

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А.Ф. ИОФФЕ  
Российской академии наук

---

*на правах рукописи*

**Поддубный Александр Никитич**

РАСПРОСТРАНЕНИЕ, ЛОКАЛИЗАЦИЯ  
И ИЗЛУЧЕНИЕ СВЕТА В НАНОСТРУКТУРАХ  
И МЕТАМАТЕРИАЛАХ

**Специальность:**

01.04.02 - теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург

2016

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 Рассеяние экситонных поляритонов в полупроводниковых сверх- решётках</b>	<b>16</b>
1.1 Введение. Спектроскопия рассеяния экситонных поляритонов (обзор)	16
1.2 Расчёт спектра рассеяния . . . . .	21
1.2.1 Модель . . . . .	21
1.2.2 Решение по теории возмущений . . . . .	23
1.2.3 Связь спектра рассеяния с фотоупругим откликом . . . . .	28
1.3 Анализ спектров рассеяния . . . . .	29
1.3.1 Обзор спектров рассеяния . . . . .	29
1.3.2 Роль нерадиационного затухания и числа квантовых ям . . . . .	32
1.4 Сопоставление с экспериментом . . . . .	36
1.4.1 Спектры при 70 К . . . . .	36
1.4.2 Температурная зависимость спектров рассеяния и фотоупру- гового отклика . . . . .	39
1.5 Краткие итоги . . . . .	42
<b>2 Резонансные эффекты в аperiodических фотонных структурах</b>	<b>44</b>

2.1	Резонансные фотонные кристаллы, квазикристаллы и разупорядоченные структуры (обзор) . . . . .	45
2.2	Брэгговские структуры Фибоначчи с квантовыми ямами . . . . .	52
2.2.1	Определение и структурный фактор . . . . .	53
2.2.2	Двухволновое приближение . . . . .	60
2.2.3	Отражение и пропускание света структурами Фибоначчи . . . . .	62
2.2.4	Самоподобие оптических спектров структур Фибоначчи . . . . .	74
2.3	Резонансные двумерные фотонные квазикристаллы . . . . .	80
2.3.1	Мозаика Пенроуза . . . . .	80
2.3.2	Поляризационные эффекты в пропускании . . . . .	83
2.3.3	Аналитическая теория спектров пропускания . . . . .	85
2.3.4	Сопоставление с экспериментом . . . . .	91
2.4	Резонансы Фано в разупорядоченных фотонных кристаллах . . . . .	92
2.4.1	Модель . . . . .	92
2.4.2	Расчёт длины экстинкции . . . . .	97
2.4.3	Асимметричная трансформация брэгговского резонанса . . . . .	100
2.5	Краткие итоги . . . . .	104
<b>3</b>	<b>Излучение в гиперболических метаматериалах</b>	<b>106</b>
3.1	Гиперболические среды (обзор) . . . . .	106
3.1.1	Слоистые металло-диэлектрические среды . . . . .	109
3.1.2	Массивы нанопроводов . . . . .	110
3.1.3	Другие реализации гиперболических сред . . . . .	112
3.2	Спонтанное излучение в однородной гиперболической среде . . . . .	113
3.2.1	Расчёт в приближении эффективной среды . . . . .	115
3.2.2	Результаты и обсуждение . . . . .	118

3.3	Спонтанное излучение в дискретных гиперболических материалах .	125
3.3.1	Трёхмерная решётка резонансных дипольных рассеивателей	127
3.3.2	Массив металлических нанопроводов . . . . .	138
3.4	Краткие итоги . . . . .	152
<b>4</b>	<b>Фёрстеровский перенос возбуждений в наноструктурах</b>	<b>154</b>
4.1	Фёрстеровский перенос энергии в наноструктурах (обзор). . . . .	154
4.2	Модель переноса над металлическим зеркалом . . . . .	158
4.2.1	Перенос от одного донора к акцептору. Метод случайных источников. . . . .	158
4.2.2	Перенос между массивами доноров и акцепторов . . . . .	161
4.2.3	Численный расчёт . . . . .	170
4.3	Коллективные экситон-поляритонные донорные моды . . . . .	174
4.4	Подавление скорости переноса . . . . .	178
4.5	Краткие итоги . . . . .	181
<b>5</b>	<b>Краевые состояния в зигзагах резонансных наночастиц</b>	<b>182</b>
5.1	Оптические аналоги топологических краевых состояний (обзор) . .	182
5.1.1	Экспериментальные реализации . . . . .	182
5.1.2	Модель Су-Шриффера-Хигера . . . . .	187
5.2	Краевые состояния в цепочках наночастиц . . . . .	190
5.3	Ближнеполевая спектроскопия краевых состояний . . . . .	197
5.3.1	Металлические нанодиски . . . . .	198
5.3.2	Диэлектрические нанодиски . . . . .	204
5.4	Краткие итоги . . . . .	206
	<b>Заключение</b>	<b>207</b>



# Введение

Исследование оптических явлений в пространственно структурированных композитных материалах привело к формированию бурно развивающихся областей на стыке оптики и физики конденсированных сред — фотоники [1] и плазмоники [2]. Успехи технологии и эксперимента ставят вопрос о разработке теоретического описания структур — фотонных кристаллов и квазикристаллов, метаматериалов, резонаторов, наночастиц и т.д.

Становление фотоники как отдельной области знаний наиболее ярко проявилось с началом активного изучения фотонных кристаллов — структур, в которых диэлектрическая проницаемость модулирована в пространстве с периодом порядка длины световой волны, так что становится возможной брэгговская дифракция, и в спектре оптических возбуждений возникают запрещённые зоны. Качественным отличием дифракции света в фотонных кристаллах от дифракции рентгеновских лучей в естественных кристаллах стала возросшая на несколько порядков относительная ширина спектральных запрещённых зон. В телекоммуникационном диапазоне в фотонных кристаллах уже реализована запрещённая зона для распространения света во всех направлениях. Открывается возможность управления плотностью фотонных состояний, а благодаря этому — скоростью [3] и поляризацией [4] спонтанного излучения помещённых в фотонный кристалл локализованных источников: молекул, примесных атомов, квантовых точек. Параллельно с изучением периодических фотонных кристаллов идут исследования разупорядоченных структур [5], а также детерминированных аперидических структур и квазикристаллов. Активно исследуются фундаментальные свойства самоподобия

и скейлинга оптических спектров квазикристаллов, обусловленные их промежуточным положением между периодическими и неупорядоченными структурами.

Интерес к усилению взаимодействия света с веществом в твердых телах был стимулирован экспериментальной реализацией режима сильной связи между ванье-моттовским экситоном в квантовой яме и фотонной модой, пленённой в планарном брэгговском микрорезонаторе. В результате образуются гибридные частицы — экситонные поляритоны, наследующие от фотонов высокую скорость распространения и от экситонов — чувствительность к внешним электрическим и магнитным полям [6], а также упругой деформации. Важную роль в физике поляритонов играют коллективные эффекты.

Дальнейшее развитие технологии позволило создать оптические метаматериалы — структуры, характерный пространственный масштаб в которых меньше длины световой волны. Это позволяет описывать метаматериалы как искусственные среды, характеризующиеся тензорами эффективной диэлектрической и магнитной проницаемостей  $\varepsilon$  и  $\mu$ . Первоначальные исследования были мотивированы перспективами реализации сред, в которых одновременно  $\varepsilon < 0$  и  $\mu < 0$ , так что на их границе с воздухом происходит отрицательная рефракция света [7]. В последние годы интерес сместился к анизотропным метаматериалам, в которых диагональные компоненты эффективных тензоров  $\varepsilon$  или  $\mu$  сильно отличаются по величине, а также могут иметь разные знаки. Традиционные теоретические подходы для описания необычных свойств сред с отрицательной сигнатурой тензора  $\varepsilon$  оказываются неприменимыми. Такие метаматериалы могут быть реализованы на основе массивов металлических компонентов с плазмонными резонансами [8]. Также перспективным является использование полупроводниковых частиц с высокой диэлектрической проницаемостью, например — кремниевых наночастиц, которые поддерживают высокодобротные резонансы Ми [9]. Достоинством неметаллических структур является значительное подавление нерадиационных потерь.

Исследования в области фотоники стимулируются проникновением идей из фи-

зики конденсированного состояния. Так, по аналогии с двумерными квантовыми ямами и материалами для электронов, возрастает интерес к двумерным аналогам метаматериалов, метаповерхностям [10]. Активно изучаются краевые оптические состояния [11], являющиеся аналогами краевых электронных состояний в топологических изоляторах [12]. В отличие от электронных структур, их оптические аналоги являются открытыми, что приводит к конечному времени жизни собственных мод.

Наиболее актуальными теоретическими задачами в области фотоники в настоящее время являются изучение влияния формы, геометрических параметров и материала наноструктур и метаматериалов на свойства их собственных оптических мод, разработка новых методов визуализации и спектроскопии наноструктур и метаматериалов, а также управление взаимодействием света с веществом.

Сказанное выше определяет актуальность темы диссертации.

Целью работы является теоретическое исследование оптических эффектов в наносистемах: метаматериалах, фотонных кристаллах и квазикристаллах, кластерах наночастиц, которые обусловлены резонансным взаимодействием света с веществом.

Научная новизна и практическая значимость работы состоят в разработке теории фундаментальных физических явлений в фотонных кристаллах, метаматериалах и наноструктурах: мандельштам-бриллюэновского рассеяния экситонных поляритонов в сверхрешётках, локализации света в неупорядоченных фотонных кристаллах в режиме резонанса Фано, спонтанного излучения в гиперболических средах, фёрстеровского переноса энергии экситонными поляритонами. Предложены и теоретически описаны новые классы одномерных и двумерных наноструктур: резонансные фотонные квазикристаллы и цепочки резонансных наночастиц в форме зигзага, поддерживающие краевые оптические моды. Результаты работы позволили разработать методы оптической характеристики нано- и микроструктур.



Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для описания резонансных оптических и фотоупругих свойств современных короткопериодных полупроводниковых сверхрешёток необходимо учитывать экситон-поляритонные эффекты.
2. В резонансных брэгговских квазикристаллических структурах с квантовыми ямами в зависимости от числа ям реализуются как сверхизлучательный, так и фотонно-квазикристаллический режимы. Их отличием от периодических структур является структурированный провал в спектрах отражения на частоте экситона.
3. В спектрах экстинкции одномерных фотонных кристаллов  $ABABAB\dots$  со случайной диэлектрической проницаемостью слоев  $B$  вблизи брэгговских частот возникают резонансы Фано.
4. Скорость спонтанного излучения квантовой точки в одноосном метаматериале возрастает при переходе в гиперболический режим, когда изменяется сигнатура тензора эффективной диэлектрической проницаемости. Максимум скорости достигается на границе эллиптического и гиперболического режимов.
5. Сильное влияние окружающей среды на процессы фёрстеровского переноса энергии между локализованными экситонами связано с формированием коллективных экситон-поляритонных мод.
6. В цепочке резонансных наночастиц в форме прямоугольного зигзага имеется пара поляризационно-вырожденных краевых фотонных состояний.

Апробация работы. Результаты исследований, вошедших в диссертацию, докладывались автором на IX и XII Российских конференциях по физике полупроводников (Новосибирск – Томск, 2009; Звенигород, 2015), на VIII и IX междуна-

родных конференциях по физике взаимодействия света с веществом (Токио, Япония, 2008; Лечче, Италия, 2009), на международной школе по спин-оптронике (Лез Уш, Франция, 2010), на XVIII международном симпозиуме “Наноструктуры: физика и технология” (Санкт-Петербург, 2010), на XI международном семинаре по нелинейной оптике и кинетике возбуждений в полупроводниках (Штутгарт, Германия, 2012), на XIII Австралийской и новозеландской конференции по оптике и фотонике (Фримантль, Австралия, 2013), были представлены в качестве приглашенных докладов на международном симпозиуме “Физика квантовой электроники” (Сноуберд, Юта, США, 2009, 2011), международном симпозиуме “Фотоника в Европе” общества SPIE (Брюссель, Бельгия, 2012), международной конференции “Дни дифракции” (Санкт-Петербург, 2011–2014), международном семинаре по гиперболическим метаматериалам (Канберра, Австралия, 2012), Симпозиуме по прогрессу исследований электромагнетизма (PIERS, Стокгольм, Швеция, 2013), международной конференции по вычислительным методам в науке и инженерной деятельности (ICCMSE, Афины, Греция, 2014), XI международном симпозиуме по фотонным и электромагнитным кристаллическим структурам (PECS, Шанхай, Китай, 2014), V международной конференции по метаматериалам, фотонным кристаллам и плазмонике (META-14, Сингапур, 2014), встречах общества SPIE “Оптика+Фотоника” (Сан-Диего, США, 2014, 2015), российско-британском семинаре по поляритонным устройствам (Санкт-Петербург, 2014), на XIV международном симпозиуме “Нанофизика и наноэлектроника” (Нижний Новгород, 2014), на встрече “Достижения в оптике и лазерной науке” американского оптического общества (Тусон, США, 2014; Сан Хосе, США, 2015), семинаре по кремниевой нанофотонике (Тосса-дель-Маре, Испания, 2014), международной конференции по метаматериалам и нанофизике (Варадеро, Куба, 2015).

Результаты исследований обсуждались также на семинарах ФТИ им. А.Ф. Иоффе, университета ИТМО, Санкт-Петербургского государственного университета, Национального исследовательского центра “Курчатовский институт”, Скол-

ковского института науки и технологий, Института общей физики РАН, Немецкого синхротрона DESY (Гамбург), университетов Амстердама (Нидерланды), Норфолка (США), Джексона (США), Нью-Йорка (США), Австралийского национального университета. Основное содержание диссертации опубликовано в 24 научных статьях и одной главе в монографии.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из Введения, шести глав, Заключения и списка литературы. Она содержит 255 страниц текста, включая 53 рисунка. Список цитируемой литературы содержит 375 наименований.

Первая глава диссертационной работы посвящена исследованию мандельштам-бриллюэновского рассеяния экситонных поляритонов в полупроводниковых сверхрешётках. Спектроскопия рассеяния поляритонов на акустических фонах активно использовалась с 1970-х гг. для визуализации эффектов пространственной дисперсии в окрестности экситонного резонанса в объемных кристаллах. В короткопериодных полупроводниковых сверхрешётках поляритонные эффекты не изучались до самого последнего времени, что было связано с низким качеством структур. С появлением высококачественных структур с квантовыми ямами удалось значительно понизить значение нерадиационного затухания и достичь поляритонного режима в сверхрешётке. Учет специфики мандельштам-бриллюэновского рассеяния поляритонов в сверхрешётках потребовал разработки новой теории, развитой в диссертационной работе. Построенная теория позволила объяснить экспериментальные спектральные и температурные зависимости положения и интенсивности пиков рассеяния. Продемонстрировано резонансное усиление коэффициента фотоупругого отклика структур с квантовыми ямами по сравнению с объемным GaAs в области прозрачности.

Развитая в главе 1 теория применима для произвольного расположения квантовых ям, однако конкретное рассмотрение выполнялось для периодической сверхрешётки. Резонансные и поляритонные эффекты, специфические для квазипериодических и разупорядоченных структур, исследуются во второй главе диссертации.

ции. Предложен новый нанообъект — резонансные фотонные квазикристаллы на основе брэгговских структур Фибоначчи с квантовыми ямами. Построена аналитическая теория отражения света от таких структур, согласующаяся с результатами эксперимента, выявлены сверхизлучательный и фотонно-квазикристаллический режимы в спектрах. Показано, что качественным отличием брэгговских структур Фибоначчи от периодических является присутствие структурированного провала в спектрах отражения на частоте экситонного резонанса. Исследована конкуренция между поглощением экситонных поляритонов в квазикристаллической структуре и их локализацией. Развита теория поляризационно-зависимого пропускания света двумерными фотонными квазикристаллами на основе мозаики Пенроуза. Теория позволяет аналитически объяснить угловую зависимость степени циркулярного дихроизма пропускания, экспериментально наблюдаемую для регулярной двумерной решётки и мозаики Пенроуза, составленных из плазмонных дисков. Решена задача о локализации света в одномерных фотонных кристаллах со случайной диэлектрической проницаемостью каждого второго слоя. Выявлен и аналитически объяснён новый эффект в спектрах, специфический для данного типа беспорядка — асимметричная трансформация спектра экстинкции вблизи брэгговских частот при усилении беспорядка, описываемая формулой Фано.

Во второй главе исследованы сверхизлучательные моды экситонных поляритонов, для которых скорость радиационного затухания возрастает за счёт коллективных эффектов. Третья глава диссертационной работы посвящена исследованию усиления спонтанного излучения в гиперболических средах и метаматериалах. Получены замкнутые аналитические выражения для фактора Парселла, описывающего усиление спонтанного излучения экситона в квантовой точке, помещённой в однородную гиперболическую среду. Показано, что значение фактора Парселла в гиперболическом режиме обратно пропорционально объёму квантовой точки. Максимальная величина фактора Парселла достигается на границе между эллиптическим и гиперболическим режимами. Развита аналитическая теория

спонтанного излучения в гиперболических метаматериалах на основе массивов резонансных наночастиц и металлических проводов. В рамках дискретного дипольного приближения рассчитана дисперсия коллективных блоховских мод, образованных гибридизацией резонансов различных наночастиц. Продемонстрирована сильная зависимость фактора Парселла от положения источника в элементарной ячейке метаматериала.

Ещё одним явлением помимо спонтанного излучения, обусловленным взаимодействием света с веществом, является фёрстеровский резонансный перенос возбуждений от т.н. донорных состояний к акцепторным. Четвёртая глава посвящена исследованию этого эффекта в плазмонных наноструктурах для массивов донорных и акцепторных экситонов, расположенных на поверхности металлического зеркала. Существовавшие модели позволяли описывать перенос лишь между отдельными донорами и акцепторами. Развитая в диссертации теория позволяет выявить влияние коллективных эффектов на процесс переноса. Показано, что перенос от коллективных экситон-поляритонных мод, образованных при гибридизации экситонных состояний на различных донорах, оказывается гораздо более чувствителен к наличию зеркала, чем перенос между индивидуальными донорами и акцепторами. Установлено, что зеркало может как увеличивать, так и уменьшать скорость переноса. Уменьшение скорости переноса находится в качественном согласии с результатами экспериментов для массивов молекул красителя. Развитая теория также применима для описания переноса в плотных структурах из полупроводниковых квантовых точек.

Первые четыре главы диссертации посвящены изучению резонансных оптических эффектов, возникающих главным образом в объёме структур. В пятой главе диссертации исследуются краевые состояния, возникающие в цепочках наночастиц с оптическими резонансами. Предсказано, что для цепочек в форме прямоугольного зигзага гибридизация поляризационно-вырожденных мод различных частиц приводит к образованию двух вырожденных по энергии состояний, локализован-

ных на левом и правом краях структуры. Показано, что состояния имеют топологический характер и обусловлены киральной симметрией диполь-дипольного взаимодействия в приближении ближайших соседей. Теория применима для металлических наночастиц с плазмонными резонансами, диэлектрических наночастиц с резонансами Ми, а также массивов туннельно-связанных брэгговских резонаторов в форме микроколонн. Предсказания теории находятся в согласии с экспериментами по сканирующей ближнепольной оптической микроскопии образцов из золотых и кремниевых нанодисков. Качественным отличием данного аналога топологических состояний в оптике от других предлагавшихся реализаций является (а) их субволновой характер и (б) возможность селективного возбуждения состояний на левом и правом краях зигзага при изменении поляризации падающей плоской волны.

В Заключении обобщены основные результаты работы.

Формулы и рисунки диссертации нумеруются по главам, нумерация литературы единая для всего текста.

# СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\alpha$	электрическая поляризуемость
$D$	вектор электрической индукции
$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$	вектор электрического поля
$\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$	вектор магнитного поля
$k, \mathbf{K}, Q$	волновой вектор
$m$	магнитный дипольный момент
$P$	вектор электрической поляризации
$p$	электрический дипольный момент
$P_{\text{exc}}$	вектор экситонной поляризации
$\epsilon$	диэлектрическая проницаемость
$\epsilon_b$	фоновая диэлектрическая проницаемость
$\Gamma$	скорость безызлучательного затухания экситона
$\Gamma_0$	скорость излучательного затухания экситона
$\lambda$	длина волны излучения
$\mathcal{G}_k$	функция Грина в обратном пространстве
$\Omega$	частота фонона
$\omega$	частота излучения
$\omega_0$	резонансная частота экситона
$\omega_A$	резонансная частота акцепторов (глава 4)
$\omega_D$	резонансная частота доноров (глава 4)
$\omega_{\text{LT}}$	частота продольно-поперечного расщепления
$\tau$	время жизни состояния (главы 3,4)
$\tau = (\sqrt{5} + 1)/2$	золотое сечение (глава 2)
$c$	скорость света
$C_k$	константа взаимодействия
$f$	структурный фактор (главы 1,2)
$f$	фактор Парселла (глава 3)
$F_m$	числа Фибоначчи
$G, G_0$	функция Грина фотона
$n_b$	фоновый показатель преломления
$p$	тензор фотоупругого отклика (глава 1)
$q$	волновой вектор света

$r(\omega)$	амплитудный коэффициент отражения света
$S$	восприимчивость квантовой ямы (глава 2)
$s$	скорость звука
$t(\omega)$	амплитудный коэффициент пропускания света



# Глава 1

## Рассеяние экситонных поляритонов в полупроводниковых сверхрешётках

### 1.1 Введение. Спектроскопия рассеяния экситонных поляритонов (обзор)

Экситонные поляритоны — это гибридные квазичастицы, образованные в результате взаимодействия света и экситонов [13]. Исследование поляритонов в объемных полупроводниках началось с пионерских теоретических работ Пекара [14] и Хопфилда [15]. Экситон-поляритонный эффект проявляется в резонансных оптических экспериментах по отражению и пропусканию света при низких температурах [13]. Так, анализ положения интерференционных полос в спектрах отражения тонких плёнок кристаллов CdSe позволил экспериментально определить дисперсию поляритонов и продемонстрировать возбуждение добавочных световых волн [16]. Ещё одним классическим методом изучения объемных поляритонов стала спектроскопия мандельштам-бриллюэновского рассеяния света на акустических фононах [17, 18]. В объемном полупроводнике волновые вектора  $Q_i$  и  $Q_s$  падающего и рассеянного назад поляритонов связаны законом сохранения импульса,  $Q_s = Q_i - \Omega/s$ , где  $\Omega$  — частота испускаемого акустического фонона, а  $s$  — скорость звука. Поскольку скорость звука значительно меньше скорости

света, в низшем приближении можно пренебречь отличием частот  $\omega_i$  и  $\omega_s$ , так что  $Q_i = -Q_s = \Omega/(2s)$ . Таким образом, непосредственно определяемая из эксперимента зависимость рамановского сдвига от частоты падающего света отражает закон дисперсии поляритонов. Экспериментально наблюдалось рассеяние как между двумя ветвями поляритонной дисперсии, так и внутри одной ветви [17]. Была построена детальная теория рассеяния в низшем порядке теории возмущений [19, 20, 21, 22, 23], а также исследована роль нелинейных эффектов в режиме большой интенсивности [24].

Дальнейшее развитие экситон-поляритонная физика получила с появлением низкоразмерных полупроводниковых гетероструктур. Значительное внимание исследователей привлекли квазидвумерные поляритоны в *оптических микрорезонаторах* [25]. Располагая одну или несколько квантовых ям в пучностях фотонной моды, пленённой между многослойными брэгговскими зеркалами, удается многократно усилить светоэкситонное взаимодействие. Спектроскопия рассеяния поляритонов была обобщена с объемных полупроводников на микрорезонаторы: наблюдалось резонансное усиление рамановского рассеяния [26, 27], а также рассеяние поляритонов, распространяющихся в плоскости резонатора, на поверхностных акустических волнах [28].

Другим интересным объектом являются периодические структуры с многими квантовыми ямами [29, 30, 31, 32], в которых расстояние между соседними ямами кратно половине длины световой волны на частоте экситонного резонанса, т.н. *резонансные брэгговские структуры*. Поскольку толщины межъямных барьеров порядка 100 нм, квантово-механическое туннелирование экситонов между соседними ямами невозможно. Однако, экситон, находящийся в одной из ям, может испускать фотон, который, в свою очередь, может быть поглощён в другой яме. Этот процесс приводит к образованию коллективных экситон-поляритонных мод. Благодаря выполнению брэгговского условия, происходит усиление поляритонного эффекта и образование широкой поляритонной стоп-зоны, проявляющейся как максимум в

спектрах отражения. Характерная ширина стоп-зоны  $2\Delta = 2\sqrt{\omega_0/\Gamma_0/\pi}$ , где  $\omega_0$  — резонансная частота экситона, а  $\Gamma_0$  — излучательное затухание, составляет величину порядка нескольких мэВ для GaAs/AlGaAs структур [32]. Это превосходит безызлучательное затухание экситона  $\Gamma$  при низких температурах и позволяет наблюдать проявления поляритонного эффекта. Успешная экспериментальная реализация резонансных брэгговских структур требует выполнения жестких критериев на постоянство толщин ям и барьеров: период структуры должен выдерживаться с точностью порядка 1 %. Значительный прогресс в реализации резонансных брэгговских структур был достигнут в последнее десятилетие несколькими независимыми экспериментальными группами [33, 34, 35, 36, 37, 38, 39].

По определению, в *короткопериодных полупроводниковых сверхрешётках* период  $d$  много меньше длины световой волны. Поэтому брэгговского усиления ширины стоп-зоны не происходит. В рамках приближения эффективной среды такие сверхрешётки могут быть охарактеризованы эффективным продольно-поперечным расщеплением экситонных поляритонов  $\omega_{\text{LT}} = 2\Gamma_0/\sin q(\omega_0)d$ , где  $q(\omega_0)$  — волновой вектор света на частоте экситонного резонанса [40]. Для типичных квантовых ям излучательное затухание экситона мало по сравнению с безызлучательным,  $\hbar\Gamma_0 \sim 0.05 \text{ meV} \ll \hbar\Gamma \sim 1 \text{ meV}$  [41, 32]. Поэтому оказывается, что  $\omega_{\text{LT}} < \Gamma$ , и, в отличие от брэгговских структур, поляритонный эффект в короткопериодных сверхрешётках не проявляется. В последние несколько лет стали доступны высококачественные сверхрешётки GaAs/AlAs, в которых безызлучательное затухание экситона мало, так что значения  $\omega_{\text{LT}}$ ,  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  сопоставимы. Такие сверхрешётки были исследованы в работе [42] методом резонансного мандельштам-бриллюэновского рассеяния и была экспериментально определена дисперсия и затухание поляритонов. Теоретическое описание рассеяния и объяснение наблюдавшейся трёхпиковой формы зависимости интенсивности рассеянного света от частоты падающего отсутствовало.

Отметим, что рассеяние на акустических фононах в структурах с многими

квантовыми ямами проявляет ряд особенностей по сравнению с объемными полупроводниками. В сверхрешётках происходит сложение спектра акустических фононов [43] и становится возможным рассеяние на нескольких акустических модах. Поэтому характерные энергии фононных мод, участвующих в процессе рассеяния, возрастают, что позволяет повысить точность спектроскопии. В работе [44] было получено теоретическое выражение для рассеяния света на сложенных фононах (folded phonons) в рамках модели периодически модулированного коэффициента фотоупругого отклика. В последующей работе [45] был учтен эффект различия диэлектрических проницаемостей двух материалов сверхрешётки, приводящий к брэгговской дифракции в случае, когда период структуры кратен половине длины световой волны. В недавней работе [46] был проанализирован форм-фактор рассеяния, и показано, что относительные интенсивности рассеяния на различных сложенных акустических модах зависят от силы их перекрытия с экситонным резонансом. Резонансное рассеяние экситонных поляритонов в сверхрешётках теоретически не рассматривалось.

Последовательная теоретическая модель [A1] мандельштам-бриллюэновского рассеяния поляритонов в структурах с многими квантовыми ямами представлена в следующем разделе 1.2. Далее в разделе 1.3 исследована зависимость спектров рассеяния от частоты падающего света. Проанализирована зависимость спектров рассеяния от числа квантовых ям в структуре и продемонстрирован переход от режима рассеяния на одиночном экситоне к поляритонному режиму. В разделе 1.4.1 показано, что модель находится в хорошем согласии с данными эксперимента. Воспроизведена зависимость пиковой интенсивности рассеяния от энергии падающего света и объяснена наблюдаемая трёхпиковая структура с провалами на экситонных резонансах.

Мандельштам-бриллюэновское рассеяние является эффективным методом определения фотоупругого отклика — изменения диэлектрической проницаемости под влиянием деформации [47]. Исследование фотоупругого отклика крайне

важно для применений в оптомеханике резонаторов. Оптомеханика привлекает значительное внимание исследователей как благодаря фундаментальным задачам о взаимодействии оптических и механических степеней свободы в нано- и микроструктурах в классическом и квантовом режимах, так и из-за разнообразных перспектив применений, например, для измерения масс нанообъектов или для полностью оптического охлаждения в рамках интегральных твердотельных устройств [48]. Влияние механического движения на положение оптических резонансов может быть обусловлено двумя качественно разными эффектами: геометрическим и фотоупругим. В первом случае изменение геометрических размеров структуры приводит к сдвигу резонансной частоты, и, наоборот, давление света на стенки резонатора приводит к изменению его размера. Во втором случае механическое движение вызывает деформацию материалов, которая, за счёт фотоупругого эффекта, влияет на диэлектрическую проницаемость и, следовательно, на положение резонансных частот. Традиционно в твердотельной оптомеханике использовались кремниевые структуры [49], технология изготовления которых достигла высокой степени совершенства. Поскольку кремний является непрямозонным полупроводником, для кремниевых нано- и микро-резонаторов основную роль играет геометрический механизм, т.е. спектральное положение оптических резонансов определяется лишь механическим смещением поверхностей и интерфейсов. Недавно в качестве альтернативного материала для оптомеханических устройств [50, 51] был предложен GaAs, являющийся, в отличие от кремния, прямым полупроводником. Преимуществом GaAs платформы для оптомеханики является возможность использования и оптимизации фотоупругого отклика. В отличие от геометрического механизма, фотоупругое взаимодействие существенно зависит от рабочей длины волны и спектральной отстройки от резонансов материала, поляритонных или экситонных [46]. Поэтому в перспективе использование поляритонов открывает путь к резонансному управлению взаимодействием света и звука. В объемном GaAs значения фотоупругих коэффициентов известны лишь

в области прозрачности, при энергиях не доходящих до края запрещенной зоны на примерно 30 мэВ [52], либо при энергиях более 1.3 эВ, лежащих глубоко в запрещенной зоне [47, 53]. Фотоупругий отклик в области экситонного резонанса экспериментально не исследовался. В разделе 1.4.2 из сопоставления развитой теории мандельштам-бриллюэновского рассеяния с экспериментом определена спектральная зависимость коэффициента фотоупругого отклика квантовых ям в диапазоне температур от 30 К до 300 К и продемонстрировано многократное резонансное усиление отклика по сравнению с изученным ранее случаем объемного GaAs [52].

## 1.2 Расчёт спектра рассеяния

### 1.2.1 Модель

Рассматривается структура из  $N$  квантовых ям, помещенная в бесконечную матрицу с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_b$ , см. рис. 1.1. На структуру по нормали падает монохроматическая волна с частотой  $\omega_i$ . Требуется определить интенсивность волны на частоте  $\omega_s$ , рассеянной назад благодаря взаимодействию с акустическими фононами. Отличием фоновых диэлектрических проницаемостей материалов ям и барьеров пренебрегается. Таким образом, рассеяние и отражение света определяются лишь откликом квантовых ям, связанным с резонансами квазидвумерных экситонов. Считается, что расстояние между квантовыми ямами достаточно велико ( $\gtrsim 10$  нм), так что квантово-механическим туннелированием

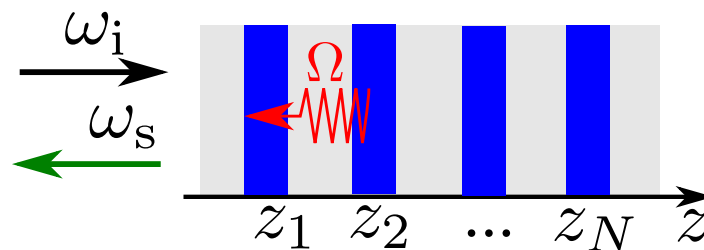


Рис. 1.1: Иллюстрация мандельштам-бриллюэновского рассеяния света в структуре с многими квантовыми ямами.

экситонов между соседними ямами можно пренебречь. Учитывается взаимодействие экситонов с продольными акустическими фотонами по механизму деформационного потенциала (для реализованного в экспериментах [42,A1,A2] случая распространения вдоль оси [001] и рассеяния назад пьезоэлектрическое взаимодействие в GaAs запрещено симметрией [54]).

Полное описание взаимодействия электромагнитной волны с квазидвумерными экситонами в квантовой яме может быть выполнено в рамках формализма нелокального диэлектрического отклика [32]. В рассматриваемом случае, когда ширина квантовой ямы значительно меньше длины световой волны, микроскопические детали распределения экситонной поляризации в направлении поперек ямы не проявляются в оптическом отклике. Поэтому экситонный резонанс достаточно охарактеризовать лишь тремя параметрами — резонансной частотой  $\omega_0$ , излучательным затуханием  $\Gamma_0$  (определяющим силу осциллятора резонанса) и безызлучательным затуханием  $\Gamma$ , феноменологически учитывающим процессы рассеяния экситонов на фононах и несовершенствах структуры. Средняя по толщине экситонная поляризация  $P_{\text{exc},j}$   $j$ -й квантовой ямы может быть описана как осциллятор, с зависящей от деформации поправкой к резонансной частоте  $\epsilon(t)$ , и удовлетворяющий уравнению [32]

$$\frac{dP_{\text{exc},j}}{dt} + i[\omega_0 + \epsilon(t) - i(\Gamma + \Gamma_0)]P_{\text{exc},j} = i\xi\Gamma_0 E_j^{(\text{ext})}. \quad (1.1)$$

Здесь  $\xi = cn_b/(2\pi\omega_0 a)$  — безразмерный параметр, описывающий перекрытие между электрическим полем и экситонной огибающей в квантовой яме,  $a$  — ширина квантовой ямы,  $E_j^{(\text{ext})}$  — внешнее электрическое поле, наводящее поляризацию в  $j$ -й яме, и определяемое суммой поля падающей волны  $E^{(0)}(t, z_j)$  и поля от всех остальных ям

$$E_j^{(\text{ext})}(t) = E^{(0)}(t, z_j) + \frac{i}{\xi} \sum_{l \neq j} P_{\text{exc},l}(t - |z_l - z_j|n_b/c). \quad (1.2)$$

Изменение частоты экситонов  $\epsilon(t)$  за счет взаимодействия с продольными акусти-

ческими фононами даётся выражением

$$\epsilon(t) = \sum_k (F_k a_k e^{ikz - i\Omega_k t} + F_k^* a_k^\dagger e^{-ikz + i\Omega_k t}), \quad (1.3)$$

где  $\Omega_k$  — частота фонона,  $a_k$  и  $a_k^\dagger$  — операторы уничтожения и рождения фононов. Суммирование выполняется по волновым векторам  $k$  фононов, распространяющихся по нормали к квантовым ямам. В сверхрешётке происходит сложение спектра фононных мод и образование щелей в спектре, см. рис. 1.2а. В настоящей работе рассматриваются области волновых векторов фононов вдали от краёв зоны Бриллюэна сверхрешётки. В этом случае закон дисперсии фононов можно считать линейным,  $\Omega_k = s|k|$ , где  $s$  — скорость звука, и волновой вектор  $k$  определён в расширенной зоне Бриллюэна. Матричный элемент экситон-фононного взаимодействия имеет вид [46]

$$F_k \propto \frac{ik}{\sqrt{\Omega_k}} \Xi(k), \quad \Xi(k) = \sum_{\nu=e1, hh1} \Xi_\nu \int |\Phi_\nu(z)|^2 e^{ikz} dz, \quad (1.4)$$

где  $\Xi_{e1}$  и  $\Xi_{hh1}$  — константы деформационного потенциала подзон электронов ( $e1$ ) и тяжелых дырок ( $hh1$ ) и  $\Phi_\nu$  — соответствующие волновые функции.

### 1.2.2 Решение по теории возмущений

Уравнения (1.1)–(1.3) полностью описывают связанную систему фотонов, фононов и экситонов. Их решение следует формально рассматривать как квантовомеханический оператор, действующий в гильбертовом пространстве фононной подсистемы. Нашей задачей является определение интенсивности рассеянного света на частоте  $\omega_s$ , усредненной по стационарному термическому распределению фононов. Для этой цели выполним преобразование Фурье уравнений (1.1), (1.2) по времени  $t$ . Результат в частотной области принимает вид

$$(\omega_0 - \omega - i\Gamma) P_{\text{exc},j}(\omega) - i\Gamma_0 \sum_{l=1}^N e^{iq(\omega)|z_j - z_l|} P_{\text{exc},l}(\omega) = \xi\Gamma_0 E_j^{(0)}(\omega) - V_j(\omega), \quad (1.5)$$



где  $q(\omega) = \omega n_b/c$  — волновой вектор световой волны, соответствующий частоте  $\omega$ , и потенциал  $V_j$  описывает взаимодействие экситонов с фононами,

$$V_j(\omega) = \sum_k [F_k a_k e^{ikz_j} P_{\text{exc},j}(\omega - \Omega) + F_k^* a_k^\dagger e^{-ikz_j} P_{\text{exc},j}(\omega + \Omega)] . \quad (1.6)$$

Для определения интенсивности рассеянного света решим уравнение (1.5) по теории возмущений в предположении слабого экситон-фононного взаимодействия. Компонента Фурье электрического поля падающей монохроматической волны на частоте  $\omega_i$  равняется  $E_j^{(0)}(\omega) = 2\pi E_i e^{iq(\omega_i)z_j} \delta(\omega - \omega_i)$ . Падающее поле индуцирует экситонную поляризацию в  $j$ -й квантовой яме

$$P_{\text{exc},j}^{(0)}(\omega) = \xi \sum_{l=1}^N G_{jl}(\omega) E_l^{(0)}(\omega) , \quad (1.7)$$

где  $G_{jl}(\omega)$  — функция Грина невозмущённого уравнения (1.5), определяемая матричным уравнением [32, 55]

$$(\omega_0 - \omega - i\Gamma)G_{jl}(\omega) - i\Gamma_0 \sum_{m=1}^N e^{iq(\omega)|z_j - z_m|} G_{ml}(\omega) = \Gamma_0 \delta_{jl} , \quad (1.8)$$

которое описывает гибридизацию экситонных резонансов в различных ямах за счёт взаимодействия со светом. Поляризация (1.7) осциллирует на той же частоте, что и падающая волна, и определяет когерентный оптический отклик, например, отражение и пропускание. Взаимодействие с акустическими фононами индуцирует поляризацию на сдвинутой частоте  $\omega_s \neq \omega_i$ ,

$$P_{\text{exc},j}^{(1)}(\omega_s) = \sum_{l=1}^N G_{jl}(\omega_s) V_l^{(1)}(\omega_s) , \quad (1.9)$$

где  $V_l^{(1)}(\omega_s)$  дается выражением (1.6) с  $P_{\text{exc},j}(\omega)$  замененным на  $P_j^{(0)}(\omega)$  из (1.7). Наведённая взаимодействием с фононами поляризация (1.9) в свою очередь индуцирует рассеянную волну

$$E_s(\omega_s) = \frac{i}{\xi} \sum_{j=1}^N P_{\text{exc},j}^{(1)}(\omega_s) e^{iq(\omega_s)z_j} . \quad (1.10)$$

Спектр рассеяния дается выражением

$$I_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle E_s^\dagger(0) E_s(t) \rangle e^{i\omega t} dt, \quad (1.11)$$

где угловые скобки означают усреднение по распределению фононов и  $E_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_s(\omega) e^{-i\omega t} d\omega / (2\pi)$ . Подставляя (1.7)–(1.10) в (1.11), получаем  $I_s(\omega_s) = R(\omega_s, \omega_i) |E_i|^2$ , где

$$R(\omega_s, \omega_i) = \sum_k |F_k|^2 [\bar{n}_k |f(\omega_s, \omega_i; k)|^2 \delta(\omega_s - \Omega_k - \omega_i) + (\bar{n}_k + 1) |f(\omega_s, \omega_i, -k)|^2 \delta(\omega_s + \Omega_k - \omega_i)], \quad (1.12)$$

$\bar{n}_k = \langle a_k^\dagger a_k \rangle$  — среднее число фононов с волновым вектором  $k$ , и  $f(\omega_s, \omega_i; k)$  — структурный фактор для поляритонов,

$$f(\omega_s, \omega_i; k) = \sum_{j=1}^N g_j(\omega_i) g_j(\omega_s) e^{ikz_j}, \quad (1.13)$$

$$g_j(\omega) = \sum_{m=1}^N e^{iq(\omega)z_m} G_{jm}(\omega) = -i[G_{1j}(\omega)(\omega_0 - \omega - i\Gamma)/\Gamma_0 - \delta_{1j}]. \quad (1.14)$$

Здесь было использовано свойство взаимности для функции Грина,  $G_{ij}(\omega) = G_{ji}(\omega)$ , и определение функции Грина (1.8) с  $j = 1$ . Выражение (1.12) описывает интенсивность рассеянного счета лишь в линейном приближении по интенсивности падающего. Учёт нелинейных эффектов не входил в задачи настоящей работы. Рассеяние в объёмном материале в режиме большой интенсивности ранее изучалось в работе [24].

Уравнение (1.12) применимо для произвольного расположения квантовых ям. Далее этот результат будет использован для частного случая периодической сверхрешётки,  $z_j = (j - 1)d$ , где  $d$  — период. В этом случае функция Грина может быть получена аналитически [55]

$$G_{mn} = \chi \delta_{mn} + D e^{iQ|z_m - z_n|} + \frac{r_\infty D}{1 - r_\infty^2 e^{2iQL}} \times \left[ e^{iQ(z_m + z_n)} + e^{iQ(2L - z_m - z_n)} + 2r_\infty e^{2iQL} \cos(z_m - z_n) \right], \quad (1.15)$$

где  $r_\infty = -[1 - e^{-i(q-Q)d}]/[1 - e^{-i(q+Q)d}]$  — коэффициент отражения света от бесконечной структуры,  $L = d(N - 1)$  — толщина структуры,  $\chi = \Gamma_0/(\omega_0 - \omega - i\Gamma)$ ,  $D = i\chi^2 \sin qd / \sin Qd$ , и  $Q$  — волновой вектор экситонного поляритона, определяемый уравнением [40]

$$\cos Qd = \cos qd - \chi \sin qd. \quad (1.16)$$

Использование явного вида функции Грина приводит к упрощению структурного фактора (1.14) до

$$g_j = -i \frac{r_1(1 - r_\infty)(e^{iQz_j} + r_\infty e^{iQ(2L-z_j)})}{1 - r_\infty^2 e^{2iQL}}, \quad (1.17)$$

где  $r_1 = i\Gamma_0/[\omega_0 - \omega - i(\Gamma_0 + \Gamma)]$  — коэффициент отражения от одиночной квантовой ямы.

Для случая короткопериодной сверхрешётки (short-period superlattice),  $|q(\omega_0)d| \ll 1$ , рассматриваемого далее в разделе 1.3, выражение (1.16) для дисперсии экситонных поляритонов может быть упрощено и описано в терминах приближения резонансной эффективной среды [40, 32],

$$Q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\text{eff}}(\omega), \quad \varepsilon_{\text{eff}} = \varepsilon_b \left( 1 + \frac{\omega_{\text{LT}}}{\omega_0 - \omega - i\Gamma} \right), \quad (1.18)$$

где эффективное продольно-поперечное расщепление равняется

$$\omega_{\text{LT}} = \frac{2\Gamma_0}{\sin q(\omega_0)d}. \quad (1.19)$$

Используя функцию Грина (1.15), получаем финальное выражение для интенсивности рассеянного света,

$$R(\omega_s, \omega_i) = Y_k A(\omega_i) A(\omega_s) \times \left[ \left| B \left( \omega_i, \omega_s, \frac{|\omega_i - \omega_s|}{s} \right) \right|^2 + \left| B \left( \omega_i, \omega_s, -\frac{|\omega_i - \omega_s|}{s} \right) \right|^2 \right], \quad (1.20)$$

где

$$Y_k = \frac{\bar{n}_k |F_k^2|}{s\Gamma_0^2}, \quad A(\omega) = \left| \frac{r_1(1-r_\infty)}{1-r_\infty^2 e^{2iQL}} \right|^2, \quad (1.21)$$

$$B(\omega_i, \omega_s, k) = \Delta(k + Q_i + Q_s) + r_\infty(\omega_i) e^{2iQ_i L} \Delta(k - Q_i + Q_s) + \quad (1.22)$$

$$+ r_\infty(\omega_s) e^{2iQ_s L} \Delta(k + Q_i - Q_s) + r_\infty(\omega_s) r_\infty(\omega_i) e^{2i(Q_i+Q_s)L} \Delta(k - Q_i - Q_s),$$

$$\Delta(Q) = \sum_{m=1}^N e^{iQz_m} = \frac{1 - e^{iQdN}}{1 - e^{iQd}}, \quad (1.23)$$

и  $Q_i = Q(\omega_i)$ ,  $Q_s = Q(\omega_s)$ . При выводе (1.20) использовалось предположение о том, что энергия фононов значительно меньше температуры  $T$ , так что число фононов  $\bar{n}_k \sim T/(\hbar\Omega_k) \gg 1$ . Это предположение выполнено для обсуждаемых далее экспериментов при температурах выше 30 К ( $\sim 3$  мэВ), с характерными энергиями фононов меньше 1 мэВ.

Структура спектра рассеяния (1.20) может быть интерпретирована следующим образом. Множители  $A(\omega)$  описывают когерентное распространение падающей и рассеянной волн внутри системы. Величина  $B(\omega_i, \omega_s, k)$  в (1.22) представляет собой структурный фактор для рассеяния поляритонов с поглощением фонона с волновым вектором  $k$  (или испусканием с волновым вектором  $-k$ ). Первое слагаемое в выражении (1.22) описывает прямой процесс рассеяния, когда рассеянная поляритонная волна распространяется противоположно падающей. Оставшиеся три слагаемых соответствуют рассеянию на фононах, сопровождающемуся отражением поляритонов от границы структуры. Для бесконечной структуры эти слагаемые отсутствуют, а структурный фактор  $|\Delta(Q)|^2$  сводится к  $\delta$ -функции, отражающей закон сохранения квазиимпульса,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\Delta(Q)|^2 = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(Qd - 2\pi m). \quad (1.24)$$

Для структуры с конечным числом квантовых ям  $N$  закон сохранения импульса нарушается и  $\delta$ -функции в (1.24) заменяются пиками конечной ширины порядка  $\pi/(Nd)$ .

### 1.2.3 Связь спектра рассеяния с фотоупругим откликом

Выражение (1.20) может быть дополнительно упрощено в реализуемом в большинстве экспериментов случае, когда безызлучательное затухание экситона  $\Gamma$  превосходит излучательное затухание  $\Gamma_0$ . При этом все еще возможно проявление поляритонного эффекта,  $\Gamma \lesssim \omega_{\text{LT}}$ , т.к. в короткопериодных структурах продольно-поперечное расщепление  $\omega_{\text{LT}}$  (1.19) превосходит  $\Gamma_0$  в меру параметра  $1/q(\omega_0)d > 1$ . Эффектами, связанными с отражениями экситонных поляритонов от границ сверхрешётки, можно пренебречь,  $r_\infty \ll 1$ . Поэтому спектр рассеянного света (1.20) сводится к компактному выражению

$$R(\omega_i, \omega_s) = \frac{T}{2\rho s} \left| t_i t_s \Delta(Q_i + Q_s - \Omega/s) \frac{1}{\xi} p(\omega_i, \omega_s) \right|^2. \quad (1.25)$$

Здесь  $\Omega = |\omega_i - \omega_s|$  — частота фононов, и учитывается лишь резонансный процесс рассеяния назад. Величина

$$p(\omega_i, \omega_s) = \frac{4\pi\xi\Gamma_0\Xi(\Omega/s)}{\varepsilon_b^2(\omega_0 - \omega_i - i\Gamma)(\omega_0 - \omega_s - i\Gamma)}, \quad (1.26)$$

— коэффициент фотоупругого отклика, связывающий экситонную поляризацию в квантовой яме на частоте  $\omega_s$  с полным электрическим полем на частоте  $\omega_i$  и тензором деформации  $u$ . В общем случае фотоупругий коэффициент является тензором четвертого ранга, определяемым выражением

$$4\pi P_\alpha(\omega_s) = -\varepsilon_b^2 \int \frac{d\omega_i}{2\pi} p_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega_i, \omega_s) E_\beta(\omega_i) u_{\gamma\delta}(\omega_s - \omega_i), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = x, y, z. \quad (1.27)$$

Экситонный вклад в фотоупругий отклик (1.26) имеет резонансы при совпадении частот падающей или рассеянной волн с частотой экситона [56]. Отклик объемного полупроводника на статическую деформацию ( $\omega_i = \omega_s$ ) характеризуется фотоупругим тензором [52]

$$p_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega) = -\frac{1}{\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)\varepsilon_{\gamma\delta}(\omega)} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)}{\partial u_{\gamma\delta}}. \quad (1.28)$$

В рассматриваемой геометрии свет распространяется вдоль оси  $z$ , а акустический фонон поляризован вдоль  $x$ , что соответствует компоненте  $p_{xxzz} \equiv p_{13} \equiv p$  фотоупругого тензора (в объёме  $p_{13} \equiv p_{12}$ ). Одной из целей настоящей работы являлось

установление спектральной и температурной зависимости фотоупругого отклика из сопоставления экспериментальных спектров мандельштам-бриллюэновского рассеяния с выражениями (1.25)–(1.26).

## 1.3 Анализ спектров рассеяния

В этом разделе развита общая теория мандельштам-бриллюэновского рассеяния применяется к короткопериодной сверхрешётке с периодом  $d = 24.6$  нм и  $N = 40$  квантовыми ямами [42,A1,A2]. При расчёте использованы параметры  $s = 5 \times 10^5$  см/сек,  $\varepsilon_b = 11.8$ ,  $\hbar\Gamma = 0.17$  мэВ,  $\hbar\Gamma_0 = 39$  мкэВ,  $\hbar\omega_0 = 1.52565$  эВ, наилучшим образом соответствующие экспериментальным данным при температуре 70 К, представленным в следующем разделе 1.4.

### 1.3.1 Обзор спектров рассеяния

Из общих выражений для интенсивности рассеянного света (1.20)–(1.23) следует, что при заданной частоте падающего света  $\omega_i$  максимум в спектре рассеяния для достаточно длинных структур соответствует частоте  $\omega_s$ , удовлетворяющей закону сохранению квазиимпульса,  $\text{Re } Q_i + \text{Re } Q_s \pm k = 2p\pi/d$ , где  $k$  — волновой вектор фонона, определяемый из закона сохранения энергии  $|\omega_s - \omega_i| = \Omega_k = s|k|$ , и  $p$  — целое число, определяющее ветку дисперсионной кривой сложенных фононов. Графическое решение этих уравнений проиллюстрировано на рис. 1.2(а) для случая  $\Gamma = 0$ . Далее будут рассмотрены три нижние фононные моды, обозначаемые как LA (longitudinal acoustic), FLA1 (folded longitudinal acoustic) и FLA2. Законы сохранения для этих мод принимают вид

$$|\omega_s - \omega_i| = s \times \begin{cases} \text{Re}(Q_s + Q_i), & \text{(LA)}, \\ 2\pi/d - \text{Re}(Q_s + Q_i), & \text{(FLA1)}, \\ 2\pi/d + \text{Re}(Q_s + Q_i), & \text{(FLA2)}. \end{cases} \quad (1.29)$$

Из решения уравнений (1.29) можно определить частоту  $\omega_s$ , и, следовательно, бриллюэновский сдвиг  $|\omega_s - \omega_i|$  для каждой частоты падающего света  $\omega_i$ .

