_n} \right) \mathbf{e}_k, \quad (\text{Б.38})$$

где $\varrho^2 = \rho_{nn}\rho_{pp} - \rho_{np}^2$ – детерминант матрицы Андреева-Башкина. Если протоны не сверхпроводящие и эффект увлечения отсутствует, в этом выражении нужно просто заменить ϱ^2/ρ_{pp} на ρ_s .

Остаётся ещё обсудить конкретные физические механизмы взаимного трения, которые могут иметь место в нейтронных звёздах. Во-первых, электроны ядра могут рассеиваться на температурных возбуждениях в сердцевинах вихревых нитей [113]. Эффективность этого механизма очень сильно зависит от температуры. Например, согласно таблице, приведённой Альпаром, Лангером и Саулсом [5], в веществе плотностью 2.3×10^{14} г см⁻³ при температуре 10^8 К время релаксации τ_c оказывается равным двум часам, при температуре 10^7 К – несколькими дням, а при температуре 10^6 К оно уже по порядку величины составляет десять миллионов лет.

Напомним, что в ядрах нейтронных звёзд, по всей видимости, реализуется триплетная нейтронная сверхтекучесть. Это означает, что куперовские пары обладают спином, равным единице, и, следовательно, обладают магнитным моментом. Это должно приводить к намагниченности вещества в сердцевинах вихревых нитей. Таким образом, заряженные частицы могут рассеиваться на собственном магнитном поле вихрей Фейнмана-Онзагера. Этот механизм был предложен Саулсом и др. [114]. Он характеризуется временем релаксации порядка года [5].

Если в некотором объёме сосуществуют нейтронная сверхтекучесть и протонная сверхпроводимость, нейтронные вихри Фейнмана-Онзагера благодаря эффекту увлечения создают вокруг себе электрический ток протонов. В результате этого, возникает магнитное поле, направленное вдоль вихревых нитей, многократно превосходящее по величине их собственное магнитное поле. Следовательно рассеяние заряженных частиц на таком наведённом поле будем создавать намного более эффективный механизм взаимного трения. Группа Альпара [5] получила следующее выражение для времени релаксации

$$\tau_c \approx 7.3 \rho_{c14}^{-1/6} \left(\frac{m_p^*}{m_p} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_{pp}}{\rho_{np}} \right)^2 P. \quad (\text{Б.39})$$

Здесь ρ_{c14} плотность рассеивающейся на вихрях жидкости ($\rho_c = \rho_{p(s)} + \rho_{ex} + \rho_e + \rho_\mu$) в единицах 10^{14} г см⁻³, m_p^* – эффективная масса протонов, P – период обращения пульсара.

Приложение В

Свободное вращение асимметричного волчка

Рассмотрим тело, вращающееся с угловой скоростью Ω . Если на это тело не действуют никакие силы, его энергия

$$E = \frac{I^{ij}\Omega^i\Omega^j}{2} \quad (\text{B.1})$$

и три компоненты углового момента

$$M^i = I^{ij}\Omega^j \quad (\text{B.2})$$

сохраняются. Закон сохранения углового момента может быть представлен в виде уравнения

$$d_t^*\mathbf{M} + \Omega \times \mathbf{M} = 0, \quad (\text{B.3})$$

в котором символом d_t^* мы обозначили производную по времени, вычисляемую в системе отсчёта, вращающуюся вместе с телом.

Поскольку тензор инерции симметричен, всегда можно найти такой базис $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, в котором этот тензор будет диагональным. Причём циклической перестановкой базисных векторов, всегда можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство $I^{xx} \leq I^{yy} \leq I^{zz}$. Спроектировав уравнение (B.3) на этот базис, получим три уравнения Эйлера

$$d_t^*\Omega^x + \frac{I^{zz} - I^{yy}}{I^{xx}}\Omega^y\Omega^z = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$d_t^*\Omega^y + \frac{I^{xx} - I^{zz}}{I^{yy}}\Omega^z\Omega^x = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$d_t^*\Omega^z + \frac{I^{yy} - I^{xx}}{I^{zz}}\Omega^x\Omega^y = 0. \quad (\text{B.6})$$

Если $M^2 > 2EI^{yy}$, решение системы уравнений Эйлера имеет вид [121]:

$$\Omega^x = \sqrt{\frac{2EI^{zz} - M^2}{I^{xx}(I^{zz} - I^{xx})}} \operatorname{cn}_k(\tau), \quad (\text{B.7})$$

$$\Omega^y = \sqrt{\frac{2EI^{zz} - M^2}{I^{yy}(I^{zz} - I^{yy})}} \operatorname{sn}_k(\tau), \quad (\text{B.8})$$

$$\Omega^z = \sqrt{\frac{M^2 - 2EI^{xx}}{I^{zz}(I^{zz} - I^{xx})}} \operatorname{dn}_k(\tau), \quad (\text{B.9})$$

где $\operatorname{cn}_k(\tau)$, $\operatorname{sn}_k(\tau)$ и $\operatorname{dn}_k(\tau)$ – эллиптические функции Якоби. Данные функции зависят от параметра

$$k = \sqrt{\frac{(I^{yy} - I^{xx})(2EI^{zz} - M^2)}{(I^{zz} - I^{yy})(M^2 - 2EI^{xx})}}, \quad (\text{B.10})$$