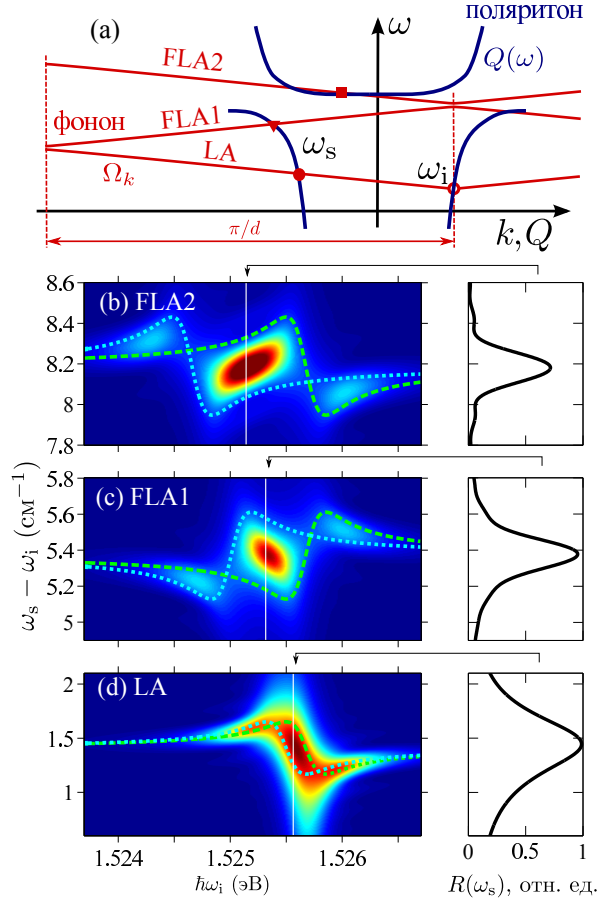


Рис. 1.2: (а) Графическое решение уравнений (1.29), описывающих сохранение энергии и импульса при антистоксовом рассеянии. При заданной частоте падающего света  $\omega_i$ , частота рассеянного света  $\omega_s$  может принимать значения, соответствующие рассеянию на различных сложных акустических фононах LA, FLA1, FLA2, и т.д. Левые части панелей (b)–(d) показывают карты интенсивности антистоксова рассеяния в зависимости от энергий падающего и рассеянного фотонов. Диапазоны энергий на панелях (b), (c), и (d) соответствуют рассеянию на FLA2, FLA1 и LA модах. Штриховыми и пунктирными линиями показаны вклады экситонных резонансов падающей и рассеянной волн, соответственно, в бриллюэновские сдвиги (1.29), служащие границами карт интенсивности. Справа на панелях (b)–(d) показаны спектры рассеяния для конкретных значений энергий падающих фотонов  $\hbar\omega_i$ , отмеченных вертикальными белыми линиями на соответствующих картах. Параметры расчёта указаны в начале раздела 1.3. Интенсивность построена в относительных единицах, одинаковых для всех трёх панелей.

На рис. 1.2 показана карта зависимости интенсивности антистоксова рассеяния от энергий падающего и рассеянного фотонов. Энергия падающего фотона варьируется вблизи частоты экситонного резонанса  $\omega_0$ , а энергия рассеянного фотона меняется вблизи частот, соответствующих рассеянию на LA, FLA1 и FLA2

фононных модах, см. панели (d), (c), и (b) на рис. 1.2, соответственно.

Для того, чтобы приближенно аналитически определить частоту  $\omega_s$ , которая удовлетворяет законам сохранения и тем самым соответствует максимуму в спектрах рассеяния, решаем уравнения (1.29) методом последовательных приближений. На первом этапе пренебрегаем экситонным вкладом в поляритонную дисперсию, полагая  $Q(\omega) = n_b\omega/c$ . Это позволяет определить значение  $\bar{\Omega}$  бриллюэновского сдвига  $|\omega_s - \omega_i|$  вдали от экситонного резонанса,

$$\bar{\Omega} = 2s \times \begin{cases} \omega_0 n_b / c, & \text{(LA)}, \\ \pi/d - \omega_0 n_b / c, & \text{(FLA1)}, \\ \pi/d + \omega_0 n_b / c, & \text{(FLA2)}. \end{cases} \quad (1.30)$$

Выражение (1.30) описывает нерезонансный вклад в бриллюэновский сдвиг. На рис. 1.2(a)–(c) построены два следующих приближения к сдвигу, учитывающие экситонный резонанс. В рамках первого приближения сумма  $Q_i + Q_s$  в (1.29) заменена на  $2Q_i$  и показана штриховой кривой. Второе приближение, показанное пунктирной кривой, соответствует замене  $Q_i + Q_s$  на  $2Q_s = 2Q(\omega_i + \bar{\Omega})$  и может быть получено сдвигом первого на величину  $\bar{\Omega}$  вдоль горизонтальной оси. Эти два приближения служат границами карты рассеяния: наиболее интенсивное рассеяние происходит в области частот, расположенной между пунктирной и штриховой кривыми. Для LA рассеяния фоновый бриллюэновский сдвиг  $\bar{\Omega}$  оказывается меньше, чем ширина экситонного резонанса, и две кривые почти совпадают, так что в зависимости положения максимума рассеяния от частоты падающей волны проявляется лишь один резонанс. Для рассеяния на FLA1 и FLA2 фононах величина  $\bar{\Omega}$  значительна, что позволяет чётко различить два экситонных резонанса, в каналах падающей и рассеянной волн.

Положение максимума в спектрах рассеяния для заданной частоты падающего света  $\omega_i$  близко к полусумме штриховой и пунктирной кривых. Оно может быть приближенно получено подстановкой  $Q_s = Q(\omega_i \pm \bar{\Omega})$  в выражение (1.29) для бриллюэновского сдвига, где знаки  $+$  и  $-$  соответствуют антистоксовому и стоксовому процессам, соответственно, и волновой вектор поляритонов определяется из вы-



ражения (1.18).

### 1.3.2 Роль нерадиационного затухания и числа квантовых ям

Этот раздел посвящен исследованию зависимости резонансного рассеяния от величины безызлучательного затухания экситона  $\Gamma$  и от числа квантовых ям в структуре  $N$ . Безызлучательное затухание является ключевым механизмом, ограничивающим образование поляритонов и определяющим амплитуду и ширину резонансных особенностей в вещественной и мнимой частях поляритонной дисперсии. Как будет показано далее, экспериментальные данные в области температур 30 К–100 К соответствуют крайне низким значениям затухания,  $\hbar\Gamma = 0.07$  мэВ–0.3 мэВ.

Для каждого значения энергии падающих фотонов  $\hbar\omega_i$  интенсивность рассеяния как функция энергии рассеянных фотонов  $\hbar\omega_s$  имеет один пик, см. правые панели на рис. 1.2(b)–(d). Пик характеризуется тремя параметрами: положением (т.е. бриллюэновским сдвигом), шириной на полувысоте, и пиковой интенсивностью. Далее, вместо двумерных карт рассеяния будут анализироваться спектры этих трёх величин. На рис. 1.3 показаны зависимости бриллюэновского сдвига (a,b), ширины пика рассеяния (c,d) и пиковой интенсивности (e,f) от частоты падающего света  $\omega_i$  для FLA1 (a,c,e) и FLA2 (b,d,f) антистоксова рассеяния при четырёх значениях  $\Gamma$ . Как и ожидалось, уменьшение величины затухания приводит к более структурированным спектрам: осцилляции бриллюэновского сдвига становятся более резкими, а пики в спектрах интенсивности — более глубокими. Для наименьшего расчётного значения  $\hbar\Gamma = 0.05$  мэВ  $\sim \hbar\Gamma_0$  в центральном максимуме появляется дополнительный провал. С другой стороны, уже при относительно небольшом значении  $\hbar\Gamma = 0.3$  мэВ, соответствующим 100 К, все спектральные особенности оказываются размытыми. Это демонстрирует важность качества образцов и низких температур для наблюдения поляритонных эффектов в резонансном мандельштам-бриллюэновском рассеянии.

На рис. 1.4 показаны спектры пиковой интенсивности для FLA2 антистоксова

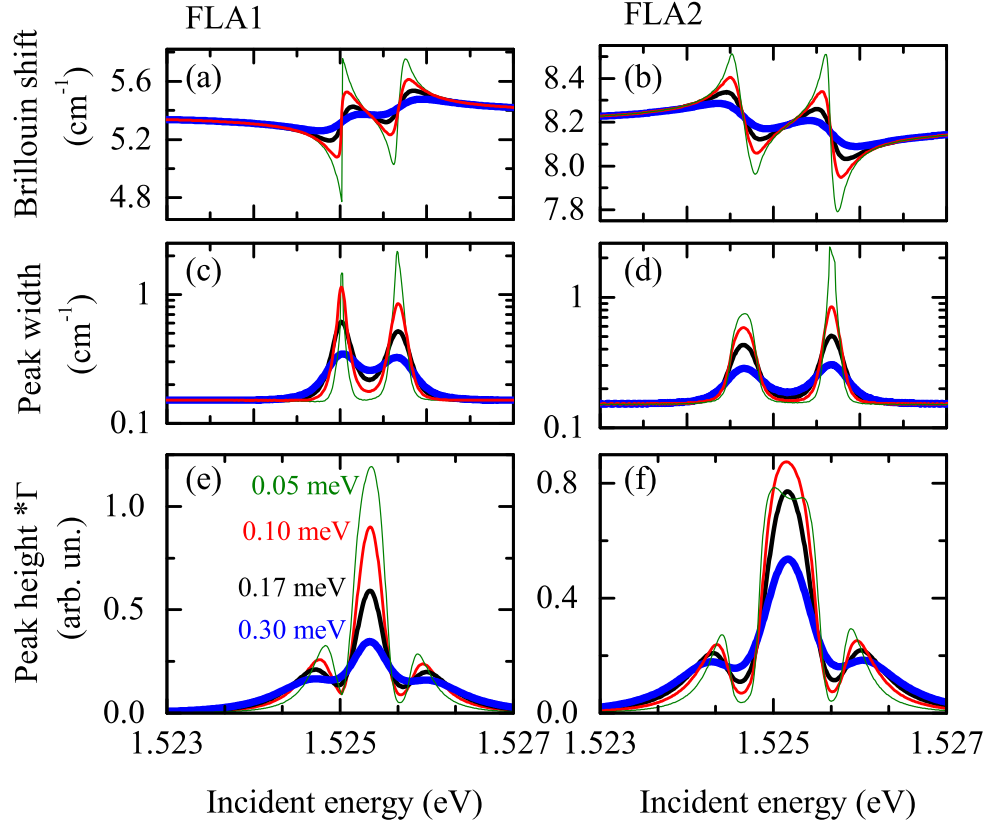


Рис. 1.3: Зависимость бриллюэновского сдвига (a,b), ширины (c,d) и высоты пика рассеяния (e,f) от энергии падающих фотонов для антистоксова рассеяния на FLA1 (a,c,e) и FLA2 (b,d,f) фоновных модах. Кривые построены для различных значений безызлучательного затухания экситонов  $\Gamma$ , отмеченных на графике. Толщина линии растет с величиной  $\Gamma$ . Остальные параметры расчёта указаны в начале раздела 1.3. Для лучшего представления спектры пиковой интенсивности умножены на соответствующие значения  $\Gamma$ , масштаб на панелях (e) и (f) одинаков.

рассеяния при  $\hbar\Gamma = 0.17$  мэВ в зависимости от числа ям в структуре. На основной части рис. 1.4 приведены спектры интенсивности, разделенные на  $N$ , а вставкой показана зависимость максимума в спектрах от  $N$ . Интенсивность возрастает с  $N$  монотонно. Для малых значений  $N$ , рост квадратичен по  $N$ . Это объясняется тем, что при толщине образца меньшей длины световой волны волны, отражённые от различных ям, оказываются в фазе и  $R \propto |\Delta(0)|^2 \propto N^2$ , см. уравнения (1.20),(1.22). При больших значениях  $N$  интенсивность насыщается, т.к. толщина образца превосходит длину затухания экситонных поляритонов, связанную с поглощением экситонов и с образованием поляритонной стоп-зоны.

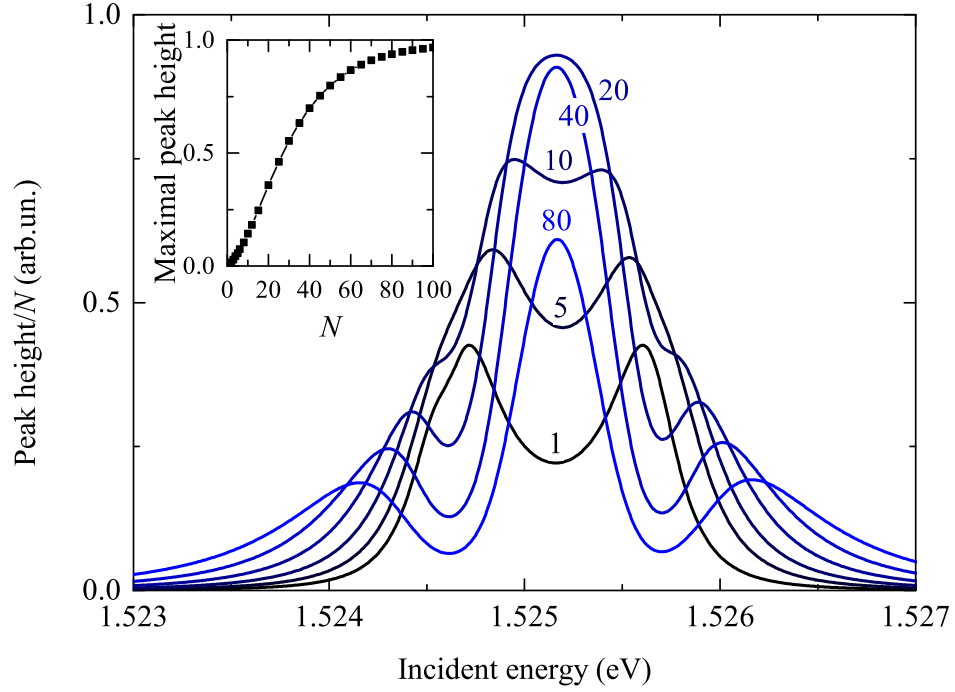


Рис. 1.4: Расчёт зависимости пиковой интенсивности рассеяния от энергии падающих фотонов для антистоксова FLA2 рассеяния. Кривые рассчитаны для различных чисел  $N$  квантовых ям в структуре, цвет кривой непрерывно меняется от черной к голубой с ростом  $N$ . Остальные расчётные параметры указаны в начале раздела 1.3. Для лучшего представления спектры разделены на соответствующие числа ям  $N$ . На вставке показана зависимость спектрального максимума от  $N$ .

Для  $N = 1$  в спектре интенсивности присутствуют два максимума, соответствующие совпадению энергий падающего или рассеянного фотона с энергией экситона в квантовой яме. С ростом числа ям  $N$ , с внешних сторон пиков появляются провалы (см. кривую для  $N = 10$ ), которые становятся все более и более выраженными. Внутренние края пиков сливаются, что приводит к образованию широкой спектральной особенности в центре (см. кривую для  $N = 20$ ). При бóльших значениях  $N$ , спектр принимает характерную трёхпиковую структуру. Ярким следствием этой эволюции спектров является образование провалов в рассеянии на частотах экситонных резонансов  $\omega_0$  и  $\omega_0 - \bar{\Omega}$ , соответствующих образованию экситон-поляритонных стоп-зон. Таким образом, трёхпиковый спектр является характерной особенностью экситон-поляритонного эффекта в сверхрешётке, в то время как двухпиковый спектр соответствует экситонному резонансу

в одиночной яме.

Возвращаясь к рис. 1.3, соответствующему поляритонному режиму, становится ясно, каким образом безызлучательное затухание подавляет поляритонные особенности: провал становится менее выраженным, а резонансы в спектрах бриллюэновского сдвига и ширины пика размываются. Для наименьшего расчётного значения затухания  $\hbar\Gamma = 0.05$  мэВ, в кривой интенсивности для FLA2 появляется дополнительный провал. Это связано с тем, что расстояние между резонансными особенностями для падающего и рассеянного поляритонов начинает значительно превосходить  $\Gamma$  и особенности спектрально разделяются. Искажение формы пиков ширины на рис. 1.3(c) и (d) для малых значений  $\Gamma$ , связано с особенностями выполнявшегося автоматизированного численного анализа карты рассеяния. При таких затуханиях форма пика рассеяния существенно отличается от лоренцевой и определение ширины становится неоднозначным.

Другим интересным предсказанием модели является асимметрия между максимумами в спектрах ширины, соответствующими резонансам в каналах падающей и рассеянной волн, см. левые и правые пики на рис. 1.3(c) и (d). В то время как ширина пика, соответствующего падающей волне, всё время одна и та же, особенность, соответствующая рассеянной волне, становится больше или меньше в зависимости от фоновой моды [см. рис. 1.3(c) и (d) для FLA1 и FLA2 мод], и в зависимости от типа рассеяния, стоксова или антистоксова [ср. пурпурные линии/красные кружки и синие линии/чёрные треугольники на рис. 1.5(e)]. Асимметрия возрастает при малых значениях  $\Gamma$ . Этот эффект кажется контринтуитивным, поскольку падающие и рассеянные волны входят в законы сохранения (1.29) симметричным образом. Асимметрия связана с тем, что эффективность процесса рассеяния определяется совместной плотностью состояний соответствующей фоновой моды и поляритонов [которая меняется при инвертировании относительного наклона фоновой ветви при переходе от FLA1 к FLA2, см рис. 1.2(a), или от антистоксова к стоксовому рассеянию], но не зависит от плотности состояний па-

дающей волны. В частности, в достаточно длинных структурах спектр рассеяния определяется структурным фактором  $\Delta(Q_i + Q_s + k)$  в (1.22), (1.25). Анализ этого множителя приводит к следующему приближенному аналитическому выражению для ширины пика рассеяния в зависимости от энергии падающих фотонов:

$$W(\omega_i) = \frac{\sqrt{(\gamma_1/dN)^2 + [\gamma_2 \operatorname{Im}(Q_i + Q_s)]^2}}{1/s \mp \eta \operatorname{Re}(dQ_s/d\omega_s)}. \quad (1.31)$$

Здесь частота  $\omega_s$  должна быть определена из законов сохранения и может быть приближенно оценена как  $\omega_s = \omega_i \pm \bar{\Omega}$ , верхний (нижний) знак соответствуют антистоксовому (стоксовому) рассеянию, параметр  $\eta$  определяет наклон фононной ветви и равняется  $+1$  для LA и FLA2 рассеяния и  $-1$  для FLA1 рассеяния. Безразмерные параметры  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  определяются из подгонки полуширины на полувысоте величины  $|\Delta(K)|^2$  как функции  $\operatorname{Re} K$  зависимостью  $\sqrt{(\gamma_1/dN)^2 + (\gamma_2 \operatorname{Im} K)^2}$ . Лучшее согласие с численным расчётом достигается при  $\gamma_1 \approx 6$  и  $\gamma_2 \approx 2$ . В числитель (1.31) входят два вклада в ширину пика рассеяния, связанные с нарушением закона сохранения импульса из-за конечной толщины структуры ( $\propto \gamma_1$ ) и с экситонным поглощением ( $\propto \gamma_2$ ). Асимметрия между резонансами падающей и рассеянной волн связана со знаменателем формулы (1.31), который зависит от относительного наклона дисперсионных кривых фононов и поляритонов.

## 1.4 Сопоставление с экспериментом

### 1.4.1 Спектры при 70 К

Начнём сравнение теории с экспериментом с анализа спектров бриллюэновского сдвига, ширины пика и пиковой интенсивности, полученных при температуре 70 К. На рис. 1.5 представлено сопоставление экспериментальных зависимостей этих трёх параметров от энергии падающего фотона  $\hbar\omega_i$  (точки) с теоретической подгонкой (кривые). Наилучшее согласие достигнуто при наборе параметров, указанных в начале раздела 1.3. При подгонке пренебрегалось зависимостью форм-фактора рассеяния  $Y_k$  от волнового вектора  $k$  внутри заданной ветки фо-

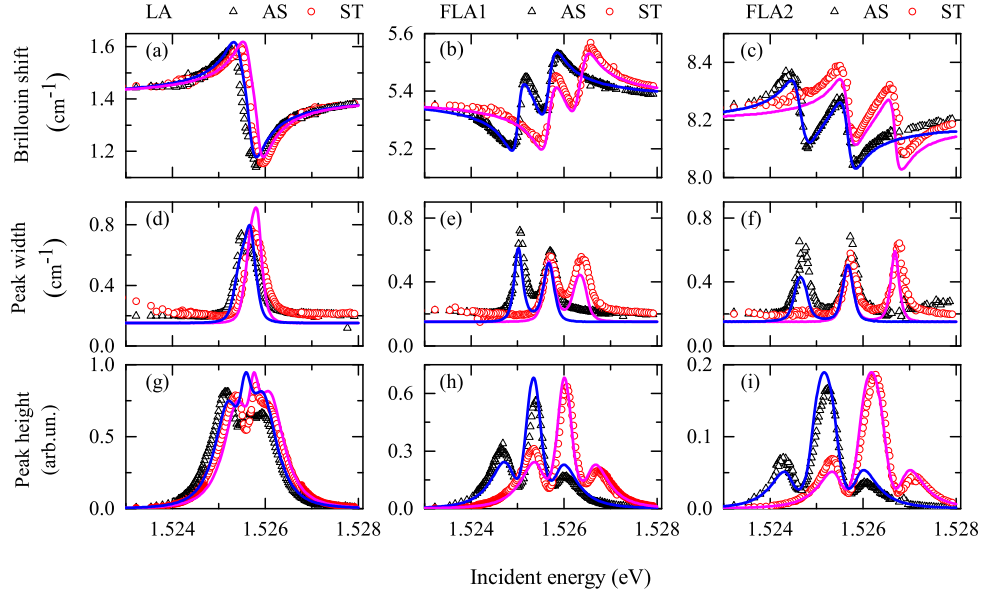


Рис. 1.5: Зависимость положения пика рассеяния (a)–(c), ширины пика (d)–(f) и пиковой интенсивности (g)–(i) от энергии падающих фотонов. Рассеяние на модах LA, FLA1, и FLA2 показано на панелях (a,d,g), (b,e,h), и (c,f,i), соответственно. Точками отмечены экспериментальные данные, а линиями — теоретическая подгонка с одним набором параметров, указанным в начале раздела 1.3. Пурпурные линии/красные круги и синие линии/красные треугольники, соответствуют стоксовому и антистоксовому рассеянию. Вертикальный масштаб на панелях (g)–(i) одинаков.

нонной дисперсии. Для описания экспериментальных зависимостей соотношение множителей  $Y_k$  между различными фоновыми ветвями было выбрано равным  $Y_{LA} : Y_{FLA1} : Y_{FLA2} = 1 : 0.8 : 0.3$ . Это хорошо согласуется с приближением прямоугольной квантовой ямы с бесконечно высокими барьерами и шириной 17 нм, которое даёт соотношение  $1 : 0.7 : 0.4$ .

Эксперимент выполнялся Бернаром Жюсраном в Институте Нанонаук Парижа, образец изготовлен Аристидом Лемэтром в Лаборатории фотоники наноструктур (Маркуси, Франция). Далее кратко приведены детали экспериментальной методики. Представленные данные частично отличаются от опубликованных ранее в работе [42] благодаря улучшенной стабилизации температуры при 70 К и повышенному разрешению спектрометра. Рамановские спектры были получены с помощью двойного спектрометра с высоким разрешением Jobin Yvon U1000, оснащённого низкошумным многоканальным ПЗС детектором. В качестве источни-

ка излучения использовался перестраиваемый титан-сапфировый лазер Coherent MBR 110-PS. Ширина лазерной линии на полувывоте равнялась  $0.11 \text{ см}^{-1}$ , что определяло разрешение системы. Образец был установлен на холодном пальце гелиевого криостата с температурной стабильностью около  $10^{-2} \text{ К}$  на протяжении времени эксперимента. Эта стабильность оказалась ключевым условием, необходимым для того, чтобы избежать флуктуаций энергии экситонного резонанса в течение измерения спектра. Измерения производились при минимально возможной мощности падающего излучения в  $3 \text{ мкВт}$  и фокусировке с помощью линзы с фокусным расстоянием  $14 \text{ см}$ .

На рис. 1.5(a)–(c) показана зависимость от частоты падающего света бриллюэновского сдвига, определяемого из положения максимума в спектре рассеянного света. В согласии с вышеизложенной моделью, в спектрах сдвига присутствуют два резонанса, соответствующие падающим и рассеянным поляритонам, расщепленные на значение фонового бриллюэновского сдвига  $\bar{\Omega}$  [см. уравнение (1.30)]. Для LA фононов эти резонансы сливаются, а для FLA1 и FLA2 они хорошо разрешены. Видно хорошее согласие между теорией и экспериментом.

На рис. 1.5(d)–(f) приведены зависимости ширины пика рассеяния от частоты падающего света. Два пика в спектрах соответствуют резонансам в спектрах бриллюэновского сдвига. Пиковые значения ширины линии связаны с безызлучательным затуханием экситонов и могут быть приближённо оценены как  $4s \text{ Im } Q(\omega_0) \approx 0.7 \text{ см}^{-1}$  [42, 57]. Экспериментальная ширина пиков систематически выше расчётной, что связано с конечным разрешением измерительной установки. Отметим, что при больших отстройках от резонанса ни экспериментальные, ни теоретические ширины пиков не стремятся к нулю, а выходят на плато. Это плато является проявлением конечной толщины сверхрешётки. Соответствующее фоновое значение ширины приближённо даётся выражением  $\gamma_1 s \delta Q \approx 0.16 \text{ см}^{-1}$ , где  $\delta Q \sim 1/(Nd)$  — неопределённость волнового вектора, связанная с конечной толщиной. Объяснение этого плато является преимуществом данной микроскопической модели

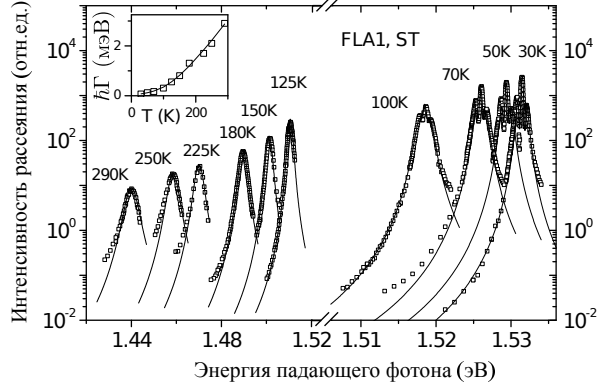


Рис. 1.6: Температурная зависимость спектров пиковой интенсивности стоксова FLA1 рассеяния. Квадраты – эксперимент, сплошные линии – теоретическая подгонка. На вставке точками указаны значения нерадиационного затухания экситона  $\hbar\Gamma$ , использованные при подгонке. Сплошная линия – подгонка температурной зависимости затухания, описанная в тексте.

по сравнению с приближением бесконечной структуры, использованным в работе [42].

На рис. 1.5(g)–(i) представлена зависимость пиковой интенсивности от частоты возбуждения. Спектры интенсивности антикоррелируют со спектрами ширины пика, ср. панели (g)–(i) и (d)–(f). Это связано с тем, что пиковая интенсивность максимальна при минимальном поляритонном поглощении и затухании, что соответствует минимумам в спектрах ширины. Таким образом, в спектрах интенсивности присутствуют три пика, расположенных вокруг резонансов падающей и рассеянной волн. Максимумы слабо разрешимы для LA моды и хорошо разрешимы для мод FLA1 и FLA2. Трёхпиковая структура спектров интенсивности находится в полном согласии с предсказаниями теоретической модели, описанной в разделе 1.3.2, и отражает формирование экситонных поляритонов.

#### 1.4.2 Температурная зависимость спектров рассеяния и фотоупругого отклика

На рис. 1.6 приведены зависимости спектров интенсивности рассеянного света во всём диапазоне исследованных температур от 30 К до 290 К. Спектры соответствуют антистоксову рассеянию на FLA1 фононах в области резонанса квазидву-



мерного экситона с тяжёлой дыркой. Интенсивности, измеренные при различных температурах, были нормированы относительно друг друга, так что они все определены с точностью до одного общего множителя. Сплошными кривыми показаны результаты теоретической подгонки по формуле (1.25). Подгонка даёт полное количественное описание измеренных спектров. При подгонке все параметры считались независимыми от температуры и совпадающими с использованными в предыдущем разделе, за исключением энергии экситонного резонанса  $\hbar\omega_0$  и безызлучательного затухания  $\hbar\Gamma$ . Энергия резонанса уменьшается с температурой, что отражает уменьшение ширины запрещенной зоны GaAs. Безызлучательное затухание является ключевым параметром задачи. Оно монотонно возрастает с температурой, как показано на вставке в рис. 1.6. В согласии с результатами на рис. 1.3, при температурах  $T < 100$  К, когда нерадиационное затухание мало, спектры интенсивности принимают трёхпиковую форму, что отражает формирование экситонных поляритонов. При более высоких температурах провалы в спектрах интенсивности пропадают, и в спектрах остается один максимум. Зависимость  $\hbar\Gamma(T)$  может быть хорошо описана стандартным выражением, включающим линейный по температуре вклад, связанный с термическим числом акустических фононов и второй вклад, пропорциональный заселенности LO фононов с частотой  $\Omega_{LO}$ ,  $\hbar\Gamma(T) = 2.4 \times 10^{-3}$  мэВ/К  $\times T + n_{LO} \times 7.0$  мэВ, где  $n_{LO} = (e^{\hbar\Omega_{LO}/T} - 1)^{-1}$ . Оба подогнанных коэффициента находятся в прекрасном согласии с литературными данными [58, 59]. При 30 К величина нерадиационного затухания падает до 70 мкэВ, что примерно равняется  $2\Gamma_0$  и меньше, чем  $\hbar\omega_{LT} \sim 110$  мкэВ. Для сравнения, для брэгговской структуры с GaAs/AlGaAs квантовыми ямами в работе [37] было получено безызлучательное затухание  $\hbar\Gamma \sim 1$  мэВ, в работе [60] с InGaAs/GaAs ямами  $\hbar\Gamma \sim 0.3$  мэВ. В работе [61] при 4 К из анализа спектров отражения были получены значения нерадиационного затухания  $\hbar\Gamma \sim 40$  мкэВ для InGaAs/GaAs ям.

Свидетельством высокого качества исследованной в настоящей работе струк-

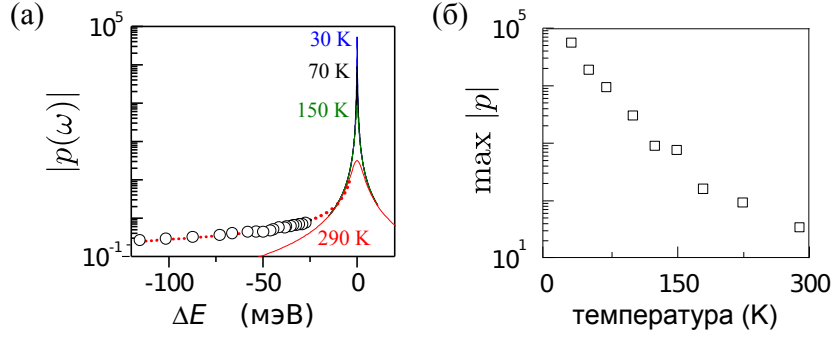


Рис. 1.7: (а) Температурная зависимость фотоупругого коэффициента  $p(\omega, \omega) \equiv p(\omega)$ . Сплошные линии — расчёт по формуле (1.26), кружки — литературные данные [52] для объемного GaAs при комнатной температуре, пунктирная кривая — экстраполяция литературных данных согласно работе [62]. Соответствующие значения температур указаны рядом с каждой кривой. По оси абсцисс отложена разность энергий фотона и экситонного резонанса (для сплошных кривых) и разность энергий фотона и запрещенной зоны GaAs (для пунктирной кривой и кружков). На панели (б) показана температурная зависимость спектрального максимума фотоупругого коэффициента.

туры также является отсутствие температурно-независимого слагаемого в нерadiационном затухании экситона: подгонка даёт  $\Gamma(0) = 0$ . Отметим, что непосредственные измерения при температурах ниже 30 К были затруднены из-за невозможности спектрального разделения спектров рассеяния и спектров экситонной люминесценции.

Высокая степень согласия между экспериментальными и теоретическими спектрами интенсивности во всём диапазоне температур даёт возможность определить величину резонансного фотоупругого отклика согласно формуле (1.26). При этом использовалось значение объемного деформационного потенциала  $\Xi = -9$  eV, соответствующее зоне проводимости объемного GaAs (величина деформационного потенциала для деформации вдоль направления [001] в валентной зоне существенно меньше). Результаты показаны на рис. 1.7(а) сплошными линиями. В качестве дополнительной проверки полученные значения были сопоставлены с нерезонансными значениями для объемного GaAs из работы [52], показанными кружками на рис. 1.7(а). Поскольку вклады резонанса экситона с лёгкой дыркой и состояний непрерывного спектра электрон-дырочных пар малы по сравнению с резонансом

экситона с тяжелой дыркой, полученные данные для резонанса экситона с тяжелой дыркой в квантовых ямах могут сопоставляться с экспериментом для объемного GaAs [52]. Результаты в работе [52] приведены лишь в области прозрачности, вплоть до энергий, отстоящих примерно на 30 мэВ от края запрещенной зоны. С целью экстраполяции объемных значений [52] в область более высоких энергий нами была использована модель фотоупругого отклика из работы [62]. Полученные результаты показаны пунктирной кривой, их следует сопоставлять со сплошной кривой для 290 К. Две кривые расходятся в области ниже экситонного резонанса. Это объясняется тем, что модель (1.26) учитывает лишь один резонанс экситона с тяжелой дыркой и не учитывает другие возможные оптические переходы. В области перекрытия двух моделей (от -20 мэВ до -5 мэВ) резонанс с тяжелой дыркой оказывается уже достаточно сильным и полностью определяет фотоупругий отклик. Поэтому использованная калибровка позволяет удовлетворительно определить абсолютные значения фотоупругого коэффициента в области экситонного резонанса [сплошные линии на рис. 1.7(a)]. Зависимость пиковых значений фотоупругого отклика от температуры показана на рис. 1.7(b). Величина фотоупругого коэффициента изменяется от 33 до 53000 при изменении температуры от 290 К до 30 К. Даже с учетом объемного фактора заполнения GaAs в структуре  $a/d \approx 0.7$  эти значения больше на 2 (290 К) или 5 (30 К) порядков, чем максимальное нерезонансное значение для GaAs (0.14) при комнатной температуре.

## 1.5 Краткие итоги

В главе 1 получены следующие основные результаты:

- Построена микроскопическая теория мандельштам-бриллюэновского рассеяния экситонных поляритонов с структурах с многими квантовыми ямами. Теория применима для брэгговских, короткопериодных, и апериодических структур. Получены аналитические результаты для спектров рассеяния в зависимости от частоты возбуждения и параметров квантовых ям.

- Выполнен детальный анализ рассеяния для короткопериодной сверхрешетки. Показано, что спектры бриллюэновского сдвига слабо зависят от толщины структуры и определяются законом дисперсии поляритонов в бесконечной сверхрешётке. Спектры ширины пика оказываются более чувствительны к числу квантовых ям. Ширина определяется как безызлучательным затуханием экситонов, так и неопределённостью волнового вектора поляритонов в структурах конечной толщины. Расчёт демонстрирует выраженную асимметрию между двумя максимумами в спектрах ширины, соответствующими резонансам падающей и рассеянной волн. Эта асимметрия связана с конечным соотношением скорости звука и групповой скорости поляритонов и зависит от типа рассеяния (стоксова или антистоксова), а также от номера ветви сложенных фононов.
- Спектры пиковой интенсивности качественно зависят от толщины структуры: для малого числа ям они обладают двумя пиками, связанными с резонансами падающих и рассеянных волн в одиночных квантовых ямах, а для большого числа ям спектры принимают трёхпиковую форму, отражающую формирование коллективных экситон-поляритонных мод.
- Теория позволяет количественно описать эксперименты для короткопериодной сверхрешётки и определить скорости излучательного и безызлучательного затухания экситонов, а также спектральную зависимость коэффициента фотоупругого отклика. Продемонстрированы экситон-поляритонный эффект в сверхрешётке и резонансное усиление фотоупругого отклика до  $10^2$  раз при температуре 290 К и до  $10^5$  раз при 30 К по сравнению с литературными данными для объёмного GaAs при 300 К в области прозрачности.

## Глава 2

# Резонансные эффекты в аперiodических фотонных структурах

Настоящая глава построена следующим образом. В разделе 2.1 согласно обзорам [A3,A4,A5] последовательно разобраны основные этапы исследований резонансных оптических свойств (а) идеальных периодических структур, называемых фотонными кристаллами, (б) фотонных квазикристаллов, которые занимают промежуточное место между периодическими и неупорядоченными средами, и (в) неупорядоченных структур. Затем в разделе 2.2 предложен новый класс систем — одномерные резонансные фотонные квазикристаллы, для реализации которых выбраны брэгговские структуры Фибоначчи с квантовыми ямами. Основные теоретические результаты получены в работах [A6,A7], сопоставление с экспериментом опубликовано в [A8,A9]. Следующий раздел 2.3 посвящен поляризационно-зависимой спектроскопии отражения и пропускания света резонансными двумерными фотонными квазикристаллами [A10,A11]. Наконец, в разделе 2.4 изучены резонансы Фано, возникающие в спектрах экстинкции фотонных кристаллов под влиянием беспорядка [A12].

## 2.1 Резонансные фотонные кристаллы, квазикристаллы и разупорядоченные структуры (обзор)

*Дифракция рентгеновских лучей. Фотонные кристаллы.* Основы современного понимания электромагнитных свойств твёрдых тел были заложены еще в начале XX века в пионерских экспериментах Лауэ и Брэггов по дифракции рентгеновских лучей [63, 64]. Затем в работах Эвальда и Дарвина была сформулирована динамическая теория дифракции [65, 66] и показано, что в энергетическом спектре периодической структуры возникают запрещенные зоны (стоп-зоны), в пределах которых распространение рентгеновских лучей невозможно. Эти классические труды определили всё дальнейшее развитие оптики, кристаллографии и физики твёрдого тела, вплоть до начала исследований неупорядоченных систем в 1958 г. [67] и квазикристаллов в 1984 г. [68]. В первых экспериментах запрещенные зоны для рентгеновских лучей явно не изучались, поскольку их типичная ширина для естественных кристаллов мала [69]. Поэтому измерения сводились к установлению связи угловых положений дифракционных максимумов с симметрией кристаллов, для чего было достаточно воспользоваться условиями Вульфа-Брэгга и Лауэ — т.н. кинематической теорией рентгеновской дифракции. Выхода за пределы кинематической теории потребовало объяснение эффекта Бормана (Bormann) — аномального прохождения лучей через толстые поглощающие кристаллы [70]. Оказалось, что поглощение резонансно подавлено на одном из краёв стоп-зоны из-за того, что атомы оказываются в узлах собственных мод. Наконец, в 1980-х годах было введено понятие фотонных кристаллов [71, 72] по аналогии с обычными кристаллами для рентгеновских лучей — структур, в которых диэлектрическая проницаемость периодически изменяется в пространстве с периодом порядка длины световой волны, так что возможна брэгговская дифракция света. В зависимости от числа направлений, в которых периодична диэлектрическая проницаемость, выделяют одномерные (1D), двумерные (2D) и трёхмерные (3D) фотонные кристаллы [73]. Простейшим примером одномерных структур являются мно-

гослойные брэгговские зеркала  $ABAB\dots$ , образованные чередующимися слоями материалов  $A$  и  $B$  и использовавшиеся задолго до формулировки термина “фотонный кристалл”. Особенностью поведения света в фотонных кристаллах является возможность достижения гораздо большей относительной амплитуды модуляции диэлектрической проницаемости (т.н. диэлектрического контраста) по сравнению с естественными кристаллами. Это позволяет управлять плотностью фотонных состояний и силой взаимодействия света с веществом [3]. Фотонная запрещённая зона в двух направлениях может быть реализована уже в волноводах на основе двумерных фотонных кристаллов [73], которые относительно легко создаются методами традиционной литографии [74]. Создание трёхмерных фотонных кристаллов в оптическом и инфракрасном спектральном диапазонах изначально представляло значительную сложность. На этом этапе особую роль сыграли структуры на основе синтетических опалов, представляющие собой самоорганизованную гранцентрированную кубическую решётку шаров  $\text{SiO}_2$  [75, 76]. Также изучались инвертированные опалы, в которых поры между шарами заполнялись другим материалом, а матрица  $\text{SiO}_2$  удалялась, что позволяло увеличить диэлектрический контраст [77]. Послойное применение планарной технологии открыло путь к росту 3D структур типа поленницы [78]. В дальнейшем были развиты подходы 3D лазерной литографии [79, 80]. Это резко расширило возможности создания разнообразных структур с наперёд заданным дизайном. Сейчас фотонные кристаллы не только представляют собой платформу для разнообразных фундаментальных исследований в области оптики конденсированных сред, но и нашли уже массовое коммерческое применение, например, в структурированных оптических волокнах [81].

*Резонансная дифракция. Структуры с квантовыми ямами.* Открытие Мессбауэром ядерного гамма-резонанса привело к становлению новой области исследований, резонансной дифракции  $\gamma$ -лучей, или мессбауэровского излучения, см. [66, 82, 83, 84]. Когда энергия излучения близка к энергии внутриядерного пере-

хода в мессбауэровском изотопе в твёрдом теле (типичные значения порядка 10 кэВ),  $\gamma$ -лучи испытывают резонансное рассеяние на ядрах. Если при этом на резонансной частоте выполняются условия Брэгга, то проявляется коллективный характер взаимодействия ядер кристалла с  $\gamma$ -излучением. В результате энергия и энергетическая ширина детектируемых резонансов оказываются отличными от энергии и ширины мессбауэровского уровня изолированного ядра [85, 86]. Общая динамическая теория резонансной дифракции  $\gamma$ -лучей была построена Афанасьевым и Каганом [87, 88, 89], а также Ханноном и Трамелом [90, 91, 92]. Таким образом, впервые проблема резонансной дифракции на регулярных системах возникла в гамма-спектроскопии трёхмерных кристаллов, являющихся естественной дифракционной решёткой для  $\gamma$ -лучей.

Следующий виток исследований резонансной дифракции начался для искусственных структур в совершенно другой области — физике полупроводников. Молекулярно-пучковая эпитаксия позволила выращивать совершенные периодические структуры с квантовыми ямами [93, 41]. В работе [29] было предложено располагать соседние квантовые ямы на расстоянии, удовлетворяющем брэгговскому условию для прямой и отраженной световых волн на частоте возбуждения экситона в отдельной яме. Вскоре резонансные брэгговские структуры с квантовыми ямами были выращены, а изучение спектров оптического отражения продемонстрировало коллективный характер взаимодействия света с экситонами [94, 95, 96, 97, 98, 32, 99]. Такие структуры являются частным случаем одномерных *резонансных фотонных кристаллов*, т.е. фотонных кристаллов, компоненты которых обладают резонансным оптическим откликом. Достоинством резонансных структур является возможность перестройки оптических спектров за счёт сдвига положения экситонного резонанса или изменения его силы осциллятора при воздействии внешними электрическими [100] или магнитными [101] полями, деформацией [102], а также благодаря экситон-экситонному взаимодействию [103]. Впоследствии были теоретически исследованы [104, 105] резонансные трёхмерные



фотонные кристаллы на основе решёток квантовых точек и показано, что в решётке алмаза возможно возникновение полной запрещенной зоны. Аналогичный расчет для двумерных фотонных кристаллов на основе квадратной и треугольной решёток квантовых точек, помещенных в планарный резонатор, выполнялся в [106]. В работе [107] был экспериментально продемонстрирован режим сильной связи между модами двумерного фотонного кристалла и экситонами в квантовых яме, приводящий к образованию поляритонных мод [108]. Поляритонные эффекты в спектрах отражения и фотолюминесценции многослойной структуры, состоящей из самоорганизованных полупроводниковых квантовых точек, были экспериментально и теоретически изучены в работе [109]. В работе [110] были продемонстрированы экситон-поляритонные стоп-зоны в оптических спектрах резонансных трехмерных фотонных кристаллов на основе матрицы опала.

В 1990-х гг. разнообразие объектов, в которых наблюдается резонансная дифракция электромагнитных волн, расширилось за счёт оптических решёток, образованных атомами, охлажденными в поле стоячих световых волн [111, 112, 113]. Работы по резонансным брэгговским структурам с квантовыми ямами также стимулировали поиск и создание их аналога в плазмонных периодических структурах [114, 115]. Предложены [116, 117] периодические цепочки резонансных полостей или кольцевых оптических резонаторов, связанных между собой волноводной модой, аналогично тому, как экситонные резонансы в отдельных квантовых ямах связаны электромагнитным полем световой волны.

*Квазикристаллы.* Основы кристаллографии казались незыблемыми с 1915 г., после работ Фёдорова [118] и экспериментов Лауэ [63] и Брэггов [64]. В 1984 г. экспериментальное открытие квазикристаллов Шехтманом [68] привело к необходимости радикального пересмотра устоявшихся подходов. В эксперименте исследовалась дифракция электронов в сплавах  $Al_{0.86}Mn_{0.14}$ , полученных специальным методом быстрого охлаждения. Наблюдались ярко выраженные дифракционные максимумы, такие же, как и при дифракции от периодических кристаллов. Враща-

тельная симметрия дифракционной картины соответствовала группе икосаэдра. В частности, картина обладала осями вращения 10-го порядка, что для периодических систем невозможно. Работа была первоначально встречена в научном сообществе неоднозначно [119]: в качестве альтернативного объяснения результатов предлагались низкое качество и многодоменная структура образца. Однако уже в 1984 г. в работе Левина и Стейнхардта [120] наблюдавшаяся дифракционная картина была связана с новым типом твердых тел: квазикристаллами, непериодическими структурами, обладающими дальним порядком, совместимым с брэгговской дифракцией. Таким образом, квазикристаллы занимают промежуточное положение между периодическими и неупорядоченными средами. Справедливость этого объяснения экспериментов Шехтмана была окончательно установлена после просвечивающей электронной микроскопии образцов и экспериментов по рентгеновской дифракции [119].

Фотонные квазикристаллы — это квазикристаллические структуры, в которых пространственная модуляция диэлектрического отклика приводит к брэгговской дифракции света. Впервые такие системы были теоретически рассмотрены в 1987 году в работе [121], посвященной анализу пропускания света структурой Фибоначчи. Цепочка Фибоначчи является простейшим примером одномерного квазикристалла. Исследованная в работе [121] структура представляла собой последовательность слоёв двух типов,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , с различными толщинами и диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_A$  и  $\varepsilon_B$ . Последовательность слоёв удовлетворяла рекуррентному соотношению  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \mathcal{F}_{n-1}$ , аналогичному рекуррентному соотношению для чисел Фибоначчи  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ . Такая структура является полностью регулярной и в ней возможна брэгговская дифракция. Это связано с тем, что цепочка Фибоначчи может быть эквивалентно определена как проекция среза двумерной квадратной решётки на 1D пространство. Оптическая структура Фибоначчи была впервые экспериментально реализована в работе [122], с этого момента началось активное изучение фотонных квазикристаллов.

Обобщением структуры Фибоначчи на двумерный случай является мозаика Пенроуза — наиболее известный 2D квазикристалл. Дифракция света на мозаике Пенроуза изучалась экспериментально и теоретически для диэлектрических структур в работе [123]. В работах [124, 125, 126] рассматривалось взаимодействие света с плазмонными резонансами в металлических пластинках с протравленными квазикристаллическими решётками отверстий. Двумерные фотонные квазикристаллы также использовались в качестве основы микрорезонаторов [127] и лазеров [128]. Качественным отличием двумерных и трёхмерных квазикристаллических структур от периодических является возможность достижения гораздо большей степени вращательной симметрии. Это крайне благоприятно для реализации фотонной запрещенной зоны во всех направлениях даже при низком диэлектрическом контрасте [129, 130].

Обобщением мозаики Пенроуза на 3D структуры служит так называемая икосаэдрическая фаза (именно она была обнаружена экспериментально в работе Шехтмана [68]). Трёхмерные фотонные квазикристаллы такой симметрии были впервые созданы в 2006-м году в университете Карлсруэ [131]. Отметим, что квазикристаллы не исчерпывают всё многообразие детерминированных аперидических структур. Одним из примеров упорядоченных одномерных неквазикристаллических систем являются последовательности Туэ-Морса (Thue-Morse sequence). В работах [132] и [133] изучались излучение света и резонансное усиление рамановского рассеяния для одномерных и двумерных структур на основе последовательности Туэ-Морса. Многослойные фрактальные диэлектрические структуры, построенные по образцу множества Кантора, были предложены в работе [134]. Более подробно исследования фотонных квазикристаллов и детерминированных аперидических структур представлены в обзорах [A4,135, 136]. Необходимо отметить, что предыдущие исследования фокусировались на *нерезонансной* брэгговской дифракции в фотонных квазикристаллах. Резонансные фотонные квазикристаллы на основе последовательности Фибоначчи квантовых ям и мозаики Пенроуза из

плазмонных нанодисков рассмотрены в разделах 2.2 и 2.3, соответственно.

*Разупорядоченные структуры.* Исследования неупорядоченных сред составляют особый раздел физики твердого тела и оптики [137, 138]. Современное понимание во многом сформировано классической работой Андерсона [67], в которой показано, что интерференция процессов рассеяния в неупорядоченной системе может приводить к подавлению диффузии и экспоненциальной локализации собственных состояний. В оптике был предсказан эффект когерентного рассеяния назад [139, 140], обнаруженный экспериментально в 1985 году [141], и связанный с т.н. *слабой локализацией*. Наконец, ещё через 10 лет была впервые продемонстрирована сильная, андерсоновская, локализация света [142]. Основная экспериментальная трудность, преодолённая авторами работы [142], состояла в достижении достаточно сильного беспорядка, для чего были использованы микрочастицы GaAs с высоким показателем преломления. К этому моменту уже широким фронтом развернулись исследования фотонных кристаллов. В разупорядоченных фотонных кристаллах брэгговская дифракция и локализация за счёт беспорядка сосуществуют и конкурируют. В работах [143, 144] было показано, что длина экстинкции света  $\ell$ , определяющая убывание коэффициента пропускания с толщиной образца, немонотонно зависит от силы беспорядка: при слабом беспорядке она увеличивается из-за разрушения брэгговской дифракции, а при сильном уменьшается за счёт локализации. Для фотонных кристаллов на основе опалов беспорядок играет существенную роль. В зависимости от конкретного образца, он может быть вызван флуктуациями размеров и положений шаров SiO<sub>2</sub> [145, 146, 147, 148, 149, 150], вакансиями и дефектами в решётке [146, 151], а также дефектами упаковки слоёв [152]. Кроме того, отдельные сферы SiO<sub>2</sub> в синтетических опалах сами могут иметь неоднородную пористую структуру [153]. Традиционно роль беспорядка в опалах сводилась к лишь деградации и размытию брэгговских стоп-зон. Качественно другое поведение было выявлено в эксперименте [154], в котором исследовалось пропускание опала с порами между шарами SiO<sub>2</sub>, заполненными раз-

личными жидкостями. Подбором жидкостей контролировался диэлектрический контраст между шарами и матрицей. Эксперимент продемонстрировал нетривиальную эволюцию формы брэгговской линии в спектре пропускания. Оказалось, что линия является асимметричной и может непрерывно трансформироваться при изменении заполнителя от провала (соответствующего стоп-зоне) до максимума (соответствующего зоне пропускания). Для идеальной периодической системы такой эффект невозможен. В работе [154] наблюдавшееся явление было связано с разупорядоченностью структуры опала. Форма брэгговской линии была феноменологически описана кривой Фано с параметром асимметрии спектра, зависящим от показателя преломления заполнителя. Многочисленные существовавшие теоретические модели разупорядоченных фотонных кристаллов подобный эффект не предсказывали [155, 143, 156, 145, 157, 158, 159]. В разделе 2.4 диссертационной работы построена последовательная теория, объясняющая возникновение асимметричных линий в спектрах экстинкции одномерных фотонных кристаллов  $ABABAB\dots$  со специальным типом беспорядка — флуктуирующей диэлектрической проницаемостью слоев  $B$ .

## 2.2 Брэгговские структуры Фибоначчи с квантовыми ямами

Этот раздел начнем с определения квазикристаллов и обсуждения структурных факторов. Затем в разделе 2.2.2 будет рассмотрено распространение света в аperiodических структурах и представлено двухволновое приближение. Это приближение позволяет интерпретировать спектры аperiodических структур и выделять специфические особенности, связанные с неperiodичностью. В качестве иллюстрации будут сначала рассмотрены оптические сверхрешётки Фибоначчи, построенные из чередующихся слоёв диэлектрика  $A$  и  $B$ , а затем представлен новый объект — брэгговские структуры Фибоначчи с квантовыми ямами. Области спектров, в которых двухволновое приближение неприменимо, демонстрируют свой-

ства, невозможные для идеальных периодических кристаллов: (а) локализацию, характерную для неупорядоченных систем, (б) самоподобие и масштабируемость, отсутствующие как в обычных кристаллах, так в неупорядоченных материалах. Эти эффекты будут рассмотрены в разделе 2.2.4.

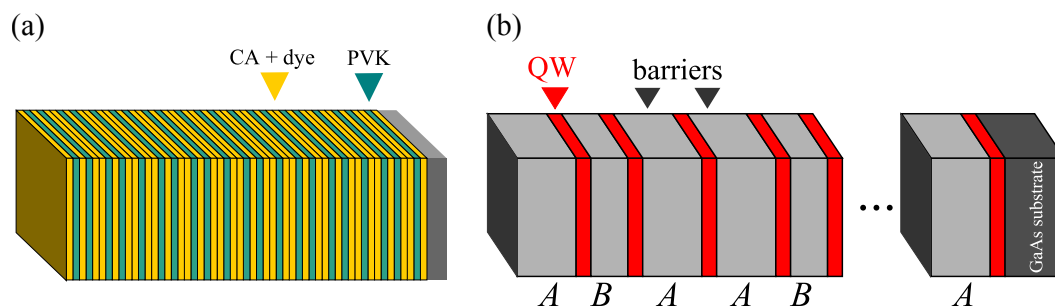


Рис. 2.1: (а) Структура Фибоначчи из работы [160], образованная полимерными слоями ацетата целлюлозы (СА) и поливинилкарбазола (PVK) на стеклянной подложке. (б) Схематическая иллюстрация резонансной брэгговской структуры Фибоначчи из [A8], состоящей из GaAs квантовых ям (quantum wells, QWs), которые расположены между длинными (A) и короткими (B) барьерными слоями AlGaAs, выращенной на GaAs подложке.

### 2.2.1 Определение и структурный фактор

Квазикристалл может быть определён как проекция части точек периодической решётки в  $m$ -мерном гиперпространстве на  $n$ -мерное пространство ( $n = 1, 2, 3; m > n$ ) [161]. В первых двух подразделах представим в дополнение к этому методу среза и проектирования (cut-and-project method) два других метода определения и классификации одномерных квазикристаллов. Затем будет кратко рассмотрен структурный фактор квазикристаллов.

#### Несоразмерные цепочки

Квазикристаллические системы могут быть определены тремя эквивалентными способами: (а) на основе несоразмерных цепочек, (б) на основе подстановочных соотношений, (в) на основе метода среза и проектирования. Несоразмерные цепочки и связанные с ними структуры изучались с 1960-х гг. [162, 163], т.е. ещё

до появления понятия “квазикристалл” в работе [120]. Для одномерных квазикристаллов координаты узлов цепочки могут быть записаны в виде

$$z_j = z_0 + j\bar{d} + \delta z(j), \quad (2.1)$$

где  $\bar{d}$  — средний период структуры,  $z_0$  — произвольный сдвиг структуры как целое, а модуляция  $\delta z(j)$  является периодической функцией

$$\delta z(j) = \Delta z \left\{ \frac{j}{t} + \varphi \right\}, \quad (2.2)$$

$\{x\}$  обозначает дробную часть  $x$ ;  $\Delta z$ ,  $t$  и  $\varphi$  — параметры структуры, причём  $t$  иррационально, а  $\varphi$  не является целым. Без учёта слагаемого  $\delta z(j)$  формула (2.1) описывает простую периодическую решётку с периодом  $\bar{d}$ . В случае рационального  $t$  структура по-прежнему является периодической, но обладает сложной элементарной ячейкой, а для иррациональных значений  $t$  (2.1) описывает детерминированную аperiodическую структуру, также известную как “модулированный кристалл” [161]. Параметр  $\Delta z$  определяет силу модуляции, а величина  $\varphi$  задаёт фазу функции  $\delta z(j)$ . Для  $z_j$ , определённых согласно (2.1) и (2.2), расстояния между соседними узлами  $z_{j+1} - z_j$  принимают одно из двух возможных значений,

$$a = \bar{d} + \Delta z \left( \frac{1}{t} - 1 \right) \text{ и } b = \bar{d} + \frac{\Delta z}{t}. \quad (2.3)$$

Таким образом,  $a$  и  $b$  удовлетворяют условиям

$$\Delta z = b - a, \quad \bar{d} = b + \frac{a - b}{t}. \quad (2.4)$$

Чтобы расстояния  $a$  и  $b$  были неотрицательными, значение  $\Delta z$  должно лежать в интервале  $b > \Delta z > -a$ . Исключая  $\Delta z$  из (2.3), можно установить соотношение  $\bar{d} = [(t - 1)b + a]/t$ . Отношение  $N_B/N_A$  числа промежутков длиной  $a$  и  $b$  в бесконечной решётке связано с  $t$  как  $N_B/N_A = t - 1$ .

Если значения  $t$  и  $\varphi$  удовлетворяют определённым условиям [164, 165], набор точек (2.1) может быть также определён из *подстановочных соотношений*,

применяемых к элементам  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , и имеющих следующую структуру

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\rightarrow \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \dots \mathcal{M}_{\alpha+\beta}, \\ \mathcal{B} &\rightarrow \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2 \dots \mathcal{N}_{\gamma+\delta}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Каждый из символов  $\mathcal{M}_k$  и  $\mathcal{N}_k$  в правой части (2.5) принимает значения  $\mathcal{A}$  или  $\mathcal{B}$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  обозначают число букв  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  в  $\sigma(\mathcal{A})$ , а  $\gamma$  и  $\delta$  обозначают число букв  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  в  $\sigma(\mathcal{B})$  [166]. Соответствие между двумя определениям устанавливается соотношением  $t = 1 + (\lambda_1 - \alpha)/\gamma$  между значением  $t$  и индексами  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , где  $\lambda_1 = (v + \sqrt{v^2 + 4w})/2$ ,  $v = \alpha + \delta$  и  $w = \beta\gamma - \alpha\delta$ . Для того, чтобы структура была квазикристаллической,  $w$  должно по модулю равняться единице [167].

### Структуры Фибоначчи

Одномерные структуры Фибоначчи, являющиеся одними из наиболее изученных квазикристаллов, определяются подстановочным соотношением [161]

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}, \quad \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}.\tag{2.6}$$

Их можно эквивалентно получить как бесконечную последовательность  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}_m$ , где  $\mathcal{F}_m$  — конечная структура Фибоначчи  $m$ -го порядка ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), удовлетворяющая рекуррентным соотношениям

$$\mathcal{F}_m = \mathcal{F}_{m-1} \mathcal{F}_{m-2}\tag{2.7}$$

с начальными условиями  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{B}$  и  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{A}$ . Например, для последовательности 7-го порядка имеем  $\mathcal{F}_7 = (\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A})(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{B})$ , где скобки разделяют  $\mathcal{F}_6$  и  $\mathcal{F}_5$ . Цепочка (2.7) названа по аналогии с последовательностью  $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$  чисел Фибоначчи  $F_m$ , определяемых схожим образом,  $F_1 = F_2 = 1, F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$ .

С точки зрения определений в терминах несоразмерных цепочек (2.1) и (2.2), и подстановочных соотношений (2.5) параметры структуры Фибоначчи равняются

$$\begin{aligned}t = \tau &\equiv (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1.618, \quad \varphi = 0, \quad N_A/N_B = \tau, \\ \alpha = \beta = \gamma &= 1, \quad \delta = 0; \quad w = v = 1, \quad \lambda_1 = \tau.\end{aligned}\tag{2.8}$$



Чтобы первый узел цепочки был расположен в точке  $z = 0$ , нужно положить  $z_0 = -b$ . Здесь соотношение  $a/b$  является произвольным. Если дробь  $a/b$  равняется золотому сечению  $\tau$ , мы получаем *каноническую* цепочку Фибоначчи [А6]. Для неканонических цепочек это соотношение отличается как от 1, так и от  $\tau$  [А9].

Структура, описываемая уравнениями (2.1),(2.2), может быть эквивалентно определена методом *среза и проектирования* [168, 169]. В этом подходе цепочка Фибоначчи получается из проекции полосы, вырезанной из двумерной периодической решётки и проведённой под углом  $\arctan \tau$  к оси  $x$ . Детерминированные аперриодические фотонные структуры пока не были обнаружены в природе, но могут быть изготовлены искусственно. Начиная с пионерской работы Хаттори с соавторами [122], в которой впервые сообщалось об эксперименте для фотонного квазикристалла на основе последовательности Фибоначчи, технология значительно усовершенствовалась и были реализованы различные типы структур. Для иллюстрации на рис. 2.1(а) схематически показана структура, образованная двумя полимерными материалами, расположенными в последовательности Фибоначчи [160]. Спектр отражения такой структуры обсуждается в разделе 2.2.3. Другая возможная реализация представлена на рис. 2.1(б). Структура состоит из узких GaAs квантовых ям, разделённых AlGaAs барьерами. Барьеры бывают двух типов: длинный ( $\mathcal{A}$ ) и короткий ( $\mathcal{B}$ ), так что промежутки между соседними ямами расположены в последовательности Фибоначчи. Благодаря резонансу квазидвумерного экситона в квантовых ямах, такая структура является *резонансным фотонным квазикристаллом*. Её оптические свойства обсуждаются в последней части раздела 2.2.3.

## Структурный фактор

Запишем волновые уравнения для вектора электрического поля  $\mathbf{E}$  электромагнитной волны

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \text{grad div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbf{D}(\mathbf{r}) ,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.9)$$

где  $\omega$  — частота света,  $c$  — скорость света в вакууме и  $\mathbf{D}$  — вектор смещения. Материальное соотношение между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  выбирается в виде

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + 4\pi\mathbf{P}_{\text{exc}}(\mathbf{r}). \quad (2.10)$$

Здесь  $\varepsilon(\mathbf{r})$  — локальная нерезонансная (фоновая) диэлектрическая проницаемость и  $\mathbf{P}_{\text{exc}}(\mathbf{r})$  — экситонный вклад в диэлектрический отклик. Для системы, в которой диэлектрический отклик модулирован лишь в одном направлении  $z$  и в случае, когда свет распространяется в этом направлении, уравнения (2.9) сводятся к одному скалярному уравнению

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} = - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 [\varepsilon(z)E(z) + 4\pi P_{\text{exc}}(z)]. \quad (2.11)$$

Далее будут отдельно рассмотрены два класса одномерных 1D фотонных аперидических систем: (I) бинарная аперидическая оптическая сверхрешётка, состоящая из однородных, изотропных и непоглощающих слоёв  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  с толщинами  $a$  и  $b$  и проницаемостями  $\varepsilon_A$  и  $\varepsilon_B$ , соответственно, причём слои расположены вдоль оси  $z$ , и (II) структура с многими квантовыми ямами, состоящая из  $N$  одинаковых ям, расположенных в диэлектрической матрице с проницаемостью  $\varepsilon_b$ , в которой межъямные расстояния принимают одно из двух значений,  $a$  или  $b$ . В первом случае экситонный отклик отсутствует,  $P_{\text{exc}}(z) \equiv 0$  и диэлектрическая проницаемость равняется  $\varepsilon(z) = \varepsilon_A$  в слоях  $\mathcal{A}$  и  $\varepsilon(z) = \varepsilon_B$  в слоях  $\mathcal{B}$ . Во втором случае функция  $\varepsilon(z)$  постоянна и равняется  $\varepsilon_b$ . Для квантовых ям, тонких по сравнению с длиной световой волны, экситонный вклад в поляризацию может быть описан как [32]

$$4\pi P_{\text{exc}}(z) = 2qS \sum_{j=1}^N \delta(z - z_j) E(z), \quad S = \frac{\Gamma_0}{\omega_0 - \omega - i\Gamma}. \quad (2.12)$$

Здесь  $q = \omega\sqrt{\varepsilon_b}/c$ ,  $\omega_0$ ,  $\Gamma_0$  и  $\Gamma$  — резонансная частота и скорости излучательного и безызлучательного затухания экситона в квантовой яме,  $z_j$  — координата центра  $j$ -й ямы.

Брэгговская дифракция в квазикристаллической цепочке определяется структурным фактором решётки

$$f(q) = \lim_{N \rightarrow \infty} f(q, N), \quad f(q, N) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{2iqz_j}. \quad (2.13)$$

В пределе  $N \rightarrow \infty$ , структурный фактор квазикристалла состоит из  $\delta$ -пигов [170], характеризуемых двумя целыми числами  $h$  и  $h'$ , см. например [161, 165],

$$f(q) = \sum_{h, h' = -\infty}^{\infty} \delta_{2q, G_{hh'}} f_{hh'}, \quad (2.14)$$

с векторами дифракции,

$$G_{hh'} = \frac{2\pi}{\bar{d}} \left( h + \frac{h'}{t} \right), \quad (2.15)$$

заполняющими ось волновых векторов всюду плотным образом. Здесь обобщённый символ Кронекера  $\delta_{2q, G_{hh'}}$  равен единице при  $2q = G_{hh'}$  и нулю в противном случае. Напомним, что в простой периодической решётке ( $\Delta = 0$ ) структурный фактор имеет пики на эквидистантных векторах обратной решётки  $G_h = 2\pi h/\bar{d}$ , характеризуемых одним целым числом, причём  $|f_h| = 1$ , как показано на рис. 2.2. Для конечной структуры из  $N$  ям характерная ширина пика при  $2q = G_{hh'}$  порядка  $1/N\bar{d}$ , как и в периодической решётке. Значения структурного фактора для произвольных  $t, \varphi$  и  $\Delta$ , приведены в [A9],[171]. Для частного случая канонической структуры Фибоначчи имеем

$$f_{hh'} = \frac{\sin s_{hh'}}{s_{hh'}} e^{i\theta_{hh'}}, \quad (2.16)$$

$$s_{hh'} = \pi \frac{\tau(\tau h' - h)}{1 + \tau^2}, \quad \theta_{hh'} = \frac{\tau - 2}{\tau} s_{hh'},$$

и векторы дифракции

$$G_{hh'} = \frac{2\pi}{\bar{d}} \left( h + \frac{h'}{\tau} \right), \quad \bar{d} = b + \frac{a - b}{\tau} = b \frac{1 + \tau^2}{1 + \tau} = b(3 - \tau). \quad (2.17)$$

Парам  $h$  и  $h'$ , равным двум последовательным числам Фибоначчи,  $(F_j, F_{j-1})$ , соответствуют большие значения  $|f_{hh'}|$ , стремящиеся к единице с ростом  $j$ , см.

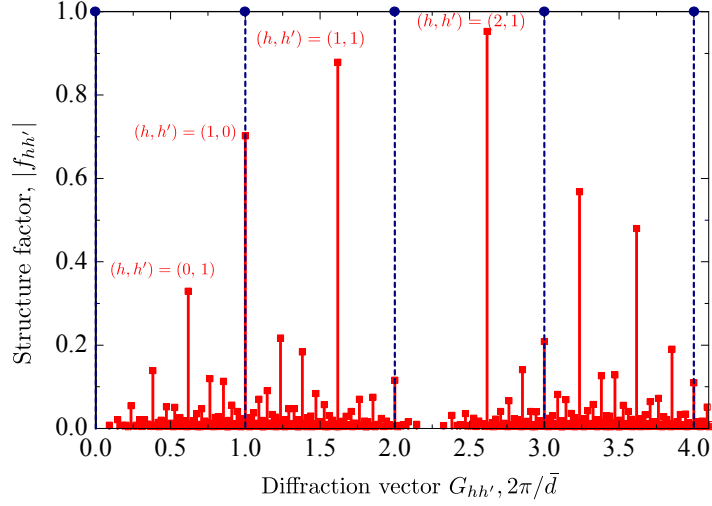


Рис. 2.2: Коэффициенты структурного фактора в зависимости от величины вектора дифракции. Длины штриховых и сплошных вертикальных отрезков соответствуют значениям  $|f_h|$  и  $|f_{hh'}|$  для периодической решётки и канонической структуры Фибоначчи.

рис. 2.2. Это связано с тем, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} (F_j - \tau F_{j-1}) = 0$ , а значит, в (2.16)  $s_{hh'} \rightarrow 0$  и  $|f_{hh'}| \rightarrow 1$ .

Для нерезонансной канонической структуры Фибоначчи роль структурного фактора выполняется компонентами Фурье диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_G$ , определёнными как

$$\varepsilon(z) = \sum_G \varepsilon_G e^{iGz}, \quad \varepsilon_G = \frac{1}{L} \int_0^L dz \varepsilon(z) e^{-iGz}, \quad (2.18)$$

где  $L$  — длина всей структуры. Компоненты Фурье могут быть представлены в виде

$$\varepsilon_{-G} = \varepsilon_A \frac{e^{iGa} - 1}{iG\bar{d}} f^{(A)}(G) + \varepsilon_B \frac{e^{iGb} - 1}{iG\bar{d}} f^{(B)}(G), \quad (2.19)$$

$$f^{(A)}(G) = \frac{\sin(s_{hh'}/\tau)}{s_{hh'}} \exp \left[ i \frac{s_{hh'}}{\tau} \left( \frac{2}{\tau} - 1 \right) \right], \quad (2.20)$$

$$f^{(B)}(G) = \frac{\sin(s_{hh'}/\tau^2)}{s_{hh'}} \exp \left[ i \frac{s_{hh'}}{\tau} \left( \frac{1}{\tau} - 2 \right) \right],$$

где  $G \equiv G_{hh'}$ . Эти формулы впервые получены в работе [172], в которой изучалось преобразование Фурье фотоупругого коэффициента для сверхрешёток Фибоначчи. Отметим, что сумма  $f^{(A)}(G) + f^{(B)}(G)$  сводится к  $f_{hh'}$  из (2.16).

## 2.2.2 Двухволновое приближение

В этом разделе будет представлено двухволновое приближение для вывода дисперсии света и спектров отражения в апериодических многослойных структурах. Электрическое поле световой волны, распространяющийся в многослойной структуре, удовлетворяет уравнению

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} - q^2\right) E(z) = 2q \sum_G e^{iGz} P_G E(z), \quad (2.21)$$

где  $E(z)$  — поле на частоте  $\omega$ ,  $G$  — векторы обратной решётки  $G_h$  для периодической структуры и векторы дифракции  $G_{hh'}$  для фотонного квазикристалла, волновой вектор  $q$  и коэффициенты  $P_G$  заданы как

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\bar{\varepsilon}}, \quad P_G = \frac{q}{2} \frac{\varepsilon_G}{\bar{\varepsilon}} \quad (2.22)$$

для нерезонансной решётки Фибоначчи (случай I) и

$$q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_b}, \quad P_G = 2qSf_{hh}^*, \quad P_{-G} = 2qSf_{hh'} \quad (2.23)$$

для структуры с квантовыми ямами (случай II), коэффициенты  $S$  и  $f_{hh'}$  определены уравнениями (2.12) и (2.16) и  $\bar{\varepsilon}$  — средняя диэлектрическая проницаемость

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_A N_A a + \varepsilon_B N_B b}{N_A a + N_B b} = \frac{\varepsilon_A (\tau + 1) + \varepsilon_B}{\tau + 2}. \quad (2.24)$$

Отметим, что в отсутствие диссипации  $P_{-G} = P_G^*$ . Более того, в случае I коэффициент  $P_0$  равняется нулю. Уравнение (2.21) позволяет записать электромагнитное поле в структуре в виде суперпозиции “блоховских” волн

$$E_K(z) = \sum_G e^{i(K-G)z} E_{K-G}. \quad (2.25)$$

Разность  $K_1 - K_2$  волновых векторов двух волн  $E_{K_1}(z)$  и  $E_{K_2}(z)$  в наборе (2.25) не может быть кратна ни одному вектору дифракции  $G$ . Для однозначности дисперсия  $\omega_{K'}$  с  $K' \equiv \text{Re } K$  определяется в схеме расширенных зон, при этом  $\omega_{K'}$  является монотонно возрастающей функцией  $K'$  для положительных  $K'$ .

В двухволновом приближении [69,А7] в сумме (2.21) учитываются только две пространственные гармоники  $K$  и  $K - G$ , и электрическое поле приближенно описывается выражением

$$E(z) = E_K e^{iKz} + E_{K-G} e^{i(K-G)z} . \quad (2.26)$$

Мы рассматриваем узкую частотную область вблизи брэгговской частоты  $\omega_G$ , удовлетворяющей условию

$$q(\omega_G) = G/2 , \quad (2.27)$$

и полагаем  $K \approx G - K \approx q(\omega_G)$ . Тогда волновое уравнение (2.21) сводится к

$$(q - K + P_0)E_K + P_G E_{K-G} = 0 , \quad (2.28)$$

$$P_{-G} E_K + (q + K - G + P_0)E_{K-G} = 0 .$$

Два собственных значения  $K$ , определяемые уравнениями (2.28), равняются

$$K = \frac{G}{2} \pm Q , \quad Q = \sqrt{\left(q - \frac{G}{2} + P_0\right)^2 - P_G P_{-G}} . \quad (2.29)$$

Сначала рассмотрим случай, когда коэффициенты  $P_G$  не зависят от частоты и  $P_0 = 0$ . Тогда в энергетическом спектре вокруг частоты  $\omega_G$  возникает запрещённая зона с краями  $\omega_+$  и  $\omega_-$  на расстоянии

$$2\Delta \equiv \omega^+ - \omega^- = \frac{2c|P_G|}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (2.30)$$

и центром на частоте

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{G}{2} . \quad (2.31)$$

Если компоненты Фурье имеют резонанс на частоте  $\omega_0$  и, кроме того, выполняется резонансное брэгговское условие

$$\frac{\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon_b} = \frac{G}{2} , \quad (2.32)$$

структура характеризуется двумя симметричными экситон-поляритонными запрещёнными зонами. В частности, в резонансной брэгговской квазикристаллической

структуре, коэффициенты  $P_G$  для которой заданы уравнениями (2.23), края  $\omega_{\text{out}}^{\pm}$  и  $\omega_{\text{in}}^{\pm}$  запрещённых зон могут быть получены из (2.28), в которых положено  $K = G/2$  или, эквивалентно,  $Q = 0$ . Результат равняется (при  $\Gamma \rightarrow +0$ )

$$\omega_{\text{out}}^{\pm} = \omega_0 \pm \Delta \sqrt{\frac{1 + |f_{hh'}|}{2(h + h'/\tau)}}, \quad \omega_{\text{in}}^{\pm} = \omega_0 \pm \Delta \sqrt{\frac{1 - |f_{hh'}|}{2(h + h'/\tau)}}. \quad (2.33)$$

Для периодической решётки значения  $P_0, P_G$  и  $P_{-G}$  совпадают с  $2qS$  и в системе остаётся одна запрещенная зона с полушириной  $\Delta = \sqrt{2\Gamma_0\omega_0/\pi}$  [32]. Для квазикристаллической решётки  $|P_G| < |P_0|$  (при  $G \neq 0$ ) и в системе возникают две щели одинаковой ширины, разделённые центральной разрешенной зоной ширины  $\omega_{\text{in}}^+ - \omega_{\text{in}}^- \propto \sqrt{1 - |f_{hh'}|}$ .

### 2.2.3 Отражение и пропускание света структурами Фибоначчи

Рассмотрим отражение света от конечной многослойной структуры, образованной слоями  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , и расположенной между полубесконечными слоями материала  $A$ .

В двухволновом приближении для аперодической структуры толщины  $L$  электрическое поле может быть представлено следующим образом

$$E(z) = \begin{cases} E_0 e^{iqz} + E_r e^{-iqz} & (z < 0), \\ E_{K_+} e^{iQz} (e^{iGz/2} + \zeta_+ e^{-iGz/2}) \\ + E_{K_-} e^{-iQz} (e^{iGz/2} + \zeta_- e^{-iGz/2}) & (0 < z < L), \\ E_t e^{iq(z-L)} & (L < z). \end{cases} \quad (2.34)$$

Здесь  $E_0, E_r$  и  $E_t$  — амплитуды падающей, отраженной и пропущенных волн,  $E_{K_{\pm}}$  — амплитуды  $E_K$  из (2.26) для волновых векторов  $K_{\pm} = (G/2) \pm Q$ , и

$$\zeta_{\pm} = \frac{E_{K_{\pm}-G}}{E_{K_{\pm}}} = -\frac{P_{-G}}{q + K_{\pm} - G + P_0}.$$

Граничные условия при  $z = 0$  и  $z = L$  связывают амплитуды электрического поля

$$\begin{aligned}
E_0 + E_r &= (1 + \zeta_+)E_{K_+} + (1 + \zeta_-)E_{K_-} , & (2.35) \\
q(E_0 - E_r) &= \sum_{m=\pm} [K_m + (K_m - G)\zeta_m]E_{K_m} , \\
E_t &= \sum_{m=\pm} e^{iK_m L} (1 + \zeta_m e^{iGL})E_{K_m} , \\
qE_t &= \sum_{m=\pm} e^{iK_m L} [K_m + (K_m - G)\zeta_m e^{iGL}]E_{K_m} .
\end{aligned}$$

Если число  $N$  квантовых ям в структуре Фибоначчи совпадает с  $F_j + 1$ , где  $F_j$  — одно из чисел Фибоначчи, то произведение  $G_{hh'}L$  отличается от целого кратного  $2\pi$  на малое значение порядка  $\delta_N \sim G_{hh'}b(\tau-1)^{j-1}\tau^{-2}$ . В этом случае фазовый множитель  $\exp(iG_{hh'}L)$  и длина  $L$  могут быть заменены, соответственно, на единицу и произведение  $N\bar{d}$ . Последовательный вывод приводит к сравнительно простому выражению для коэффициентов отражения и пропускания,

$$\begin{aligned}
r_N &\equiv \frac{E_r}{E_0} = \frac{2qSf_{hh'}}{(G/2) - q - 2qS - iQ \cot(QN\bar{d})} , & (2.36) \\
t_N &\equiv \frac{E_t}{E_0} = -\frac{iQ}{2qSf_{hh'} \sin(QN\bar{d})} r_N .
\end{aligned}$$

Необходимым условием применимости двухволнового приближения является неравенство  $|(G/2) - K| \ll G/2$ , или

$$\max\{|\omega_0 - \omega|, \Gamma\} \gg \Gamma_0 \frac{\sqrt{1 - |f_{hh'}|^2}}{h + h'/\tau} . \quad (2.37)$$

Численный анализ показывает, что при  $N \gtrsim 20$  двухволновое приближение хорошо работает даже для структур Фибоначчи с  $N \neq F_j + 1$ .

Для нерезонансной брэгговской структуры условие (2.27) сводится к

$$\frac{\omega_G \sqrt{\bar{\varepsilon}}}{c} \bar{d} = \pi \left( h + \frac{h'}{\tau} \right) , \quad (2.38)$$

где  $\bar{\varepsilon}$  — средняя диэлектрическая проницаемость (2.24). Решение уравнений (2.34) приводит к следующим выражениям для коэффициентов отражения и пропуска-



ния

$$\begin{aligned}
 r_N &= \frac{P_G}{(G/2) - q - iQ \cot(QN\bar{d})}, \\
 t_N &= -\frac{iQ}{P_G \sin(QN\bar{d})} r_N.
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

### Нерезонансные фотонные квазикристаллы Фибоначчи

Используем двухволновое приближение для анализа отражения света от нерезонансных структур Фибоначчи. На рис. 2.3 показаны спектры отражения и пропускания структуры, состоящей из 89 слоёв  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , расположенных в последовательности Фибоначчи. Показатели преломления выбраны равными  $n_A = 1$  и  $n_B = \tau$ . Положения максимумов в спектрах отражения и минимумов в спектрах пропускания соответствуют запрещённым зонам, полученными с учётом 12 векторов дифракции в разложении (2.25) и показанными сплошными прямоугольниками. Заштрихованные прямоугольники соответствуют наибольшим запрещённым зонам, найденным в двухволновом приближении с учётом либо гармоник  $K$  и  $K - G_{1,-1}$ , либо  $K$  и  $K - G_{1,0}$ .

### Структуры с квантовыми ямами. Теория и эксперимент

Периодические структуры, в которых диэлектрический отклик хотя бы одного из композиционных материалов как функция частоты  $\omega$  имеет полюс на некоторой резонансной частоте, выделяют в особый класс резонансных фотонных кристаллов, собственными волнами в которых являются поляритоны. Аналогично можно определить резонансные фотонные квазикристаллы и другие аперидические детерминированные структуры. В этом разделе исследованы спектры отражения таких структур.

В спектральной области резонансной частоты экситона взаимодействие фотона и экситона приводит к образованию гибридной квазичастицы, экситонного поляритона. В работе [173] было впервые рассмотрено распространение экситонных поляритонов в квазипериодической сверхрешётке типа Фибоначчи. Слои  $\mathcal{A}$

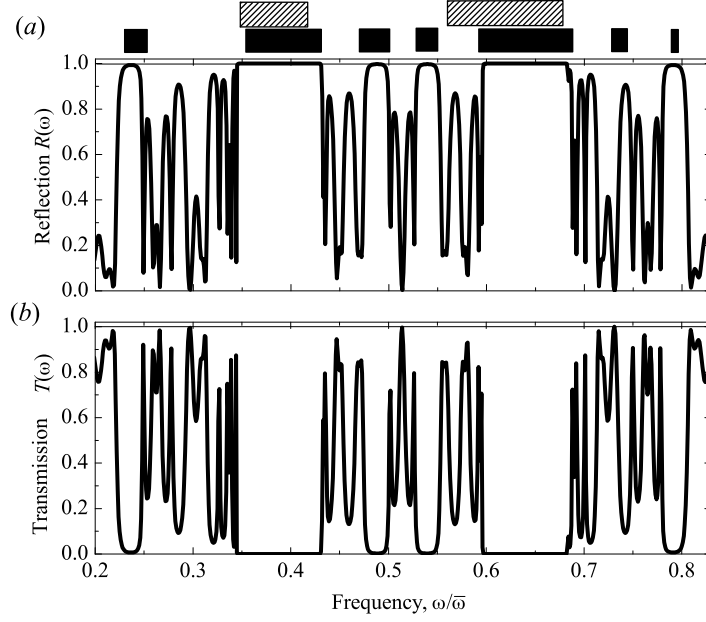


Рис. 2.3: Спектры отражения (a) и пропускания (b) конечной структуры Фибоначчи. Штрихованные и заполненные области отмечают запрещенные зоны, рассчитанные в двухволновом и 12-волновом приближениях, соответственно. Частота света  $\omega$  нормирована на частоту  $\bar{\omega} = \pi c / (d\sqrt{\bar{\epsilon}})$ , параметры расчёта указаны в тексте.

соответствовали полупроводнику GaN и чередовались со слоями диэлектрика  $\mathcal{B}$  (сапфир). Толщины слоёв были выбраны равными  $a = b = 500 \text{ \AA}$ , т.е. превосходили боровский радиус экситона. Таким образом, экситон мог рассматриваться как объёмная частица так же, как это делалось для тонких плёнок [13] и оптических сверхрешёток [41]. Было исследовано распределение разрешённых и запрещённых зон экситонных поляритонов [173] для периодических аппроксимантов структур Фибоначчи  $\mathcal{F}_m \mathcal{F}_m \mathcal{F}_m \dots$ , а также продемонстрирована локализация поляритонов.

Далее будет рассмотрен новый класс фотонных квазикристаллов на основе структуры с многими квантовыми ямами, в которых резонансная частота экситона настроена на резонансное брэгговское условие (2.32). Разрешённые векторы дифракции  $G_{hh'}$  образуют плотный квазинепрерывный набор. Напомним, что самые большие значения  $|f_{hh'}|$  достигаются для векторов дифракции  $G_{hh'}$ , для которых пары  $h, h'$  совпадают с двумя последовательными числами Фибоначчи  $F_m, F_{m-1}$ .

Например, для  $(h, h') = (F_m, F_{m-1}) = (1, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 2)$  и  $(5, 3)$ , соответствующих  $m = 1 \dots 5$ , модуль  $f_{hh'}$  равняется  $\approx 0.70, 0.88, 0.95, 0.98$  и  $0.99$ , соответственно. Тогда, если резонансная частота экситона удовлетворяет брэгговскому условию

$$\frac{\omega_0 n_b}{c} \bar{d} = \pi \left( F_m + \frac{F_{m-1}}{\tau} \right), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.40)$$

от структуры можно ожидать сверхизлучательного поведения, аналогично поведению периодических брэгговских структур с квантовых ямами, в которых период  $d$  и частота экситона связаны соотношением [29]

$$\frac{\omega_0 n_b}{c} d = \pi. \quad (2.41)$$

Для периодической брэгговской структуры в сверхизлучательном режиме ( $N \ll \sqrt{\omega_0/\Gamma_0}$ ), выражение (2.36) может быть преобразовано в известный результат [29]

$$r_N(\omega) = \frac{iN\Gamma_0}{\omega_0 - \omega - i(N\Gamma_0 + \Gamma)}. \quad (2.42)$$

Полюс на частоте  $\omega = \omega_0 - i(N\Gamma_0 + \Gamma)$  соответствует собственной частоте сверхизлучательной моды экситонных поляритонов. В общем случае собственные частоты  $\omega^{(l)}$  структуры с квантовыми ямами определяются из условия равенства нулю знаменателя в (2.36). Поскольку структура является открытой, т.е. имеет конечные размеры, собственные частоты комплексны даже при отсутствии нерадикационного затухания,  $\Gamma = 0$ . Значения  $\omega^{(l)}$ , лежащие в области

$$|\omega - \omega_0| \ll \frac{\Delta \sqrt{1 - |f_{hh'}|}}{\sqrt{h + h'/\tau}}, \quad (2.43)$$

но вне узкого интервала (2.37), могут быть найдены с учётом того, что в этой области разностью  $q_0 - q$  в уравнениях (2.29), (2.36) можно пренебречь по сравнению с  $2qS$ , так что  $Q = 2qS \sqrt{1 - |f_{hh'}|^2}$  и

$$\omega^{(l)} = \omega_0 - i\Gamma - iN\Gamma_0 \frac{\sqrt{1 - |f_{hh'}|^2}}{\operatorname{arctanh}(\sqrt{1 - |f_{hh'}|^2}) + i\pi l}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.44)$$

При  $l = 0$  уравнение (2.44) определяет частоту сверхизлучательной моды. В случае большой величины структурного фактора,  $1 - |f_{hh'}|^2 \ll 1$ , эта частота может быть записана как

$$\omega^{(0)} = \omega_0 - iN\Gamma_0 \left( \frac{2}{3} + \frac{|f_{hh'}|^2}{3} \right). \quad (2.45)$$

Видно, что скорость радиационного затухания моды возрастает пропорционально числу квантовых ям. Это явление аналогично эффекту Дикке для атомов, расположенных на расстояниях меньше, чем длина световой волны [174], а также сверхизлучательному режиму для периодической структуры с квантовыми ямами [29]. Таким образом, оказывается, что сверхизлучательный режим не требует периодичности структуры, даже если межъямные расстояния порядка длины световой волны. Отметим, что в оригинальной задаче Дикке рассматривал излучение ансамбля атомов после сильного импульса накачки, так что все атомы в начальный момент находятся в возбуждённом состоянии. Задача о сверхизлучении является существенно нелинейной [175]. В данной главе изучаются лишь линейные по накачке эффекты, когда плотность экситонов в квантовых ямах мала. Поэтому строго говоря можно говорить лишь о формировании сверхизлучательной моды в структуре, а не о сверхизлучении Дикке.

При  $l \neq 0$  уравнение (2.44) дает частоты тёмных мод, слабо взаимодействующих со светом, т.е. имеющих малое радиационное затухание. В случае периодической структуры  $f_{hh'} = 1$  и их частоты совпадают с  $\omega_0$ . Поскольку эти моды не обладают радиационным затуханием, они являются оптически неактивными. Для квазипериодической структуры  $|f_{hh'}| < 1$ , так что моды с  $l \neq 0$  могут взаимодействовать со светом.

Итак, в настоящем разделе построена аналитическая теория оптических спектров аперидических брэгговских структур с квантовыми ямами. Характерной особенностью аперидических структур по сравнению с периодическими является (а) наличие двух симметричных запрещенных зон экситонных поляритонов вокруг частоты  $\omega_0$  с разрешенной зоной между ними и (б) наличие, помимо сверхизлуча-

тельной моды с радиационным затуханием порядка  $N\Gamma_0$ , других оптических мод, которые могут взаимодействовать со светом.

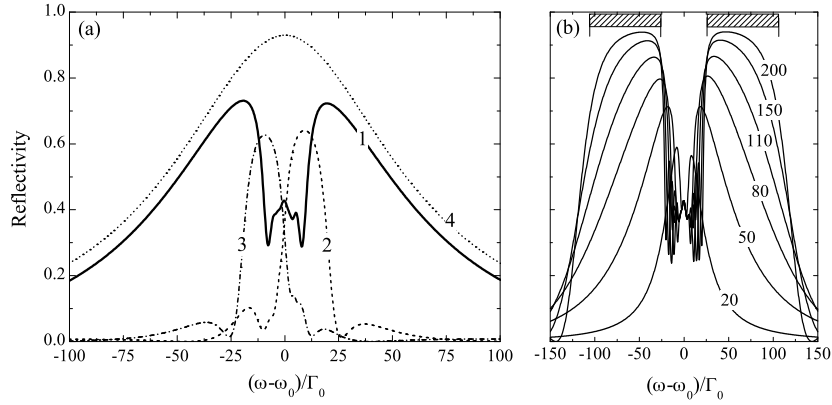


Рис. 2.4: (а) Спектры отражения света от трёх структур Фибоначчи, удовлетворяющих резонансному брэгговскому условию (2.40) для  $m = 2$  (кривая 1) и отстроенных на  $\pm 2\%$  от этого условия (кривые 2 и 3), а также спектр периодической резонансной брэгговской структуры (кривая 4). Значения параметров приведены в тексте. (б) Спектры отражения резонансных брэгговских структур Фибоначчи, удовлетворяющих условию (2.40) с  $m = 2$ . Шесть кривых рассчитаны для структур с  $N = 20, 50, 80, 110, 150, 200$ . Числом указано рядом с каждой кривой. Вертикальные линии, соединенные горизонтальной полосой, отмечают экситон-поляритонные запрещённые зоны (2.33).

На рис. 2.4(а) показаны спектры отражения, рассчитанные численно методом матриц переноса для четырёх структур, содержащих 54 квантовые ямы. Используются следующие значения параметров:  $\hbar\omega_0 = 1.533$  эВ,  $\hbar\Gamma_0 = 50$  мкэВ,  $\hbar\Gamma = 100$  мкэВ,  $n_b = 3.55$ . Кривая 1 рассчитана для резонансной канонической структуры Фибоначчи, удовлетворяющей точному брэгговскому условию (2.40) с  $m = 2$ . Кривые 2 и 3 соответствуют структурам Фибоначчи, в которых также  $a/b = \tau$ , но толщины барьеров пропорционально изменены и отличаются от брэгговских значений на множитель 1.02 для кривой 2 и на множитель 0.98 для кривой 3. Кривой 4 описывается отражение от периодической брэгговской структуры с теми же экситонными параметрами и периодом  $d = \pi/q(\omega_0)$ , удовлетворяющим уравнению (2.41). Из сравнения кривых 1 и 4 заключаем, что спектры отражения резонансной структуры Фибоначчи и периодической структуры, настроенных на соответствующие брэгговские условия (2.40) и (2.41), близки друг к другу за ис-

ключением узкой области частот непосредственно вокруг частоты  $\omega_0$ . Более того, из сравнения кривых 2 и 3 следует, что слабое отклонение от условия (2.40) приводит к резкому уменьшению эффективной полуширины спектров. Такая чувствительность к отстройке от брэгговского условия оказывается характерна и для периодических структур. Единственным качественным отличием структур Фибоначчи от периодических является характерный провал в середине спектра 1. Этот провал отражает наличие разрешённой экситон-поляритонной зоны между частотами  $\omega_{\text{in}}^{\pm}$ , заданными уравнениями (2.33). Напомним, что в периодической резонансной брэгговской структуре внутренняя разрешённая зона отсутствует,  $\omega_{\text{in}}^+ = \omega_{\text{in}}^-$ .

Эволюция спектров отражения с ростом числа квантовых ям показана на рис. 2.4(b). Огибающая спектра ведёт себя так же, как и для периодической брэгговской структуры. В частности, для малых  $N$  огибающая является лоренцианом с полушириной, линейно зависящей от числа ям  $N$ . Это является непосредственным проявлением сверхизлучательного режима [174, 29, 176], в согласии с формулой (2.45).

При больших  $N$  порядка  $\sqrt{\omega_0/\Gamma_0} \sim 100$  происходит насыщение спектральной ширины и переход в фотонно-квазикристаллический режим. Форма спектров для больших  $N$  указывает на существование двух широких симметричных стоп-зон в энергетическом спектре структуры, разделённых разрешённой зоной, в согласии с уравнением (2.33). Разумеется, термины “разрешённая зона” и “стоп-зона” могут применяться к аperiodической структуре только в рамках двухволнового приближения.

В области частот вокруг частоты  $\omega_0$  спектры отражения аperiodических структур демонстрируют провалы, внутри которых коэффициент отражения осциллирует как функция частоты, с периодом осцилляций уменьшающимся по мере приближения частоты  $\omega$  к резонансу  $\omega_0$ . Спектральный провал является характерным свойством структуры, настроенной на брэгговский резонанс с коэффициентом структурного фактора по модулю меньшим единицы. Например, схожий провал

наблюдается для периодической брэгговской структуры со сложной элементарной ячейкой [177].

В реалистичных полупроводниковых квантовых ямах скорость безызлучательного затухания  $\Gamma$  превосходит или сравнима с  $\Gamma_0$ , так что большинство резких спектральных особенностей сглажены и неразрешимы [A2,A8,61]. Для малых значений  $\Gamma$ , меньших, чем эти экспериментально достижимые величины, в области частот вокруг  $\omega_0$  проявляется сложная тонкая спектральная структура. Для всех рассматриваемых аperiodических структур вокруг частоты  $\omega_0$  расположена узкая запрещённая зона. В частности, для структуры Фибоначчи с  $(h, h') = (2, 1)$  эта стоп-зона лежит между  $\omega_0 - 0.4\Gamma_0$  и  $\omega_0 + 0.9\Gamma_0$ . Спектральные свойства в области частот  $|\omega - \omega_0| \sim \Gamma_0$  для  $\Gamma \ll \Gamma_0$  более подробно обсуждаются в разделе 2.2.4.

Представленная выше теория спектров отражения структур с квантовыми ямами впервые опубликована в работе [A6]. Под влиянием этой работы в университете Аризоны были выращены такие структуры и проведены эксперименты [A8,A9], подтвердившие основные предсказания работы [A6]. Далее представлено сопоставление экспериментальных результатов с данными теории.

Методом молекулярно-пучковой эпитаксии были выращены два образца, состоящих из 21 и 54 квантовых ям GaAs/AlGaAs, образующих последовательность Фибоначчи. Образцы имеют цилиндрическую форму, причем являются градиентными — их толщина уменьшается с увеличением расстояния от центра к периферии. Экспериментально изучались спектры зеркального отражения света при нормальном падении луча на образец. Перемещением образца относительно луча можно было менять положение пятна засветки и тем самым изменять средний период структуры  $\bar{d}$ . Параметры структур подобраны таким образом, чтобы при некотором расстоянии от центра образца межъямные расстояния удовлетворяли условию Брэгга (2.40) с  $m = 1$ , т.е.  $(F_m, F_{m-1}) = (1, 0)$ . Таким образом, градиентный образец позволяет непосредственно наблюдать переход между ква-

зибрэгговскими и брэгговскими структурами Фибоначчи с изменением положения падающего луча света относительно центра образца.

На рис. 2.5 сопоставлены экспериментальные спектры отражения двух градиентных образцов с  $N = 21$  ямами — структуры Фибоначчи (а) и периодической структуры (b). Для обоих образцов при выполнении брэгговского условия в спектре отражения есть широкие максимумы на резонансных частотах экситона с тяжелой (НН) и лёгкой (ЛН) дырками. Для периодической структуры спектр отражения имеет гладкую форму, в то время как для структуры Фибоначчи в нем проявляются структурированные провалы, отмеченные стрелками. Такая форма резонансов экситона с тяжелой и лёгкой дырками в спектрах связана с квазикристаллическим расположением квантовых ям, см. также рис. 2.4(а). На рис. 2.7 представлены экспериментальные и теоретические спектры отражения образца с 54 квантовыми ямами в зависимости от толщины структуры. Из сравнения экспериментальных кривых на рис. 2.5(а) и рис. 2.6(а) следует, что при настройке на условие Брэгга ширина резонансов в спектре образца с 54 ямами существенно больше, чем для 21 ямы. Это является экспериментальным подтверждением сверхизлучательного режима.

Отметим некоторые особенности, существенные для теоретического описания эксперимента. Расщепление между размерно-квантованными состояниями экситона с легкой и тяжелой дырками в структуре составляет примерно 3 мэВ. Экспериментальные полуширины максимумов в спектрах отражения сопоставимы с этой величиной, поэтому в расчете необходимо учитывать оба экситонных резонанса одновременно. Восприимчивость одиночной квантовой ямы (2.12) была выбрана в виде

$$S(\omega) = \frac{\Gamma_0^{(\text{НН})}}{\omega_0^{(\text{НН})} - \omega - i\Gamma^{(\text{НН})}} + \frac{\Gamma_0^{(\text{ЛН})}}{\omega_0^{(\text{ЛН})} - \omega - i\Gamma^{(\text{ЛН})}}, \quad (2.46)$$

где индексами НН и ЛН отмечены величины, относящиеся к тяжелым и легким дыркам, соответственно. Теоретические кривые на рис. 2.6(b) рассчитаны в простейшей модели, пренебрегая диэлектрическим контрастом в структуре, т.е. с ис-



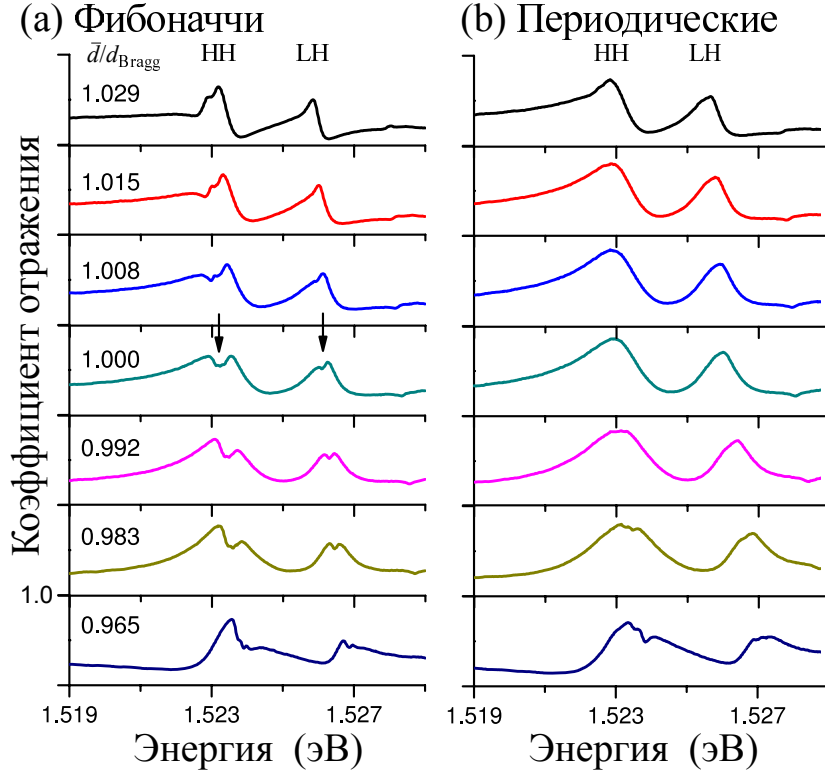


Рис. 2.5: Экспериментальные зависимости спектров отражения от толщин слоёв. Расстояния между 21 ямами образуют (а) последовательность Фибоначчи с  $(h, h') = (1, 0)$ , (б) периодическую структуру с периодом  $\lambda(\omega_0)/2$ . Провал в брэгговских спектрах отражения проявляется только для панелей (а). Кривые отмечены отношением  $\bar{d}/d_{\text{Bragg}}$ , где  $\bar{d}$  — среднее расстояние между центрами ям и  $d_{\text{Bragg}}$  — расстояние, соответствующее условию Брэгга. Каждая кривая с бóльшим значением  $\bar{d}/d_{\text{Bragg}}$  сдвинута вверх на единицу по сравнению с предыдущей кривой. Из работы [A8].

пользованием для всех слоев эффективного показателя преломления  $\bar{n} = 3.59$ . Толщины слоев  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  при расчёте равнялись  $a = 132.7$  нм и  $b = 82.03$  нм. Используются подгоночные значения экситонных параметров  $\Gamma_0^{(\text{HH})} = 25$  мкэВ,  $\Gamma_0^{(\text{LH})} = 10$  мкэВ,  $\Gamma^{(\text{HH})} = 180$  мкэВ,  $\Gamma^{(\text{LH})} = 115$  мкэВ. Рисунок 2.6(б) демонстрирует, что теория находится в качественном согласии с экспериментом. В реальном образце барьеры не являются однородными, а представляют собой сверхрешётку слоёв AlGaAs. Поэтому для достижения лучшего количественного согласия необходимо учитывать диэлектрический контраст между слоями сверхрешётки. Такой анализ был выполнен в работе [A9]. Результаты расчета с учетом диэлектрическо-

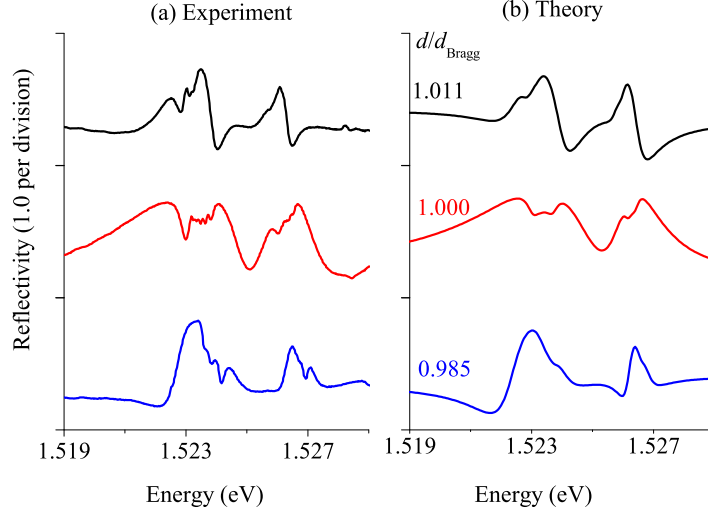


Рис. 2.6: Экспериментальные (а) и теоретические (б) спектры отражения структуры Фибоначчи с 54-х квантовыми ямами в зависимости от толщин ям и барьеров [A8]. Подгоночное значение толщины по отношению к брэгговскому значению указано для каждой теоретической кривой, значения остальных параметров приведены в тексте.