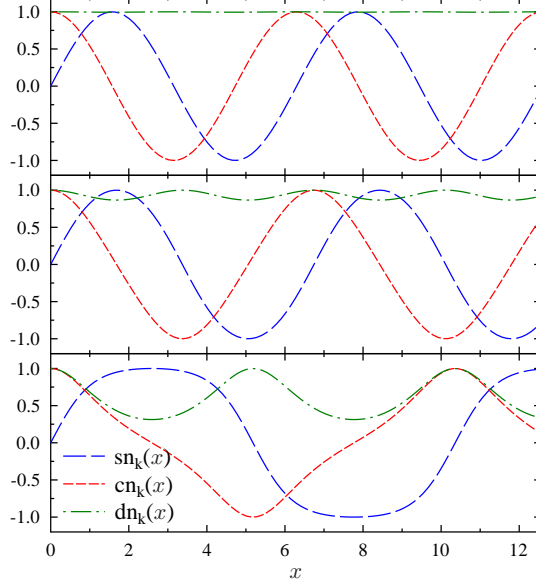


Рис. В.1. Эллиптические функция Якоби для различных значений параметра: $k = 0.1$ (верхняя панель), $k = 0.5$ (средняя панель), $k = 0.95$ (нижняя панель).

меняющегося от 0 до 1, и переменной $\tau = 2\pi f(t/T_p)$, в которой

$$T_p = \sqrt{\frac{I_{xx}I_{yy}I_{zz}}{(I_{zz} - I_{yy})(M^2 - 2EI_{xx})}} \quad (\text{B.11})$$

и

$$f = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}. \quad (\text{B.12})$$

При $k = 0$ эллиптические функции переходят в тригонометрические: $\text{sn} \rightarrow \sin$, $\text{cn} \rightarrow \cos$, $\text{dn} \rightarrow 1$. При $k = 1$ они переходят в гиперболические функции: $\text{sn} \rightarrow \tanh$, cn и $\text{dn} \rightarrow 1/\cosh$.

Вместо декартовых компонент для задания вектора $\mathbf{\Omega}$ можно использовать его абсолютное значение $\Omega = \sqrt{\Omega^x\Omega^x + \Omega^y\Omega^y + \Omega^z\Omega^z}$ и два угла: прецессионный угол $\vartheta = \arccos(\Omega^z/\Omega)$ и азимутальный угол φ , синус которого задаётся выражением $\sin \varphi = \Omega^y/\sqrt{\Omega^x\Omega^x + \Omega^y\Omega^y}$. Также удобно ввести два параметра сплюснутости $\epsilon_x = (I^{zz} - I^{xx})/I^{zz}$ и $\epsilon_y = (I^{zz} - I^{yy})/I^{zz}$. Заметим, что таким образом определённые параметры всегда положительны. Используя решение (В.7)-(В.9), а также определения (В.1) and (В.2), получим

$$\Omega = \Omega_0 \left[1 - \frac{\epsilon_x(\epsilon_x - \epsilon_y)}{1 - \epsilon_y} \sin^2 \vartheta_0 \text{sn}_k^2(\tau) \right]^{1/2}, \quad (\text{B.13})$$

$$\cos \vartheta = \cos \vartheta_0 \frac{\Omega_0}{\Omega} \left[1 - \frac{(1 - \epsilon_y)(\epsilon_x - \epsilon_y)}{\epsilon_y} \tan^2 \vartheta_0 \operatorname{sn}_k^2(\tau) \right]^{1/2}, \quad (\text{B.14})$$

$$\sin \varphi = \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_y(1 - \epsilon_y)}{\epsilon_x(1 - \epsilon_x)} \right) \operatorname{sn}_k^2 \tau \right]^{-1/2} \operatorname{sn}_k \tau, \quad (\text{B.15})$$

где Ω_0 и ϑ_0 – начальные значения Ω and ϑ , начальное значение угла φ предполагается равным нулю.

В частном случае симметричного волчка ($I^{xx} = I^{yy}$, $\epsilon_x = \epsilon_y$, $k = 0$) величины Ω и ϑ остаются постоянными, а вектор угловой скорости равномерно вращается (прецессирует) вокруг оси Z . Если вектор \mathbf{e}_z смотрит на нас, вращение происходит против часовой стрелки. В общем случае величины Ω и ϑ осциллируют во время прецессии.

Особый интерес для нас представляет вращение тел, чьё распределение массы близко к сферически симметричному ($\epsilon_x, \epsilon_y \ll 1$). В этом случае осцилляции величины Ω согласно выражению (B.13) квадратично малы. Если мы пренебрежём в уравнениях (B.4)-(B.6) квадратичными по ϵ_x и ϵ_y слагаемыми и вновь соберём эти уравнения в одно векторное, то получим

$$I^{zz} \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M} = 0. \quad (\text{B.16})$$

Видим, что в этом приближении производная угловой скорости всегда направлена перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{\Omega}$. Что касается угла ϑ , если $\epsilon_x \sim \epsilon_y$, его осцилляции могут быть порядка единицы не смотря на малость параметров сплюснутости.

Если $M^2 < 2EI^{yy}$, решение уравнений (B.4)-(B.6) может быть получено из решения (B.7)-(B.9) заменой всех индексов “ x ” \leftrightarrow “ z ”. Это значит, что в этом случае вектор угловой скорости будет вращаться вокруг оси X , причём если ось смотрит на нас, вращение будет происходить по часовой стрелке.