го контраста, а также неоднородного уширения экситонного резонанса представлены на рис. 2.7. Экспериментальная кривая на этом рисунке та же, что и на средней панели рис. 2.6(a). Видно, что сложная структура спектра хорошо воспроизводится теорией. С целью явного учета неоднородного уширения экситонного резонанса нерадиационное затухание экситона с тяжелой и легкой дырками считалось зависящим от частоты согласно  $\Gamma(\omega) = \Gamma/[1 + \exp[-\hbar(\omega - \omega_0 + \Omega_{\text{cut}})/C]]$ , где феноменологические параметры равнялись  $\Omega_{\text{cut}} = 0.25$  мэВ и  $C = 0.1$  мэВ. Остальные экситонные параметры при расчете рис. 2.7 принимали значения  $\omega_0^{(\text{HH})} = 1.5234$  эВ,  $\omega_0^{(\text{LH})} = 1.5263$  эВ,  $\Gamma_0^{(\text{HH})} = 25$  мкэВ,  $\Gamma_0^{(\text{LH})} = 10$  мкэВ,  $\Gamma^{(\text{HH})} = 163$  мкэВ,  $\Gamma^{(\text{LH})} = 110$  мкэВ. Показатели преломления слоев и экситонные параметры подогнаны, используя один набор значений, описывающих спектры отражения как для одной квантовой ямы, так и для образца из 54 ям [A9]. Оценка эффективности подгонки при различных параметрах показывает, что точность определения радиационного и нерадиационного затуханий экситонных резонансов около 20%.

Итак, в этом разделе предложены структуры Фибоначчи с квантовыми яма-

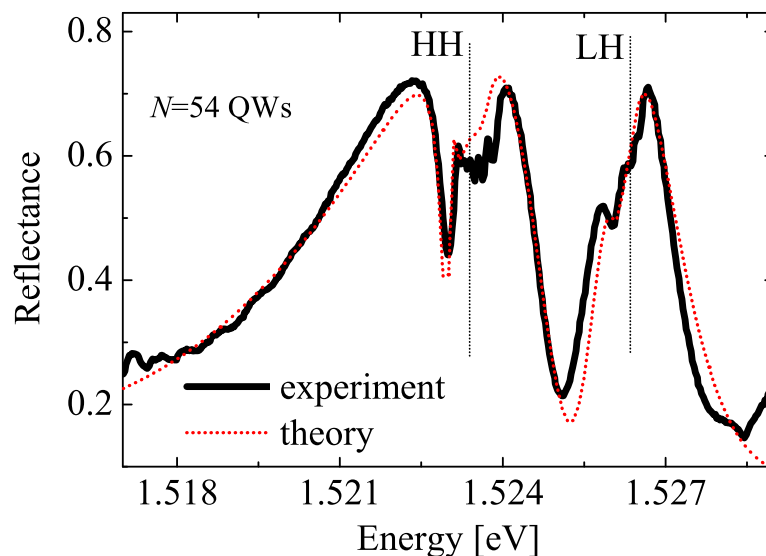


Рис. 2.7: Подгонка (пунктирная кривая) экспериментального спектра (сплошная кривая) брэгговской структуры Фибоначчи из 54-х квантовых ям [A8]. Параметры расчета указаны в тексте.

ми и продемонстрировано, что экспериментально измеренные спектры отражения таких структур подтверждают предсказания теории. Подгонка позволяет достигнуть хорошего количественного согласия между экспериментальными и теоретическими спектрами, и определить положения и скорости радиационного и нерадационного затухания экситона.

#### 2.2.4 Самоподобие оптических спектров структур Фибоначчи

В этом разделе обсуждаются спектральные особенности структур Фибоначчи с квантовыми ямами, не описываемые в двухволновом приближении. Рассматриваемые резонансные структуры имеют два качественных отличия от нерезонансных систем, исследованных ранее [121, 178, 123], которые существенно усложняют их описание: (а) резонансное спектральное поведение диэлектрического отклика экситонов  $S(\omega)$  в (2.12), и (б) возможность поглощения света, характеризуемого нерадационным затуханием экситона  $\Gamma$ . При анализе сначала положим  $\Gamma = 0$  и

рассмотрим плотность состояний (density of states, DOS) в периодических аппроксимантах структур Фибоначчи. Будет продемонстрировано, как эта задача может быть сведена к ранее детально изученной нерезонансной задаче. Затем будет учтено безызлучательное затухание экситонов и проанализирована конкуренция между поглощением и локализацией экситонных поляритонов [A5].

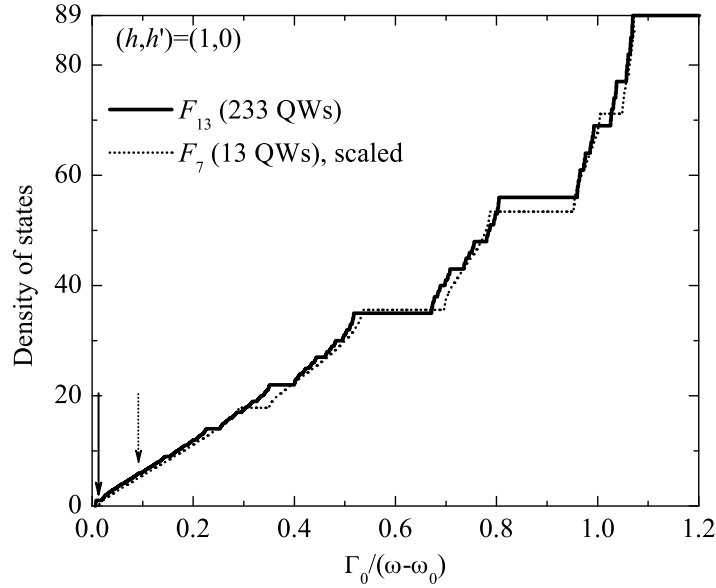


Рис. 2.8: Интегральная плотность состояний в периодических аппроксимантах структур Фибоначчи с квантовыми ямами, построенная в зависимости от параметра  $S = \Gamma_0/(\omega - \omega_0)$ . Сплошные и пунктирные кривые соответствуют аппроксимантам  $\mathcal{F}_{13}$  и  $\mathcal{F}_7$  с 233 и 13 ямами, соответственно. Кривая, соответствующая аппроксиманты  $\mathcal{F}_7$  для лучшего представления умножена на  $89/5$ . Сплошная вертикальная стрелка отмечает запрещенную зону в интервале  $\omega = [\omega_{\text{in}}^+ \dots \omega_{\text{out}}^+]$ , соответствующая уравнению (2.33) в двухволновом приближении. Пунктирная вертикальная стрелка отмечает узкую запрещенную зону, центрированную на  $S^* \approx 0.096$ , что соответствует частоте  $\omega^* \approx \omega_0 + 10.42\Gamma_0$ . Значения остальных параметров приведены в тексте.

Рассмотрим узкую спектральную область  $|\omega - \omega_0| \sim \Gamma_0$  и положим  $\Gamma = 0$ . В этом режиме оптические спектры и экситон-поляритонная дисперсия являются крайне запутанными, демонстрируя эффекты масштабной инвариантности и самоподобия [A7]. Для того, чтобы раскрыть это поведение поляритонов, оказывается полезным рассчитать их дисперсию в *периодических аппроксимантах* [163] аперидических структур  $\mathcal{F}_m \mathcal{F}_m \mathcal{F}_m \dots$ . Оптические свойства элементарной сверхъячей-

ки  $\mathcal{F}_m$  структуры могут быть охарактеризованы матрицей переноса  $T_m(\omega)$ . Матрица переноса зависит от частоты света  $\omega$ , геометрических параметров системы и экситонных параметров. Детали расчета методом матриц переноса приведены в [A4]. Для периодического аппроксиманта можно ввести блоховский волновой вектор  $K(\omega)$ , заданный уравнением  $KL_m = \arccos [\text{Tr}(T_m)/2]$ , где  $L_m$  — толщина элементарной ячейки. Также определим интегральную плотность состояний [A4] (число состояний с частотой меньше  $\omega$ )

$$\tilde{\rho}(\omega) = \frac{\text{Re } K(\omega)L_m}{2\pi}, \quad (2.47)$$

где волновой вектор  $K$  определён в схеме расширенных зон Бриллюэна. Плотность состояний постоянна внутри запрещённых зон аппроксиманта и увеличивается в разрешённых зонах. Благодаря резонансному характеру диэлектрического отклика экситона (2.12), последовательность запрещённых и разрешённых зон сложна для представления. С целью более наглядной визуализации оказывается полезно исследовать плотность состояний как функцию не частоты, а восприимчивости квантовой ямы

$$S(\omega) = \frac{\Gamma_0}{\omega - \omega_0}. \quad (2.48)$$

После того, как преобразование (2.48) выполнено, резонансные эффекты более не усложняют рассмотрение зонной структуры. Поэтому, вместо плотности состояний  $\tilde{\rho}(\omega)$  далее рассмотрим плотность состояний

$$\rho(S) = -\frac{L_m \text{Re } K[\omega(S)]}{\pi} + C, \quad (2.49)$$

зависящую от переменной  $S(\omega)$ . Знак минус в (2.49) введён, чтобы сделать  $\rho(S)$  возрастающей функцией переменной  $S$ , коэффициент 2 в знаменателе опущен для удобства и  $C$  — константа интегрирования.

На рис. 2.8 представлены результаты расчёта плотности состояний для аппроксимантов  $\mathcal{F}_7$  и  $\mathcal{F}_{13}$  с 13 и 233 ямами. Структура была настроена на брэгговское условие с  $(h, h') = (1, 0)$ . Константа интегрирования  $C$  в (2.49) была выбрана так, чтобы  $\rho(0) = 0$ . Общая форма кривой  $\rho(S)$  такая же, как и для нерезонансных

структур Фибоначчи [121, 178]: плотность состояний напоминает т.н. чёртову лестницу или функцию Кантора [179]. Отметим, что для отрицательных  $S$ , т.е.  $\omega < \omega_0$ , плотность состояний имеет качественно такой же вид. Кривые наглядно демонстрируют запрещённые зоны, соответствующие плато в плотности состояний. Самая левая запрещённая зона при  $0.008 \leq S \leq 0.02$  (сплошная стрелка на рис. 2.8) определяется в двухволновом приближении (2.33) и соответствует интервалу частот  $\omega_{\text{in}}^+ \dots \omega_{\text{out}}^+$ . Все остальные запрещённые зоны в двухволновом приближении не описываются и требуют учёта других пиков в структурном факторе. Самая правая запрещённая зона с  $S \geq 1.07$  соответствует диапазону  $0 \leq (\omega - \omega_0)/\Gamma_0 \leq 0.93$  и запрещённой зоне, центрированной вокруг частоты  $\omega_0$  [A7]. В промежуточной области  $0.02 \leq S \leq 1.07$  [или  $0.93 \leq (\omega - \omega_0)/\Gamma_0 \leq 54$ ] последовательность запрещённых и разрешённых зон ведёт себя с порядком аппроксиманты  $m$  аналогично множеству Кантора. Множество Кантора — это самоподобная фрактальная структура, которая может быть определена как предел при  $m \rightarrow \infty$  последовательности  $c_m$ , где  $c_1 = [0 \dots 1]$  и  $c_{m+1}$  получается из  $c_m$  вырезанием центральной трети в каждом отрезке, например,  $c_2 = [0 \dots 1/3] \cup [2/3 \dots 1]$  и т.д. [179]. Легко показать, что суммарная длина отрезков в  $c_m$  стремится к нулю с ростом  $m$ . В структуре Фибоначчи роль множества  $c_m$  выполняют частоты, лежащие в разрешённых зонах, а роль промежутков между ними — запрещённые зоны. В частности, число запрещённых зон и их суммарная длина возрастают с  $m$ , а положение каждой конкретной зоны с  $m$  насыщается. Из рис. 2.8 следует, что самые большие запрещённые зоны для аппроксиманта  $\mathcal{F}_{13}$  (сплошная кривая), например, центральная при  $0.52 \leq S \leq 0.67$ , проявляются уже для аппроксиманта  $\mathcal{F}_7$  (пунктирная кривая). Сумма ширин всех разрешённых зон уменьшается с  $m$ . В пределе  $m \rightarrow \infty$  мера Лебега множества разрешённых зон равняется нулю [180]. Это означает, что почти на каждой частоте коэффициент пропускания структуры экспоненциально затухает с её длиной  $L$ ,

$$T(L) \propto \exp(-L/\ell). \quad (2.50)$$

Параметр  $\ell$ , являющийся длиной локализации в квазипериодической структуре определяется мнимой частью волнового вектора  $K_m$ ,

$$\ell = 2[\text{Im } K_m]^{-1}, \quad (2.51)$$

и насыщается в зависимости от  $m$ .

Проанализируем роль экситонного поглощения, т.е. учтём  $\Gamma \neq 0$ . Поглощение приводит к сглаживанию тех спектральных особенностей на рис. 2.8, которые уже, чем  $\Gamma$ . Длина затухания  $\ell$  в свою очередь уменьшается с  $\Gamma$  благодаря возможности поглощения. Зависимость  $\ell$  от  $\Gamma$  показана сплошной кривой на рис. 2.9. Расчёт выполнен для  $(h, h') = (1, 0)$  на частоте  $\omega^* = \omega_0 + 10.42\Gamma_0$ , отмеченной пунктирной вертикальной стрелкой на рис. 2.8. Оказывается очень продуктивным сопоставить результат численного расчёта  $\ell$  со значением, полученным в двухволновом приближении, соответствующим замене волнового вектора  $K$  в (2.51) на значение из (2.29). Результат в двухволновом приближении показан пунктирной линией на рис. 2.9. При  $\Gamma = 0$  двухволновое приближение неприменимо: длина затухания расходится при  $\Gamma \rightarrow 0$ , т.к. частота  $\omega^*$  в этом приближении лежит внутри разрешённой зоны. Таким образом, в двухволновом приближении длина затухания является конечной только в меру поглощения, и её можно эквивалентно называть длиной поглощения  $\ell_{\text{abs}}$ . Если поглощение велико, двухволновое приближение становится применимым и отличие двух кривых на рис. 2.9 уменьшается. Следовательно, для каждого значения  $\Gamma$  спектральные свойства структуры Фибоначчи с квантовыми ямами определяются соотношением трёх характерных длин: (а) длины образца  $L$ , (б) длины затухания  $\ell$ , учитывающей как локализацию, так и поглощение, и (в) длины поглощения в двухволновом приближении  $\ell_{\text{abs}}$ . В результате, рис. 2.9 можно рассматривать как фазовую диаграмму в осях “ $\Gamma - \ell$ ”, где разными буквами отмечены качественно разные области параметров  $\ell$  and  $\Gamma$ , обсуждаемые далее.

А. В этой области двухволновое приближение применимо, т.к.  $\ell_{\text{abs}} \sim \ell$  и образец короче, чем длина поглощения,  $L < \ell_{\text{abs}}$ . Возможна интерференция Фабри-Перо

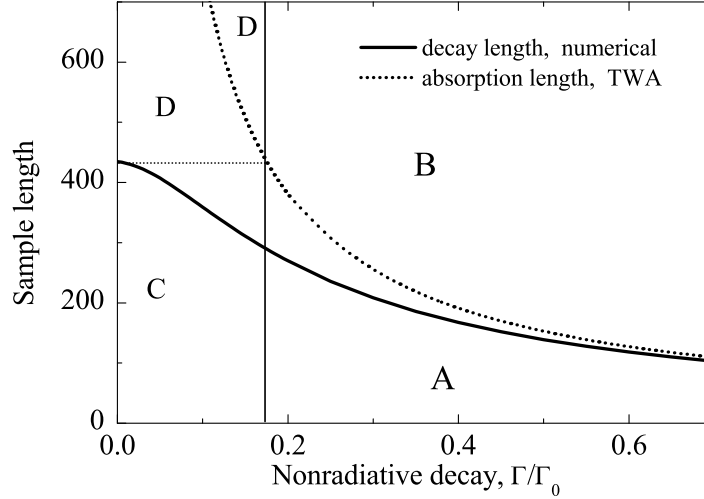


Рис. 2.9: Длина локализации  $\ell$ , рассчитанная численно (сплошная кривая) и в двухволновом приближении (пунктирная кривая) в зависимости от нерадиационного затухания  $\Gamma$ . Буквы А–D отмечают качественно разные области значений длины образца и нерадиационного затухания экситона, обсуждаемые в тексте.

экситонных поляритонов. Коэффициент отражения зависит от длины структуры и хорошо описывается выражением (2.36).

В. В этой области двухволновое приближение также применимо, но коэффициент отражения не зависит от длины структуры  $L$ , поскольку  $L$  превосходит длину поглощения  $\ell_{\text{abs}}$ .

С. В этой области двухволновое приближение неприменимо и существенны эффекты локализации, т.к.  $\ell < \ell_{\text{abs}}$ . Поскольку  $L$  меньше, чем длина локализации, спектр отражения оказывается очень чувствителен к значению  $L$ . Также в этой области проявляются эффекты масштабной инвариантности и самоподобия, см. работы [A7,121].

Д. В этой области двухволновое приближение неприменимо и спектр отражения не зависит от  $L$ , т.к.  $L > \ell$ .



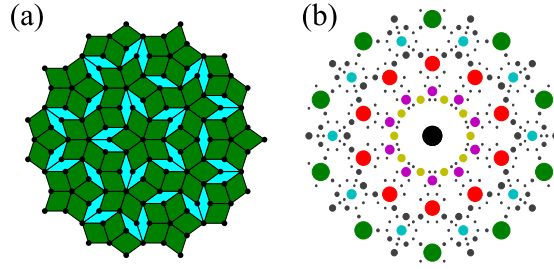


Рис. 2.10: (a) Каноническая мозаика Пенроуза. (b) Рассчитанная дифракционная картина для мозаики Пенроуза. Диаметр каждой точки пропорционален абсолютному значению структурного фактора  $|f_{\mathbf{G}}|$ , где  $\mathbf{G}$  — вектор дифракции. Для удобства точки, соответствующие разному модулю структурного фактора, раскрашены разным цветом.

## 2.3 Резонансные двумерные фотонные квазикристаллы

В этом разделе будет рассмотрено поляризационно-зависимое пропускание света резонансными двумерными фотонными кристаллами и квазикристаллами на основе мозаики Пенроуза из металлических наночастиц с плазмонными резонансами. В разделе 2.3.1 дано формальное определение мозаики Пенроуза и представлены рассматриваемые структуры. Раздел 2.3.2 посвящен симметричному анализу возможных поляризационно-зависимых эффектов в пропускании. Затем в разделе 2.3.3 развита приближённая аналитическая теория пропускания [A10,A11], и в разделе 2.3.4 теория сопоставляется с экспериментом, выполненным в работе [A11].

### 2.3.1 Мозаика Пенроуза

Мозаика Пенроуза — это одна из наиболее известных и красивых квазикристаллических структур. Пионерская работа Роджера Пенроуза [181] даже называется “Роль эстетики в фундаментальных и прикладных математических исследованиях” (“The Role of Aesthetics in Pure and Applied Mathematical Research”). Существует несколько различных видов мозаики Пенроуза [182]. Общим свойством всех этих структур является 10-кратная вращательная симметрия картины дифрак-

ции. Каноническая мозаика Пенроуза [182], показанная на рис. 2.10(a), состоит из ромбов двух типов, с острым углом равным либо  $2\pi/10$  (тонкие ромбы) либо  $2\pi/5$  (толстые ромбы).

Три эквивалентных способа определения мозаики Пенроуза включают (а) правила соответствия взаимного расположения толстых и тонких ромбов [183, 184, 185], (б) метод среза и проектирования периодической решётки из 5-мерного гиперпространства [186] и (в) метод дуальной мультисетки (dual multigrid) [187]. Достоинством последнего подхода является возможность генерации квазикристаллических решёток с произвольной степенью вращательной симметрии. Метод состоит из двух основных шагов: генерация вспомогательной сетки с требуемой вращательной симметрией и преобразование от вспомогательной сетки к соответствующей ей квазикристаллической решётке. В частности, для построения мозаики Пенроуза сначала определим пять основных двумерных базисных векторов  $\mathbf{e}_n$ , образующих правильную звезду

$$\mathbf{e}_n = \left[ \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right), \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \right], \quad n = 0 \dots 4. \quad (2.52)$$

Затем введём 5 наборов параллельных прямых  $\boldsymbol{\rho}_{n,j}$ , так чтобы прямые каждого набора были перпендикулярны соответствующему вектору звезды

$$\boldsymbol{\rho}_{n,j} \cdot \mathbf{e}_n = x_n(j), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.53)$$

Функция  $x_n(j)$  задаёт относительные расстояния между прямыми в наборах и в общем случае может быть квазипериодической [187]. В простейшем случае она является периодической

$$x_n(j) = j + \gamma_n. \quad (2.54)$$

Итак, полный набор прямых  $\boldsymbol{\rho}_{n,j}$  формирует сетку с вращательной симметрией пятого порядка. На втором шаге, дуальном преобразовании, каждой клетке сетки, ограниченной прямыми  $\boldsymbol{\rho}_{0,j_0}, \boldsymbol{\rho}_{0,j_0+1}, \dots, \boldsymbol{\rho}_{4,j_4}, \boldsymbol{\rho}_{4,j_4+1}$ , ставится в соответствие одна точка

$$\mathbf{r} = a_r \sum_{n=0}^4 j_n \mathbf{e}_n \quad (2.55)$$

мозаики Пенроуза. Здесь  $a_r$  — сторона ромба в мозаике. Как показано в работе [183], точки  $\boldsymbol{\rho}$  образуют мозаику, равномерно покрывающую всю плоскость, если сумма  $\sum_{n=0}^4 \gamma_n$  принимает целое значение. Каноническая мозаика Пенроуза показана на рис. 2.10(a) и соответствует  $\gamma_n = 2/5$ . Её структурный фактор

$$f(\mathbf{q}) = \lim_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} e^{2i\mathbf{q}\mathbf{r}_j} = \sum_{h_1 h_2 h_3 h_4} f_{h_1 h_2 h_3 h_4} \delta_{2\mathbf{q}, \mathbf{G}_{h_1 h_2 h_3 h_4}} \quad (2.56)$$

проиллюстрирован на рис. 2.10(b) и состоит из брэгговских пиков на векторах дифракции

$$\mathbf{G}_{h_1 h_2 h_3 h_4} = G^* \sum_{n=1}^4 h_n \mathbf{e}_n, \quad G^* = \frac{2\pi}{a_r} \times \frac{2\pi\tau^2}{5}. \quad (2.57)$$

Здесь  $\mathcal{N}$  — число узлов решётки. Поскольку  $\sum_{n=0}^4 \mathbf{e}_n = 0$ , каждый вектор дифракции характеризуется лишь четырьмя независимыми целыми числами  $h_1 \dots h_4$ . Звезда каждого вектора  $\mathbf{G}$  состоит из 5 векторов дифракции, распределённых по двум противоположным правильным звёздам

$$\mathbf{G}_{n,\pm} = \pm G \mathbf{e}_n, \quad (2.58)$$

где  $n = 0 \dots 4$ .

Далее будет изучено поляризационно-зависимое пропускание света тремя периодическими и квазикристаллическими структурами различной симметрии, изображенными на рис. 2.11: квадратной решёткой наночастиц, гексагональной решёткой, и мозаикой Пенроуза. Структуры изготовлены методом электронно-лучевой литографии на стеклянной подложке. Каждый элемент структуры образован двумя золотыми нанодисками, разделёнными прослойкой диэлектрика  $\text{MgF}_2$ . Для всех решёток поверхностная плотность наночастиц одинаковая,  $\sim 6 \text{ мкм}^{-2}$ , для квадратной решётки это соответствует периоду в 400 нм. Из-за технологических особенностей процедуры литографии каждая наночастица сужается вверх с углом сужения примерно  $10^\circ$ . Экспериментальные спектры пропускания структур при нормальном падении показаны на рис. 2.11(e-g). Измерения выполнялись

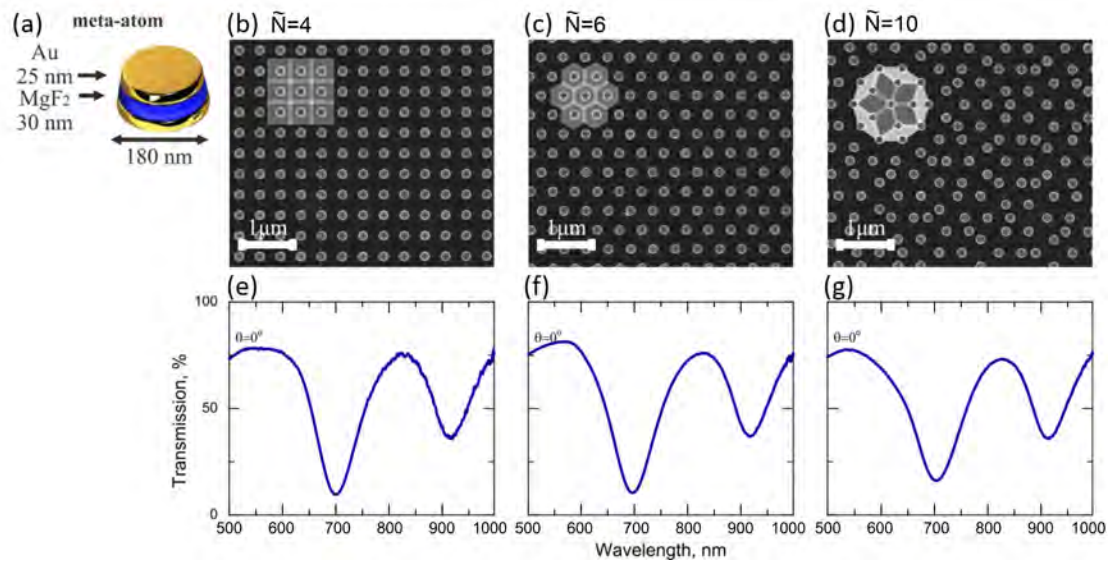


Рис. 2.11: Изготовленные структуры и их экспериментальные спектры пропускания. (a) Схематическое изображение одной наночастицы. (b-d) снимки в сканирующем электронном микроскопе квадратной решётки, гексагональной решётки и мозаики Пенроуза, соответственно. (e-g) Спектры пропускания структур при нормальном падении. Из работы [A11].

С.С. Круком в Национальном Австралийском университете. В пропускании проявляются два резонансных провала на длинах волн 700 нм и 900 нм, соответствующих электрическому и магнитному дипольным резонансам отдельных наночастиц [188].

### 2.3.2 Поляризационные эффекты в пропускании

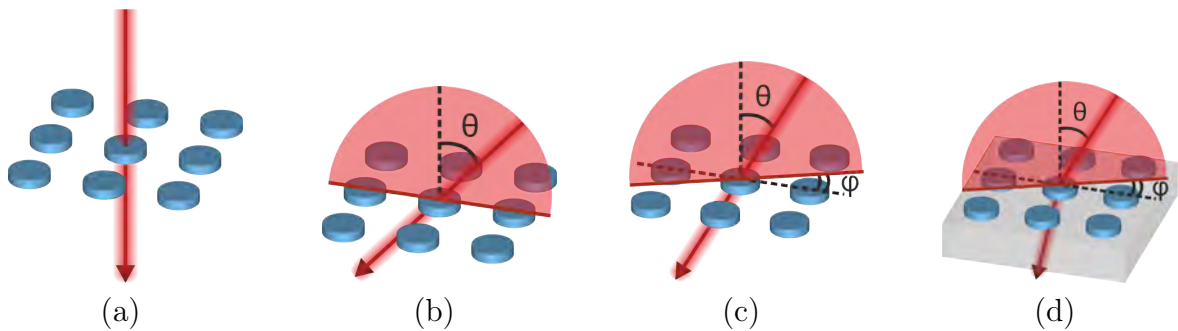


Рис. 2.12: Различные геометрии возбуждения структур

Перед тем, как перейти к аналитическому расчёту спектров пропускания про-

ведём симметричный анализ возможных поляризационно-зависимых эффектов. Изучается пропускание света при падении плоской монохроматической волны. Амплитуды векторов электрического поля прошедшей волны  $\mathbf{E}_t$  и падающей волны  $\mathbf{E}_i$  могут быть связаны матрицей Джонса  $\hat{t}$ :

$$\begin{pmatrix} E_{t,m} \\ E_{t,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{mm} & t_{mn} \\ t_{nm} & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{i,m} \\ E_{i,n} \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

или  $\mathbf{E}_t = \hat{t}\mathbf{E}_i$ . Индексы  $m$  и  $n$  соответствуют двум ортогональным состояниям поляризации света. В базисе линейно поляризованных волн  $m = \text{TE}$  и  $n = \text{TM}$ , а в базисе циркулярно поляризованных волн  $m = +$  и  $n = -$  [189]. Различие диагональных компонент этой матрицы определяет линейный дихроизм  $\delta_{\text{lin}} = |t_{\text{TE,TE}}|^2 - |t_{\text{TM,TM}}|^2$  или циркулярный дихроизм  $\delta_{\text{circ}} = |t_{++}|^2 - |t_{--}|^2$ . Недиагональные компоненты  $t_{+-}$ ,  $t_{-+}$ ,  $t_{\text{TE,TM}}$ ,  $t_{\text{TM,TE}}$  описывают конверсию поляризации. Различие фаз диагональных компонент в базисе циркулярно поляризованных волн связано с вращением плоскости линейной поляризации  $\zeta_{\text{circ}} = \arg(t_{++}/t_{--})$ .

Покажем, каким образом симметрия периодических и квазикристаллических решёток раскрывается в поляризационной зависимости пропускания. На рис. 2.12 показаны четыре различных случая возбуждения.

Случай (а) соответствует нормальному возбуждению решёток с порядком вращательной симметрии  $N > 2$  (симметрия  $D_{Nh}$ ). В этом случае матрицы Джонса кратны единичной, и поляризационные эффекты не проявляются.

Случай (б) соответствует наклонному падению (полярный угол  $\theta > 0$ ), при этом плоскость падения совпадает с вертикальной плоскостью отражения структуры. В этом случае единственным поляризационным эффектом является двулучепреломление, т.е. разность коэффициентов пропускания поперечных электрически и магнитно-поляризованных волн  $t_{\text{TE,TE}}$  и  $t_{\text{TM,TM}}$ .

Случай (в) соответствует наклонному падению при произвольном азимутальном угле  $\phi$ . При этом, дополнительно к двулучепреломлению, появляется возможность конверсии из ТЕ поляризации в ТМ,  $t_{\text{TE,TM}} = t_{\text{TM,TE}} \neq 0$ . В системе сохраняется симметрия к отражению в горизонтальной плоскости  $z = 0$  и циркулярный

дихроизм в пропускании не проявляется,  $t_{++} = t_{--}$ .

Наконец, случай (d) описывает структуру с нарушенной зеркальной симметрией в горизонтальной плоскости, например, за счёт наличия подложки. Для такой системы все четыре компоненты матриц Джонса различны как в линейном, так и в циркулярном базисе. Таким образом, циркулярный дихроизм оказывается эффектом, наиболее чувствительным к симметрии структуры. Поскольку степень циркулярного дихроизма должна обращаться в ноль, когда плоскость падения совпадает с вертикальной плоскостью отражения, то можно ожидать подавления дихроизма с ростом вращательной симметрии структуры. Тем не менее, как будет показано далее, эти эффекты могут наблюдаться даже для высокой степени вращательной симметрии. Это является отличием фотонных кристаллов и метаматериалов от естественных кристаллов, в которых пространственная дисперсия высокого порядка подавлена [190, 191]. В следующем разделе получены явные аналитические выражения для матриц Джонса и степени циркулярного дихроизма.

### 2.3.3 Аналитическая теория спектров пропускания

Используем дискретное дипольное приближение и рассмотрим структуру как массив одинаковых наночастиц с электрической поляризуемостью  $\hat{\alpha}$ , расположенных в плоскости  $xy$ , и центрированных в точках  $\mathbf{r}$ . Для частиц в форме дисков тензор поляризуемости диагонален и  $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} \equiv \alpha$ . Для тонких дисков также пренебрежём поляризуемостью в поперечном направлении. В этом приближении структура обладает плоскостью отражения  $z = 0$  и точечной симметрией  $D_{Nh}$ , где  $N = 4, 5, 6$  для квадратной решётки, мозаики Пенроуза и гексагональной решётки, соответственно. Далее будет также учтена подложка и рассмотрен случай симметрии  $C_{Nv}$ , когда горизонтальная плоскость отражения отсутствует.

Электрическое поле удовлетворяет уравнению

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = q^2 \mathbf{E} + 4\pi\hat{\alpha} \sum_{\mathbf{a}} \mathbf{E}(\mathbf{a})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}), \quad (2.60)$$

где  $q = \omega/c$  и  $\omega$  — частота света. Падающая плоская волна характеризуется ампли-

тудой  $\mathbf{E}_i$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Для определения рассеянной волны разложим поле по плоским волнам [A10]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{E}_{\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.61)$$

Подставляя (2.61) в (2.60), получим следующую систему уравнений для пространственных гармоник электрического поля:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{G}} = \alpha \Phi(k_{\parallel,G} R) \hat{\Pi}_{\mathbf{G}} \sum_{\mathbf{G}'} f(\mathbf{G}' - \mathbf{G}) \mathcal{E}_{\mathbf{G}'} + \mathcal{E}_i \delta_{\mathbf{G},0}. \quad (2.62)$$

Здесь символом  $\mathcal{E}_{\mathbf{G}}$  обозначен двумерный вектор  $(E_{\mathbf{G},x}, E_{\mathbf{G},y})^T$ ,  $f(\mathbf{G}' - \mathbf{G})$  — структурный фактор (2.56) и матрица  $\hat{\Pi}_{\mathbf{G}}$  определена как

$$\hat{\Pi}_{\mathbf{G}} \equiv \frac{i}{S k_{z,G}} \begin{pmatrix} q^2 - k_{x,G}^2 & -k_{x,G} k_{y,G} \\ -k_{x,G} k_{y,G} & q^2 - k_{y,G}^2 \end{pmatrix},$$

где  $S$  — средняя площадь на один элемент решётки,  $(k_{x,G}, k_{y,G}) \equiv \mathbf{k}_{\parallel,G} = (k_x + G_x, k_y + G_y)$ ,  $k_{z,G} = \sqrt{q^2 - k_{\parallel,G}^2}$  с  $\text{Re}\{k_{z,G}\} > 0$ . Уравнения (2.62) описывают связь между различными пространственными гармониками электрического поля за счёт брэгговской дифракции. Форм-фактор одиночного диска

$$\Phi(k_{\parallel,G} R) = \frac{1}{S} \iint_{\rho < R} d^2 \rho e^{-i\mathbf{k}_{\parallel,G}\cdot\boldsymbol{\rho}} = \frac{2J_1(k_{\parallel,G} R)}{k_{\parallel,G} R} \quad (2.63)$$

введён феноменологически, как поправка к приближению точечных диполей (2.60) согласно [A10], интегрирование выполняется по внутренней части диска. Форм-фактор уменьшается для волн с волновыми векторами  $k_{\parallel,G}$ , значительно превосходящими обратный радиус диска  $1/R$ . Пропущенная волна определяется из решения системы уравнений (2.62) как [A10]:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) \equiv e^{ik_x x + ik_y y + ik_z,0 z} \hat{\mathbf{t}} \mathbf{E}_i = e^{ik_x x + ik_y y + ik_z,0 z} \hat{\Pi}_+ \mathcal{E}_0, \quad (2.64)$$

где  $[\Pi_{\pm}]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \kappa_{\pm,\alpha} \kappa_{\pm,\beta} / q^2$  и  $\boldsymbol{\kappa}_{\pm} = (k_x, k_y, \pm k_z)$ .

Уравнения (2.62) и (2.64) применимы для произвольных периодических и квазикристаллических структур, характеризуемых дискретным спектром Фурье. На-

шей задачей является получение аналитических выражений для элементов матриц Джонса в низшем неисчезающем порядке по поляризуемости  $\alpha$ . Микроскопически, поляризационно-зависимые эффекты, такие как циркулярный дихроизм и конверсия поляризации, обеспечиваются связью падающей волны с пространственными гармониками с  $\mathbf{G} \neq 0$  [192]. Вместо численного решения бесконечной системы (2.62), учтём только набор векторов  $\mathbf{G}$  одной и той же длины, сохраняющий симметрию решётки и дающий основной вклад в эффект дихроизма. Оптимальная величина  $G = |\mathbf{G}|$ , для которой параметр связи  $|f(\mathbf{G})\Phi(GR)|$  в (2.62) максимален, порядка обратного расстояния  $2\pi/a$  между соседними наночастицами в решётке. Для больших  $G$  взаимодействие подавлено из-за уменьшающегося форм-фактора  $\Phi(k_{\parallel,G}R)$ , для малых  $G$  взаимодействие неэффективно из-за малого структурного фактора  $f(\mathbf{G})$  (см. рис. 2.10). Таким образом, для чётной степени вращательной симметрии решётки  $N$ , учитывается только гармоника с  $\mathbf{G} = 0$  и  $N$  векторов дифракции  $\mathbf{G}_n = G(\cos \phi_n, \sin \phi_n, 0)^T, n = 1 \dots N, \phi_n = 2\pi(n-1)/N$ . Мы также учитываем лишь компоненты структурного фактора, связывающие векторы  $\mathbf{G}_n$  и вектор  $G = 0$ . Анализ связи между различными векторами  $\mathbf{G}_n$  с  $n \neq 0$  был выполнен в работе [A10] для случая нормального падения. Таким образом, в рассматриваемом приближении брэгговская дифракция в структуре описывается лишь одной компонентой структурного фактора  $f \equiv f(\mathbf{G}_n)$ . В случае нечётной степени вращательной симметрии  $N$ , соответствующей гексагональной решётке и мозаике Пенроуза, также дополнительно учтём  $N$  векторов дифракции  $-\mathbf{G}_n$ , противоположных векторам  $\mathbf{G}_n$ ; их связь с волной с  $G = 0$  описывается комплексно сопряженным структурным фактором  $f^* \equiv f(-\mathbf{G}_n)$ .

Теперь бесконечная система линейных уравнений (2.62) сведена к  $2(N+1)$  или  $2(2N+1)$  уравнениям для чётных и нечётных  $N$ , соответственно. Для чётного  $N$



эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 &= \alpha \hat{\Pi}_0 [\mathcal{E}_0 + f^* \sum_{n=1}^N \mathcal{E}_{\mathbf{G}_n}] + \mathcal{E}_i, \\ \mathcal{E}_{\mathbf{G}_n} &= \alpha \Phi(GR) \hat{\Pi}_{\mathbf{G}_n} (f \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\mathbf{G}_n}), \quad n = 1 \dots N.\end{aligned}\tag{2.65}$$

Аналогично для нечётного  $N$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 &= \alpha \hat{\Pi}_0 [\mathcal{E}_0 + \sum_{n=1}^N (f^* \mathcal{E}_{\mathbf{G}_n} + f \mathcal{E}_{-\mathbf{G}_n})] + \mathcal{E}_i, \\ \mathcal{E}_{\mathbf{G}_n} &= \alpha \Phi(GR) \hat{\Pi}_{\mathbf{G}_n} (f \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\mathbf{G}_n}), \quad n = 1 \dots N, \\ \mathcal{E}_{-\mathbf{G}_n} &= \alpha \Phi(GR) \hat{\Pi}_{-\mathbf{G}_n} (f^* \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{-\mathbf{G}_n}).\end{aligned}\tag{2.66}$$

Здесь  $\Phi(k_{\parallel,0}R) \equiv \Phi(\omega R/c)$  заменено на единицу и  $\Phi(k_{\parallel,\mathbf{G}_n}R)$  — на  $\Phi(GR)$ , поскольку считается, что длина волны света превосходит размер дисков и больше постоянной решётки. Рассмотрение в обратном пространстве позволяет использовать один и тот же набор уравнений как для квазикристаллических, так и для периодических структур. Отличия между квадратной решёткой, гексагональной решёткой и мозаикой Пенроуза в уравнениях (2.65)–(2.66) сводятся лишь к степени вращательной симметрии  $N$  и величине структурного фактора решётки  $f$ . Это является существенным преимуществом используемого подхода перед прямыми численными методами решения электродинамической задачи. Стандартные численные подходы, такие, как метод конечных элементов и конечных разностей, оперируют в реальном пространстве и не приспособлены для описания квазикристаллических структур.

Решим систему (2.65), (2.66), выражая  $\mathcal{E}_{\mathbf{G}_n}$  и  $\mathcal{E}_{-\mathbf{G}_n}$  через  $\mathcal{E}_0$  и подставляя в уравнение для  $\mathcal{E}_0$ . Для чётного  $N$  находим

$$\mathcal{E}_0 = \left[ 1 - \alpha \hat{\Pi}_0 \left( 1 + |f^2| \sum_{n=1}^N \left( 1 - \alpha \Phi(GR) \hat{\Pi}_{\mathbf{G}_n} \right)^{-1} \right) \right]^{-1} \mathcal{E}_i.\tag{2.67}$$

Далее разложим ответ по параметрам  $\alpha$  и  $q/G$ . Нас интересуют первые исчезающие слагаемые, приводящие к эффекту циркулярного дихроизма, например:

$$\mathbf{e}_L \cdot \sum_{n=1}^N (-\hat{\Pi}_{\mathbf{G}_n})^{N-1} \mathbf{e}_T = -\frac{q^N N \sin^{N-2} \theta}{2S^{N-1} G} \sin N\phi,\tag{2.68}$$

где  $\mathbf{e}_L \equiv \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}$ ,  $\mathbf{e}_T \equiv -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}$ . Упрощая и подставляя результат в (2.64), получаем

$$\hat{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 1 + U + V \cos \tilde{N}\phi & V \sin \tilde{N}\phi \\ V \sin \tilde{N}\phi & 1 + U \cos^2 \theta - V \cos \tilde{N}\phi \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

где  $\tilde{N} = N$  для чётных  $N$  и  $\tilde{N} = 2N$  для нечётных  $N$ . Здесь

$$U = i\alpha q^2/S, \quad V(\theta) = -\tilde{N} \cos \theta \frac{q}{G} \Phi(GR) |f|^2 U^{\tilde{N}-1} \sin^{\tilde{N}-2} \theta. \quad (2.70)$$

Матрица приведена в базисе ТЕ и ТМ поляризованных волн.

С целью обобщения результата (2.69) на случай симметрии  $C_{Nv}$  учтём отличие плоскости отражения  $z = 0$ . Микроскопически понижение степени симметрии может быть вызвано двумя независимыми обстоятельствами: (а) асимметричными рассеивателями [см. рис. 2.11(а)] и (б) наличием подложки. Прямой численный расчёт, выполненный С.С. Круком для периодических структур [188], показывает, что сужением наночастиц кверху можно пренебречь и снятие зеркальной симметрии обусловлено подложкой. В пренебрежении многократными отражениями, подложка может быть учтена умножением матрицы Джонса (2.69) на матрицу переноса через однородную подложку,

$$\hat{\mathbf{t}}(C_{Nv}) = \begin{pmatrix} t_{\text{ТЕ}} & 0 \\ 0 & t_{\text{ТМ}} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{t}}(D_{Nh}), \quad (2.71)$$

где  $t_{\text{ТЕ}}$  и  $t_{\text{ТМ}}$  — коэффициенты пропускания подложки для соответствующих поляризаций,  $t_{\text{ТЕ}} - t_{\text{ТМ}} \sim \Delta_{\text{sub}} \sin^2 \theta$  для малых  $\theta$ . Приближение (2.71) не учитывает возможное влияние подложки на взаимодействие между модами наночастиц. Однако, это приближение позволяет учесть симметрию задачи и получить явную функциональную зависимость для наблюдаемых эффектов. Комбинируя формулы (2.69) и (2.71), получаем следующие выражения для матриц Джонса в базисе

циркулярно поляризованных волн:

$$t_{\pm, \pm} = \frac{1}{2}(\tilde{t}_{\text{TE}} + \tilde{t}_{\text{TM}}) \pm \frac{i}{2}V(t_{\text{TM}} - t_{\text{TE}}) \sin \tilde{N}\phi, \quad (2.72)$$

$$t_{\pm, \mp} = \frac{1}{2}(\tilde{t}_{\text{TM}} - \tilde{t}_{\text{TE}}) \mp \frac{i}{2}V(t_{\text{TM}} - t_{\text{TE}}) \sin \tilde{N}\phi, \quad (2.73)$$

$$\tilde{t}_{\text{TE}} = t_{\text{TE}}(1 + U + V \cos \tilde{N}\phi), \quad (2.74)$$

$$\tilde{t}_{\text{TM}} = t_{\text{TM}}(1 + U \cos^2 \theta - V \cos \tilde{N}\phi). \quad (2.75)$$

Таким образом, уравнения (2.69)–(2.75) полностью описывают поляризационную зависимость пропускания через структуры на подложке (группа симметрии  $C_{Nv}$ ) и в однородной среде (группа симметрии  $D_{Nh}$ ) для произвольных полярного ( $\theta$ ) и азимутального ( $\phi$ ) углов волнового вектора падающей волны.

Степень циркулярного дихроизма  $\delta_{\text{circ}}$  может быть найдена из (2.72) и представлена в виде

$$\delta_{\text{circ}} = -\sin \tilde{N}\phi \operatorname{Im}[(\tilde{t}_{\text{TE}}^* + \tilde{t}_{\text{TM}}^*)V(t_{\text{TM}} - t_{\text{TE}})]. \quad (2.76)$$

Из уравнения (2.76) явно видно, что в нашей модели эффект циркулярного дихроизма требует двулучепреломления в подложке, описываемого множителем  $t_{\text{TM}} - t_{\text{TE}}$ . Для малых углов падения разность  $t_{\text{TM}} - t_{\text{TE}}$  квадратична по компонентам волнового вектора фотона в плоскости и может быть представлена как

$$t_{\text{TM}} - t_{\text{TE}} \approx \Delta_{\text{sub}} \sin^2 \theta.$$

Вводя средний коэффициент пропускания  $t = (\tilde{t}_{\text{TE}} + \tilde{t}_{\text{TM}})/2$  формулу (2.76) можно представить в виде

$$\delta_{\text{circ}} = W \cos \theta \sin^{\tilde{N}} \theta \sin \tilde{N}\phi, \quad (2.77)$$

где  $\theta$  и  $\phi$  — полярный и азимутальный углы падения, и параметр

$$W = \operatorname{Im} \left[ \frac{\tilde{N}q}{G} \Phi(GR) |f|^2 U^{\tilde{N}-1} t^* \Delta_{\text{sub}} \right] \quad (2.78)$$

характеризует величину эффекта.

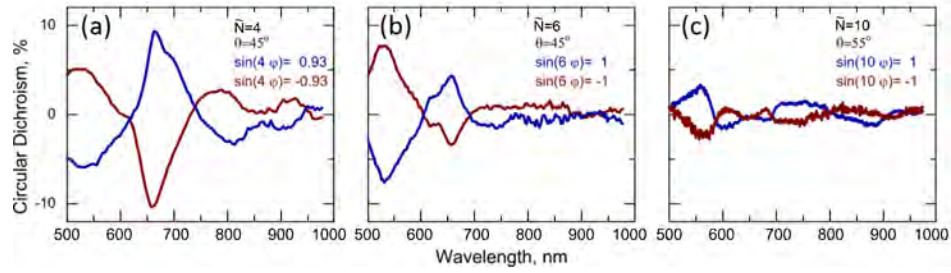


Рис. 2.13: Спектры циркулярного дихроизма при наклонном падении для квадратной и гексагональной решёток, а также для мозаики Пенроуза ( $\tilde{N} = 4, 6, 10$ , соответственно). Синие и красные кривые измерены азимутальных углов падения  $\phi$  и  $-\phi$ . Из работы [A11].

### 2.3.4 Сопоставление с экспериментом

Далее степень циркулярного дихроизма будет исследована в зависимости от трёх параметров: степени вращательной симметрии  $\tilde{N}$ , орбитального и полярного углов  $\theta$  и  $\phi$ . Примеры измеренных спектров дихроизма  $\delta_{\text{circ}} = |t_{++}|^2 - |t_{--}|^2$  представлены на рис. 2.13. В согласии с уравнением (2.77), наибольшая степень дихроизма соответствует квадратной решётке, с наименьшей степенью вращательной симметрии. Синие и красные кривые измерены для противоположных значений  $\sin \tilde{N}\phi$ , при этом знак дихроизма меняется на противоположный. Изучим более детально зависимость от углов возбуждения. Из эксперимента следует, что изменение угла падения света приводит к небольшому сдвигу положения резонансов в спектре пропускания. Для удобства анализа далее представлены данные для значения  $\delta_{\text{circ}}$ , усреднённого в интервале волн  $0.5 \div 1$  мкм, охватывающем и электрический, и магнитный дипольный резонансы. На рис. 2.14 показана зависимость степени дихроизма от углов падения. Точки соответствуют экспериментальным измерениям, а линии — подгонке по уравнению (2.77) с универсальным значением  $W = 0.16$ . Видно, что экспериментальные кривые достаточно хорошо согласуются с аналитической зависимостью. Было проверено, что согласие эксперимента и теории сохраняется независимо от интервала усреднения дихроизма, если этот интервал охватывает резонанс пропускания. Порядок величины дихроизма так-

же находится в количественном согласии с (2.78). В частности, для квадратной решётки с  $\tilde{N} = 4$  период  $a$  равняется 400 нм и  $|f|^2 = 1$ . Поскольку провал в измеренных спектрах пропускания на рис. 2.11(d–f) доходит почти до нуля, заключаем, что  $|U| \sim 1$ . Коэффициент пропускания через стеклянную подложку по модулю близок к единице. Разница между коэффициентами пропускания ТЕ и ТМ волн  $\Delta_{\text{sub}}$ , вызванная подложкой, может быть оценена по формулам Френеля как  $|\Delta_{\text{sub}}| = 4|n_{\text{glass}} - 1|^2/|n_{\text{glass}} + 1|^2 \approx 0.1$ , где  $n_{\text{glass}} \approx 1.45$  — показатель преломления стекла и многократными отражениями в подложке пренебрегается. Множитель  $\Phi(GR)$  в (2.78) положим равным единице. Это приводит к оценке

$$|W| \sim \frac{4\tilde{N}a}{\lambda} \frac{|n_{\text{glass}} - 1|^2}{|n_{\text{glass}} + 1|^2} \approx 0.2$$

в окрестности электродипольного резонанса  $\lambda = 700$  нм, в согласии с усреднённым по спектру значением 0.16.

Таким образом, предложенная простая теоретическая модель позволяет описать основные экспериментальные результаты. Анализ демонстрирует, что угловая зависимость пропускания подавляется с ростом степени вращательной симметрии структуры. Для мозаики Пенроуза циркулярным дихроизмом можно пренебречь при углах падения менее  $50^\circ$ , в то время как в квадратной и гексагональной решётках он проявляется и при меньших углах.

## 2.4 Резонансы Фано в разупорядоченных фотонных кристаллах

### 2.4.1 Модель

В этом разделе перейдём от квазикристаллических структур к неупорядоченным. Рассматривается одномерный фотонный кристалл  $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}\dots$  со специфическим типом беспорядка: случайной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_B$  слоёв  $\mathcal{B}$ , распределённой вокруг среднего значения  $\bar{\varepsilon}_B$  с дисперсией  $\sigma_{\varepsilon_B}$ . Диэлектрические проницаемости  $\varepsilon_A$  слоёв  $\mathcal{A}$ , толщины слоёв  $a$ ,  $b$  и период  $d = a + b$  фиксированы.

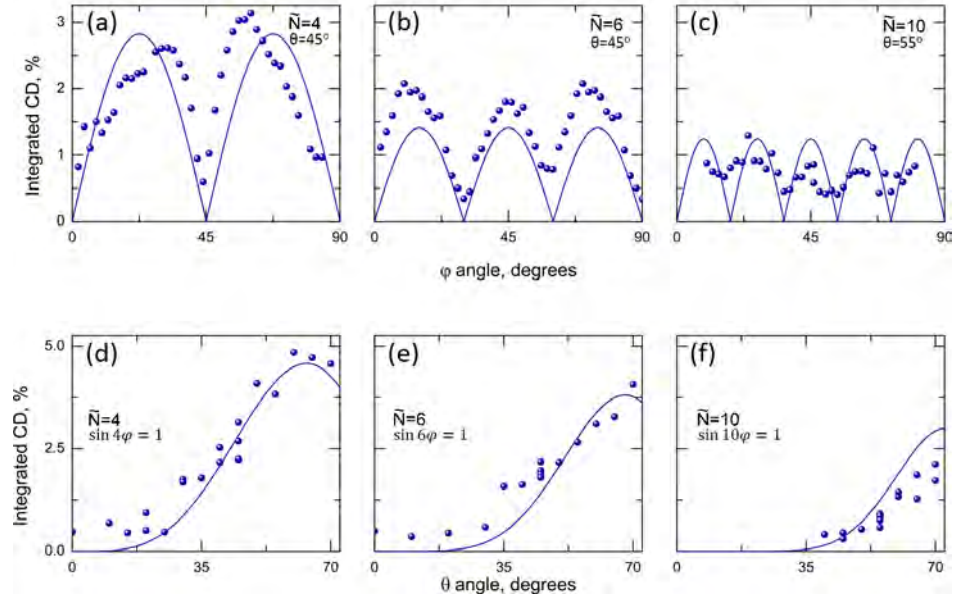


Рис. 2.14: Зависимости степени циркулярного дихроизма  $\delta_{\text{circ}}$  от азимутального (a-c) и полярного (d-f) углов  $\phi$  и  $\theta$ . Точки соответствуют экспериментальным данным, линии — расчёту согласно (2.77) с  $W = 0.16$ . Из работы [A11].

Разброс проницаемости разных слоёв  $\mathcal{B}$  является некоррелированным. Зависимость диэлектрической проницаемости от координаты схематически показана на рис. 2.15.

Пропускание  $T$  рассматриваемого неупорядоченного фотонного кристалла может быть охарактеризовано коэффициентом экстинкции  $1/\ell$ , определяемым как усредненное по ансамблю случайных реализаций беспорядка выражение  $-\ln T(N)/Nd$ , где  $N$  — число пар слоёв  $\mathcal{AB}$ . Длина  $\ell$  определяет скорость затухания пропускания с толщиной структуры, которая, согласно общей теории одномерных неупорядоченных систем, принимает конечное значение во всей области спектра за возможным исключением счётного множества частот [193]. Система проявляет свойство эргодичности, т.е. экстинкция может быть эквивалентно определена как  $-\lim_{N \rightarrow \infty} \ln T(N)/Nd$ . Затухание может быть обусловлено как процессами локализации света из-за беспорядка, так и процессами брэгговской дифракции. Далее будет получено аналитическое выражение для величины  $\ell$  в зависимости от силы беспорядка и других параметров структуры.

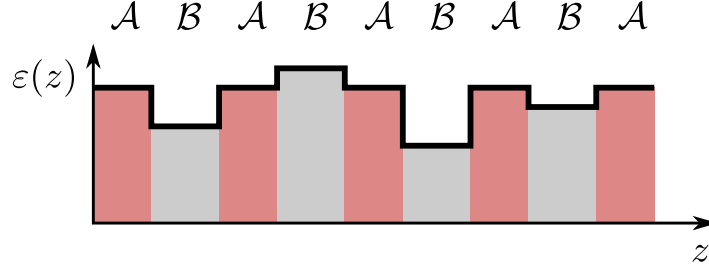


Рис. 2.15: Иллюстрация исследуемой модели беспорядка в фотонном кристалле. Схематически показана зависимость диэлектрической проницаемости от координаты  $z$ .

В отсутствие беспорядка структура является одномерным фотонный кристаллом с запрещёнными зонами вокруг частот  $\omega_h$ , удовлетворяющих брэгговскому условию

$$\frac{\omega_h \bar{n} d}{c} = \pi h, \quad h = 1, 2, \dots \quad (2.79)$$

где  $\bar{n} = (a\sqrt{\varepsilon_A} + b\sqrt{\varepsilon_B})/d$  — средний показатель преломления. Внутри каждого слоя  $\mathcal{A}$  электрическое поле может быть представлено в виде

$$E(z, j) = U_j e^{iq_A(z-jd)} + V_j e^{-iq_A(z-jd)}, \quad (2.80)$$

где  $q_A = \omega\sqrt{\varepsilon_A}/c$ . Связь между значениями амплитуд  $U$  и  $V$  в  $j$ -м и  $j+1$ -м слоях  $\mathcal{A}$  может быть установлена из метода матриц переноса

$$\begin{pmatrix} U_{j+1} \\ V_{j+1} \end{pmatrix} = M_j \begin{pmatrix} U_j \\ V_j \end{pmatrix}, \quad (2.81)$$

где матрица переноса  $M_j$  определяется произведением матриц переноса через слои  $M_A$  и  $M_{B,j}$ , а также через интерфейсы  $\mathcal{AB}$  и  $\mathcal{BA}$  следующим образом:

$$M_j = M_{AB,j} M_{B,j} M_{BA,j} M_A, \quad (2.82)$$

$$M_A = \begin{pmatrix} e^{iq_A} & 0 \\ 0 & e^{-iq_A} \end{pmatrix}, \quad M_{B,j} = \begin{pmatrix} e^{iq_{B,j}} & 0 \\ 0 & e^{-iq_{B,j}} \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

$$M_{AB,j} = M_{BA,j}^{-1} = \frac{1}{1 - \rho_j} \begin{pmatrix} 1 & -\rho_j \\ -\rho_j & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_j = \frac{n_{B,j} - n_A}{n_{B,j} + n_A}, \quad (2.84)$$

где  $n_A = \sqrt{\varepsilon_A}$ ,  $n_B = \sqrt{\varepsilon_B}$  и  $q_{B,j} = \omega n_{B,j}/c$ . Выполнив перемножение матриц, находим

$$M_j = \frac{1}{1 - \rho_j^2} \begin{pmatrix} e^{i(\phi_A + \phi_{B,j})} - \rho^2 e^{i(\phi_A - \phi_{B,j})} & 2i\rho \sin \phi_{B,j} e^{-i\phi_A} \\ -2i\rho \sin \phi_{B,j} e^{i\phi_A} & e^{-i(\phi_A + \phi_{B,j})} - \rho^2 e^{-i(\phi_A - \phi_{B,j})} \end{pmatrix}, \quad (2.85)$$

где  $\phi_A = q_A a$ ,  $\phi_{B,j} = q_{B,j} b$ . Далее рассматривается случай малого диэлектрического контраста ( $|\varepsilon_{B,j} - \varepsilon_A|, \sigma_{\varepsilon_B} \ll \varepsilon_A$ ). В этом приближении матрица переноса принимает вид

$$M_j = \begin{pmatrix} e^{i(\phi_A + \phi_{B,j})} & i \frac{\delta n_{B,j}}{n_A} \sin \phi_{B,j} e^{-i\phi_A} \\ -i \frac{\delta n_{B,j}}{n_A} \sin \phi_{B,j} e^{i\phi_A} & e^{-i(\phi_A + \phi_{B,j})} \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

где введён локальный контраст показателя преломления  $\delta n_{B,j} \equiv n_{B,j} - n_A$ . Нас интересует узкий интервал частот вблизи брэгговской частоты идеальной структуры (2.79). Как было показано в предыдущем разделе 2.2.2 при анализе двухволнового приближения, электрическое поле вблизи брэгговских частот может быть удовлетворительно представлено в виде суперпозиции пространственных гармоник с волновыми векторами близкими к  $G/2$  и  $-G/2$ , где  $G$  — соответствующий вектор дифракции. Используем приближение плавных огибающих, основанное на схожей идее. Представим амплитуды  $U_j$  и  $V_j$  в виде

$$U_j = e^{-i\pi j h} u(j), \quad V_j = e^{i\pi j h + i\Phi_h} v(j), \quad (2.87)$$

где  $u(j)$  и  $v(j)$  — плавные функции  $j$ . Разностное уравнение (2.81) может быть сведено к дифференциальному уравнению на плавные огибающие следующим образом:

$$\begin{pmatrix} u_{j+1} \\ u_{j+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} \approx \frac{d}{dj} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\phi_A + \phi_{B,j} - \pi h)} & i \frac{\delta n_{B,j}}{n_A} \sin \phi_{B,j} e^{-i\phi_A - i\pi h + i\Phi_h} \\ -i \frac{\delta n_{B,j}}{n_A} \sin \phi_{B,j} e^{i\phi_A + i\pi h - i\Phi_h} & e^{-i(\phi_A + \phi_{B,j}) + i\pi h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Окончательно, получаем основную систему уравнений, описывающих распространение и рассеяние волн в структуре

$$\begin{aligned} \frac{du}{dj} &= \frac{i}{2}(\alpha u + \beta v), \\ \frac{dv}{dj} &= -\frac{i}{2}(\alpha v + \beta u), \end{aligned} \quad (2.89)$$



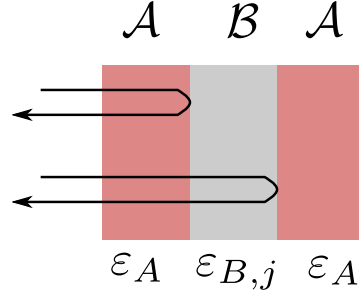


Рис. 2.16: Схематическое отображение двух интерферирующих процессов отражения от слоя  $\mathcal{B}$ .

где

$$\alpha = 2\pi h \frac{\omega - \omega_h}{\omega_h} + 2(\eta - \langle \eta \rangle) \Phi_h, \quad \beta = 2\eta \sin \Phi_h + \eta^2 (2\Phi_h \cos \Phi_h - \sin \Phi_h), \quad (2.90)$$

фаза  $\Phi_h$  равняется  $\omega_h \sqrt{\varepsilon_A} b / c$  и введён локальный безразмерный диэлектрический контраст  $\eta(j) = 1/2(\varepsilon_{B,j}/\varepsilon_A - 1) \approx n_{B,j}/n_A - 1$ . Из вида уравнений (2.89) следует, что функция  $\alpha(j)$  описывает локальный набег фазы, а функция  $\beta(j)$ , определяемая диэлектрическим контрастом, описывает рассеяние волн. Обе эти величины являются случайными. Таким образом, уравнения (2.89) имеют вид ланжевенских уравнений, описывающих динамику волн под воздействием случайной силы  $\eta(j)$ . Длина экстинкции  $\ell$  формально задана как предел  $1/\ell = \lim_{j \rightarrow \infty} \ln \sqrt{|u_j|^2 + |v_j|^2} / jd$ . Стандартная процедура определения  $\ell$  опирается на сведение стохастических ланжевенских уравнений к уравнению Колмогорова-Фоккера-Планка для функции распределения случайных величин. Эта процедура может быть выполнена строго лишь тогда, когда случайные силы имеют гауссовскую статистику. Слагаемое  $\propto \eta^2$  в (2.89) не является гауссовым. Для дальнейшего рассмотрения оно является крайне существенным. Благодаря этому слагаемому среднее по беспорядку значение  $\langle \beta \rangle$  отлично от нуля даже для структуры с нулевым средним диэлектрическим контрастом, в которой  $\langle \varepsilon_B \rangle = \varepsilon_A$ . Чтобы объяснить этот эффект, запишем коэффициент отражения от пары слоёв  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ ,

пренебрегая процессами многократного отражения:

$$r \approx \frac{n_A - n_{B,j}}{n_A + n_{B,j}} (1 - e^{2i\omega n_{B,j} b/c}). \quad (2.91)$$

Здесь учтены два процесса отражения от передней и задней границ слоя, проиллюстрированные на рис. 2.16. В случае, когда  $\langle n_B \rangle = n_A$ , слагаемые в (2.91) в первом порядке по диэлектрическому контрасту  $n_A - n_{B,j}$  обращаются в нуль после усреднения по беспорядку. Слагаемые во втором порядке по контрасту имеют ненулевое среднее значение из-за корреляции флуктуаций отражения от границ слоёв и случайного набега фазы в слое  $B$ . Эти корреляции приводят к вкладу в  $\beta$  (2.90), пропорциональному  $\eta^2$ . Отметим, что этот вклад не учитывался в недавней работе [158]. В работе [159] квадратичные слагаемые учитывались, однако использовалось приближение случайной фазы для величины  $u/v$ , которое в рассматриваемом случае не является достаточным. Нами будет использовано следующее приближение: случайная негауссова величина  $\eta^2$  в (2.89) заменяется на её значение, усреднённое по реализациям беспорядка. После этого задача может быть решена стандартными методами [193].

## 2.4.2 Расчёт длины экстинкции

Длина экстинкции может быть рассчитана из системы (2.89) после того, как она сведена к уравнению Колмогорова-Фоккера-Планка. Этот подход применялся в работе [A12]. Тот же самый аналитический ответ может быть получен и непосредственно из стохастических уравнений (2.89) более компактным и наглядным образом. Для этого рассмотрим случай малого диэлектрического контраста ( $\alpha \gg \beta$ ) и исключим  $v$  из первого из уравнений с точностью до второго порядка по  $\beta$ :

$$\frac{du}{dj} = \frac{i}{2}\alpha u + \frac{1}{4}\beta(j) \int_{-\infty}^j dj' u(j') \beta(j') e^{i \int_j^{j'} dj'' \alpha(j'')/2}, \quad (2.92)$$

где полагалось  $v(-\infty) \rightarrow 0$ . Приближение (2.92) применимо, если беспорядок по силе сопоставим или превосходит средний диэлектрический контраст. В этом случае связь между двумя уравнениями (2.89) оказывается слабой и может быть

использована теория возмущений. Будем искать решение (2.92) в виде

$$u(j) \propto e^{i \int^j dj' \alpha(j')/2 - jd/2\ell}, \quad (2.93)$$

где явно введена длина экстинкции  $\ell$ . Подставляя решение в виде (2.93) находим

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{2d} \operatorname{Re} \left\langle \int_{-\infty}^j dj' \beta(j) \beta(j') e^{i \int_{j'}^j dj'' \alpha(j'')} \right\rangle. \quad (2.94)$$

Здесь угловыми скобками обозначено усреднение по реализациям беспорядка. Для расчёта корреляционной функции воспользуемся теоремой Вика, позволяющей вычислить средние от произведений гауссовских случайных величин  $\delta\alpha = \alpha - \langle\alpha\rangle$  и  $\delta\beta = \beta - \langle\beta\rangle$  с корреляторами  $\langle\delta\alpha(j)\delta\alpha(j')\rangle = \langle\delta\alpha^2\rangle\delta(j-j')$ ,  $\langle\delta\beta(j)\delta\beta(j')\rangle = \langle\delta\beta^2\rangle\delta(j-j')$  как сумму произведений попарных средних:

$$\left\langle \int_0^j dj_1 \dots \int_0^j dj_{2n} \delta\alpha(j_1) \dots \delta\alpha(j_{2n}) \right\rangle = \langle\delta\alpha^2\rangle^n j^n \frac{(2n)!}{n!2^n}, \quad (2.95)$$

$$\left\langle \delta\beta(j) \int_0^j dj_1 \dots \int_0^j dj_{2n+1} \alpha(j_1) \dots \alpha(j_{2n+1}) \right\rangle = \frac{(2n+1)\langle\delta\alpha\delta\beta\rangle}{2} \langle\delta\alpha^2\rangle^n t^n \frac{(2n)!}{n!2^n}, \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \delta\beta^2(j) \int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_{2n+2} \alpha(t_1) \dots \alpha(t_{2n+2}) \right\rangle = \\ & = \langle\delta\beta^2\rangle \langle\delta\alpha^2\rangle^{n+1} t^{n+1} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!2^{n+1}} + \frac{(2n+1)(2n+2)\langle\delta\alpha\delta\beta\rangle^2}{4} \langle\delta\alpha^2\rangle^n \frac{(2n)!}{n!2^n}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Применяя эти выражения к средним от экспоненциальных множителей, находим

$$\langle e^{i \int_0^j \delta\alpha(j') dj'} \rangle = e^{-\langle\delta\alpha^2\rangle j/2}, \quad \langle \delta\beta e^{i \int_0^j \delta\alpha(j') dj'} \rangle = \frac{i\langle\delta\beta\delta\alpha\rangle}{2} e^{-\langle\delta\alpha^2\rangle j/2} \quad (2.98)$$

и

$$\langle \delta\beta(j) \delta\beta(j') e^{i \int_{j'}^j \delta\alpha(j'') dj''} \rangle = -\frac{\langle\delta\beta\delta\alpha\rangle^2}{4} e^{-\langle\delta\alpha^2\rangle(j-j)/2} + \langle\delta\beta^2\rangle \delta(j-j_1). \quad (2.99)$$

Наконец, для среднего в (2.94) получаем

$$\langle \beta(j)\beta(j')e^{i f_j^j, dj''\alpha(j'')} \rangle = \langle \delta\beta^2 \rangle \delta(j-j') + e^{-\langle \delta\alpha^2 \rangle (j-j')/2 + i\langle \alpha \rangle (j-j')} \left( \langle \beta \rangle + \frac{i\langle \delta\alpha\delta\beta \rangle}{2} \right)^2. \quad (2.100)$$

Подставляя это выражение в (2.94), находим для обратной длины экстинкции

$$\frac{d}{\ell} = \text{Im} \langle \alpha \rangle + \frac{1}{4} \text{Re} \langle \delta\beta^2 \rangle - \frac{1}{2} \text{Re} \frac{\langle [\langle \beta \rangle + i\langle \delta\alpha\delta\beta \rangle / 2]^2 \rangle}{i\langle \alpha \rangle - \langle \delta\alpha^2 \rangle / 2}. \quad (2.101)$$

Три слагаемых в (2.101) имеют качественно разную физическую природу. Выражение (2.101) применимо и для поглощающих структур, в которых величины  $\alpha$  и  $\beta$  могут принимать комплексные значения. Первое слагаемое описывает затухание волны за счёт поглощения, описываемого мнимой частью обобщённого фазового набега  $\alpha$ . Далее ограничимся случаем непоглощающих структур, в которых первое слагаемое обращается в нуль. Второе слагаемое связано с нерезонансным рассеянием на флуктуациях диэлектрической проницаемости слоёв  $\mathcal{B}$ . Третье слагаемое содержит множитель  $(i\langle \alpha \rangle - \langle \delta\alpha^2 \rangle / 2)^{-1}$ , испытывающий резонанс на брэгговской частоте. Природа этого резонанса видна уже из системы (2.89): при малой величине  $\alpha$  два уравнения, описывающие распространяющиеся вперёд и назад волны, оказываются резонансно связанными. Таким образом, можно выделить два вклада в экстинкцию, вызванные нерезонансным рассеянием на беспорядке и резонансным брэгговским рассеянием. Известно, что в общем случае взаимная интерференция двух каналов рассеяния с различными спектральными ширинами приводит к асимметричным спектральным линиям, которые могут быть описаны формулой Фано [194]. Первоначально Фано рассматривал конкретную физическую задачу об интерференции процессов ионизации атомов, связанных с резонансом дискретного уровня и с переходами в непрерывном спектре. Сейчас термины “резонанс Фано” и “эффект Фано” используются в значительно более широком смысле как результат интерференции резонансных и нерезонансных каналов рассеяния, сопровождающийся характерной асимметричной спектральной линией [195].

Для рассматриваемой задачи из (2.101) получаем для коэффициента экстинк-

ции формулу Фано

$$\frac{1}{\ell(\omega)} = \frac{\sin^2 \Phi_h \sigma_{\varepsilon_B}^2 (\Omega + \mathfrak{q})^2}{4d\varepsilon_A^2 (\Omega^2 + 1)}, \quad (2.102)$$

где  $\Omega = (\omega - \omega_h)/\Gamma_h$  — безразмерная отстройка частоты от брэгговского резонанса (2.79) с номером  $h$ ,  $\Gamma_h = 4\pi h \omega_h b^2 \sigma_{\varepsilon_B}^2 / (d^2 \varepsilon_A^2)$  — ширина резонанса,  $\Phi_h = \omega_h \sqrt{\varepsilon_A} b / c$ , и введен параметр асимметрии спектра

$$\mathfrak{q} = -\operatorname{ctg} \Phi_h \left( 1 + \frac{|\bar{\varepsilon}_B - \varepsilon_A|^2}{\sigma_{\varepsilon_B}^2} \right) - \frac{2}{\Phi_h} \frac{\varepsilon_A (\bar{\varepsilon}_B - \varepsilon_A)}{\sigma_{\varepsilon_B}^2}. \quad (2.103)$$

В качестве независимой проверки получим другим способом предел (2.102) при  $\Omega \rightarrow \infty$ , т.е. вдали от брэгговского резонанса,

$$\frac{1}{\ell} = \frac{\sin^2 \Phi_h \sigma_{\varepsilon_B}^2}{4d\varepsilon_A^2}, \quad (2.104)$$

что соответствует учёту лишь второго слагаемого в (2.99), описывающего нерезонансное рассеяние. При малом контрасте коэффициент отражения (2.91) от слоя  $\mathcal{B}$  может быть дополнительно упрощён до

$$r \approx \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_{B,j}}{2\varepsilon_A} \sin \left( \frac{\omega n_{B,j} b}{c} \right) e^{i\omega n_{B,j} b/c}, \quad (2.105)$$

а средний коэффициент пропускания слоя принимает вид

$$T = 1 - \langle |r|^2 \rangle \equiv 1 - \frac{\sin^2 \Phi_h}{4\varepsilon_A^2} [\sigma_{\varepsilon_B}^2 + (\varepsilon_A - \bar{\varepsilon}_B)^2]. \quad (2.106)$$

В случае, если беспорядок превосходит средний диэлектрический контраст,  $\sigma_{\varepsilon_B} \gg |\varepsilon_A - \bar{\varepsilon}_B|$ , вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь. Поскольку рассеяние в различных слоях является некоррелированным, обратная длина экстинкции  $1/\ell = -\langle \ln T(N)/Nd \rangle$  приближенно равняется  $(1 - \langle T \rangle)/d$ , что совпадает со значением (2.104).

### 2.4.3 Асимметричная трансформация брэгговского резонанса

В этом разделе асимметричная трансформация брэгговского резонанса, предсказываемая формулой Фано (2.102), анализируется более подробно. Исследуем пропускание света фотонным кристаллом в зависимости от дисперсии  $\sigma_{\varepsilon_B}$  диэлектрической проницаемости слоёв  $\mathcal{B}$ . На рис. 2.17 представлены результаты численного

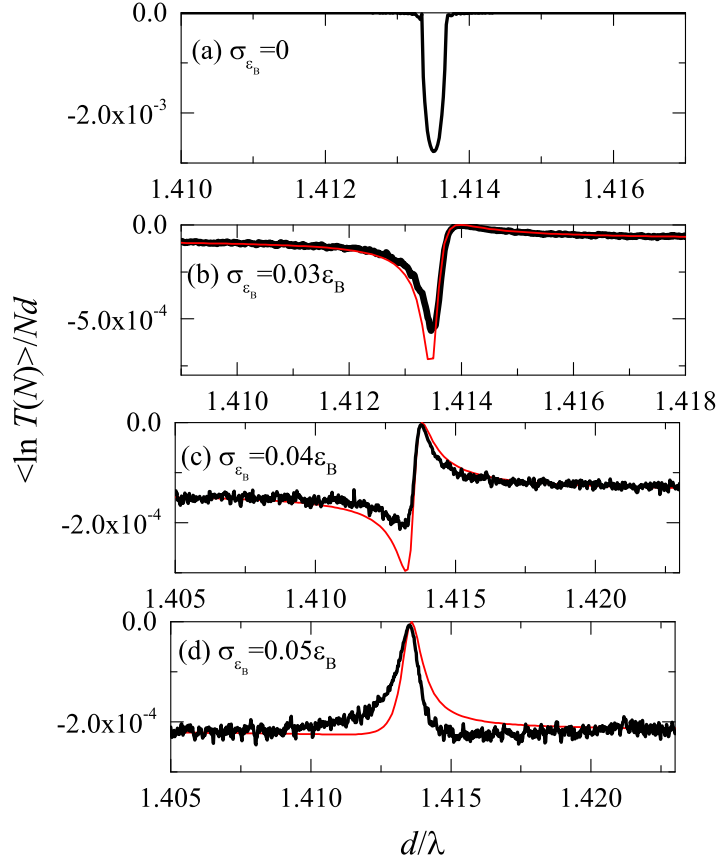


Рис. 2.17: Пропускание света фотонным кристаллом в зависимости от дисперсии  $\sigma_{\epsilon_B}$  диэлектрической проницаемости слоёв  $\mathcal{B}$ . Жирные линии — численный расчёт, тонкие — расчёт согласно (2.102).

расчёта спектра экстинкции методом матриц переноса совместно с результатом формулы (2.102). Компьютерная программа для численного расчёта была написана М.В. Рыбиным. Расчёт выполнен для  $\epsilon_A = 2$ ,  $\bar{\epsilon}_B = 2.01$ ,  $N = 10^4$  периодов,  $b/d = 0.2$ . Усреднение выполнялось по ансамблю из 2000 реализаций беспорядка. Спектральная область соответствует брэгговскому резонансу с  $h = 2$ . Панель (а) рассчитана для идеального фотонного кристалла с  $\sigma_{\epsilon_B} = 0$ . В этом случае в спектре пропускания есть симметричный провал на брэгговской частоте, соответствующий стоп-зоне. Выражение (2.104) для нулевого беспорядка неприменимо, однако длина экстинкции даётся известной формулой в приближении малого контраста [196], которая определяется мнимой частью собственных значений системы

(2.89):

$$\frac{1}{\ell} = \frac{2\pi h}{d} \sqrt{\left(\frac{\sin \Phi_h}{2\pi h} \frac{\varepsilon_B - \varepsilon_A}{\varepsilon_A}\right)^2 - \left(\frac{\Omega - \omega_h}{\omega_h}\right)^2}. \quad (2.107)$$

Наименьшее значение длины  $\ell$  соответствует центру запрещенной зоны,  $\ell(\omega_h) = d\varepsilon_A/|(\varepsilon_B - \varepsilon_A) \sin \Phi_h|$  и тем меньше, чем больше диэлектрический контраст. За пределами фотонной запрещенной зоны волны имеют распространяющийся характер и длина экстинкции  $\ell$  обращается в бесконечность. Учёт беспорядка  $\sigma_{\varepsilon_B} > 0$  приводит к следующим эффектам. Во-первых, длина экстинкции принимает конечное значение даже вне запрещенной зоны идеальной структуры. Если отстройка от брэгговского резонанса значительно превосходит ширину запрещенной зоны, но при этом значительно меньше, чем частота центра зоны, это фоновое значение длины экстинкции даётся формулой (2.104). Во-вторых, форма брэгговского резонанса претерпевает изменения: резонанс уширяется и становится асимметричным. Этот эффект продемонстрирован на рис. 2.17(b,c). Жирными чёрными кривыми показан результат численного расчёта, а тонкими красными — результат формулы (2.102). Степень асимметрии спектра возрастает по мере увеличения силы беспорядка, что описывается изменением параметра асимметрии спектра  $q$  в (2.103). Для структуры с диэлектрическим контрастом зависимость формы линии от беспорядка контролируется последним слагаемым в (2.103), пропорциональным  $1/\sigma_{\varepsilon_B}^2$ . Поэтому слабому беспорядку соответствует провал в пропускании ( $q = \infty$ ), а сильному — максимум в пропускании ( $q = 0$ ). Действительно, на рис. 2.17(d) расчёт, выполненный для относительно сильного беспорядка  $\sigma_{\varepsilon_B} = 0.05\bar{\varepsilon}_B$ , значительно превосходящего диэлектрический контраст в идеальной структуре  $|\varepsilon_A - \bar{\varepsilon}_B| = 0.005\varepsilon_B$ , демонстрирует максимум в пропускании. Таким образом, с увеличением беспорядка провал в спектре пропускания (брэгговская стоп-зона) может трансформироваться в максимум (зона пропускания). Необходимо отметить, что среднее пропускание в структуре, определяемое фоновой длиной экстинкции, падает с ростом беспорядка. Поэтому максимум в пропускании является лишь относительным максимумом относительно фона. Тем не менее, по-

ведение спектра для рассматриваемой модели беспорядка качественно отличается от поведения при беспорядке по ширине слоев и по проницаемости обоих слоев, которые в общем случае приводят лишь к симметричному размытию брэгговской линии [158].

Как видно из (2.101), возникновение резонанса Фано в спектре экстинкции обусловлено интерференцией процессов фонового нерезонансного рассеяния и процесса резонансной брэгговской дифракции. Поскольку оба этих процесса определяются лишь диэлектрической проницаемостью слоёв  $\mathcal{B}$ , то оказывается, что интерференция сохраняется и при учёте беспорядка. Для иллюстрации роли интерференционных эффектов в неупорядоченной структуре отметим, что при  $\Omega = -q$  длина локализации (2.102) обращается в бесконечность независимо от величины беспорядка. На первый взгляд, это явление носит неожиданный характер. Оно может быть объяснено, если заметить, что в отсутствие поглощения выражение (2.101) для длины экстинкции сводится к

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{d} \frac{\langle [\delta\beta \langle \alpha \rangle - \delta\alpha \langle \beta \rangle]^2 \rangle}{4 \langle \alpha \rangle^2 + \langle \delta\alpha^2 \rangle}. \quad (2.108)$$

Частота  $\Omega = -q$  соответствует выполнению условия  $\langle [\delta\beta \langle \alpha \rangle - \delta\alpha \langle \beta \rangle]^2 \rangle = 0$  или  $\delta(\alpha/\beta) = 0$ . Это означает, что фазовый набег  $\alpha$  и эффективный диэлектрический контраст  $\beta$  флуктуируют согласованно, так что беспорядок не влияет на соотношение  $\alpha/\beta$ . Поэтому система (2.89) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{dj} &= \frac{i}{2} (\langle \alpha \rangle u + \langle \beta \rangle v) \zeta(j), \\ \frac{dv}{dj} &= -\frac{i}{2} (\langle \alpha \rangle v + \langle \beta \rangle u) \zeta(j), \end{aligned} \quad (2.109)$$

где в виде  $\zeta(j)$  обозначен общий масштабный множитель  $\alpha(j)/\langle \alpha \rangle$ . Заменой переменный  $d\tilde{j}/dj = \zeta$  беспорядок может быть полностью исключён из уравнений. Поэтому локализации за счёт беспорядка не происходит. Такой интерференционный эффект подавления локализации в неупорядоченных одномерных фотонных кристаллах схож с эффектом Бормана — подавлением поглощения света в



неупорядоченных структурах. Поскольку подавление происходит лишь на одной дискретной частоте, эффект не противоречит общей теореме о локализации собственных мод в одномерных неупорядоченных системах при сколь угодно малой силе беспорядка [193].

Выявленный механизм асимметричной трансформации спектральных линий в спектрах разупорядоченных фотонных кристаллов имеет общий характер. Он может качественно объяснять и резонансы Фано, экспериментально наблюдавшиеся в работе [154] в спектрах пропускания трехмерных фотонных кристаллов на основе синтетических опалов с наполнителем. Конечно, развитая одномерная модель имеет ограниченную степень применимости для трёхмерных структур, она позволяет учесть лишь процессы рассеяния и брэгговской дифракции вдоль направления роста  $\langle 111 \rangle$ . При этом неоднородная глобулярная структура шаров  $\text{SiO}_2$  [153, 197] соответствует флуктуациям диэлектрической проницаемости слоёв  $\mathcal{B}$ . Как следует из выражения (2.103), изменение среднего диэлектрического контраста  $\bar{\epsilon}_B - \epsilon_A$ , определяемого наполнителем, также влияет на форму спектральной линии и может приводить к её перевороту, в согласии с экспериментом.

## 2.5 Краткие итоги

В Главе 2 получены следующие результаты:

- Рассмотрены аperiодические детерминированные структуры на основе квантовых ям. Сформулировано резонансное брэгговское условие и построена аналитическая теория спектров отражения в двухволновом приближении.
- В оптических спектрах структур выявлены сверхизлучательный и фотонно-квазикристаллический режимы, а также область скейлинга.
- Сопоставление с экспериментом позволило подтвердить ключевые предсказания теории и определить резонансные частоты, излучательные и безызлучательные затухания квазидвумерных экситонов.

- В резонансных структурах Фибоначчи с квантовыми ямами в зависимости от величины нерезонансного затухания происходит конкуренция поглощения и локализации экситонных поляритонов.
- Построена аналитическая теория поляризационно-зависимого пропускания света резонансными двумерными кристаллами и квазикристаллами на основе плазмонных наночастиц. В согласии с экспериментом степень циркулярного дихроизма пропускания для мозаики Пенроуза подавлена по сравнению с квадратной и гексагональной решётками.
- Построена аналитическая теория локализации света в одномерных фотонных кристаллах со случайной диэлектрической проницаемостью каждого второго слоя. Показано, что с усилением беспорядка спектры коэффициента экстинкции вблизи брэгговских частот испытывают асимметричную трансформацию, описываемую формулой Фано. Эффект обусловлен интерференцией случайного набега фазы в слоях и случайного отражения на их границе.

## Глава 3

# Излучение в гиперболических метаматериалах

Настоящая глава посвящена исследованию спонтанного излучения в гиперболических средах — одноосных материалах и метаматериалах, в которых главные компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости имеют разные знаки. В разделе 3.1 приведён обзор современного состояния исследований [A13]. Раздел 3.2 посвящён решению задачи о скорости спонтанного излучения и эффекте Парселла в гиперболических материалах в приближении эффективной среды [A14,A15]. В третьем разделе спонтанное излучение исследовано за рамками приближения эффективной среды. Рассмотрены две модели метаматериалов — кубическая решётка частиц с резонансным дипольным откликом [A16,A17] (раздел 3.3.1) и квадратный массив металлических нанопроводов [A18] (раздел 3.3.2). Обзор основных результатов главы приведён в разделе 3.4.

### 3.1 Гиперболические среды (обзор)

Исследования гиперболических сред берут своё начало в оптике одноосных кристаллов, тензор диэлектрической проницаемости которых имеет вид

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Здесь оптическая ось направлена вдоль  $z$  и  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \equiv \varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_{\parallel} \equiv \varepsilon_{zz}$ . В таких средах собственные электромагнитные волны можно разделить на два типа — обыкновенные, или ТЕ-поляризованные (transverse electric), для которых вектор электрического поля  $\mathbf{E}$  параллелен  $\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}$ , и необыкновенные (ТМ-поляризованные, transverse magnetic), для которых вектор магнитного поля  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{z}}$ . Величина волнового вектора  $\mathbf{k}$  обыкновенных волн не зависит от направления распространения и равняется  $\omega\sqrt{\varepsilon_{\perp}}/c$ , где  $\omega$  — частота волны,  $c$  — скорость света. Для необыкновенных волн фазовая скорость  $\omega/k$  зависит от направления распространения. Их волновые вектора лежат на *изочастотной поверхности*, определяемой уравнением

$$\frac{k_x^2 + k_y^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{k_z^2}{\varepsilon_{\perp}} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2. \quad (3.2)$$

Для традиционных материалов отличие проницаемостей  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$  мало (например, в сапфире оно порядка 1% [198]) и изочастотная поверхность имеет вид эллипса. По определению, в гиперболических средах проницаемости  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$  имеют разные знаки. При этом изочастотная поверхность принимает вид двухполостного [рис. 3.1(a)] или однополостного [рис. 3.1(b)] гиперboloида для  $++-$  и  $--+$  сигнатур диэлектрического тензора. Впервые гиперболический режим был реализован в 1969 г. в намагниченной плазме [199]. Гиперболическими свойствами в определённых спектральных диапазонах обладают также некоторые естественные материалы, такие как висмут, графит [200] и гексагональный нитрид бора [201]. В последние годы активно изучаются искусственные гиперболические среды — метаматериалы [202]. По определению, метаматериалы являются искусственными веществами, обладающими нетривиальными электромагнитными свойствами. На первоначальном этапе внимание было сосредоточено на реализации изотропных метаматериалов с одновременно отрицательными эффективными электрическими и магнитными проницаемостями, которые должны демонстрировать отрицательное преломление на границе и были перспективны для субволновой электродинамики [203, 7]. Такие структуры созданы в микроволновом частотном диапазоне, однако в оптике по-прежнему остаются трудно реализуемыми. Благодаря нетри-

(a)  $\varepsilon_{xx} > 0, \varepsilon_{zz} < 0$  (б)  $\varepsilon_{xx} < 0, \varepsilon_{zz} > 0$

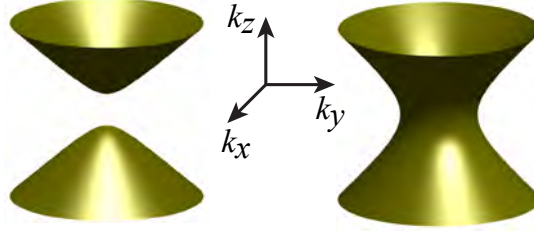


Рис. 3.1: Изочастотные поверхности необыкновенных волн в гиперболических метаматериалах. (a) изочастотная поверхность  $\omega(\mathbf{k}) = \text{const}$  для  $\varepsilon_{zz} \equiv \varepsilon_{\parallel} < 0, \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp} > 0$ . (b) изочастотная поверхность для  $\varepsilon_{\parallel} > 0, \varepsilon_{\perp} < 0$ .

виальной дисперсии собственных волн, гиперболические метаматериалы также открывают возможности субволновой фокусировки излучения [A13]. Их значительно легче создать, чем среды с отрицательным показателем преломления, поскольку достижения отрицательной магнитной проницаемости не требуется.

Одной из наиболее интересных особенностей гиперболического режима является расходящаяся плотность фотонных состояний для необыкновенных волн,  $\int d^3k \delta(\omega - \omega_{\text{TM},\mathbf{k}}) \rightarrow \infty$ , связанная с бесконечной площадью гиперboloида. Расходимость плотности фотонных состояний ставит вопрос о величине скорости спонтанного излучения источника, помещенного в гиперболическую среду. В экспериментах таким источником может выступать полупроводниковая квантовая точка, молекула красителя, дефект в решётке кристалла. Существовавшие в литературе результаты для скорости излучения оказываются неприменимы в гиперболическом режиме. В следующем разделе 3.2 будет построена теория спонтанного излучения, учитывающая специфику гиперболических сред, а этот раздел завершим кратким обзором их различных экспериментальных реализаций.

В металлах вещественная часть диэлектрической проницаемости отрицательна на частотах ниже плазменной, поскольку поляризация свободных носителей заряда направлена противоположно приложенному электрическому полю. В гиперболическом режиме компоненты диэлектрического тензора отрицательны лишь для одного или двух направлений. Это может быть достигнуто ограничением движе-

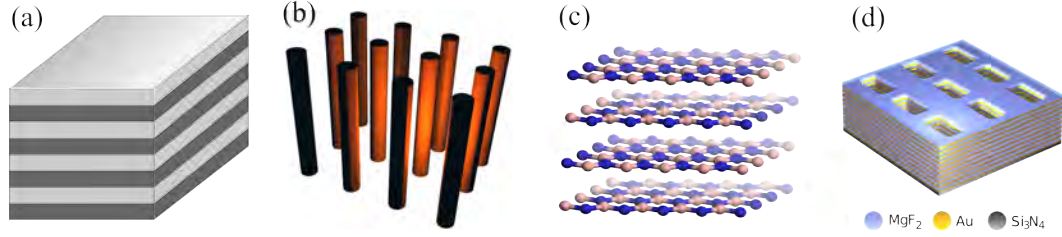


Рис. 3.2: Примеры гиперболических структур. (a) Слоистая металло-диэлектрическая структура. (b) Массив металлических проводов. (c) Гексагональный нитрид бора h-BN. (d) Многослойная металло-диэлектрическая рыболовная сеть (fishnet) [204].

ния носителей в этих направлениях. Поэтому наиболее простой реализацией гиперболических метаматериалов являются слоистые металло-диэлектрические среды.

### 3.1.1 Слоистые металло-диэлектрические среды

Такие структуры образованы периодически чередующимися вдоль оси  $z$  слоями металла и диэлектрика, как показано на рис. 3.2(a). В приближении эффективной среды компоненты диэлектрического тензора даются выражениями [205]

$$\varepsilon_{\perp} \equiv \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \frac{\varepsilon_m d_m + \varepsilon_d d_d}{d_m + d_d}, \quad \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \equiv \frac{1}{\varepsilon_{zz}} = \frac{d_m/\varepsilon_m + d_d/\varepsilon_d}{d_m + d_d}, \quad (3.3)$$

где  $d_m$ ,  $d_d$  — толщины, а  $\varepsilon_m$ ,  $\varepsilon_d$  — диэлектрические проницаемости металлических и диэлектрических слоёв, соответственно. Подстройкой этих параметров можно добиться перехода в гиперболический режим  $\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp} < 0$ . Приближение эффективной среды (3.3) применимо в длинноволновом пределе, т.е. если электромагнитное поле слабо изменяется в пространстве на масштабах элементарной ячейки структуры. Из-за возбуждения поверхностных плазмон-поляритонов на границах металлических и диэлектрических слоёв поле может сильно меняться на одном периоде даже в том случае, когда длина световой волны в вакууме значительно превосходит толщины слоёв. В определённых спектральных диапазонах приближение (3.3) может нарушаться. В результате изочастотные контуры приобретают сложную многосвязную форму, не сводящуюся к эллипсоидам или гиперболоидам. Поэтому при падении ТМ-поляризованной волны на метаматериал внутри

структуры могут возбуждаться две волны, положительно и отрицательно преломлённые [206, 207].

Слоистый гиперболический метаматериал был экспериментально реализован в 2007 году в работе [208], посвящённой пространственному разрешению субволновых объектов в режиме т.н. гиперлинзы. Отрицательное преломление и гиперболическая дисперсия наблюдались в работе [209] в среднем инфракрасном (ИК) спектральном диапазоне в полупроводниковой сверхрешётке, состоящей из легированных слоёв InGaAs и собственных слоёв AlInAs. К настоящему моменту созданы слоистые гиперболические метаматериалы на основе различных пар металл/диэлектрик, таких как Ag/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> [208], Ag/PMMA [210], Ag/LiF [210], Ag/TiO<sub>2</sub> [211], Ag/Ge [212], Au/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>[213], Ag/MgF<sub>2</sub>[214], Ag/Ti<sub>3</sub>O<sub>5</sub> [215]. Были детально теоретически изучены дисперсия, преломление и распространение волн в таких структурах [216, 206, 207, 217, 218].

Анализ систем материалов, предпочтительных для слоистых гиперболических структур, выполнен в обзоре [219]. Металлы оказываются предпочтительны в оптическом спектральном диапазоне, а полупроводники — на более низких частотах, в терагерцовом и инфракрасном диапазонах [220]. Как правило, в металлических системах реализуется гиперболический режим с  $\text{Re } \epsilon_{\perp} < 0$  [211], соответствующий рис. 3.1(b). Общей проблемой металлических структур являются существенные омические потери. Одним из путей решения может быть использование активной среды для компенсации потерь лазерным усилением [221, 222]. Альтернативный подход заключается в выборе нетрадиционных материалов с низкими потерями в определённых спектральных диапазонах, например, оксида индия-олова или легированного оксида цинка в ближнем ИК диапазоне [223, 224].

### 3.1.2 Массивы нанопроводов

Гиперболические материалы из проводов образованы массивами параллельных металлических проводов в диэлектрической матрице [225], см. рис. 3.2(b). Для квадратной решётки тонких проводов в вакууме компоненты диэлектрического

тензора имеют вид [226]

$$\varepsilon_{\perp} = 1, \quad \varepsilon_{\parallel}(k_z) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \delta^2 - c^2 k_z^2}, \quad (3.4)$$

где  $\omega_p \approx c/a[\ln(a/2\pi R)/(2\pi) + 1/12]^{-1/2}$  — эффективная плазменная частота,  $\delta = \Omega_p a / \sqrt{\pi R^2(1 - \varepsilon_{\text{wire}})}$ ,  $R$  — радиус проводов,  $a$  — период структуры, и  $\varepsilon_{\text{wire}}$  — диэлектрическая проницаемость проводов. Для идеально проводящих проводов ( $\varepsilon_{\text{wire}} \rightarrow \infty$ ) и распространения в плоскости ( $k_z = 0$ ) выражение (3.4) сводится к формуле Друде,  $\varepsilon_{\parallel} = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ , из которой видно, что структура переходит в гиперболический режим ниже эффективной плазменной частоты  $\omega_p$ . Последовательное описание в рамках модели эффективной среды требует учитывать зависимость  $\varepsilon_{\parallel}$  от  $k_z$ , т.е. пространственную дисперсию. Это приводит к возникновению дополнительных ТЕМ оптических мод в метаматериале в дополнение к ТЕ и ТМ модам обыкновенной одноосной среды [227, 225]. Дополнительные моды обладают плоской изочастотной поверхностью  $k_z = \pm\omega/c$  для идеально проводящих проводов и особенно важны для метаматериалов в микроволновой частотной области. В оптическом спектральном диапазоне эффекты пространственной дисперсии как правило подавлены из-за больших омических потерь [228].

Стандартным методом изготовления наноструктурированного материала из проводов является технология электрохимического осаждения металла (серебра или золота) внутрь пористой мембраны оксида алюминия [229]. Этот подход дешёв и эффективен, позволяя создавать макроскопические плёнки с размерами до  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см} \times 50 \text{ мкм}$  [230]. Гиперболические свойства таких метаматериалов были впервые продемонстрированы в работе [231], где наблюдалось отрицательное преломление света на длине волны  $\lambda = 780 \text{ нм}$ . Известны многочисленные реализации метаматериалов из проводов [232, 233, 234, 235, 236], для которых было экспериментально продемонстрировано увеличение скорости спонтанного излучения [233] и созданы сенсоры биологических молекул [232]. Ключевым достоинством массива нанопроводов оказывается очень высокая чувствительность к показателю преломления матрицы, превосходящая  $3 \times 10^4$  нм на единицу показателя преломления.



Поэтому пористые метаматериалы на основе нанопроводов более эффективны для оптических сенсоров, чем структуры на основе гладких металлических плёнок. Экспериментально также было продемонстрировано, что пористая структура метаматериалов из нанопроводов на основе GaP приводит к усилению генерации ТГц излучения [237].

### 3.1.3 Другие реализации гиперболических сред

Среди других реализаций можно выделить намагниченную плазму [199], в которой гиперболический режим и был впервые продемонстрирован. Если магнитное поле настолько велико, что циклотронная частота превосходит плазменную, электроны в структуре могут двигаться лишь в одном направлении вдоль поля, так что  $\varepsilon_{zz} < 0$ ,  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1$ ,  $|\varepsilon_{xy}| \ll 1$ .

Магнитная гиперболическая среда на основе многослойной рыболовной сети (multilayer fishnet) была реализована в недавней работе [204]. Структура схематически показана на рис. 3.2(с). Отверстия в золотых слоях приводят к резонансам магнитодипольного типа. Поэтому в рамках модели эффективной среды такую систему удобно характеризовать тензором магнитной проницаемости с разными знаками главных компонент,  $\mu_{\perp}\mu_{\parallel} < 0$ .

В ИК и ТГц диапазонах гиперболический режим может быть реализован в естественных материалах, таких как висмут [200]. В частности, в висмуте диэлектрический отклик для поля, поляризованного вдоль и поперёк тригональной оси, характеризуется двумя различными плазменными частотами. В интервале между этими частотами,  $\lambda \approx 53 \text{ мкм} \div 62 \text{ мкм}$ , висмут ведёт себя как гиперболическая среда. В ультрафиолетовом диапазоне гиперболическую дисперсию проявляет графит [238]. Недавно гиперболический режим в ИК диапазоне был продемонстрирован в гексагональном нитриде бора (h-BN)[239, 201, 240]. Такой кристалл представляет собой набор атомных монослоёв, связанных ван-дер-ваальсовыми связями. Каждый монослой состоит из атомов бора и азота, занимающих две подрешётки в решётке типа графена, как показано на рис. 3.2(d). Поэтому кристалл

представляет собой естественный аналог металло-диэлектрической слоистой среды. Микроскопически гиперболический режим в h-VN обусловлен резонансами в диэлектрической проницаемости на частотах продольных и поперечных оптических фононов [239].

Помимо трёхмерных гиперболических метаматериалов возрастает интерес к исследованию их низкоразмерных двумерных аналогов, т.н. метаповерхностей. Метаповерхность может быть охарактеризована тензором поверхностной проводимости  $\sigma$ . В случае, когда компоненты этого тензора имеют различные знаки ( $\sigma_{xx}\sigma_{yy} < 0$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ ), в такой метаповерхности реализуется гиперболический режим дисперсии собственных мод [241, 242]. Кандидатом в естественные гиперболические поверхности выступает двумерный анизотропный материал — чёрный фосфор [243]. К настоящему моменту гиперболические поверхности и метаповерхности исследовались лишь теоретически.

## 3.2 Спонтанное излучение в однородной гиперболической среде

Настоящий раздел посвящён исследованию спонтанного излучения и эффекта Парселла для гиперболических сред. Изначально эффектом Парселла называлось усиление скорости спонтанного излучения для источника, помещённого в электромагнитный резонатор, по сравнению с источником в вакууме [244]. Фактор Парселла был определён как соотношение скоростей в резонаторе и в вакууме. Сейчас понятие “эффект Парселла” широко используется для различных объектов и не ограничивается резонаторами. Управление временем радиационного затухания активно изучалось для разнообразных систем, таких как металлические наночастицы [245, 246, 247], микрорезонаторы [248, 249, 250], и метаматериалы [251, 252, 253, 254, 233].

Впервые об огромном факторе Парселла в гиперболических средах сообщалось в теоретической работе [255]. Усиление скорости спонтанного излучения бы-

ло связано с расходящейся плотностью фотонных состояний. При этом ответа для скорости излучения источника, помещённого внутрь среды, в работе [255] не приведено. Для иллюстрации природы расходимости запишем общее выражение для скорости излучательного затухания  $1/\tau$  по правилу Ферми,

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} |\langle f | H_{\text{int}}(\mathbf{k}, \sigma) | i \rangle|^2 \delta(\hbar\omega_{\mathbf{k}, \sigma} - \hbar\omega_0). \quad (3.5)$$

Здесь суммирование выполняется по всем волновым векторам  $\mathbf{k}$  и поляризациям  $\sigma$  испущенных фотонов с энергиями  $\hbar\omega_{\mathbf{k}, \sigma}$ ,  $\langle f | H_{\text{int}}(\mathbf{k}, \sigma) | i \rangle$  — матричный элемент оптического перехода из начального состояния  $|i\rangle$  в конечное состояние  $|f\rangle$  с испусканием фотона  $(\mathbf{k}, \sigma)$ , и  $\hbar\omega_0$  — частота перехода. Выражение (3.5) имеет ту же самую структуру, что и плотность фотонных состояний с поляризацией  $\sigma$

$$\rho_{\sigma}(\omega) = \sum_{\mathbf{k}} \delta(\omega_{\mathbf{k}, \sigma} - \omega_0). \quad (3.6)$$

Сумма (3.6) по определению пропорциональна площади изочастотной поверхности  $\omega_{\mathbf{k}, \sigma} = \omega_0$ , а значит, она расходится в гиперболической среде, что должно приводить и к расходимости скорости излучательного затухания. Такое наивное рассмотрение основано на справедливости приближения эффективной среды для сколь угодно больших значений волновых векторов. Более тщательный теоретический анализ показывает, что расходимость может сниматься по следующим причинам: (а) Конечный период метаматериала  $a$  [255]. Это приводит к отсечке в (3.5), (3.6) на волновых векторах  $k \sim 1/a$ , соответствующих краю зоны Бриллюэна. Максимальный фактор Парселла порядка  $(\lambda/a)^3$ , где  $\lambda = 2\pi c/\omega_0$  — длина волны света. Модель будет более детально рассмотрена в разделе 3.3.1. (б) Конечное расстояние от источника излучения до метаматериала [251, 255, 256]. Фактор Парселла может быть оценен как  $\lambda^3/h^3$ , где  $h$  — расстояние до поверхности метаматериала. Дополнительные поправки могут возникать за рамками приближения эффективной среды [257]. (в) Пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости металла. Фактор Парселла достигает значений порядка  $\sim c^3/v_F^3$ , где  $v_F$  — скорость Ферми в металле [258]. (г) Конечный размер источника излучения  $a$ ,

определяемый характерным пространственным масштабом волновых функций начального и конечного состояний. Фактор Парселла внутри гиперболической среды был впервые рассчитан в 2011 году в рамках именно этой модели в работе [A14]. Скорость спонтанного излучения остаётся конечной несмотря на расходящуюся плотность состояний, т.к. матричный элемент  $\langle f|H_{\text{int}}(\mathbf{k}, \sigma)|i\rangle$  стремится к нулю на волновых векторах  $k \gg 1/a$ . Качественно, конечная величина фактора Парселла связана с подавлением взаимодействия источника с модами, длина волны которых меньше размера источника. Эта модель детально представлена в следующем разделе 3.2.1. Результаты расчёта обсуждаются в разделе 3.2.2.

### 3.2.1 Расчёт в приближении эффективной среды

Рассматривается сферическая квантовая точка, помещённая в анизотропную однородную среду с тензором диэлектрической проницаемости вида (3.1). Электрическое поле удовлетворяет уравнению

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = q^2 \mathbf{D}, \quad (3.7)$$

где  $q = \omega/c$ ,  $\omega$  — частота света, и  $c$  — скорость света в вакууме. Вектор индукции включает фоновый вклад и резонансную экситонную поляризацию квантовой точки  $\mathbf{P}_{\text{exc}}$ :

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_{\text{exc}}. \quad (3.8)$$

Материальное соотношение для экситонной поляризации запишем в следующем виде [259, 32, 260, 261, 262]:

$$\mathbf{P}_{\text{exc}} = \frac{d^2 \Phi(r)}{\hbar(\omega_0 - \omega)} \int d^3 r' \Phi(r') \mathbf{E}(r'). \quad (3.9)$$

Здесь  $\omega_0$  — резонансная частота экситона в квантовой точке,  $d$  — эффективный матричный элемент дипольного перехода, квадрат которого пропорционален продольно-поперечному расщеплению  $\omega_{\text{LT}}$  [262]. Фоновым диэлектрическим контрастом и поправками локального поля пренебрегается. Огибающая  $\Phi(r)$  характеризует пространственное распределение экситонной поляризации. Для квантовой

точки, малой по сравнению с боровским радиусом экситона, огибающая определяется произведением волновых функций электрона и дырки. Для простоты вычислений будем использовать огибающую  $\Phi(r)$  в виде гауссиана

$$\Phi(r) = \frac{\sqrt{2} \exp(-r^2/2a^2)}{4\pi^{3/2}a^3}, \quad (3.10)$$

так что  $\int d^3r \Phi(r) = 1$ .

Далее изложен общий подход к расчёту скорости спонтанного затухания экситона методом функции Грина, следующий работам [263, 32]. Впоследствии метод будет также обобщён для дискретных гиперболических метаматериалов (разделы 3.3.1 и 3.3.2) и для расчёта скорости фёрстеровского переноса энергии в плазмонных наноструктурах (глава 4). В отсутствие внешней возбуждающей волны уравнения (3.7)–(3.9) описывают самосогласованное взаимодействие экситона с электромагнитным полем [263, 32, 260, 261]. Комплексные собственные частоты  $\omega$  системы (3.7)–(3.9) определяют излучательное время жизни  $\tau$  следующим образом

$$\frac{1}{\tau} = -2 \operatorname{Im} \omega. \quad (3.11)$$

Расчёт  $\tau$  удобно выполнять в обратном пространстве. Применяя преобразование Фурье

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (3.12)$$

получаем

$$q^2 \hat{\varepsilon} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} - k^2 \mathbf{E}_{\mathbf{k}} + \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}) = -\frac{4\pi q^2 d^2 \Phi_{\mathbf{k}}}{\hbar(\omega_0 - \omega)} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \mathbf{E}_{\mathbf{k}'} \Phi_{\mathbf{k}'}, \quad (3.13)$$

где

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \Phi(r) = e^{-k^2 a^2/2}. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.13) может быть переписано в виде

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = \frac{d^2}{\omega_0 - \omega} \Phi_{\mathbf{k}} \hat{G}_{\mathbf{k}} \mathbf{\Lambda}, \quad (3.15)$$

где введена функция Грина фотона в  $\mathbf{k}$ -пространстве

$$\hat{G}_{\mathbf{k}} = -\frac{4\pi q_0^2}{q_0^2 \hat{\varepsilon} - k^2 + \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}, \quad (3.16)$$

за  $\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$  обозначена  $3 \times 3$  матрица  $k_\alpha k_\beta$  и определена новая переменная,  $\Lambda = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}} d^3 k / (2\pi)^3$ . Умножая обе части (3.13) на  $\Phi_{\mathbf{k}}$  и интегрируя по  $\mathbf{k}$ , получаем матричное уравнение на комплексные собственные частоты  $\omega$ ,

$$(\omega - \omega_0)\Lambda = \hat{R}\Lambda, \quad \hat{R} = -\frac{d^2}{\hbar} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Phi_{\mathbf{k}}^2 \hat{G}_{\mathbf{k}}. \quad (3.17)$$

Отметим, что матрица  $\hat{R}$  в правой части (3.17) в общем случае зависит от частоты  $\omega$ , и это уравнение является трансцендентным. Далее рассматривается случай слабой связи, когда взаимодействие экситона со светом учитывается по теории возмущений [25]. В этом приближении в (3.17) можно положить  $\hat{R}(\omega) = \hat{R}(\omega_0)$ . Поскольку матрица  $\hat{R}$  является диагональной, время спонтанного излучения может быть записано в виде

$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \frac{2d^2}{\hbar} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Im} G_{\mathbf{k}, \alpha\alpha} \Phi_{\mathbf{k}}^2, \quad \alpha = x, y, z. \quad (3.18)$$

Времена  $\tau_x = \tau_y$  и  $\tau_z$  соответствуют экситону, поляризованному в плоскости  $xy$  и вдоль оси  $z$ , соответственно. Они могут быть определены после подстановки явных значений для функции Грина

$$G_{\mathbf{k}, zz} = -\frac{4\pi q_0^2}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{1 - k_z^2 / (q_0^2 \varepsilon_{\perp})}{q_0^2 - k_{\perp}^2 / \varepsilon_{\parallel} - k_{\parallel}^2 / \varepsilon_{\perp}}, \quad (3.19)$$

$$G_{\mathbf{k}, xx} = -\frac{4\pi q_0^2}{k_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp}} \left\{ \frac{k_y^2}{q_0^2 - k^2 / \varepsilon_{\perp}} + \frac{k_x^2 [1 - k_{\perp}^2 / (q_0^2 \varepsilon_{\parallel})]}{q_0^2 - k_{\perp}^2 / \varepsilon_{\parallel} - k_{\parallel}^2 / \varepsilon_{\perp}} \right\},$$

в (3.18). Полезным также оказывается представить ответ (3.18) в реальном пространстве,

$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \frac{2d^2}{\hbar} \iint d^3 r d^3 r' \text{Im} G_{\alpha\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}'), \quad (3.20)$$

где  $\hat{G}(\mathbf{r}) = \int d^3 k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{G}_{\mathbf{k}}$ . Для точечного источника с  $\Phi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$  получаем из (3.20)  $1/\tau_\alpha = 2d^2 \text{Im} G_{\alpha\alpha}(0)/\hbar$ , и, с учётом того что в вакууме  $\text{Im} G_{\alpha\alpha}(0) = 2q^3/3$ , фактор Парселла

$$f_\alpha = \frac{3}{2q^3} \text{Im} G_{\alpha\alpha}(0). \quad (3.21)$$

Отметим, что в общем случае затухание, обусловленное взаимодействием со светом, может быть связано с двумя каналами: (а) “истинным” затуханием, вызванным излучением распространяющихся фотонов, и (б) омическими потерями в среде. Разделение двух этих вкладов в эксперименте возможно при совместных измерениях интенсивности и скорости затухания фотолуминесценции [213]. Уравнения (3.18) содержат сумму обоих вкладов [264].

### 3.2.2 Результаты и обсуждение

Проанализируем общую структуру уравнений (3.18),(3.19). Как видно из (3.19), поляризованный перпендикулярно оптической оси экситон взаимодействует как с ТЕ (обыкновенными), так и с ТМ (необыкновенными) волнами. Поляризованный вдоль оси  $z$  экситон взаимодействует лишь с ТМ волнами. При отсутствии омических потерь в среде ( $\varepsilon''_{\parallel} \rightarrow 0, \varepsilon''_{\perp} \rightarrow 0$ ) вклады в мнимую часть функций Грина, контролирующие время излучательного затухания (3.18), определяются лишь полюсными вкладами на волновых векторах, лежащих на изочастотных поверхностях. В частности, вклад ТМ мод имеет вид

$$\frac{1}{\tau_{\alpha}^{\text{TM}}} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g_{\alpha}(\mathbf{k}) \Phi_k^2 \delta[\hbar\omega_0 - \hbar\omega_{\text{TM}}(\mathbf{k})], \quad (3.22)$$

где множитель  $g_{\alpha}(\mathbf{k})$  пропорционален вычету подинтегрального выражения (3.18) в полюсе  $\omega = \omega_{\text{TM}}(\mathbf{k})$ . Поэтому выражение (3.22) имеет тот же вид, что и общий результат применения правила Ферми (3.5). Из (3.22) непосредственно видно, что скорость спонтанного затухания остается конечной, т.к. взаимодействие с модами с большими волновыми векторами подавлено множителем  $\Phi_k^2 = e^{-k^2 a^2}$ . Максимальные волновые вектора мод, дающих вклад в спонтанное затухание, порядка  $k_{\text{max}} = 1/a$ . Поэтому нелокальный характер материального соотношения (3.9), связанный с конечным размером квантовой точки, оказывается принципиальным для того, чтобы получить конечное значение скорости затухания. Отсечка на  $k \sim 1/a$  известна в литературе и используется, например, в нерелятивистской теории лэмбовского сдвига [265]. Следует подчеркнуть важную особенность эффекта Парсел-

ла в гиперболических средах. Спонтанное излучение ускоряется за счёт испускания волн с большими волновыми векторами, которые являются эванесцентными за пределами структуры. При этом детектируемая интенсивность излучения в дальнем поле в общем случае может и не возрасти, т.к. испущенные фотоны остаются внутри образца. Рост интенсивности наблюдался, если поверхность гиперболической среды была покрыта специальной дифракционной решёткой [266] или являлась шероховатой [267], так что эванесцентные волны преобразовывались в распространяющиеся.

Перейдём к расчёту скорости спонтанного затухания. Для этого подставим (3.19) в интеграл (3.18) и введём сферическую систему координат  $(k, \theta, \phi)$  в  $\mathbf{k}$ -пространстве. Интегрирование по азимутальному углу  $d\phi$  и по  $dk$  может быть выполнено аналитически и даёт

$$\frac{1}{\tau^z} = \frac{q^3 d^2}{\hbar} \operatorname{Im} \int_0^\pi d\theta \left\{ -\frac{\eta(\theta) \sin \theta \cos^2 \theta}{2\sqrt{\pi} \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} (qa)^3} + \frac{\eta^2(\theta) \sin^3 \theta}{\sqrt{\pi} \varepsilon_{\parallel}^2 qa} + \frac{i\eta^{5/2}(\theta) \sin^3 \theta}{\varepsilon_{\parallel}^2} e^{-(qa)^2 \eta(\theta)} [1 + \operatorname{erf}[iqa\sqrt{\eta(\theta)}]] \right\}, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^x} = \frac{1}{\tau^y} = \frac{q^3 d^2}{\hbar} \operatorname{Im} \int_0^\pi d\theta \left\{ \frac{i \sin \theta \sqrt{\varepsilon_{\perp}}}{2} e^{-\varepsilon_{\perp} (qa)^2} [1 + \operatorname{erf}[iqa\sqrt{\varepsilon_{\perp}}]] - \frac{\eta(\theta) \sin^3 \theta}{4\sqrt{\pi} \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} (qa)^3} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \theta (\varepsilon_{\parallel} - \eta \sin^2 \theta)}{2\sqrt{\pi} \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} qa} + \frac{i\eta^{3/2}(\theta) \sin \theta}{2\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} e^{-(qa)^2 \eta(\theta)} [1 + \operatorname{erf}[iqa\sqrt{\eta(\theta)}]] [\varepsilon_{\parallel} - \eta(\theta) \sin^2 \theta] \right\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где

$$\frac{1}{\eta(\theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}}, \quad (3.25)$$

и функция ошибок определена как

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Однократные интегралы (3.23),(3.24) рассчитываются лишь численно. Аналитический ответ может быть получен в случае квантовой точки, малой по сравнению



с длиной волны света, так что условия

$$qa|\sqrt{\eta(\theta)}| \ll 1, \quad qa|\sqrt{\varepsilon_{\perp}}| \ll 1, \quad qa|\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}| \ll 1 \quad (3.26)$$

верны для всех углов  $\theta$ . В эллиптическом режиме условия (3.26) легко выполняются при малых  $qa$ . Если же  $\varepsilon'_{\parallel}\varepsilon'_{\perp} < 0$ , то величина  $\eta(\theta)$  может быть мала. При этом первое из условий (3.26) может по-прежнему выполняться, если омические потери достаточно велики. При выполнении условий (3.26) экспоненты в (3.23) могут быть заменены на единицу, а функциями ошибок можно пренебречь. После этих упрощений интегрирование по  $\theta$  приводит к следующему ответу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_z} &= \frac{q^3 d^2}{\hbar} \left\{ \operatorname{Im} \frac{\arctan \sqrt{\varepsilon - 1} - \sqrt{\varepsilon - 1}}{\sqrt{\pi}\varepsilon_{\perp}(\varepsilon - 1)^{3/2}(qa)^3} + \operatorname{Im} \frac{(\varepsilon - 2) \arctan \sqrt{\varepsilon - 1} + \sqrt{\varepsilon - 1}}{\sqrt{\pi}(\varepsilon - 1)^{3/2}qa} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon_{\perp}} \right\}, \\ \frac{1}{\tau_x} &= \frac{1}{\tau_y} = \frac{q^3 d^2}{\hbar} \left\{ \operatorname{Im} \frac{\sqrt{\varepsilon - 1} - \varepsilon \arctan \sqrt{\varepsilon - 1}}{2\sqrt{\pi}\varepsilon_{\perp}(\varepsilon - 1)^{3/2}(qa)^3} + \operatorname{Im} \frac{\varepsilon^2 \arctan \sqrt{\varepsilon - 1} - \varepsilon\sqrt{\varepsilon - 1}}{2\sqrt{\pi}(\varepsilon - 1)^{3/2}qa} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Re} \frac{\varepsilon_{\parallel} + 3\varepsilon_{\perp}}{3\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp}$ . Численный анализ показывает, что уравнения (3.27) справедливы даже при малых  $\varepsilon''_{\perp}$ ,  $\varepsilon''_{\parallel}$ , если выполняются второе и третье условия в (3.26): слагаемые в (3.23) и (3.24), пропорциональные  $\exp[-(qa)^2\eta(\theta)]$ , быстро осциллируют и их вклад в интеграл мал.

Уравнения (3.27) составляют главный результат этого раздела. Они справедливы как в эллиптическом, так и в гиперболическом режимах. В изотропной среде, где  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\parallel} = \varepsilon$ , все скорости излучательного затухания (3.27) сводятся к

$$\frac{1}{\tau} = \frac{4q^3 d^2}{3\hbar} \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon} - \frac{d^2}{3\hbar\sqrt{\pi}a^3} \operatorname{Re} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.28)$$

В прозрачной среде ( $\varepsilon'' = 0$ ) первое слагаемое в (3.28) даёт известный результат для скорости спонтанного затухания в однородной среде, при этом фактор Парселла  $f = \sqrt{\varepsilon}$  [268]. Второе слагаемое описывает омический вклад в затухание, связанный с нагревом среды [269, 270], аналогично случаю источника, помещённого в пору в металле [264].

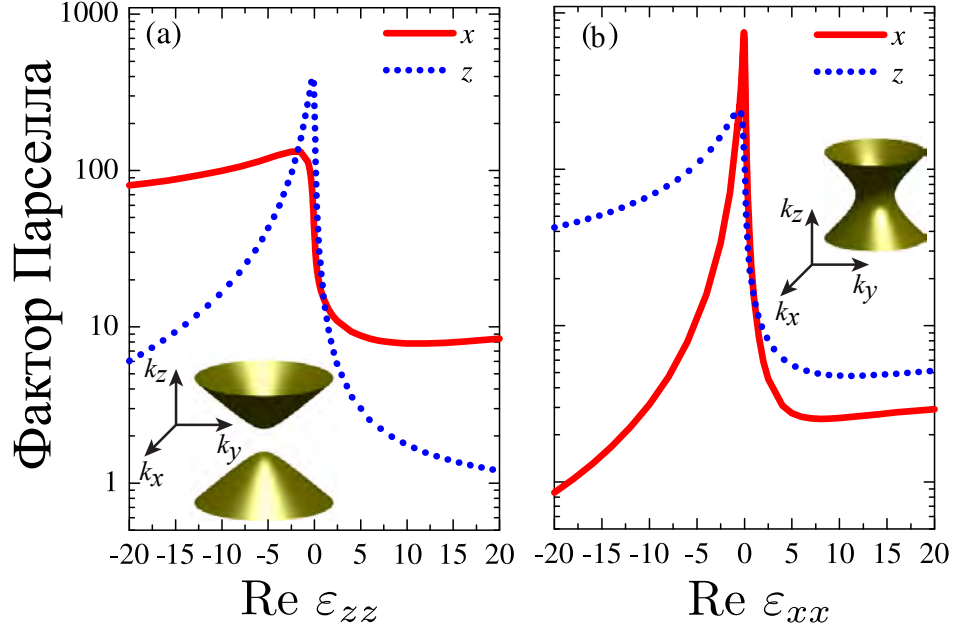


Рис. 3.3: Фактор Парселла в зависимости от (а)  $\text{Re} \varepsilon_{\parallel}$  для  $\text{Re} \varepsilon_{\perp} = 1$  и (б)  $\text{Re} \varepsilon_{\perp}$  для  $\text{Re} \varepsilon_{\parallel} = 1$ . Сплошные и пунктирные линии соответствуют поляризации экситона вдоль осей  $x$  и  $z$ , соответственно. На вставке схематически показаны соответствующие изочастотные поверхности в гиперболическом режиме при  $\text{Re} \varepsilon_{\perp} \text{Re} \varepsilon_{\parallel} < 0$ . Расчёт выполнен для  $qa = 0.1$  и  $\text{Im} \varepsilon_{\parallel} = \text{Im} \varepsilon_{\perp} = 0.1$ .

В анизотропной среде с малыми потерями, т.е. с  $\varepsilon''_{\parallel} = \varepsilon''_{\perp} \rightarrow 0$ , уравнения (3.27)

сводятся к

$$\frac{1}{\tau_{\alpha}} = \begin{cases} W_{\alpha}^{(0)}, & \varepsilon'_{\perp} > 0, \varepsilon'_{\parallel} > 0, \\ W_{\alpha}^{(0)} + \frac{W_{\alpha}^{(1)}}{qa} + \frac{W_{\alpha}^{(3)}}{(qa)^3}, & \varepsilon'_{\perp} > 0, \varepsilon'_{\parallel} < 0, \\ -\frac{W_{\alpha}^{(1)}}{qa} + \frac{W_{\alpha}^{(3)}}{(qa)^3}, & \varepsilon'_{\perp} < 0, \varepsilon'_{\parallel} > 0, \\ 0, & \varepsilon'_{\perp} < 0, \varepsilon'_{\parallel} < 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

где  $\alpha = x, y, z$ ,

$$\begin{aligned} W_z^{(0)} &= \frac{4q^3 d^2 \sqrt{\varepsilon'_{\perp}}}{3\hbar}, & W_x^{(0)} &= \frac{q^3 d^2 (\varepsilon'_{\parallel} + 3\varepsilon'_{\perp})}{3\hbar \sqrt{\varepsilon'_{\perp}}}, \\ W_z^{(1)} &= -\frac{\sqrt{\pi} |\varepsilon'_{\perp}| q^3 d^2 (2|\varepsilon'_{\perp}| + |\varepsilon'_{\parallel}|)}{2\hbar (|\varepsilon'_{\parallel}| + |\varepsilon'_{\perp}|)^{3/2}}, & W_x^{(1)} &= \frac{\sqrt{\pi} q^3 d^2 |\varepsilon'_{\parallel}|^2}{4\hbar \sqrt{\varepsilon'_{\perp}} (|\varepsilon'_{\parallel}| + |\varepsilon'_{\perp}|)^{3/2}}, \\ W_z^{(3)} &= \frac{\sqrt{\pi} |\varepsilon'_{\perp}| q^3 d^2}{2\hbar (|\varepsilon'_{\parallel}| + |\varepsilon'_{\perp}|)^{3/2}}, & W_x^{(3)} &= \frac{\sqrt{\pi} q^3 d^2 |\varepsilon'_{\parallel}|}{4\hbar \sqrt{|\varepsilon'_{\perp}|} (|\varepsilon'_{\parallel}| + |\varepsilon'_{\perp}|)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

и  $W_y \equiv W_x$ . Считая, что  $W^{(3)} \gg W^{(1)}$  при  $qa \ll 1$ , получаем для фактора Парселла

$$f_z = \frac{3}{4} \operatorname{Im} \frac{-\sqrt{\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp} - 1} + \arctan \sqrt{\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp} - 1}}{\sqrt{\pi}\varepsilon_{\perp}(\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp} - 1)^{3/2}(qa)^3} + \operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon_{\perp}}, \quad (3.31)$$

$$f_x = f_y = \frac{3}{4} \operatorname{Im} \frac{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp} - 1} - \varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp} \arctan \sqrt{\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp} - 1}}{2\sqrt{\pi}\varepsilon_{\perp}(\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp} - 1)^{3/2}(qa)^3} + \operatorname{Re} \frac{\varepsilon_{\parallel} + 3\varepsilon_{\perp}}{4\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}.$$

Фактор Парселла (3.31) имеет особенность в зависимости от  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$ . В эллиптическом режиме, когда обе проницаемости положительны, скорости перехода не зависят от размера квантовой точки, и определяются вторыми слагаемыми в уравнениях (3.31). Если одновременно  $\varepsilon_{\parallel} < 0$  и  $\varepsilon_{\perp} < 0$ , то скорость обращается в ноль, т.к. все собственные моды такой среды являются эванесцентными и излучение невозможно. В наиболее интересном гиперболическом режиме, когда продольные и поперечные проницаемости разного знака,  $\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp} < 0$ , скорость излучения определяется слагаемыми  $\propto 1/a^3$  в (3.31). Это связано с тем, что интегралы в (3.18) контролируются отсечкой на волновых векторах порядка  $k_{\max} \propto 1/a$ .

Результаты численного расчёта фактора Парселла согласно уравнениям (3.18) и (3.19) приведены на рис. 3.3. В согласии с (3.27), скорости затухания резко возрастают когда одна из диэлектрических проницаемостей становится отрицательной. При этом наибольший фактор Парселла соответствует случаю, когда величина  $\varepsilon'_{\parallel}$  [рис. 3.3(a)] или  $\varepsilon'_{\perp}$  [рис. 3.3(b)] отрицательна, но мала по абсолютной величине, т.е. границе между эллиптическим и гиперболическим режимами. В частности, слагаемые в (3.29) в ведущем порядке по  $1/a^3$  пропорциональны  $\sqrt{\varepsilon'_{\perp}}/(a^3|\varepsilon'_{\parallel}|^{3/2})$  при  $|\varepsilon'_{\parallel}| \gg 1$ , и уменьшаются с ростом  $|\varepsilon'_{\parallel}|$ . Усиление фактора Парселла связано с модами с большими волновыми векторами, т.е. является эффектом локального поля. При больших значениях  $|\varepsilon'_{\parallel}|$  происходит экранировка локального поля и фактор Парселла подавляется. Поэтому максимальное значение достигается на границе эллиптического и гиперболического режимов. Аналитические результаты (3.27) описывают все кривые на рис. 3.3 с точностью выше чем 5%.

Ещё одним интересным эффектом является усиление скорости спонтанного излучения в эллиптическом режиме с  $0 < \varepsilon_{\perp} \ll \varepsilon_{\parallel}$  для экситона, поляризован-

ного в плоскости [сплошная красная кривая на рис. 3.3(b)]. При этом изочастотная поверхность имеет вид эллипсоида, сильно сплюснутого вдоль оси  $z$ . Фактор Парселла определяется вторым слагаемым во втором из уравнений (3.31),  $f_{x,y} = (\varepsilon_{\parallel} + 3\varepsilon_{\perp})/4\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ . Вблизи перехода между эллиптическим и гиперболическим режимами фактор Парселла расходится как  $1/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ . При этом, в отличие от гиперболического режима, плотность состояний остаётся конечной и скорость перехода не расходится на малых размерах квантовой точки. Этот эффект был более подробно изучен в работе [A19], расходимость  $\propto 1/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$  вызвана уменьшением эффективного фазового объёма ТМ-поляризованных мод. В эллиптическом режиме скорость спонтанного излучения может быть получена по правилу Ферми (3.5), пренебрегая конечными размерами квантовой точки, и полагая  $\langle f|H_{\text{int}}(\mathbf{k}, \sigma)|i\rangle = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k},\sigma}$ , где  $\mathbf{E}_{\mathbf{k},\sigma}$  — амплитуда оператора электрического поля, соответствующая одному кванту излучения. Исследуем более подробно вклад ТМ-поляризованных волн, для которого

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},\text{TM}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k},\text{TM}}}{V_{\mathbf{k},\text{TM}}}} \left( \cos\theta_{\mathbf{k}}\hat{\varphi} - \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \sin\theta_{\mathbf{k}}\hat{z} \right). \quad (3.32)$$

Эффективный объём моды  $V_{\mathbf{k},\text{TM}}$  определяется из условия квантования  $V\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\hat{\varepsilon}\mathbf{E}_{\mathbf{k}}) = 2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k},\text{TM}}$ , где  $V$  — нормировочный объём,  $\theta$  и  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы вектора  $\mathbf{k}$ , и может быть выражен через показатель преломления ТМ мод  $n_{\text{TM}} = ck/\omega_{\mathbf{k},\text{TM}}$  согласно  $V_{\mathbf{k},\text{TM}} = V\varepsilon_{\perp}^2/n_{\mathbf{k},\text{TM}}^2(\theta_{\mathbf{k}})$ . Интегрируя по  $k$  и  $\varphi$ , находим вклад ТМ мод в скорость излучательного затухания:

$$\frac{1}{\tau_{x,\text{TM}}} = \frac{d^2}{2\hbar} \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^3 \int_0^{\pi} \frac{d\theta_{\mathbf{k}} \sin\theta_{\mathbf{k}} \cos^2\theta_{\mathbf{k}} n_{\text{TM}}^5(\theta_{\mathbf{k}})}{\varepsilon_{\perp}^2} = \frac{d^2}{3\hbar} \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^3 \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}. \quad (3.33)$$

Выражение (3.33) расходится при  $\varepsilon_{\perp} \rightarrow +0$ . В ультра-анизотропном пределе ( $\varepsilon_{\perp} \ll \varepsilon_{\parallel}$ ) спонтанное излучение определяется волнами, распространяющимися под скользящими углами к плоскости симметрии,  $\theta_{\mathbf{k}} \approx \pi/2$ :

$$\frac{1}{\tau_{x,\text{TM}}} = \frac{d^2}{2\hbar} \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^3 \sqrt{\varepsilon_{\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^2 d\psi}{[\psi^2 + \varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{\parallel}]^{5/2}}, \quad (3.34)$$

где  $\psi = \theta_{\mathbf{k}} - \pi/2$ . Острый максимум в (3.34) для  $\psi \sim \sqrt{\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{\parallel}} \ll 1$  связан с расходящимся показателем преломления  $n_{\text{TM}}$ , т.е. малым эффективным модовым объёмом  $V_{\mathbf{k},\text{TM}}$ .

Полученный ответ для фактора Парселла также может быть обобщён на источники излучения магнитодипольного типа [A15]. В роли последних в оптическом спектральном диапазоне могут выступать ионы  $\text{Eu}^{3+}$  [271, 272]. Для магнитодипольного источника конечных размеров нелокальное материальное соотношение для отклика электрической поляризации на магнитное поле  $\mathbf{H}$  запишем в виде [ср. с (3.9)]

$$\mathbf{P}_{\text{exc}}^{(m)} = \frac{i}{q} \text{rot} \frac{m^2 \Phi(\mathbf{r})}{\hbar(\omega_0 - \omega)} \int d^3 r' \Phi(\mathbf{r}') \mathbf{H}(\mathbf{r}'), \quad (3.35)$$

где  $m$  – эффективный матричный элемент магнито-дипольного перехода. Выражение (3.20) для скорости спонтанного излучения следует заменить на

$$\frac{1}{\tau_{\alpha}^{(m)}} = \frac{2m^2}{\hbar} \iint d^3 r d^3 r' \text{Im} G_{\alpha\alpha}^{(m)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}'), \quad (3.36)$$

где функция Грина  $G^{(m)}$  связана с  $G$  соотношением  $G^{(m)}(\mathbf{r}) = 1/q^2 \text{rot rot } G^{(m)}(\mathbf{r})$ . Ответ для фактора Парселла принимает вид

$$f_x^{(m)} = f_y^{(m)} = \text{Re} \frac{\varepsilon_{\perp}^{3/2} + 3\varepsilon_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_{\perp}}}{4} + \frac{3}{4qa\sqrt{\pi}} \text{Im} \frac{\varepsilon_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_{\perp}}}{\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} - \varepsilon_{\perp}} \arctan \left( \sqrt{\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp} - 1} \right), \quad (3.37)$$

$$f_z^{(m)} = \text{Re} \varepsilon_{\perp}^{3/2}.$$

Сравнивая это выражение с ответом (3.31) для электродипольного излучения видно, что в магнито-дипольном случае усиление фактора Парселла в гиперболической среде параметрически слабее,  $\propto 1/qa$ , а не  $\propto 1/(qa)^3$ , и происходит лишь для магнитного диполя, ориентированного перпендикулярно оптической оси.

Итак, в настоящем разделе развита теория эффекта Парселла для сферической квантовой точки, помещённой в одноосную среду, с учётом конечного размера квантовой точки и потерь в среде. Получены замкнутые аналитические выражения для фактора Парселла в случае, когда размер квантовой точки много меньше длины волны излучения. Показано, что в гиперболическом режиме скорость

спонтанного затухания сильно зависит от размера квантовой точки и расходитя при уменьшении размера. Наибольшие значения фактора Парселла соответствуют границе между эллиптическим и гиперболическим режимами. Построенная теория может быть применима для квантовых точек в естественных гиперболических материалах (графит, нитрид бора). Также она даёт качественный ответ для гиперболических метаматериалов, для которых в качестве эффективного размера излучателя может выступать размер элементарной ячейки.

### 3.3 Спонтанное излучение в дискретных гиперболических материалах

В этом разделе перейдём к от однородных гиперболических сред к дискретным метаматериалам. Будут использованы простые теоретические модели, позволяющие получать замкнутые аналитические выражения для фактора Парселла. Их преимуществом перед непосредственными численными расчётами [273] является возможность наглядной физической интерпретации полученных результатов. С другой стороны, они позволяют изучать поправки к приближению эффективной среды, развитому в предыдущем разделе.

В разделе 3.3.1 будет изучена модель гиперболического метаматериала на основе кубической решётки резонансных дипольных рассеивателей [A16], см. рис. 3.4(а). Это простейшая модель для описания оптических свойств естественных и искусственных материалов. Подобные приближения ранее использовались для решёток квантовых точек [104, 105], оптических решёток холодных атомов [274, 275, 276, 277], при описании резонансного рассеяния  $\gamma$ -лучей на ядрах кристаллов [89], а также в рамках общего дискретного дипольного приближения теории рассеяния [278, 279]. В физике метаматериалов такой подход применялся для описания массивов плазмонных наночастиц [242] с резонансным электродипольным откликом и резонаторов на основе разомкнутых колец, характеризующихся резонансным магнитодипольным откликом [280, 281, 282, 283, 284]. Модель

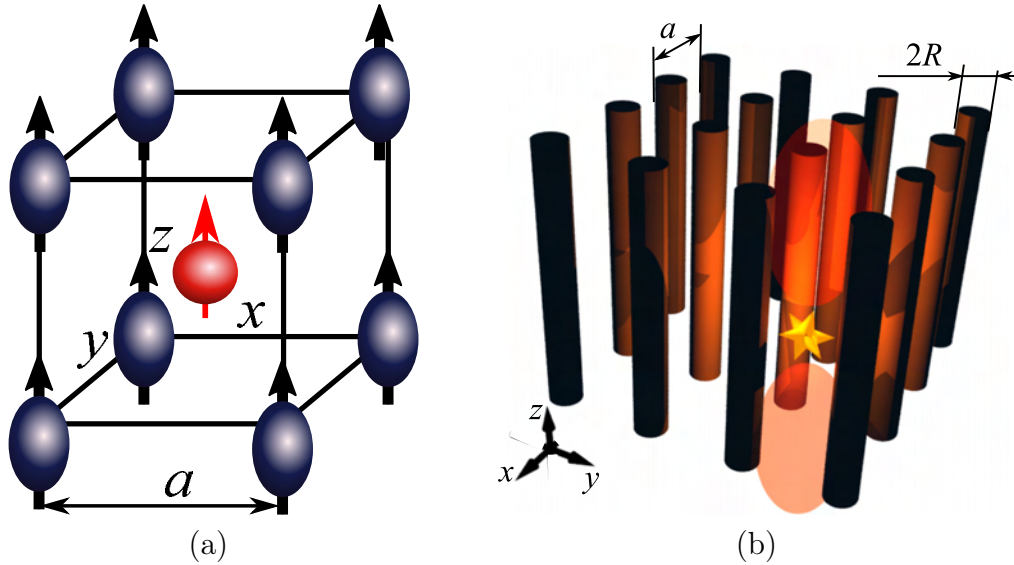


Рис. 3.4: Схематическая иллюстрация (a) элементарной ячейки метаматериала в виде кубической решётки резонансных дипольных рассеивателей и (b) двумерного метаматериала из проводов с помещенными источниками света.

дискретных диполей представляет собой непосредственное обобщение подхода в предыдущем разделе 3.2 на случай, когда размер источника излучения меньше, чем размер элементарной ячейки метаматериала. Она позволит исследовать зависимость фактора Парселла от положения источника внутри элементарной ячейки.

В разделе 3.3.1 представлены результаты исследования спонтанного излучения в метаматериалах на основе массивов металлических проводов [A18], см. рис. 3.4(b). Ранее спонтанное излучение в метаматериалах изучалось лишь для слоистых металло-диэлектрических структур [256, 285, 257], а специфика массивов проводов не учитывалась. В работе [286] была приведена оценка фактора Парселла по порядку величины  $\sim (\lambda/a)^2$ , где  $\lambda$  — длина волны, а  $a$  — период структуры. Целью раздела 3.3.1 является последовательное рассмотрение фактора Парселла в зависимости от диэлектрической проницаемости проводов и положения источника излучения внутри элементарной ячейки метаматериала.

### 3.3.1 Трёхмерная решётка резонансных дипольных рассеивателей

Рассматривается бесконечная периодическая  $\mathbf{r}_j$  решётка дипольных рассеивателей с периодом решётки  $a$ . Считается, что рассеиватели помещены в вакуум, подход может быть легко обобщён на случай произвольной фоновой диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_b \neq 1$ . Излучатель, помещённый внутрь решётки в точку  $\mathbf{r}_0$ , имеет дипольный момент  $\mathbf{d}_0$ , как показано на рис. 3.4(а). Уравнение для самосогласованного электрического поля имеет вид

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - q^2 \mathbf{E} = 4\pi q^2 \mathbf{P}, \quad (3.38)$$

где  $q = \omega/c$  — волновой вектор света на частоте  $\omega$ . Величина  $\mathbf{P}$  в (3.38) — это полная поляризация диполей решётки и излучателя:

$$\mathbf{P} = \mathbf{d}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \sum_j \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j). \quad (3.39)$$

Считается, что все диполи решётки  $\mathbf{p}_j$  характеризуются одним и тем же тензором поляризуемости  $\hat{\alpha}$ ,

$$\mathbf{p}_j = \hat{\alpha} \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_j), \quad (3.40)$$

где за  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  обозначено приложенное внешнее электрическое поле. Аналитические значения поляризуемостей атомов, малых диэлектрических и плазмонных частиц приведены в [287]. Резонансная поляризуемость квантовых точек обсуждается в работе [32], см. также выражение (3.9) в предыдущем разделе.

Нашей задачей является расчёт полного электрического поля и поляризаций, наведённых в структуре излучающим диполем  $\mathbf{d}_0$ . На первом этапе запишем систему связанных дипольных уравнений

$$\mathbf{p}_j = \hat{\alpha} \left[ \sum_{j' \neq j} \hat{G}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j'}) \mathbf{p}_{j'} + G(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_0) \mathbf{d}_0 \right], \quad (3.41)$$

где  $\hat{G}$  — функция Грина фотона в вакууме

$$\hat{G}(\mathbf{r}) = \left[ q^2 \hat{1} + \nabla \otimes \nabla \right] \frac{e^{iqr}}{r}, \quad (3.42)$$



в которой за  $\nabla \otimes \nabla$  обозначен тензор  $\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ , а за  $\hat{1}$  — единичная матрица  $3 \times 3$ . Далее разложим поле по блоховским собственным модам с волновыми векторами  $\mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{p}_j = \int_{(\text{BZ})} \frac{V_0 d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} \mathbf{p}_\mathbf{k}, \quad (3.43)$$

где  $V_0 = a^3$  — объём элементарной ячейки и интегрирование идёт по зоне Бриллюэна  $|k_m| < \pi/a$ ,  $m = x, y, z$ . При этом уравнения (3.41) распадаются на набор независимых линейных уравнений для каждого  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{p}_\mathbf{k} = \hat{\alpha} [\hat{C}(\mathbf{k}) \mathbf{p}_\mathbf{k} + \hat{\mathcal{G}}_\mathbf{k}(-\mathbf{r}_0) \mathbf{d}_0]. \quad (3.44)$$

Тензор  $\hat{C}$  в (3.47) — т.н. константа взаимодействия решётки, определённая как [281],

$$\hat{C}(\mathbf{k}) = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow 0} [\hat{\mathcal{G}}_\mathbf{k}(\mathbf{r}) - \hat{G}(\mathbf{r})] \equiv \sum_{\mathbf{r}_j \neq 0} \hat{G}(-\mathbf{r}_j) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}, \quad (3.45)$$

где  $\hat{\mathcal{G}}_\mathbf{k}$  — функция Грина фотона с блоховским вектором  $\mathbf{k}$ ,

$$\hat{\mathcal{G}}_\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \sum_j \hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}. \quad (3.46)$$

Решая систему (3.44) и подставляя результат в (3.43), находим

$$\mathbf{p}_j = \int_{(\text{BZ})} \frac{V_0 d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} \hat{\alpha} [\hat{1} - \hat{C}(\mathbf{k}) \hat{\alpha}]^{-1} \hat{\mathcal{G}}_\mathbf{k}(-\mathbf{r}_0) \mathbf{d}_0. \quad (3.47)$$

Теперь основная техническая сложность задачи свелась к расчёту бесконечных решёточных сумм (3.46). Непосредственное суммирование в координатном пространстве оказывается неэффективным. Суммы могут быть вычислены либо методом Эвальда [288], либо методом Флоке [289, 281]. Нами использовался вариант метода Флоке из работы [281], который является предпочтительным для последующего численного интегрирования в (3.47). Электрическое поле в структуре содержит сумму вкладов от всех излучающих диполей,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{p}_0 + \sum_j \hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \mathbf{p}_j = \\ &= \hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{p}_0 + \int_{(\text{BZ})} \frac{V_0 d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{\mathcal{G}}_\mathbf{k}(\mathbf{r}) \hat{\alpha} [\hat{1} - \hat{C}(\mathbf{k}) \hat{\alpha}]^{-1} \hat{\mathcal{G}}_\mathbf{k}(-\mathbf{r}_0) \mathbf{d}_0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Уравнение (3.48) определяет решёточную функцию Грина задачи.

Далее ограничимся случаем одноосных дипольных рассеивателей, в которых единственной ненулевой компонентой тензора  $\hat{\alpha}$  является  $\alpha_{zz}$  (например — сильно вытянутых металлических эллипсоидов [2]). Также будем считать, что излучающий диполь  $\mathbf{d}_0$  поляризован вдоль оси  $z$ . Тогда в приближении эффективной среды он взаимодействует лишь с волнами ТМ поляризации. Уравнение для дисперсии возбуждаемых блоховских мод с заданным волновым вектором  $\mathbf{k}$  можно определить из положения полюса в (3.47) согласно [281, 283]

$$\frac{1}{\alpha_{zz}} - C_{zz}(\mathbf{k}) = 0. \quad (3.49)$$

Отметим, что уравнение (3.49) является вещественным при отсутствии омических потерь, т.к. мнимая часть постоянной взаимодействия (3.45) компенсируется слагаемым в поляризуемости, обусловленным излучательным затуханием:

$$\frac{1}{\alpha_{zz}} = \frac{1}{\alpha_{0,zz}} - \frac{2iq^3}{3} \hat{1}. \quad (3.50)$$

Здесь за  $\alpha_{0,zz}$  обозначена дипольная поляризуемость, рассчитанная без учёта радиационного затухания [287].

Для установления соответствия между рассматриваемой структурой и гиперболическими метаматериалами получим приближённое решение уравнения (3.49) в рамках приближения эффективной среды. Запишем разложения для функций Грина (3.42), (3.46) по плоским волнам:

$$\begin{aligned} \hat{G}(\mathbf{r}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hat{G}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \hat{G}_{\mathbf{k}} = -4\pi \frac{q^2 - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{q^2 - k^2}, \\ \hat{\mathcal{G}}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{b}} \hat{G}_{\mathbf{k}+\mathbf{b}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{b})\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Перепишем выражение для константы взаимодействия через сумму в обратном

пространстве:

$$\begin{aligned}\hat{C}(\mathbf{k}) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sum_{\mathbf{r}_j} \hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} - \hat{G}(\mathbf{r}) \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sum_{\mathbf{b}} \hat{G}_{\mathbf{k}+\mathbf{b}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{b})\mathbf{r}} - \hat{G}(\mathbf{r}) \right] = \\ &= \hat{G}_{\mathbf{k}} + \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sum_{\mathbf{b} \neq 0} \hat{G}_{\mathbf{k}+\mathbf{b}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{b})\mathbf{r}} - \hat{G}(\mathbf{r}) \right].\end{aligned}\quad (3.52)$$

Далее во втором слагаемом учтём критерий эффективной среды  $ka \ll 1$ ,  $qa \ll 1$ . Тогда можно пренебречь  $\mathbf{k}$  по сравнению с  $\mathbf{b}$ , а для функции Грина воспользоваться подстановкой

$$\begin{aligned}\hat{G}(\mathbf{r}) &\rightarrow \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}) \equiv \nabla \nabla \frac{1}{r} = \frac{3\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} - r^2}{r^5} - 4\pi \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^2} \delta(\mathbf{r}), \\ \hat{G}_{\mathbf{k}} &\rightarrow \hat{G}_{\text{stat},\mathbf{k}} = -\frac{4\pi \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2}.\end{aligned}\quad (3.53)$$

За  $\hat{G}_{\text{stat}}$  обозначена функция Грина в квазистатистическом пределе  $c \rightarrow \infty$ . При этом для  $qr \ll 1$  имеем  $\hat{G}(\mathbf{r}) \approx \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}) + 2iq^3/3$ , где дополнительно учтено следующее слагаемое в разложении по степеням  $qr$ , описывающее эффекты запаздывания.

Тогда из (3.52) получим

$$\begin{aligned}\hat{C}(\mathbf{k}) &= \hat{G}_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} + \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sum_{\mathbf{b} \neq 0} \hat{G}_{\text{stat},\mathbf{b}} e^{i\mathbf{b}\mathbf{r}} - \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}) \right] = \\ &= \hat{G}_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} + \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sum_{\mathbf{b} \neq 0} \frac{1}{V_0} \int d^3\mathbf{r}' \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{b}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} - \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}) \right] = \\ &= \hat{G}_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} + \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{V_0} \int d^3\mathbf{r}' \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}') \left[ \sum_{\mathbf{b}} e^{i\mathbf{b}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} - 1 \right] - \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}) \right] = \\ &= \hat{G}_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} + \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{V_0} \int d^3\mathbf{r}' \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}') \left[ V_0 \sum_{\mathbf{r}_j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) - 1 \right] - \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}) \right] = \\ &= \hat{G}_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} - \frac{1}{V_0} \int d^3r \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{r}_j \neq 0} \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}_j) = \hat{G}_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} + \frac{4\pi}{3V_0} + \sum_{\mathbf{r}_j \neq 0} \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}_j).\end{aligned}\quad (3.54)$$

Для кубической решётки  $\sum_{\mathbf{r}_j \neq 0} \hat{G}_{\text{stat}}(\mathbf{r}_j) = 0$ . Таким образом, окончательно для константы взаимодействия получаем

$$\hat{C}(\mathbf{k}) \approx \hat{G}_{\mathbf{k}} - \frac{2iq^3}{3} + \frac{4\pi}{3V_0} \equiv -4\pi \frac{q^2 - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{q^2 - k^2} - \frac{2iq^3}{3} + \frac{4\pi}{3V_0}.\quad (3.55)$$

Подставляя (3.55) и (3.50) в (3.49), восстанавливаем стандартное выражение для дисперсии ТМ-поляризованных волн [290]

$$q^2 = \frac{k_x^2 + k_y^2}{\varepsilon_{zz}} + k_z^2. \quad (3.56)$$

Здесь за  $\varepsilon_{zz}$  обозначена эффективная диэлектрическая проницаемость среды, рассчитанная по формуле Максвелла-Гарнетта

$$\varepsilon_{zz} = 1 + \frac{1}{V/(4\pi\alpha_{0,zz}) - 1/3}, \quad (3.57)$$

при этом  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1$ . Видно, что при отрицательных значениях поляризуемости рассеивателей можно достичь гиперболического режима. Таким образом, дискретное дипольное приближение можно рассматривать как способ последовательного вывода формулы Максвелла-Гарнетта.

На рис. 3.5 показаны изочастотные кривые в плоскости  $(k_z, k_x)$ , рассчитанные путём численного решения уравнения (3.49) для различных поляризуемостей  $\alpha_{0,zz}$ . В зависимости от величины поляризуемости может реализовываться либо эллиптический, либо гиперболический режим. При  $\alpha_{0,zz} \approx -1.3a^3/(4\pi)$  (синяя пунктирная кривая), режим оказывается смешанным — на одной частоте сосуществуют две моды с эллиптической и гиперболической дисперсией. Эти изочастотные кривые не описываются приближением Максвелла-Гарнетта (3.56),(3.57), предсказывающим лишь одну ТМ моду на каждой частоте. Смешанный режим анализировался в работах [281, 291] где было показано, что он может быть получен в рамках модели эффективной среды с учётом пространственной дисперсии.

Перейдём к расчёту фактора Парселла  $f$  в метаматериале. Будем считать, что размером источника можно пренебречь по сравнению с размером элементарной ячейки метаматериала  $a$ . Тогда величина фактора Парселла определяется мнимой частью фотонной функции Грина, вычисленной в точке расположения излучателя [32, 292, 264] согласно уравнению (3.21):

$$f = \frac{3 \operatorname{Im} E_z(\mathbf{r}_0)}{2q^3 d_0}. \quad (3.58)$$

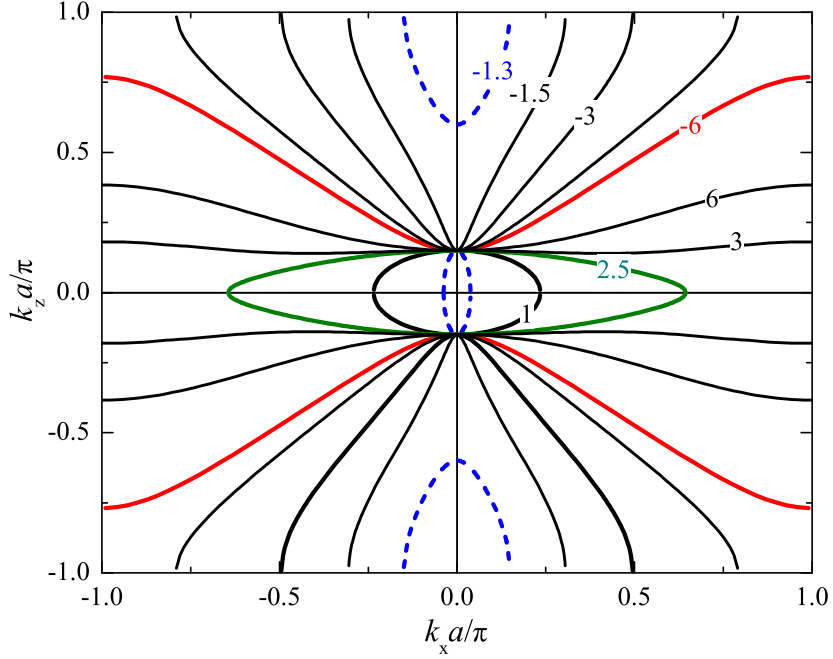


Рис. 3.5: Изочастотные кривые в плоскости  $xz$ , рассчитанные для различных дипольных поляризуемостей  $\alpha_{0,zz}$ , указанных рядом с каждой кривой. Расчёт выполнен для  $qa = 0.15\pi$ .

Комбинируя уравнения (3.58), (3.48), (3.47), получаем результат в компактном виде

$$f = \frac{3}{2q^3} \text{Im} \int_{(BZ)} \frac{V_0 d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|\mathcal{G}_{\mathbf{k},zz}(\mathbf{r}_0)|^2}{1/\alpha_{zz} - C_{zz}(\mathbf{k}) - i0}. \quad (3.59)$$

Частота  $\omega$ , задающая волновой вектор света  $q$  в (3.59), определяется энергией перехода. За  $-i0$  обозначено бесконечно малое слагаемое в знаменателе, задающее правило обхода полюсов [293]. Из структуры уравнения (3.59) видно, что фактор Парселла даётся полюсным вкладом, соответствующим испусканию волн, дисперсия которых задана уравнением (3.49). Отметим, что первое слагаемое в правой части (3.48) было скомпенсировано в (3.59) полюсным вкладом в функции Грина  $\mathcal{G}_{\mathbf{k},zz}(\mathbf{r}_0)$  при  $q = k$ .

Результаты численного расчёта зависимости фактора Парселла от положения источника внутри элементарной ячейки решётки представлены на рис. 3.6 и рис. 3.7. Рисунок 3.8 показывает частотную зависимость фактора Парселла. Расчёт демонстрирует, что в гиперболическом режиме фактор Парселла значительно

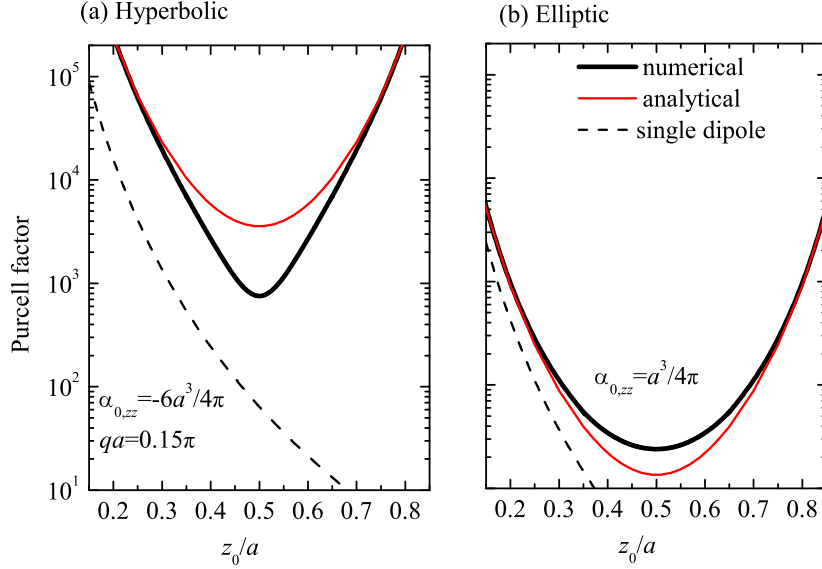


Рис. 3.6: Фактор Парселла в (а) гиперболическом и (b) эллиптическом режиме в зависимости от координаты источника  $z_0$  при  $x_0 = y_0 = 0$ . Жирная сплошная чёрная, тонкая сплошная красная и пунктирная черная кривые соответствуют результатам численного расчёта, аналитическим результатам согласно (3.62) (панель а) и (3.65) (панель b), и фактору Парселла вблизи одиночного рассеивателя (3.67) в точке  $\mathbf{r} = 0$ . Расчёт выполнен для  $qa = 0.15\pi$  и  $\alpha_{0,zz} = -6a^3/(4\pi)$  (а) и  $\alpha_{0,zz} = a^3/(4\pi)$  (b).

больше, чем в эллиптическом. Его величина очень чувствительна к положению источника внутри элементарной ячейки и возрастает при приближении к узлам решётки.

Перед тем, как обсуждать численные результаты более подробно, получим выражения для фактора Парселла в квазистатическом пределе  $q \ll \pi/a$  ( $\omega \ll c/a$ ). В этом случае уравнение (3.59) сводится к

$$f = \frac{3}{2q^3} \frac{V_0 |\mathcal{G}_{\text{stat},zz}(\mathbf{r}_0)|^2}{(2\pi)^2} \iint dk_x dk_y \left| \frac{dC_{zz}(\mathbf{k})}{dk_z} \right|_{k_z(k_x, k_y)}^{-1}, \quad (3.60)$$

где константа взаимодействия может быть вычислена в приближении (3.55). Интеграл по  $k_z$  в (3.59) рассчитан как сумма полувычетов на волновых векторах  $\pm k_z(k_x, k_y)$ , являющихся решениями дисперсионного уравнения (3.49) на заданной частоте. Интегрирование по  $k_x$  и  $k_y$  в (3.60) выполняется лишь по той области двумерной зоны Бриллюэна, в которой такое решение существует. Функция Грина  $\mathcal{G}_{\mathbf{k},zz}(\mathbf{r}_0)$  в числителе (3.60) была заменена на квазистатическую функцию Грина

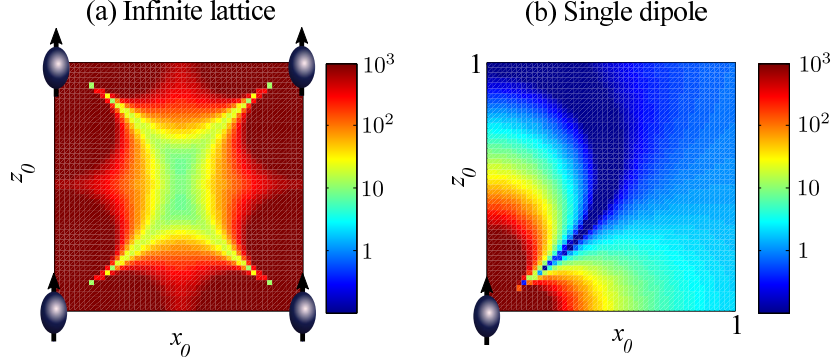


Рис. 3.7: Фактор Парселла в зависимости от положения источника (а) в гиперболическом метаматериале и (б) относительно одиночного рассеивателя в точке  $\mathbf{r} = 0$ . Расчёт выполнен при  $y_0 = 0$  и тех же значениях остальных параметров что на рис. 3.6. Координаты источника меняются в квадранте  $0 \leq x_0 \leq a$ ,  $0 \leq z_0 \leq a$ . Цветовая шкала соответствует логарифмическому масштабу, одинаковому для обеих панелей.

$\mathcal{G}_{\text{stat},zz}(\mathbf{r}_0)$ , определяемую суммой ближних полей (3.53) ближайших рассеивателей. Из структуры ближнего поля диполя (3.53) видно, что наибольшего фактора Парселла следует ожидать в случае, когда источник расположен на вертикальном ребре элементарной ячейки, т.е.  $x_0 = y_0 = 0$ ,  $0 < z_0 < a$ . Тогда  $\mathcal{G}_{\text{stat},zz}(\mathbf{r}_0)$  можно записать в виде

$$G_{zz,\text{stat}}(z_0) \approx \frac{2}{z_0^3} + \frac{2}{(a - z_0)^3}. \quad (3.61)$$

Эта величина резко возрастает при приближении источника к узлу решётки. Вычисляя производную в (3.60) с учётом (3.55) и выполняя интегрирование по волновым векторам, получаем аналитический результат для фактора Парселла

$$f_{\text{hyp}} = \frac{(\varepsilon_{zz} - 1)^2}{32\pi^2} \left( \frac{k_{z,\text{max}}}{q} \right)^3 |V_0 G_{zz,\text{stat}}(z)|^2 \quad (3.62)$$

в гиперболическом метаматериале. Здесь  $k_{z,\text{max}} \gg q$  — отсечка волнового вектора  $k_z$ , возникающая из-за конечного размера зоны Бриллюэна. Её величина зависит от эффективной диэлектрической проницаемости,

$$k_{z,\text{max}} \approx \begin{cases} \frac{\pi}{a}, & -1 \leq \varepsilon_{zz} \leq 0 \\ \frac{\pi}{a\sqrt{|\varepsilon_{zz}|}}, & \varepsilon_{zz} \leq -1. \end{cases} \quad (3.63)$$

Таким образом, уравнение (3.62) даёт компактный аналитический результат для

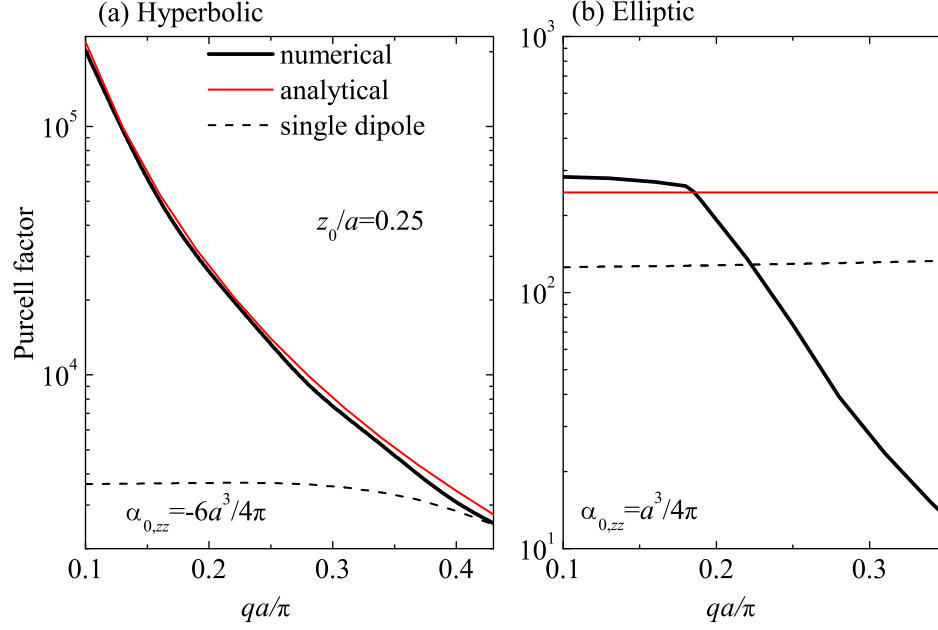


Рис. 3.8: Фактор Парселла в (a) гиперболическом и (b) эллиптическом режиме в зависимости от безразмерной частоты  $qa \equiv \omega a/c$  при  $\mathbf{r}_0 = 0.25a\hat{z}$ . Обозначения и остальные параметры расчёта такие же, как и на рис. 3.6.

фактора Парселла в гиперболическом метаматериале без потерь. Его общая структура может быть интерпретирована следующим образом: множитель  $(k_{z,\max}/q)^3 \sim 1/(qa)^3$  описывает усиление плотности фотонных состояний по сравнению с вакуумом. Множитель  $|V_0\mathcal{G}_{\text{stat},zz}(z)|^2$  отражает координатную зависимость фактора Парселла, определяемую величиной полей ближайших дипольных рассеивателей [294]. Вблизи узлов решётки уравнение (3.62) можно привести к виду

$$f_{\text{hyp}}(q, z \rightarrow 0) \approx \frac{\pi(\varepsilon_{zz} - 1)^2 a^3}{8q^3 |z|^6}, \quad (3.64)$$

где предполагалось, что  $|\varepsilon_{zz}| \leq 1$ .

Аналогичный расчёт также можно провести в эллиптическом случае с  $\varepsilon_{zz} > 0$ . Следует отметить, что в приближении эффективной среды фактор Парселла для излучения, поляризованного вдоль оси  $z$ , всегда равняется единице, независимо от  $\varepsilon_{zz}$ , см. уравнение (3.31) с  $\varepsilon_{\perp} = 1$ . За рамками приближения эффективной среды фактор Парселла может отличаться от единицы из-за эффектов локального поля.



Вывод, аналогичный приведённому выше, приводит к ответу

$$f_{\text{ell}} = |\mathcal{G}_{\text{stat},zz}|^2 \left| \frac{V_0(\varepsilon - 1)}{4\pi} \right|^2. \quad (3.65)$$

Это выражение зависит от интенсивности локального поля, аналогично (3.62), однако, меньше в

$$\frac{f_{\text{hyp}}}{f_{\text{ell}}} = \frac{k_{z,\text{max}}^3}{2q^3} \quad (3.66)$$

раз, поскольку в эллиптической среде меньше плотность фотонных состояний. Для того, чтобы разделить коллективные эффекты, связанные с плотностью состояний, и эффекты усиления локального поля полезно также проанализировать фактор Парселла вблизи *одиночного* рассеивателя в точке  $\mathbf{r} = 0$  [287, 295, 2]:

$$f_1 = 1 + \frac{3}{2q^3} \text{Im}[\alpha_{zz} G_{zz}^2(\mathbf{r}_0)]. \quad (3.67)$$

В квазистатическом пределе  $q \rightarrow 0$  выражение (3.67) сводится к

$$f_1 = \left( 1 + \frac{\alpha_{0,zz}}{|z^3|} \right)^2. \quad (3.68)$$

Видно, что оба выражения (3.64) и (3.68) расходятся, когда  $z$  стремится к нулю. Их зависимость от волнового вектора  $q$  качественно отличается: в гиперболическом метаматериале (3.64) расходится как  $1/q^3$  при малых  $q$ , а формула (3.68) вообще не зависит от  $q$ . Расходимость фактора Парселла в длинноволновом пределе является характерной особенностью гиперболическом режиме [253, A14].

Перейдём к обсуждению рассчитанных зависимостей фактора Парселла от положения источника и от частоты перехода  $\omega = cq$ , показанных на рис. 3.6–3.8. Расчёт подтверждает расходимость при приближении источника к узлам решётки (сплошная кривая на рис. 3.6а). Фактор Парселла хорошо описывается аналитической формулой (3.62) (тонкая красная кривая). Модель одиночного рассеивателя (3.67) приводит к значительно меньшим факторам Парселла в гиперболическом режиме (пунктирная черная кривая), хотя также расходится при  $z = 0$  и  $z = a$ . Дополнительное сравнение между метаматериалом и одиночным рассеивателем

представлено на карте фактора Парселла в зависимости от двух координат  $x$  и  $z$  на рис. 3.7. Выражение (3.67), учитывающее лишь один рассеиватель в точке  $\mathbf{r} = 0$ , удовлетворительно воспроизводит пространственное распределение фактора Парселла вблизи этой точки, см. рис. 3.7(b). Из сравнения двух панелей на рис. 3.7 видно, что вблизи точки  $\mathbf{r} = 0$  угловая зависимость фактора Парселла приближённо даётся выражением  $(3 \cos^2 \theta - 1)^2$ . Модель одиночного рассеивателя значительно недооценивает абсолютные значения фактора Парселла. В эллиптическом режиме ситуация качественно отличается. Все три подхода, а именно численный расчёт согласно (3.59), модель одиночного рассеивателя (3.67) с  $\alpha_{0,zz} = a^3/(4\pi)$  и аналитическая модель (3.65) дают схожие результаты, см. рис. 3.6(b), 3.8(b). Коллективное усиление фактора Парселла в гиперболическом режиме также проявляется в его частотной зависимости, показанной на рис. 3.8(a). Пунктирная кривая, рассчитанная в приближении одиночного рассеивателя, на низких частотах стремится к пределу (3.68), не зависящему от частоты. В гиперболическом же метаматериале фактор Парселла расходится на низких частотах как  $1/\omega^3$ , согласно (3.64).

Таким образом, рис. 3.6–3.8 демонстрируют важность эффектов локального поля в гиперболическом режиме и подтверждают коллективную природу усиления спонтанного излучения.

Отметим, что в реалистичных гиперболических метаматериалах значения фактора Парселла значительно меньше, чем рассчитанные выше. Главным образом это связано с нарушением условий применимости дипольного приближения. Если расстояния между рассеивателями становятся сопоставимыми с их размерами, необходимо учитывать мультипольные вклады. Аналогично случаю одиночных плазмонных наночастиц [2], это приводит к уменьшению локальных полей и фактора Парселла. Достижение большого усиления плотности фотонных состояний (3.66) также является непростой задачей. Наконец, в реалистичных структурах существенными являются омические потери. Все эти три эффекта оказываются крайне важными в оптическом диапазоне. В качестве примера заметим, что даже

для детально исследованных и оптимизированных диэлектрических микрорезонаторов значение фактора Парселла  $f \sim 10$  уже считается большим [296]. На низких частотах можно ожидать гораздо больших значений фактора Парселла. Например, уже в оригинальной работе Парселла [244], в которой изучались магнитодипольные переходы в микроволновой области спектра, сообщалось о возможности усиления с  $f > 10^{18}$ .

### 3.3.2 Массив металлических нанопроводов

Перейдём к описанию спонтанного излучения в гиперболическом метаматериале на основе массива металлических проводов. Расчёт основан на методе функций Грина, как и в предыдущих разделах 3.2, 3.3.1. Рассматриваемая структура показана на рис. 3.4(b). Она состоит из одинаковых бесконечно длинных проводов радиуса  $R$ , расположенных в узлах квадратной решётки с периодом  $a$  и параллельных оси  $z$ . Провода имеют диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_{\text{wire}}$  и помещены в вакуум. Внутри структуры в точке  $\mathbf{r}_0 \equiv \boldsymbol{\rho}_0 + z_0 \hat{\mathbf{z}}$  расположен электрический или магнитный дипольный источник излучения. Электрическое поле удовлетворяет уравнению

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - q^2 \varepsilon(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{E} = 4\pi q^2 \mathbf{P}_{\text{exc}}, \quad (3.69)$$

где диэлектрическая проницаемость зависит от координаты  $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$  согласно

$$\varepsilon(\boldsymbol{\rho}) = 1 + (\varepsilon_{\text{wire}} - 1) \sum_{\boldsymbol{\rho}_j} \theta(R - |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_j|) \quad (3.70)$$

( $\theta$  — функция Хевисайда), поляризация

$$\mathbf{P}_{\text{exc}} = \begin{cases} \mathbf{p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), & \text{(электрический диполь)}, \\ \frac{i}{q} \nabla \times \mathbf{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), & \text{(магнитный диполь)}, \end{cases} \quad (3.71)$$

характеризует точечный электрический (или магнитный) дипольный источник с дипольным моментом  $\mathbf{p}$  (или  $\mathbf{m}$ ), соответственно, и  $q = \omega/c$ . Диэлектрическая проницаемость (3.70) может быть отмасштабирована так, чтобы учесть произвольную положительную проницаемость матрицы. Векторы  $\boldsymbol{\rho}_j$  в (3.70) образуют

двумерную квадратную решётку, содержащую точку 0. Пренебрежём поперечной поляризуемостью проводов, считая, что они значительно тоньше, чем длина волны света  $\lambda = 2\pi/q$ . Тогда поляризация провода на единицу длины полностью характеризуется нелокальной поляризуемостью  $\alpha$ , определённой согласно

$$\mathbf{P}(z) = \int \frac{dk_z}{2\pi} e^{ik_z z} \alpha(k_z) \hat{\mathbf{z}} E_z(k_z), \quad (3.72)$$

и равняющейся [297, 227, 226]

$$\frac{1}{\alpha} \approx -i\pi q_{\perp}^2 H_0^{(1)}(q_{\perp} R) + \frac{4}{(\varepsilon_{\text{wire}} - 1)R^2}, \quad (3.73)$$

где  $q_{\perp}^2 = q^2 - k_z^2$ , и  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля 0-го порядка 1-го рода. Важной особенностью величины (3.73) является пространственная дисперсия, т.е. зависимость поляризуемости от волнового вектора  $k_z$ .

Фактор Парселла для электродипольного ( $f^{(e)}$ ) и магнитодипольного ( $f^{(m)}$ ) излучения может быть определён из мнимой части электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного полей  $\mathbf{H}$ , наведённых источников в структуре [32, 295, 264], см. также (3.21),

$$\begin{aligned} f^{(e)} &= \frac{3}{2q^3 p^2} \text{Im}[\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p}], \\ f^{(m)} &= \frac{3}{2q^3 m^2} \text{Im}[\mathbf{H}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{m}]. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Как и предыдущем разделе 3.3.1, поле может быть представлено в виде суммы блоховских волн с волновыми векторами  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\perp} + k_z \hat{\mathbf{z}}$ . Факторы Парселла  $f^{(e,m)}$  принимают вид аналогичный (3.48),

$$f^{(e,m)} = 1 + \frac{3a^2}{2q^3} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk_y}{2\pi} \frac{[\mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(e,m)}(\boldsymbol{\rho}_0) \cdot \mathbf{n}][\mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(e,m)}(-\boldsymbol{\rho}_0) \cdot \mathbf{n}]}{1/\alpha(\mathbf{k}) - C(\mathbf{k}) - i0}. \quad (3.75)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор поляризации источника  $\mathbf{p}_0/p_0$  ( $\mathbf{m}_0/m_0$ ). За  $-i0$  в знаменателе обозначено бесконечно малое слагаемое, задающее правило обхода полюсов [293]. За  $C$  в (3.75) обозначена константа взаимодействия проводов [297], определённая как

$$C(\mathbf{k}) = i\pi q_{\perp}^2 \sum_{\boldsymbol{\rho}_j \neq 0} e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\rho}_j} H_0^{(1)}(q_{\perp} \rho_j), \quad (3.76)$$

и

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(e,m)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\rho_j} \mathbf{G}_0^{(e,m)}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_j, k_z) e^{i\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_j)} \quad (3.77)$$

— функция Грина блоховских волн с волновым вектором  $\mathbf{k}_\perp$ . Здесь введены электрическое (магнитное)  $\mathbf{G}_0^{(e)}$  ( $\mathbf{G}_0^{(m)}$ ) поля одиночного провода,

$$\mathbf{G}_0^{(e)}(\boldsymbol{\rho}, k_z) = i\pi q_\perp^2 \hat{\mathbf{z}} H_0^{(1)}(q_\perp \rho) + \pi k_z q_\perp \hat{\boldsymbol{\rho}} H_1^{(1)}(q_\perp \rho), \quad (3.78)$$

и

$$\mathbf{G}_0^{(m)}(\boldsymbol{\rho}, k_z) = \pi q_\perp q \hat{\boldsymbol{\phi}} H_1^{(1)}(q_\perp \rho). \quad (3.79)$$

Уравнения (3.75)–(3.79) представляют финальный результат для фактора Парселла. В практических расчётах решёточные суммы (3.76), (3.77) удобно вычислять не напрямую, а с помощью суммирования Эвальда [298] или суммирования Флоке [297]. Последний подход оказывается более предпочтительным для рассматриваемой задачи и даёт следующее представление для константы взаимодействия [297, 227],

$$C(\mathbf{k}) = -2q_\perp^2 \ln \frac{2\pi R}{a} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2\pi q_\perp^2 \sin q_{x,m} a}{q_{x,m} a \cos q_{x,m} a - \cos k_x a} - \frac{q_\perp^2 (1 - \delta_{m,0})}{|m|} \right) \quad (3.80)$$

где  $q_{x,m} = \sqrt{q^2 - k_z^2 - k_{y,m}^2}$  и  $k_{y,m} = k_y + 2\pi m/a$ . Аналогичным способом могут быть рассчитаны и функции Грина, результат имеет вид

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-q_\perp^2 \mathcal{S}_m \hat{\mathbf{z}} - ik_z q_{x,m} \mathcal{C}_m \hat{\mathbf{x}} + k_{y,m} k_z \mathcal{S}_m \hat{\mathbf{y}}), \quad (3.81)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_m &= \frac{2\pi}{q_{x,m} a} \frac{e^{ik_x a} \sin q_{x,m} x - \sin q_{x,m} (x-a)}{\cos k_x a - \cos q_{x,m} a} e^{ik_{y,m} y}, \\ \mathcal{C}_m &= \frac{2\pi}{q_{x,m} a} \frac{e^{ik_x a} \cos q_{x,m} x - \cos q_{x,m} (x-a)}{\cos k_x a - \cos q_{x,m} a} e^{ik_{y,m} y}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Функция Грина  $\mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(m)}$  вычисляется дифференцированием (3.81), (3.82) согласно

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(m)} = \frac{1}{q} (\hat{\mathbf{x}} \partial_x + \hat{\mathbf{y}} \partial_y + ik_z \hat{\mathbf{z}}) \times \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(e)}. \quad (3.83)$$

Далее сначала будут получены аналитические выражения для дисперсии собственных мод в структуре, а затем будет проанализирована зависимость фактора Парселла от величины диэлектрической проницаемости проводов и от положения источника внутри элементарной ячейки.

Спонтанное затухание идёт за счёт испускания фотонов, дисперсия которых определяется нулями резонансного знаменателя в (3.75):

$$\frac{1}{\alpha(\mathbf{k})} - C(\mathbf{k}) = 0. \quad (3.84)$$

Получим приближенную дисперсию в длинноволновом приближении эффективной среды. Используя уравнения (3.73),(3.80) выражение (3.84) при  $qa \ll 1$  и  $ka \ll 1$  можно представить в виде

$$\frac{1}{\alpha} - C \approx -\frac{4\pi}{a^2 q_p^2} \left[ (q^2 - k_z^2) \left( \frac{q_p^2}{k^2 - q^2} + 1 \right) + \varkappa^2 \right], \quad (3.85)$$

где

$$\varkappa^2 = q_p^2 \frac{a^2}{\pi(1 - \varepsilon_{\text{wire}})R^2}, \quad \frac{1}{q_p^2} \approx \frac{a^2}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{a}{2\pi R} \right) + \frac{\pi}{6} \right]. \quad (3.86)$$

Здесь волновой вектор  $\varkappa \propto 1/\sqrt{1 - \varepsilon_{\text{wire}}}$  характеризует конечную величину проницаемости проводов и  $q_p$  — эффективный плазменный волновой вектор. Уравнение (3.85) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{\alpha} - C \approx -\frac{4\pi}{a^2 q_p^2} \frac{(k_z^2 - k_1^2)(k_z^2 - k_2^2)}{k_{\text{TM}}^2 + q_p^2 - k_z^2}, \quad (3.87)$$

где

$$k_{1,2}^2 = \frac{q^2 + \varkappa^2 + k_{\text{TM}}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} (q^2 + \varkappa^2 - k_{\text{TM}}^2)^2 - q_p^2 \varkappa^2} \quad (3.88)$$

—  $z$ -компоненты волновых векторов собственных мод и

$$k_{\text{TM}} = \sqrt{q^2 - k_{\perp}^2 - q_p^2}. \quad (3.89)$$

Собственные моды (3.88) могут быть эквивалентно получены, если среду из проводов рассматривать в приближении эффективной среды с проницаемостью, учитывающей эффект пространственной дисперсии [226]:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1, \quad \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - c^2 \varkappa^2 - c^2 k_z^2}, \quad (3.90)$$

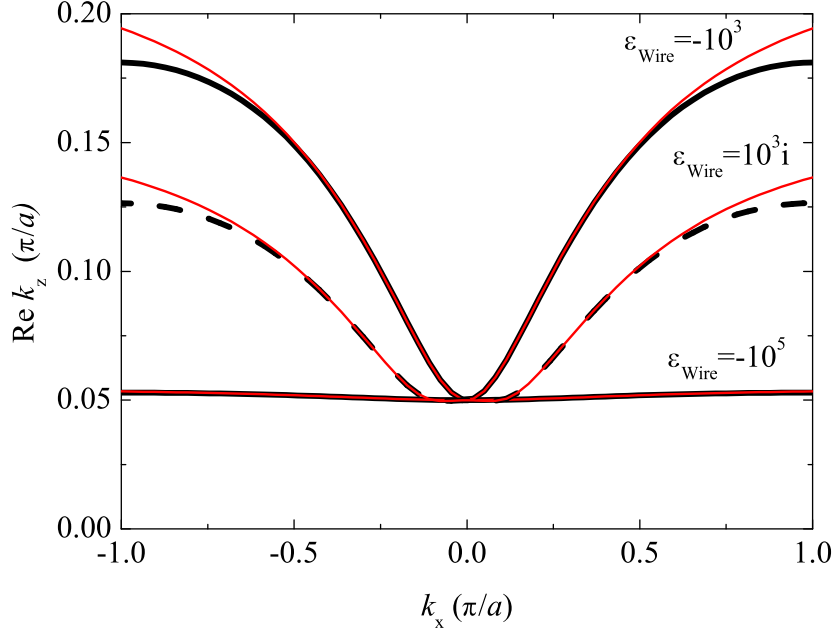


Рис. 3.9: Изочастотные кривые квази-ТЕМ мод, рассчитанные для различных значений проницаемости проводов  $\varepsilon_{\text{wire}}$ . Жирные кривые получены путём численного решения (3.84), тонкие кривые построены согласно (3.91). Расчёт выполнен для  $qa = 0.05\pi$  и  $R/a = 0.05$ .

где  $\omega_p = cq_p$  — плазменная частота. Для больших значений проницаемости проводов ( $|\varepsilon_{\text{wire}}| \gg 1$ ), когда  $\varkappa$  мало, решения (3.88) можно приближённо представить в виде

$$k_1^2 \approx q^2 + \frac{\varkappa^2 k_{\perp}^2}{q_p^2 + k_{\perp}^2}, \quad k_2^2 \approx q^2 - q_p^2 - k_{\perp}^2 + \frac{\varkappa^2 q_p^2}{q_p^2 + k_{\perp}^2}. \quad (3.91)$$

В пределе  $\varepsilon_{\text{wire}} \rightarrow \infty$  уравнения (3.91) сводятся к

$$\begin{aligned} k_1 &= q, & (\text{ТЕМ мода}), \\ k_2 &= k_{\text{ТМ}}, & (\text{ТМ мода}). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Бездисперсионные ТЕМ моды являются специфической особенностью среды из проводов [227]. Из уравнений (3.78), (3.79) видно, что для таких мод с  $q_{\perp} = 0$  и электрическое и магнитное поля оказываются перпендикулярны оси провода  $z$ . Для  $q < q_p$  ( $\omega < \omega_p$ ) ТЕМ моды являются единственными распространяющимися модами в структуре и полностью определяют спонтанное затухание. Благодаря большой плотности состояний ТЕМ мод можно ожидать усиления фактора

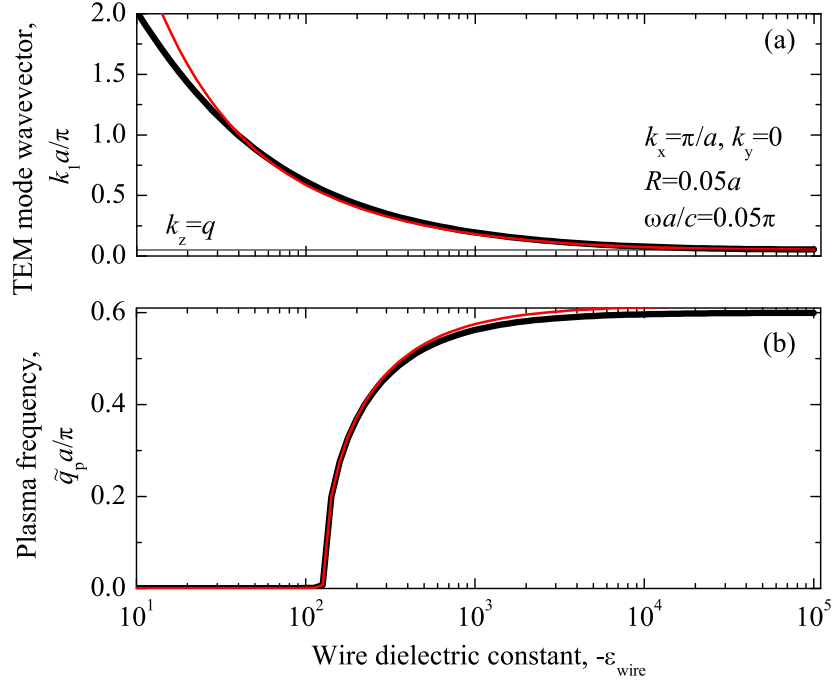


Рис. 3.10: Волновой вектор (а) и эффективная плазменная частота  $\tilde{q}_p$  квази-ТЕМ моды в зависимости от диэлектрической проницаемости проводов. Жирные черные и тонкие красные кривые соответствуют численному решению уравнения (3.84) и аналитическому решению (3.91). Расчёт выполнен для  $\varepsilon_{\text{wire}} = -|\varepsilon_{\text{wire}}|$ ,  $qa = 0.05\pi$ ,  $R/a = 0.05$ .

Парселла [286]. Для конечных значений проницаемости проводов  $\varepsilon_{\text{wire}}$  происходит гибридизация ТЕМ и ТМ мод, как видно из уравнения (3.88).

На рис. 3.9 приведены изочастотные кривые квази-ТЕМ мод  $k_1^{(z)}(k_x)$  для различных значений проницаемости проводов. Жирные чёрные кривые получены путём численного решения уравнения (3.84) с  $\alpha$  и  $C$  определёнными согласно (3.73) и (3.80), соответственно. Тонкими красными кривыми показан приближённый аналитический ответ (3.91). Жирные сплошные и пунктирные кривые соответствуют “сверхпроводящим” и “проводящим” проводам,  $\varepsilon_{\text{wire}} = -|\varepsilon_{\text{wire}}|$  (проницаемость вещественна и отрицательна) и  $\varepsilon_{\text{wire}} = i|\varepsilon_{\text{wire}}|$  (проницаемость чисто мнима и положительна), соответственно. Из рис. 3.9 видно, что для конечных значений  $\varepsilon_{\text{wire}}$  ТЕМ моды приобретают дисперсию *гиперболического* типа, а абсолютные значения волновых векторов  $k_z$  возрастают согласно (3.91). Рост  $k_z$  при уменьшении проницаемости проводов показан на рис. 3.10(а). Одновременно уменьшается эф-



эффективный плазменный волновой вектор, определяемый из условия отсечки ТМ волн

$$\tilde{q}_p^2 \equiv q^2 - k_2^2(k_\perp = 0) \approx q_p^2 - \varkappa^2. \quad (3.93)$$

Уравнение (3.93) показывает, что эффективная плазменная частота (частота отсечки)  $c\tilde{q}_p$  уменьшается с уменьшением проницаемости проводов. Соответствующая зависимость показана на рис. 3.10(b). Для достаточно малых значений  $\varepsilon_{\text{wire}} \sim -(1/\pi)(a/R)^2$  плазменная частота обращается в ноль. Это означает, что структура перестаёт быть одномодовым гиперболическим метаматериалом, т.к. в дополнении к ТЕМ модам распространяющимися становятся ТМ моды.

Перейдём к анализу фактора Парселла. Сначала рассмотрим случай источника, расположенного в центре элементарной ячейки,  $x_0 = y_0 = a/2$ , и проанализируем зависимость фактора Парселла от величины проницаемости проводов  $\varepsilon_{\text{wire}}$ . Начнём с получения аналитических выражений, которые будут затем сопоставлены с результатом прямого численного интегрирования в (3.75).

С целью аналитического интегрирования (3.75) полезно представить функцию Грина (3.77) в следующем эквивалентном виде,

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(e)}(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{4\pi}{a^2} \sum_{\mathbf{b}} \frac{(q^2 - k_z^2)\hat{\mathbf{z}} - k_z(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{b})}{q^2 - k_z^2 - (\mathbf{k}_\perp + \mathbf{b})^2} e^{i(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{b})\boldsymbol{\rho}}, \quad (3.94)$$

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(m)}(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{4\pi q}{a^2} \sum_{\mathbf{b}} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{k}_\perp + \mathbf{b})}{q^2 - k_z^2 - (\mathbf{k}_\perp + \mathbf{b})^2} e^{i(\mathbf{k}_\perp + \mathbf{b})\boldsymbol{\rho}}. \quad (3.95)$$

Здесь за  $\mathbf{b}$  обозначены векторы обратной решётки. Уравнения (3.94),(3.95) могут быть получены применением формулы суммирования Пуассона к (3.77) [299]. Слагаемые с  $\mathbf{b} \neq 0$  в (3.94),(3.95) соответствуют ближнему полю проводов и сильно зависят от  $\boldsymbol{\rho}$ . В случае, когда источник расположен в центре элементарной ячейки,  $x_0 = y_0 = a/2$ , вклад ближнего поля оказывается подавлен и функция Грина может быть с достаточной точностью описана дальнедействующим вкладом с  $b = 0$ . Относительно простое аналитическое выражение для фактора Парселла может быть получено, если в (3.75) учесть лишь полюсной вклад, соответствующей

квази-ТЕМ моде с  $k_z \equiv k_{1,z}$ . Это означает, что интегрирование по  $k_z$  выполняется по следующему правилу

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int \frac{dk_z}{2\pi} \frac{F(k_z)}{(1/\alpha) - C - i\delta} = i \frac{a^2 q_p^2}{4\pi} F(k_{1,z}) \frac{k_{\text{TM}}^2 + q_p^2 - k_1^2}{2k_1(k_2^2 - k_1^2)}, \quad (3.96)$$

где  $F(k_z)$  — произвольная чётная аналитическая функция  $k_z$ . Уравнение (3.96) получено с использованием приближённого аналитического представления (3.87) для знаменателя  $1/\alpha - C$ . Подставляя слагаемые с  $b = 0$  из (3.94),(3.95) в (3.75) и интегрируя по  $k_z$  с помощью (3.96) сведём фактор Парселла к интегралу по волновому вектору в плоскости  $k_\perp$ :

$$\begin{aligned} f_x^{(e)} = f_y^{(e)} &= \frac{3q_p^2}{4q^2} \operatorname{Re} \int_0^{K_{\max}} \frac{dk_\perp k_\perp (q_p^2 + \nu k_\perp^2)^{1/2}}{(q_p^2 + k_\perp^2)^{3/2}}, \\ f_z^{(e)} &= \frac{3\kappa^4}{4q^4} \operatorname{Re} \int_0^{K_{\max}} \frac{dk_\perp k_\perp^3 q_p^2}{(q_p^2 + k_\perp^2)^{5/2} (q_p^2 + \nu k_\perp^2)^{1/2}}, \\ f_x^{(m)} = f_y^{(m)} &= \frac{3q_p^2}{4q^2} \operatorname{Re} \int_0^{K_{\max}} \frac{dk_\perp k_\perp}{(q_p^2 + k_\perp^2)^{1/2} (q_p^2 + \nu k_\perp^2)^{1/2}}, \\ f_z^{(m)} &= 1. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Здесь коэффициент

$$\nu = 1 + \frac{\kappa^2}{q^2} \equiv 1 + \frac{q_p^2}{q^2} \frac{a^2}{\pi(1 - \varepsilon_{\text{wire}})R^2} \quad (3.98)$$

учитывает конечную проницаемость проводов. Интегрирование по квадратичной двумерной зоне Бриллюэна в (3.97) было заменено на интегрирование по эффективной круговой области  $k_\perp < K_{\max}$ . В этом приближении  $K_{\max}$  — это феноменологический параметр отсечки, его значение было выбрано равным  $2\sqrt{\pi}/a$  из условия сохранения площади области интегрирования  $\pi K_{\max}^2 = (2\pi/a)^2$ . Далее будет показано, что это простое приближение позволяет удовлетворительно описать результат численного интегрирования (3.75). После интегрирования в (3.97)

получаем

$$f_{x,y}^{(e)} = \frac{3q_p^2}{8q^2} \operatorname{Re} \left[ -\frac{2B}{A} + 2 + 2\sqrt{\nu} \ln \frac{A\sqrt{\nu} + B}{\sqrt{\nu} + 1} \right], \quad (3.99)$$

$$f_z^{(e)} = \operatorname{Re} \frac{B(B^2 - 3A^2)}{4A^3} + \frac{1}{2}, \quad (3.100)$$

$$f_{x,y}^{(m)} = \frac{3q_p^2}{8q^2} \operatorname{Re} \frac{2}{\sqrt{\nu}} [\ln(\sqrt{\nu}A + B) - \ln(\sqrt{\nu} + 1)], \quad (3.101)$$

$$A^2 = 1 + \frac{K_{\max}^2}{q_p^2}, \quad B^2 = 1 + \nu \frac{K_{\max}^2}{q_p^2}. \quad (3.102)$$

В пределе ( $|\varepsilon_{\text{wire}}| \rightarrow \infty$ ) уравнения (3.99)–(3.101) сводятся к

$$f_{x,y}^{(e)} = f_{x,y}^{(m)} = \frac{3q_p^2}{8q^2} \ln \left( 1 + \frac{K_{\max}^2}{q_p^2} \right), \quad (3.103)$$

$$f_z^{(e)} = 0, \quad (3.104)$$

$$f_z^{(m)} = 1. \quad (3.105)$$

Поскольку  $q_p \sim 1/a$ , фактор Парселла может быть оценен по порядку величины как  $(\lambda/a)^2$  где  $\lambda = 2\pi/q$  — длина волны.

Рассчитанная зависимость фактора Парселла от величины диэлектрической проницаемости проводов представлена на рис. 3.11. В пределе бесконечной проницаемости  $\varepsilon_{\text{wire}}$  спонтанное излучение возможно лишь для поперечно-поляризованных электродипольных и магнитодипольных источников, которые могут взаимодействовать с ТЕМ модами. Фактор Парселла при этом не зависит от типа излучения, в согласии с (3.103). Расчёт демонстрирует, что фактор Парселла для поляризованных в плоскости электродипольных переходов возрастает при уменьшении значения проницаемости проводов (чёрные кривые). Кроме того, становится возможным спонтанное излучение для поляризованных вдоль  $z$  электродипольных источников, и его скорость быстро возрастает с уменьшением  $\varepsilon_{\text{wire}}$ . В пределе  $\varepsilon_{\text{wire}} \rightarrow \infty$  фактор Парселла не зависит от фазы диэлектрической проницаемости проводов. Для конечной проницаемости фактор Парселла зависит от фазы и возрастает как для “сверхпроводящих” проводов ( $\operatorname{Re} \varepsilon_{\text{wire}} < 0$ ,  $\operatorname{Im} \varepsilon_{\text{wire}} = 0$ , сплошные кривые на рис. 3.11) так и для “проводящих” проводов ( $\operatorname{Re} \varepsilon_{\text{wire}} = 0$ ,

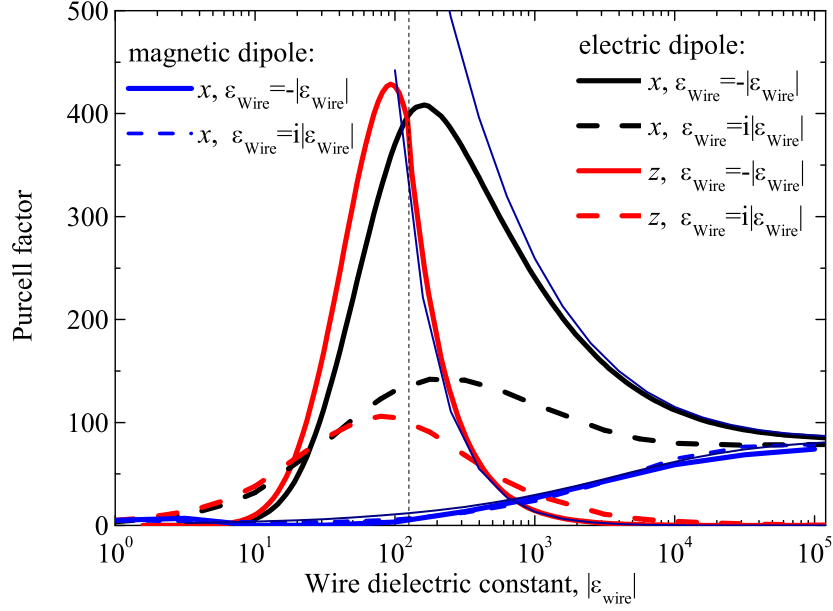


Рис. 3.11: Фактор Парселла электро- и магнито-дипольного излучения в зависимости от величины проницаемости проводов. Жирные черные, красные и синие кривые соответствуют поляризованным в плоскости  $xy$  электродипольному, вертикальному электродипольному и лежащему в плоскости магнитодипольному источнику. Сплошные и пунктирные кривые рассчитаны для  $\varepsilon_{\text{wire}}$  изменяющейся вдоль мнимой и вещественной осей,  $\varepsilon_{\text{wire}} = i\varepsilon_{\text{wire}}$  и  $\varepsilon_{\text{wire}} = -|\varepsilon_{\text{wire}}|$ , соответственно. Жирные кривые получены непосредственным численным интегрированием (3.75), тонкие кривые представляют приближённые аналитические результаты (3.99)–(3.101). Тонкая вертикальная пунктирная кривая отмечает значение проницаемости проводов, соответствующее условию отсечки  $\tilde{q}_p(\varepsilon_{\text{wire}}) = 0$ . Расчёт выполнен для  $qa = 0.05\pi$ ,  $R/a = 0.05$ , и  $x_0 = y_0 = a/2$ .

$\text{Im } \varepsilon_{\text{wire}} > 0$ , пунктирные кривые на рис. 3.11). Для достаточно больших значений  $|\varepsilon_{\text{wire}}|$  результаты численного интегрирования (3.75) (жирные кривые) хорошо описываются приближёнными уравнениями (3.99), (3.100) (тонкие кривые).

Природа усиления и немонотонной зависимости фактора Парселла при конечных значениях проницаемости проводов  $\varepsilon_{\text{wire}}$  может быть объяснена конкуренцией двух эффектов: (а) зависимости электрического поля провода  $\mathbf{G}_k^{(e)}$  от величина волнового вектора квази-ТЕМ моды  $k_z$  и (б) зависимости плотности состояний от  $k_z$ . Как следует из рис. 3.9 и рис. 3.10(а), значения  $k_z$  для квази-ТЕМ мод возрастают с уменьшением  $|\varepsilon_{\text{wire}}|$ . Из уравнения (3.78) видно, что и поперечные и продольные компоненты поля провода растут с  $k_z$  из-за множителей перед функ-

циями Ханкеля. Для заданного значения  $k_{\perp}$  плотность состояний уменьшается с  $k_z$ , что описывается множителем  $1/k_{\perp}$  в (3.96). Поскольку фактор Парселла (3.75) пропорционален произведению квадрата функции Грина и плотности состояний, он растёт для меньших  $\varepsilon_{\text{wire}}$ . Оптимальное значение фактора Парселла достигается для проницаемости проводов  $|\varepsilon_{\text{wire}}| \sim (1/\pi)(a/R)^2$ . Это примерно соответствует условию обращения в ноль эффективной плазменной частоты  $\tilde{q}_p(\varepsilon_{\text{wire}})$ , см. вертикальную пунктирную линию на рис. 3.11. Рост фактора Парселла для меньших значений  $|\varepsilon_{\text{wire}}|$  находится в качественном согласии с результатами модели источника конечных размеров в гиперболической среде [A14], изложенной выше в разделе 3.2, см. рис. 3.3. В рамках модели эффективной среды наибольшее значение фактора Парселла достигается на границе перехода между эллиптическим и гиперболическим режимами, когда компонента тензора проницаемости проходит через ноль. Количественное описание метаматериала из проводов требует учёта пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости согласно (3.90).

Для магнитодипольного излучения ситуация качественно отличается. Компоненты соответствующего магнитного поля провода (3.79) не содержат множителя  $k_z$ . Поэтому фактор Парселла уменьшается с модулем проницаемости проводов, в согласии с рис. 3.10 (синие кривые).

Теперь рассмотрим идеальные провода с  $|\varepsilon_{\text{wire}}| \rightarrow \infty$  и проанализируем зависимость фактора Парселла от координаты источника  $\boldsymbol{\rho}_0 = (x_0, y_0)$ . Для диполя, расположенного достаточно близко к проводам, полное поле (3.77) главным образом определяется полем ближайшего провода

$$\mathcal{G}_k(\boldsymbol{\rho}) \approx \mathbf{G}_0(\boldsymbol{\rho}), \quad (3.106)$$

что приводит к

$$\mathcal{G}^{(e)}(k_z = q) \approx -2i \frac{q \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\rho} e^{iqz}, \quad \mathcal{G}^{(m)}(k_z = q) \approx -2i \frac{q \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\rho} e^{iqz}. \quad (3.107)$$

Из уравнения (3.107) видно, что для идеальных проводов ТЕМ волны могут возбуждать только поляризованные в плоскости источники. Правило интегрирования

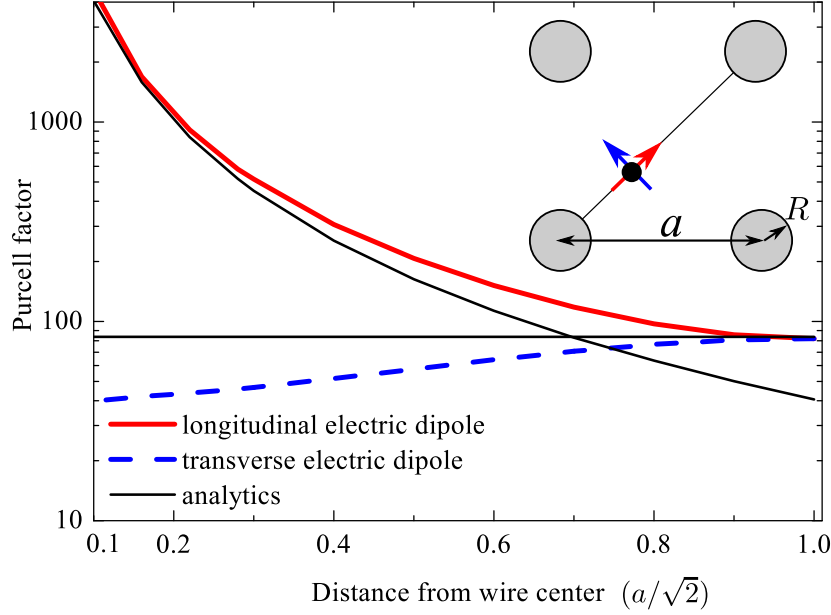


Рис. 3.12: Фактор Парселла электродипольного излучения в зависимости от положения источника внутри элементарной ячейки. Жирные сплошные и пунктирные кривые представляют результаты численного интегрирования (3.75) для поперечной и продольной ориентации диполя относительно радиус-вектора (см. схематическое изображение геометрии задачи на вставке). Тонкими кривыми показаны аналитические результаты (3.103) и (3.110). Расчёт выполнен для  $\varepsilon_{\text{wire}} \rightarrow \infty$ ,  $qa = 0.05\pi$  и  $R/a = 0.05$ .

по  $k_z$  (3.96) для идеальных проводов сводится к

$$\int \frac{dk_z}{2\pi} \frac{F(k_z)}{1/\alpha - C - i\delta} = \frac{iF(q)}{2q} \frac{a^2}{4\pi} \frac{1}{\frac{1}{k_{\perp}^2} + \frac{1}{q_p^2}}. \quad (3.108)$$

Интеграл полностью определяется вычетом, соответствующим ТЕМ модам. Подставляя (3.107) и (3.108) в (3.75) получаем

$$f^{(e)} = \frac{3a^4 q_p^2 (\hat{\rho}_0 \cdot \mathbf{n})^2}{8\pi^2 q^2 \rho_0^2} \int_0^{K_{\max}} \frac{k_{\perp}^3 dk_{\perp}}{k_{\perp}^2 + q_p^2}. \quad (3.109)$$

Здесь, аналогично (3.97), было использовано круговое приближение для зоны Бриллюэна. Выполняя интегрирование, находим

$$f^{(e)} = \frac{(\hat{\rho}_0 \cdot \mathbf{n})^2 a^2}{\rho_0^2} \frac{3}{16\pi^2 q^2 a^2} \left[ K_{\max}^2 q_p^2 a^4 - q_p^4 a^4 \ln \left( 1 + \frac{K_{\max}^2}{q_p^2} \right) \right]. \quad (3.110)$$

Аналогично, для магнитно-дипольного излучения

$$f^{(m)}(\mathbf{n}) = f^{(e)}(\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{z}}). \quad (3.111)$$

Видно, что фактор Парселла для электродипольного источника, поляризованного вдоль радиус-вектора  $\boldsymbol{\rho}_0 \equiv x_0 \hat{\boldsymbol{x}} + y_0 \hat{\boldsymbol{y}}$ , совпадает с фактором для магнитодипольного источника, поляризованного перпендикулярно  $\boldsymbol{\rho}_0$ . Для идеальных проводов соотношение (3.111) является точным. Для поляризованных вдоль проводов источников имеем  $f_z^{(e)} = 0$  и  $f_z^{(m)} = 1$  при  $\varepsilon_{\text{wire}} \rightarrow \infty$ , вне зависимости от координат. Общая структура выражения (3.110) такая же, как и в метаматериалах на основе кубических дипольных решёток рассеивателей [A16], рассмотренных в разделе 3.3.1. Оно содержит два множителя. Первый множитель, пропорциональный  $a^2/\rho_0^2$ , описывает усиление локального поля и определяется ближайшим проводом. Второй множитель, пропорциональный  $1/(qa)^2$ , описывает коллективный эффект: усиление плотности фотонных состояний ТЕМ мод.

Сопоставление между аналитическими результатами (3.110) и непосредственным численным интегрированием (3.75) представлено на рис. 3.12. Расчёт демонстрирует высокую чувствительность фактора Парселла к положению и поляризации источника. Для электрического диполя, поляризованного вдоль радиус-вектора, фактор Парселла резко возрастает при приближении к проводам. Этот рост хорошо описывается выражением (3.110), показанным синей кривой на рис. 3.12. Для поперечной поляризации фактор Парселла уменьшается вблизи проводов. Тонкой горизонтальной линией на рис. 3.12 представлен аналитический ответ (3.99) для фактора Парселла в центре элементарной ячейки, прекрасно согласующийся с результатами численного расчёта.

Применим развитую выше общую теорию к реалистичным экспериментальным структурам. Рассмотрим массив золотых нанопроводов в матрице оксида алюминия, экспериментально исследованный в работе [300]. На рис. 3.13 приведён результат расчёта фактора Парселла для этой структуры в зависимости от энергии излучения. Учтена реалистичная спектральная зависимость диэлектрической проницаемости проводов [300]. Диэлектрическая проницаемость матрицы в расчёте равнялась  $\varepsilon_{\text{out}} = 2.56$ . Для учёта отличия диэлектрической проницаемости

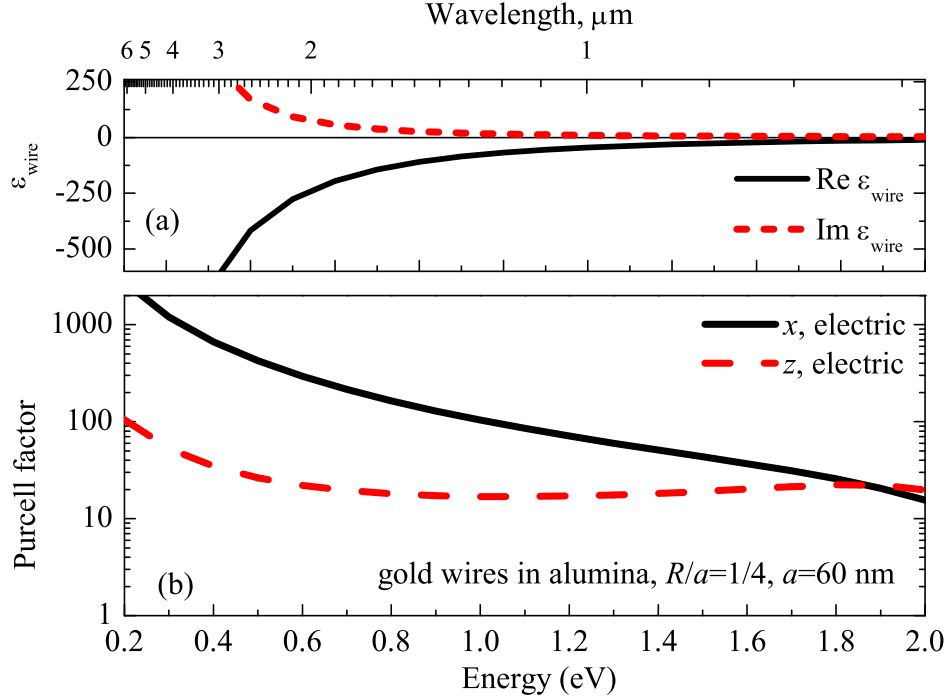


Рис. 3.13: Фактор Парселла для метаматериала из золотых проводов, рассмотренного в работе [300]. (a) Зависимость проницаемости проводов от энергии. (b) Зависимость фактора Парселла для поперечной относительно проводов (чёрная кривая) и продольной (красная пунктирная кривая) относительно проводов поляризации электрического диполя. Расчёт выполнен для  $a = 60$  нм,  $R = a/4$ ,  $x_0 = y_0 = a/2$ . Скорость спонтанного излучения нормирована на значение в объёмной матрице оксида алюминия. Значения расчётных параметров приведены в тексте.

матрицы от единицы, проницаемость проводов в (3.70) была отмасштабирована согласно правилу  $\varepsilon_{\text{wire}} \rightarrow \varepsilon_{\text{wire}}/\varepsilon_{\text{out}}$ . Подстановка соответствует фактору Парселла, определённого как соотношение скоростей излучения в метаматериале и в пустой матрице. Рис. 3.13 показывает, что для источника, поляризованного вдоль проводов, в факторе Парселла на энергии  $E \sim 1.8$  эВ достигается плоский максимум с  $f \sim 20$ . Это примерно соответствует условию оптимальной проницаемости проводов, выявленному из анализа рис. 3.10. Для источника, поляризованного в плоскости, фактор Парселла монотонно уменьшается с ростом энергии излучений из-за уменьшения плотности фотонных состояний  $\sim 1/(qa)^2$ . При этом его значение остаётся более 10 для энергий ниже 2 эВ. Этот результат соответствует по порядку величины значению  $f^{(e)} \sim 6$ , экспериментально полученному в работе [233],



в которой анализировалось излучение молекул красителя вблизи метаматериала из нанопроводов на энергии 1.5 эВ. Следует сделать несколько замечаний по поводу возможности сравнения данных на рис. 3.13 с результатами экспериментов. Во-первых, теория была развита в пренебрежении поперечной поляризуемостью проводов. Это предположение перестаёт быть справедливым для достаточно больших энергий, когда длина волны становится сопоставимой с толщиной провода. Во-вторых, реальные нанопровода имеют конечную длину, которая может быть порядка длины световой волны, в то время как в теории они полагались бесконечными. В-третьих, фактор Парселла, рассчитанный согласно (3.74), описывает полное затухание и учитывает как вклад, связанный с излучением в дальнее поле, так и ближнеполевые омические потери (см. также обсуждение в предыдущем разделе 3.2). Наконец, реальные массивы проводов не являются периодически. Поэтому кривые на рис. 3.13 следует рассматривать скорее как оценку верхней границы фактора Парселла. Тем не менее, расчёт указывает на достаточно большие возможные значения фактора Парселла для метаматериала из золотых проводов в оптической и ближней инфракрасной спектральной области.

### 3.4 Краткие итоги

В Главе 3 получены следующие основные результаты:

- Построена теория спонтанного излучения для квантовой точки конечных размеров, помещённой в гиперболическую среду. Показано, что фактор Парселла в гиперболическом режиме расходится при уменьшении характерного размера квантовой точки  $a$  как  $1/a^3$ . Максимальные значения фактора Парселла соответствуют переходу между эллиптическим и гиперболическим режимами.
- Исследован гиперболический метаматериал в рамках модели кубической решётки дипольных рассеивателей. Получены приближённые аналитические

выражения для фактора Парселла. Показано, что величина фактора Парселла определяется двумя множителями — плотностью фотонных состояний и локальным электрическим полем. Значение фактора Парселла чувствительно к положению источника излучения внутри элементарной ячейки.

- Исследовано электро- и магнито-дипольное излучение в метаматериале на основе массива металлических проводов. Показано, что фактор Парселла зависит от типа источника излучения и его поляризации; наибольший фактор Парселла соответствует электродипольному источнику, поляризованному перпендикулярно проводам. Получены аналитические выражения для фактора Парселла, для бесконечной проницаемости проводов он может быть оценен как  $(\lambda/a)^2$ , где  $\lambda$  — длина волны, а  $a$  — период решётки. Установлено, что фактор Парселла имеет максимум в зависимости от величины проницаемости проводов, соответствующий границе гиперболического режима.

## Глава 4

# Фёрстеровский перенос возбуждений в наноструктурах

В предыдущей главе излучалось спонтанное излучения энергии в структурированном электромагнитном окружении. Настоящая глава посвящена влиянию окружения на скорость ещё одного процесса — фёрстеровского переноса энергии. Обзор исследований в этом направлении приведён в разделе 4.1. Во втором разделе главы изложена рассматриваемая теоретическая модель, развитая в работах [A20–A22]. Раздел 4.3 посвящён обсуждению дисперсии коллективных экситон-поляритонных мод, возбуждаемых над металлическим зеркалом. В разделе 4.4 обсуждается влияние зеркала на скорость переноса энергии между собственными модами. Основные результаты главы приведены в разделе 4.5.

### 4.1 Фёрстеровский перенос энергии в наноструктурах (обзор).

Фёрстеровский процесс заключается в передаче возбуждений посредством флуктуационного электромагнитного взаимодействия. В качестве передающей (донорной) и принимающей (акцепторной) системы могут выступать самые различные объекты: квантовые точки и квантовые ямы [301, 302, 303, 304], биологические молекулы [305, 306], дефекты в полупроводнике [307, 308]. Отметим, что термины “донор” и “акцептор”, принятые в литературе в этой области исследований, не

имеют отношения к донорным и акцепторным примесям в твердом теле, и не характеризуют зарядовые состояния. Поскольку флуктуационное диполь-дипольное взаимодействие спадает с расстоянием между донором и акцептором  $r$  быстро, как  $1/r^6$ , типичные расстояния, на которых фёрстеровский процесс эффективен, как правило ограничены единицами нанометров [309].

Актуальным является вопрос о возможности усиления фёрстеровского процесса при помещении доноров и акцепторов в структурированное электромагнитное окружение — например, в микрорезонатор, метаматериал или рядом с резонансными металлическими или диэлектрическими наночастицами. Такие исследования стимулированы опытом, накопленным при изучении спонтанного излучения и эффекта Парселла в наноструктурах. Поэтому первоначальные работы были сосредоточены на поиске корреляции между фёрстеровским переносом и скоростью спонтанного излучения. Этот подход оказался непродуктивным и имеющиеся в литературе данные носят крайне противоречивый характер. Сообщалось о том, что увеличение скорости спонтанного излучения приводит к усилению фёрстеровского процесса [310], о возможности модуляции скорости переноса вблизи зеркала [311], коррелированной со скоростью спонтанного излучения, а также о фёрстеровском переносе, антикоррелированном со спонтанным излучением и подавленном вблизи металлического зеркала [A22]. Наконец, в работах [312, 313] было сформулировано принципиальное отличие между спонтанным излучением и фёрстеровским переносом энергии. Скорость радиационного затухания определяется прежде всего излучением в дальнее электромагнитное поле и чувствительна к модуляции свойств среды на относительно больших расстояниях порядка длины световой волны. Перенос энергии определяется главным образом ближним электромагнитным полем, и контролируется распределением диэлектрической проницаемости на субволновых расстояниях порядка  $10 \div 100$  нм. Поэтому изменять скорость переноса энергии существенно сложнее, чем скорость спонтанного излучения, и в общем случае эффекты Фёрстера и Парселла не коррелируют.

Экспериментальная демонстрация и характеристика фёрстеровского процесса более трудоёмка, чем измерение эффекта Парселла. Поскольку необходимо изучать образец с двумя взаимодействующими системами, донорами и акцепторами, возможные эффекты значительно разнообразнее. Существует два основных пути к выявлению фёрстеровского процесса — (а) по сравнению кинетики излучения доноров при наличии и в отсутствие акцепторов, и (б) по измерению излучения акцепторов при наличии доноров. В первом случае ускорение излучения доноров связывается с появлением дополнительного канала затухания — переноса энергии акцепторам. Во втором случае появление дополнительного излучения акцепторов связывается с переносом возбуждений от доноров. Оба эти подхода не лишены недостатков. Так, в первом подходе не учитывается возможное влияние акцепторов на скорость спонтанного излучения доноров в дальнее поле за счёт изменения локальной диэлектрической проницаемости образца [A17] или же резонансного взаимодействия между донорными и акцепторными экситонами [A20]. Поэтому изменение кинетики затухания доноров при наличии акцепторов может быть связано не только с эффектом Фёрстера. Кроме того, анализ кинетики фёрстеровского переноса может затрудняться её неэкспоненциальным характером, обусловленным разбросом расстояний между донорами и акцепторами в неупорядоченных образцах [309]. Второй подход, основанный на регистрации излучения акцепторов при накачке доноров, неудобен для сравнения эффективностей переноса в различных образцах, т.к. возможная модификация скорости переноса будет замаскирована более простыми эффектами — изменением сечений поглощения доноров и излучения акцепторов. Ещё один, альтернативный способ изучения фёрстеровского переноса, был предложен в работе [314] и использует конкуренцию эффекта Фёрстера и Оже-рекомбинации. Такой метод является непрямой и требует высокоточных измерений зависимости интенсивности излучения от величины накачки.

Опишем более подробно эксперимент [A22], выполненный в университете Норфолка (США), в котором изучался перенос энергии между молекулами красителя

двух типов, помещёнными в стеклянную плёнку на поверхности металлического зеркала. Перенос выявлялся по кинетике излучения доноров при импульсной накачке: для этого сравнивались два измерения для образца лишь с донорами и образца, в котором есть и доноры, и акцепторы. Ускорение излучения доноров приписывалось фёрстеровскому переносу. На следующем этапе были выращены ещё два образца, в которых плёнка с донорами, и плёнка с донорами и акцепторами помещались на металлическое зеркало. Сравнение излучения доноров в этих образцах позволяло определить скорость переноса при наличии зеркала. Оказывалось, что перенос вблизи зеркала становится медленнее. Как будет показано далее, эффект не может быть объяснён в рамках существующей теории переноса между индивидуальными донорами и акцепторами [315, 316, 317, 318, 319]. Характерные расстояния между донорами и акцепторами ( $5 \div 10$  нм) значительно меньше, чем расстояния до зеркала, определяемые толщиной стеклянной плёнки ( $\sim 30$  нм), поэтому влияние зеркала на ближнее поле донора на акцепторе оказывается слабым и не может объяснить наблюдаемое в эксперименте подавление скорости переноса. Такая модель не учитывает возможные коллективные эффекты, возникающие при высоких концентрациях доноров ( $\sim 2 \times 10^{19}$  см<sup>-3</sup>). В разделе 4.2 развита модель, учитывающая коллективные эффекты при переносе над плоским металлическим зеркалом и показано, что она позволяет качественно объяснить подавление скорости переноса. Такие эффекты ранее рассматривались лишь для сферических наночастиц [320], а для плоского зеркала не изучались. Хотя в эксперименте [A22] исследовался перенос между молекулами красителя, построенная теория также непосредственно применима для массивов квантовых точек, малых по сравнению с длиной световой волны.

## 4.2 Модель переноса над металлическим зеркалом

### 4.2.1 Перенос от одного донора к акцептору. Метод случайных источников.

Перед тем, как перейти к рассмотрению переноса между массивами доноров и акцепторов, изложим кратко общую теорию переноса между одним донором и одним акцептором [315, 316, 317, 318, 319]. Рассматриваются донор и акцептор в бесконечной диэлектрической матрице с проницаемостью  $\varepsilon_b$ , расположенные в точках  $\mathbf{r}_D$  (донор) и  $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_D + \mathbf{r}$  (акцептор). Экситонные состояния донора и акцептора характеризуются энергиями  $E_D = \hbar\omega_D$  и  $E_A = \hbar\omega_A$  и матричными элементами дипольного перехода  $\mathbf{d}_D$  и  $\mathbf{d}_A$ . В этом разделе дисперсией и омическими потерями в матрице пренебрегается.

Согласно правилу Ферми, скорость переноса равняется

$$\frac{1}{\tau_{ET,0}} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_D - E_A) |\mathbf{d}_D \hat{G}_{\text{stat}}^{(0)} \mathbf{d}_A|^2, \quad (4.1)$$

где

$$G_{\alpha\beta,\text{stat}} = \frac{3r_\alpha r_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}}{\varepsilon_b r^5} \quad (4.2)$$

— электромагнитная функция Грина, рассчитанная в пренебрежении эффектами запаздывания и учитывающая диполь-дипольное взаимодействие между донором и акцептором [309]. Выражение (4.1) можно применять как к квантовым точкам, так и к молекулам. Для квантовых точек пренебрегается поправками к локальному полю [287,A17] и считается, что фоновые диэлектрические проницаемости квантовой точки и матрицы совпадают. Для сферических точек эти поправки ведут к к перенормировке матричного элемента дипольного момента согласно  $\mathbf{d}_{D,A} \rightarrow \mathbf{d}_{D,A} 3\varepsilon_{\text{QD}}/(\varepsilon_{\text{QD}} + 2\varepsilon_b)$ , где  $\varepsilon_{\text{QD}}$  — проницаемость квантовой точки. В общем случае следует вводить факторы деполяризации, зависящие от ориентации и формы квантовой точки. Дополнительные поправки локального поля возникают в плотных массивах квантовых точек [A17,321].

Скорость переноса (4.1) быстро затухает с расстоянием, как  $1/r^6$ . В выражении

(4.1) не учитываются эффекты запаздывания электромагнитного взаимодействия. С учётом запаздывания скорость переноса по прежнему описывается выражением (4.1), но вместо функции Грина в электростатическом приближении необходимо использовать полную электромагнитную функцию Грина [316]

$$G_{\alpha\beta}^{(0)} = \left( \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{q_b^2} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \frac{e^{iq_b r}}{\varepsilon_b r}, \quad (4.3)$$

рассчитанную на частоте перехода  $\omega = E_D/\hbar \equiv E_A/\hbar$ , где  $q_b = \omega_D \sqrt{\varepsilon_b}/c$ , так что

$$\frac{1}{\tau_{ET}} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_D - E_A) |\mathbf{d}_D \hat{G}^{(0)} \mathbf{d}_A|^2. \quad (4.4)$$

В этом случае становится возможным дальнедействующий излучательный перенос, скорость которого затухает с расстоянием как  $1/r^2$  [309].

Недостатком изложенного выше метода, основанного на правиле Ферми, является пренебрежение излучательным и безизлучательным затуханиями донорных и акцепторных состояний. Чтобы учесть затухания, используем метод случайных источников [322] и дискретное дипольное приближение. Система связанных уравнений на дипольные моменты донора  $\mathbf{p}_D$  и акцептора  $\mathbf{p}_A$  принимает вид [A[? ]]

$$\begin{aligned} (\omega_D - i\Gamma_D - i\Gamma_{0,D} - \omega) \mathbf{p}_D &= \frac{1}{\hbar} \mathbf{d}_D [\mathbf{d}_D \cdot \hat{G}^{(0)}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{p}_A] + |d_D|^2 \mathbf{s}(\omega), \\ (\omega_A - i\Gamma_A - i\Gamma_{0,A} - \omega) \mathbf{p}_A &= \frac{1}{\hbar} \mathbf{d}_A [\mathbf{d}_A \cdot \hat{G}^{(0)}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{p}_D], \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  — безизлучательные и излучательные затухания доноров и акцепторов, а  $\mathbf{s}(\omega)$  — случайная сила, описывающая стационарную некогерентную генерацию донорных экситонов. В простейшем приближении, считая что характерные спектральные расстояния между состояниями донорных экситонов значительно больше, чем обратные времена жизни доноров и акцепторов ( $\gtrsim 10$  мэВ/ $\hbar$ ), а также чем скорости переноса, накачка может быть описана случайным гауссовским шумом,

$$\begin{aligned} \langle s_\mu^*(\omega) s_\nu(\omega') \rangle &= \frac{\hbar^2 S}{2\pi} \frac{d_{D,\mu} d_{D,\nu}^*}{|d_D|^4} \delta(\omega - \omega'), \\ \langle s_\mu^*(t) s_\nu(t') \rangle &= \hbar^2 S \delta(t - t') \frac{d_{D,\mu} d_{D,\nu}^*}{|d_D|^4} \quad (\mu, \nu = x, y, z), \end{aligned} \quad (4.6)$$



где  $S$  — скорость генерации экситонов. Считается, что экситон может поляризоваться лишь в одном направлении, параллельно соответствующему вектору дипольного момента  $\mathbf{d}_D$  или  $\mathbf{d}_A$ . Микроскопическое обоснование ланжевеновского подхода и расчёт корреляционной функции случайных источников для квантовых точек в рамках диаграммной техники Келдыша приведены в работе [323], см. также [322]. На первом этапе рассмотрения рассчитаем стационарную заселённость доноров

$$N_D = \frac{\langle |p_D(t)|^2 \rangle}{|d_D|^2}, \quad (4.7)$$

где

$$\mathbf{p}_D(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{p}_D(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (4.8)$$

и угловые скобки означают усреднение по реализациям случайных источников. В явном виде получаем

$$N_D = \frac{1}{|d_D|^2} \left\langle \left| \int \frac{d\omega}{2\pi} \alpha_D(\omega) \mathbf{s}(\omega) e^{-i\omega t} \right|^2 \right\rangle, \quad (4.9)$$

где

$$\alpha_{D,\mu\nu}(\omega) = \frac{d_{D,\mu} d_{D,\nu}^*}{\hbar[\omega_D - \omega - i(\Gamma_D + \Gamma_{0,D})]} \quad (4.10)$$

— комплексная поляризуемость донорного перехода. Усреднение и интегрирование по частоте приводит к  $N_D = S\tau_D$  : заселённость доноров определяется произведением времени жизни и скорости генерации. При этом полагается  $S\tau_D \ll 1$ , т.е. используется приближение слабой накачки. Аналогичным методом получаем заселённость акцепторов

$$N_A \equiv \frac{\langle |p_A|^2 \rangle}{|d_A|^2} = \frac{\hbar^2 S}{|d_D d_A|^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \text{Tr} \alpha_A G^{(0)}(\mathbf{r}, \omega) \alpha_D \alpha_D^\dagger G^{(0)\dagger}(\mathbf{r}, \omega) \alpha_A, \quad (4.11)$$

где поляризуемость акцепторов равняется

$$\alpha_{A,\mu\nu}(\omega) = \frac{d_{A,\mu} d_{A,\nu}^*}{\hbar[\omega_A - \omega - i(\Gamma_A + \Gamma_{0,A})]}. \quad (4.12)$$

Далее будем считать, что перенос идёт в из основного состояния доноров в возбужденное состояние акцепторов. В этом случае безызлучательное затухание акцепторов значительно превосходит излучательные затухания и безызлучательное

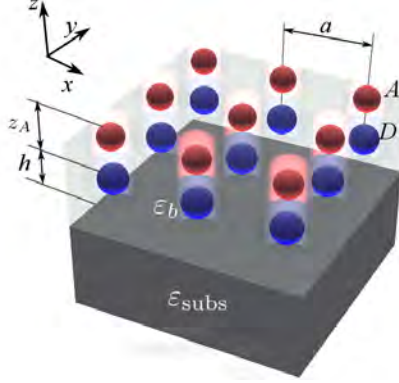


Рис. 4.1: Схематическая иллюстрация рассматриваемой системы. Показаны массивы донорных (D) и акцепторах (A) молекул над металлическим зеркалом.

затухание доноров,  $\Gamma_A \gg \Gamma_D, \Gamma_{0,D}, \Gamma_{0,A}$ . Результат интегрирования принимает вид

$$N_A = \frac{2\pi}{\hbar} S \tau_D \tau_A \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\Gamma_A}{(\omega_A - \omega_D)^2 + \Gamma_A^2} |\mathbf{d}_D \hat{G}^{(0)} \mathbf{d}_A|^2, \quad (4.13)$$

где введено время жизни акцепторов  $\tau_A = 1/2\Gamma_A$ . Перепишем это выражение в форме кинетического уравнения для заселённости акцепторов

$$\frac{N_A}{\tau_A} = \frac{N_D}{\tau_{ET}}, \quad (4.14)$$

описывающего баланс между (безызлучательным) затуханием акцепторов с временем жизни  $\tau_A = 1/2\Gamma_A$  и передачей возбуждения акцепторам от доноров с заселённостью  $N_D$ . Уравнение (4.14) может рассматриваться как определение скорости переноса  $1/\tau_{ET}$ . Из уравнения (4.13) получаем для скорости переноса

$$\frac{1}{\tau_{ET}} = \frac{2\pi}{\hbar} \Theta |\mathbf{d}_D \cdot \hat{G}^{(0)} \mathbf{d}_A|^2, \quad \Theta = \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\Gamma_A}{(\omega_A - \omega_D)^2 + \Gamma_A^2}. \quad (4.15)$$

Уравнение (4.15) обобщает результат (4.1) на случай конечного времени жизни состояния акцепторов.

## 4.2.2 Перенос между массивами доноров и акцепторов

Применим изложенный в предыдущем разделе для описания переноса между массивами доноров и акцепторов, расположенных над металлическим зеркалом. Рассматриваемая структура схематически изображена на рис. 4.1. Она состоит из

металлической подложки (зеркала) с проницаемостью  $\varepsilon_{\text{subs}}$ , ограниченной сверху полубесконечной диэлектрической матрицей с проницаемостью  $\varepsilon_b$ . На подложке расположены массивы донорных и акцепторных молекул, образующих квадратную решётку с периодом  $a$ . Донорный массив лежит в плоскости  $z = h$  на высоте  $h$  от подложки. Акцепторный массив лежит в плоскости  $z = h + z_A$  и смещён в направлениях  $x$  и  $y$  на величины  $x_A$  и  $y_A$  относительно решётки доноров.

Рассматривается случай стационарной нерезонансной накачки донорных экситонов. Для описания процесса накачки используем метод ланжевеновских случайных источников, следуя работе [323]. Вместо уравнений (4.5) получим систему уравнений в модели связанных диполей

$$\frac{1}{\alpha_D} \mathbf{p}_{D,j} = \mathbf{s}_j + \sum_{j'}' \hat{G}(\mathbf{r}_{D,j}, \mathbf{r}_{D,j'}) \mathbf{p}_{D,j'} + \sum_{j'} \hat{G}(\mathbf{r}_{D,j}, \mathbf{r}_{A,j'}) \mathbf{p}_{A,j'}, \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{\alpha_A} \mathbf{p}_{A,j} = \sum_{j'} \hat{G}(\mathbf{r}_{A,j}, \mathbf{r}_{D,j'}) \mathbf{p}_{D,j'}. \quad (4.17)$$

Здесь  $\mathbf{p}_{D,j}$  ( $\mathbf{p}_{A,j}$ ) — дипольные моменты доноров (акцепторов), расположенных в точках  $\mathbf{r}_{D,j}$  ( $\mathbf{r}_{A,j}$ ) и имеющих поляризуемости  $\alpha_D$  ( $\alpha_A$ ),  $\mathbf{s}_j$  — амплитуды случайных источников, и  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  — электромагнитная функция Грина, являющаяся решением уравнения

$$\nabla \times \nabla \times \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(\mathbf{r}) \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + 4\pi \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (4.18)$$

Функция Грина может быть представлена в следующем общем виде [324],

$$\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{G}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \hat{G}^{(R)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (4.19)$$

где  $G^{(0)}$  — функция Грина (4.3) в объёмном диэлектрике с проницаемостью  $\varepsilon_b$  и  $G^{(R)}$  — вклад волн, отражённых от подложки, в функцию Грина.

Накачка характеризуется эффективной скоростью генерации  $S$  донорных экситонов [323] согласно

$$\langle s_{j,\mu} s_{j',\nu}^* \rangle = \frac{\hbar^2 S}{2\pi |d_D|^2} \delta_{\mu\nu} \delta_{jj'} \delta(\omega - \omega'), \quad \langle s_{j,\mu} \rangle = 0, \quad (4.20)$$

где  $\mu, \nu = x, y, z$  и угловые скобки обозначают усреднение по реализациям случайных источников. Задачей настоящего рассмотрения является анализ влияния зеркала на скорость переноса и учёт электромагнитного взаимодействия между донорами, а не изучение деталей энергетического спектра донорных и акцепторных экситонов. Поэтому используем простейшие поляризуемости, характеризующие экситонные резонансы излучающих донорных и поглощающих акцепторных состояний:

$$\alpha_M = \frac{d_M^2}{\hbar[\omega_M - \omega - i(\Gamma_M + \Gamma_{0,M})]}, \quad M = D, A, \quad (4.21)$$

где  $d_M$  — матричные элементы дипольного момента доноров и акцепторов,  $\omega_M$  — резонансные частоты и  $\Gamma$  — феноменологические скорости безызлучательного затухания. Считается, что симметрия молекул (или квантовых точек) достаточно высока и поляризуемости не зависят от направления приложенного поля. Поэтому молекула может поляризоваться в любом направлении. При этом накачка является неполяризованной, ср. (4.6) и (4.20). Скорости излучательного затухания  $\Gamma_0$  в бесконечной матрице равняются [295] [ср. также с (3.28)]

$$\Gamma_{0,M} = \frac{2\omega_M^3 d_M^2 \sqrt{\epsilon_b}}{3\hbar c^3}. \quad (4.22)$$

Настоящий подход может быть обобщён с учётом энергетической структуры реальных молекул или квантовых точек, а также с учётом взаимодействия с фононами. Для этого необходимо усреднить поляризуемость по различным поляронным состояниям [316]. Знак штриха в сумме (4.16) обозначает, что функцию Грина  $\hat{G}^{(0)}$  не нужно учитывать в сумме при  $j \neq j'$ . Мнимая часть этой функции Грина описывает скорость спонтанного излучения в объёмном диэлектрике и уже включена в скорость затухания (4.22). Расходящаяся вещественная часть  $\hat{G}^{(0)}$  характеризует излучательную поправку к частоте резонанса. Она может быть регуляризована с учётом конечной протяженности волновой функции [287, 32, 325], как это было сделано в разделе 3.2 при расчёте фактора Парселла в дискретном гиперболическом метаматериале. Далее считаем, что регуляризация уже была произведена и излучательная поправка учтена в определении резонансной экситонной частоты

$\omega_D$ . Существенно, что в (4.16) учитывается гибридизация донорных экситонов за счёт их взаимодействия со светом (второе слагаемое в правой части). Это гибридизация приводит к образованию коллективных экситон-поляритонных донорных мод, являющихся собственными решениями (4.16). Отметим, что коллективные эффекты проявляются и при некогерентной накачке, т.к. они определяются собственными модами однородного уравнения (4.16), без правой части. Необходимые условия проявления коллективных эффектов — слабое неоднородное уширение в массиве доноров и достаточно длинное время жизни донорных состояний. Для упрощения взаимодействие между акцепторами в (4.17) не учитывалось. Основанием для такого отличия описаний акцепторов и доноров является то, что возбуждение передаётся из основных состояний доноров в возбуждённые состояния акцепторов. Скорость безызлучательного затухания возбуждённого состояния акцепторов  $\Gamma_A$  считается превосходящей скорость передачи энергии между акцепторами, так что связью акцепторов можно пренебречь.

Конечной целью рассмотрения является расчёт стационарной заселённости акцепторов, вызванной накачкой в донорные состояния и передачей энергии от доноров к акцепторам. Так как задача обладает трансляционной симметрией в плоскости, дипольные моменты доноров и акцепторов удобно разложить по блоховским модам с волновыми векторами  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{p}_{M,j} = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}r_{M,\mathbf{k}}} \mathbf{p}_{M,\mathbf{k}} \equiv \frac{a^2}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_x \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk_y e^{i\mathbf{k}r_{M,\mathbf{k}}} \mathbf{p}_{M,\mathbf{k}}, \quad M = D, A, \quad (4.23)$$

и аналогично для случайных источников  $\mathbf{s}_{D,j}$ . Подход полностью аналогичен рассмотрению спонтанного излучения в метаматериалах в предыдущей главе, см. раздел 3.3.1. Подставляя (4.23) в (4.16), получаем систему линейных уравнений для блоховских амплитуд  $\mathbf{p}_{D,\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{p}_{A,\mathbf{k}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_D} \mathbf{p}_{D,\mathbf{k}} &= \mathbf{s}_{D,\mathbf{k}} + C_{\mathbf{k}} \mathbf{p}_{D,\mathbf{k}} + \mathcal{G}_{DA,\mathbf{k}} \mathbf{p}_{A,\mathbf{k}}, \\ \frac{1}{\alpha_A} \mathbf{p}_{A,\mathbf{k}} &= \mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}} \mathbf{p}_{D,\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где

$$C_{D,\mathbf{k}} = \sum_{j \neq 0} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_{D,j} - \mathbf{r}_{D,0})} G(\mathbf{r}_{D,0}, \mathbf{r}_{D,j}) + G^{(R)}(\mathbf{r}_{D,0}, \mathbf{r}_{D,0}) \quad (4.25)$$

— константа взаимодействия [281] и

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}} &= \sum_j e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_{D,j} - \mathbf{r}_{A,0})} G(\mathbf{r}_{A,0}, \mathbf{r}_{D,j}), \\ \mathcal{G}_{DA,\mathbf{k}} &= \sum_j e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_{A,j} - \mathbf{r}_{D,0})} G(\mathbf{r}_{D,0}, \mathbf{r}_{A,j}) = \mathcal{G}_{AD,-\mathbf{k}}^T. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Приведём явные выражения для расчёта сумм в (4.25)–(4.26). Процедуру можно разделить на два шага: вычисление объемного вклада и вычисление вклада, связанного с отражением от зеркала. Второй вклад рассчитывается непосредственно в обратном пространстве согласно [324] и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(R)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &\equiv \sum_{\mathbf{a}} G^{(R)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' + \mathbf{a}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} = \frac{2\pi i (\omega/c)^2}{a^2} \sum_{\mathbf{b}} \frac{e^{ik_{z,\mathbf{b}}(z+z') + i(\mathbf{k}+\mathbf{b})(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}')}}}{k_{z,\mathbf{b}}} \times \\ &\times (r_{\text{TE},\mathbf{b}} \mathbf{e}_{\text{TE},\mathbf{b}} \otimes \mathbf{e}_{\text{TE},\mathbf{b}} + r_{\text{TM},\mathbf{b}} \mathbf{e}_{\text{TM},\mathbf{b}}^+ \otimes \mathbf{e}_{\text{TM},\mathbf{b}}^-), \end{aligned} \quad (4.27)$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — векторы прямой и обратной решётки, за  $\boldsymbol{\rho}$ ,  $\boldsymbol{\rho}'$  обозначены компоненты векторов  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$ , лежащие в плоскости структуры,

$$r_{\text{TE},\mathbf{b}} = \frac{k_{z,\mathbf{b}} - k_{z,\mathbf{b}}^{(\text{subs})}}{k_{z,\mathbf{b}} + k_{z,\mathbf{b}}^{(\text{subs})}}, \quad r_{\text{TM},\mathbf{b}} = \frac{\varepsilon_b/k_{z,\mathbf{b}} - \varepsilon_{\text{subs}}/k_{z,\mathbf{b}}^{(\text{subs})}}{\varepsilon_b/k_{z,\mathbf{b}} + \varepsilon_{\text{subs}}/k_{z,\mathbf{b}}^{(\text{subs})}} \quad (4.28)$$

— коэффициенты отражения ТЕ- и ТМ-поляризованных волн,

$$\mathbf{e}_{\text{TE},\mathbf{b}} = \frac{1}{|\mathbf{k} + \mathbf{b}|} (\mathbf{k} + \mathbf{b}) \times \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{e}_{\text{TM},\mathbf{b}}^{\pm} = \pm \frac{1}{q_b} (\mathbf{k} + \mathbf{b} \pm k_{z,\mathbf{b}} \hat{\mathbf{z}}) \times \mathbf{e}_{\text{TE},\mathbf{b}} \quad (4.29)$$

— векторы поляризации этих волн,

$$k_{z,\mathbf{b}} = \sqrt{q_b^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{b})^2}, \quad k_{z,\mathbf{b}}^{(\text{subs})} = \sqrt{q_{\text{subs}}^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{b})^2}, \quad (4.30)$$

$q_{\text{subs}} = \omega \sqrt{\varepsilon_{\text{subs}}}/c$ . Ряд (4.27) сходится экспоненциально при  $z, z' \neq 0$ , поскольку множители  $e^{ik_{z,\mathbf{b}}(z+z')}$  стремятся к нулю при больших  $b$ .

Преобразование Фурье объемной функции Грина может быть вычислено либо методом Флоке [281], либо методом Эвальда [326]. Для квадратной решётки в

3D пространстве предпочтительнее оказывается метод Эвальда, основанный на следующем интегральном представлении для функции Грина (4.3):

$$G^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{2(q_b^2 + \nabla \otimes \nabla)}{\sqrt{\pi \varepsilon_b}} \left( \int_{-i0}^{\kappa} + \int_{\kappa}^{\infty} \right) d\xi e^{-r^2 \xi^2 + q_b^2 / (2\xi)^2}, \quad (4.31)$$

где  $\kappa$  — параметр отсечки. Преобразование Фурье (4.31) разбивается на два вклада, первый вклад вычисляется в прямом пространстве, а второй — в обратном. Результат имеет вид

$$\mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{a}} G^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{a}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} = \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r}) + \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\varepsilon_b} (q_b^2 + \nabla \otimes \nabla) (g_{\mathbf{k}}^{(1)} + g_{\mathbf{k}}^{(2)}), \quad (4.32)$$

где

$$g_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{i\pi}{a^2} \sum_{\mathbf{b}} \frac{e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{b})\rho}}{k_{z,\mathbf{b}}} \left[ 2 \cos(k_{z,\mathbf{b}} z) + e^{ik_{z,\mathbf{b}} z} \operatorname{erf} \left( \frac{ik_{z,\mathbf{b}}}{2\kappa} + \kappa z \right) + e^{-ik_{z,\mathbf{b}} z} \operatorname{erf} \left( \frac{ik_{z,\mathbf{b}}}{2\kappa} - \kappa z \right) \right] \quad (4.33)$$

и

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{a}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} g(|\mathbf{r} - \mathbf{a}|), \quad g(r) = \\ &= \left[ \frac{\cos q_b r}{r} - \frac{e^{iq_b r}}{2r} \operatorname{erf} \left( \kappa r + \frac{iq_b}{2\kappa} \right) - \frac{e^{-iq_b r}}{2r} \operatorname{erf} \left( \kappa r - \frac{iq_b}{2\kappa} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Теперь исходный медленно сходящийся ряд (4.26) заменён на два ряда (4.33) и (4.34) в обратном и прямом пространстве, остаток каждого из которых экспоненциально мал. В практических вычислениях в каждой сумме оказывается достаточно учесть  $\sim 5^2$  слагаемых. При этом результат практически не зависит от величины параметра отсечки  $\kappa$  в интервале  $1/a < \kappa < 10/a$ . Окончательно получаем для функций Грина

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{DA,\mathbf{k}} &\equiv \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}_{D,0} - \mathbf{r}_{A,0}) + \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(R)}(\mathbf{r}_{D,0}, \mathbf{r}_{A,0}), \\ \mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}} &\equiv \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}_{A,0} - \mathbf{r}_{D,0}) + \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(R)}(\mathbf{r}_{A,0}, \mathbf{r}_{D,0}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Константа взаимодействия равняется

$$C_{\mathbf{k}} = \mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(R)}(\mathbf{r}_{D,0}, \mathbf{r}_{D,0}) + G_{\mathbf{k}}^{(1)}(0) + \tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{k}}^{(2)}(0), \quad (4.36)$$

где слагаемое с  $\mathbf{a} = 0$  в сумме в прямом пространстве требует отдельного рассмотрения:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}_{\mathbf{k}}^{(2)}(0) &= \lim_{\mathbf{r} \rightarrow 0} [\mathcal{G}_{\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r}) - G^{(0)}(\mathbf{r})] = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_b} (q_b^2 + \nabla \otimes \nabla) \sum_{\mathbf{a} \neq 0} g(|\mathbf{r} - \mathbf{a}|) - \frac{2iq_b^3}{3\varepsilon_b} + \\ &+ \frac{2}{3\sqrt{\pi\varepsilon_b}} \left[ -2\kappa q_b^2 \exp\left(\frac{q_b^2}{4\kappa^2}\right) + 2\kappa^3 \exp\left(\frac{q_b^2}{4\kappa^2}\right) - iq_b^3 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{iq_b}{2\kappa}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Решая уравнения (4.24), находим в матричной форме

$$\mathbf{p}_{D,\mathbf{k}} = \tilde{\alpha}_{D,\mathbf{k}} \mathbf{s}_{D,\mathbf{k}}, \quad (4.38)$$

$$\mathbf{p}_{A,\mathbf{k}} = \alpha_A \mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}} \tilde{\alpha}_{D,\mathbf{k}} \mathbf{s}_{D,\mathbf{k}},$$

где введены тензорные поляризуемости доноров, перенормированные с учётом взаимодействия,

$$\tilde{\alpha}_{D,\mathbf{k}} = \frac{1}{\alpha_D^{-1} - C_{\mathbf{k}} - \alpha_A \mathcal{G}_{DA,\mathbf{k}} \mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}}}. \quad (4.39)$$

Подставляя (4.38) в (4.23), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{D,j} &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{j'} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_{D,j} - \mathbf{r}_{D,j'})} \tilde{\alpha}_{D,\mathbf{k}} \mathbf{s}_{j'} . \\ \mathbf{p}_{A,j} &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{j'} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_{D,j} - \mathbf{r}_{D,j'})} \alpha_A \mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}} \tilde{\alpha}_{D,\mathbf{k}} \mathbf{s}_{j'} . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Уравнения (4.40) полностью учитывают гибридизацию донорных экситонов друг с другом, с акцепторами, и с подложкой, включая формирование коллективных плазмон-поляритонных мод и изменение времени жизни доноров из-за процесса переноса энергии. Информация об этом содержится в поляризуемостях блоховских мод  $\tilde{\alpha}_{D,\mathbf{k}}$  (4.39), которые имеют вид затравочной поляризуемости доноров  $\alpha_D$ , перенормированной взаимодействием с зеркалом и с акцепторами.

Средние числа заполнений состояний донорных и акцепторных экситонов могут быть рассчитаны как квадраты модулей дипольных моментов, усреднённые по реализациям случайных источников, и поделенные на соответствующие матричные элементы:

$$N_M \equiv \frac{1}{|d_M|^2} \langle |\mathbf{p}_M(t)|^2 \rangle = \frac{1}{|d_M|^2} \iint \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} e^{i(\omega - \omega')t} \langle \mathbf{p}_{M,j}^*(\omega) \cdot \mathbf{p}_{M,j}(\omega') \rangle, \quad (4.41)$$



где  $M = D, A$ . Подставляя уравнения (4.40) в (4.41) и используя корреляционную функцию случайных источников (4.20), находим

$$N_D = \frac{\hbar^2 S}{|d_D|^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}} \text{Tr} \tilde{\alpha}_{D,\mathbf{k}} \tilde{\alpha}_{D,\mathbf{k}}^\dagger, \quad (4.42)$$

$$N_A = \frac{\hbar^2 S}{|d_D d_A|^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} |\alpha_A|^2 \sum_{\mathbf{k}} \text{Tr} \mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}} \alpha_{D,\mathbf{k}} \alpha_{D,\mathbf{k}}^\dagger \mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}}^\dagger.$$

Интегрирование по частоте удобно выполнить после диагонализации матрицы  $\tilde{\alpha}_{D,\mathbf{k}}^\dagger$ . Для этого введём собственные частоты  $\omega_{D,\mathbf{k}\lambda}$  и времена жизни  $\tau_{D,\mathbf{k}\lambda}$  экситон-поляритонных мод донорных состояний:

$$[\omega_D - i(\Gamma_D + \Gamma_{0,D})] \delta_{\alpha\beta} - \frac{d_D^2}{\hbar} [C_{\mathbf{k}} + \alpha_A(\omega_D) \mathcal{G}_{DA,\mathbf{k}} \mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}}]_{\alpha\beta} =$$

$$= \sum_{\lambda} V_{\mathbf{k},\alpha\lambda} \left( \omega_{D,\mathbf{k}\lambda} - \frac{i}{2\tau_{D,\mathbf{k}\lambda}} \right) [V_{\mathbf{k}}^{-1}]_{\lambda\beta}. \quad (4.43)$$

Здесь индекс  $\lambda$  нумерует поляризацию моды,  $\alpha, \beta = x, y, z$  и  $V_{\mathbf{k},\alpha\lambda}$  — матрица собственных векторов, нормированная согласно  $\sum_{\alpha} |V_{\mathbf{k},\alpha\lambda}|^2 = 1$ . Поляризуемость можно представить в виде разложения по собственным модам

$$[\tilde{\alpha}_{D,\mathbf{k}}]_{\alpha\beta} = \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} \frac{d_D^2 V_{\mathbf{k},\alpha\lambda} [V_{\mathbf{k}}^{-1}]_{\lambda\beta}}{\omega_{D,\mathbf{k}\lambda} - \omega - i/(2\tau_{D,\mathbf{k}\lambda})}. \quad (4.44)$$

При выводе (4.43),(4.44) учитывалось, что время жизни возбуждённого состояния акцепторов  $\tau_A$  является кратчайшим временем в системе. В этом приближении можно пренебречь частотной зависимостью восприимчивости  $\alpha_A$  и рассчитать её на затравочной частоте резонанса доноров. Подставим (4.44) в (4.42) и выполним интегрирование по частоте  $\omega$ . При этом будем считать что разброс между собственными частотами  $\omega_{D,\mathbf{k}\lambda}$  с различными поляризациями  $\lambda$  превосходит времена жизни этих состояний. Тогда перекрёстными слагаемыми

$$\propto \frac{1}{\omega_{D,\mathbf{k}\lambda} - \omega + i/(2\tau_{D,\mathbf{k}\lambda})} \frac{1}{\omega_{D,\mathbf{k}\lambda'} - \omega - i/(2\tau_{D,\mathbf{k}\lambda'})} \quad (4.45)$$

с  $\lambda \neq \lambda'$  можно пренебречь. Справедливость этого приближения будет обоснована далее путём численного расчёта собственных частот и времён жизни. В результате

числа заполнения доноров и акцепторов равняются

$$N_D = S\tau_D \equiv S \sum_{\mathbf{k},\lambda} \tau_{D,\mathbf{k}\lambda} u_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (4.46)$$

$$N_A = S\tau_A \frac{2}{\hbar^2} \frac{\Gamma_A}{(\omega_D - \omega_A)^2 + \Gamma_A^2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} d_D^2 d_A^2 \tau_{D,\mathbf{k}\lambda} u_{\mathbf{k}\lambda} |\mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}\lambda}|^2, \quad (4.47)$$

$$[\mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}\lambda}]_\alpha = \mathcal{G}_{AD,\mathbf{k},\alpha\beta} V_{\beta\lambda}, \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad (4.48)$$

$$u_{\mathbf{k}\lambda} = \sum_{\beta} |[V^{-1}]_{\lambda\beta}|^2. \quad (4.49)$$

В дополнение к числам заполнения определим также эффективную скорость переноса  $1/\tau_{ET}$ . В рамках модели стационарной накачки скорость переноса может быть получена из стационарного кинетического уравнения для заселённости акцепторов (4.14). Комбинируя уравнения (4.46) и (4.47), получаем

$$\frac{1}{\tau_{ET}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{\pi\hbar} \frac{\Gamma_A}{(\omega_D - \omega_A)^2 + \Gamma_A^2} \mathcal{M}^2, \quad (4.50)$$

где введён эффективный матричный элемент переноса

$$\mathcal{M}^2 = \frac{|d_A|^2 |d_D|^2}{\sum_{\mathbf{k},\lambda} \tau_{D,\mathbf{k}\lambda} u_{\mathbf{k}\lambda}} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \tau_{D,\mathbf{k}\lambda} u_{\mathbf{k}\lambda} |\mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}\lambda}|^2. \quad (4.51)$$

Уравнения (4.46)–(4.51) для стационарных заселённостей и эффективной скорости переноса составляют центральный результат этого раздела. Их структура является достаточно наглядной и аналогична структуре уравнения (4.15), описывающего перенос между одним донором и одним акцептором. Полная заселённость доноров (4.46) определяется вкладами всех блоховских мод с различными волновыми векторами и поляризациями. Заселённость акцепторов  $N_A$  в (4.47) зависит от спектральной отстройки  $\Delta = \hbar(\omega_D - \omega_A)$  между резонансами доноров и акцепторов, а также матричным элементом переноса. Квадрат матричного элемента переноса  $\mathcal{M}^2$  в (4.51) включает сумму вкладов различных собственных блоховских мод донорного ансамбля. Каждое слагаемое в (4.47) пропорционально времени жизни соответствующей моды  $\tau_{D,\mathbf{k}\lambda}$ , определяющему её заселённость.

Для общности запишем в той же форме результаты в случае, когда коллективные эффекты подавлены и перенос идёт лишь от данного донора в точке  $\mathbf{r}_D$  к акцептору в точке  $\mathbf{r}_A$ . Выражения имеют ту же структуру, но не содержат сумму по блоховскому волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Собственные моды определяются уравнением

$$\begin{aligned} [\omega_D - i(\Gamma_D + \Gamma_{0,D})]\delta_{\alpha\beta} - \frac{d_D^2}{\hbar} [C + \alpha_A(\omega_D)G_{AD}^T G_{AD}]_{\alpha\beta} = \\ = \sum_{\lambda} V_{\alpha\lambda} \left( \omega_{D,\lambda} - \frac{i}{2\tau_{D,\lambda}} \right) [V^{-1}]_{\lambda\beta}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где  $G_{AD} = G(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_D)$  и  $C = G^{(R)}(\mathbf{r}_D, \mathbf{r}_D)$ . Заселённости доноров и акцепторов равняются

$$N_D = S\tau_D \equiv S \sum_{\lambda} \tau_{D,\lambda} u_{\lambda}, \quad (4.53)$$

$$N_A = S\tau_A \frac{2}{\hbar^2} \frac{\Gamma_A}{(\omega_D - \omega_A)^2 + \Gamma_A^2} \sum_{\lambda} d_D^2 d_A^2 \tau_{D,\lambda} u_{\lambda} |\mathbf{G}_{AD,\lambda}|^2, \quad (4.54)$$

с  $[\mathbf{G}_{AD,\lambda}]_{\alpha} = G_{AD,\alpha\beta} V_{\beta\lambda}$ ,  $u_{\lambda} = |[V^{-1}]_{\lambda\beta}|^2$ , а скорость переноса имеет вид

$$\frac{1}{\tau_{ET}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{\pi\hbar} \frac{\Gamma_A |d_A|^2 |d_D|^2}{(\omega_D - \omega_A)^2 + \Gamma_A^2} \frac{\sum_{\lambda} \tau_{D,\lambda} u_{\lambda} |\mathbf{G}_{AD,\lambda}|^2}{\sum_{\lambda} \tau_{D,\lambda} u_{\lambda}}. \quad (4.55)$$

Этот ответ полностью аналогичен выражению (4.15), единственным отличием является то, что донорные состояния в рассматриваемой модели вырождены по поляризации.

### 4.2.3 Численный расчёт

Рисунок 4.2 представляет основной результат главы — рассчитанную зависимость скорости переноса  $1/\tau_{ET}$  (4.50) [рис. 4.2(a)], заселённости акцепторов (4.47) [рис. 4.2(b)] и времени жизни доноров  $1/\tau_D$  (4.46) [рис. 4.2(c)] от высоты доноров и акцепторов над зеркалом  $\hbar$ . Для каждой кривой относительные положения доноров и акцепторов были одинаковыми и не зависели от  $\hbar$ . Кривые рассчитаны для различных относительных положений доноров и акцепторов, а также спектральных отстроек  $\Delta = \hbar(\omega_D - \omega_A)$ , указанных на рис. 4.2. Начнём описание результатов

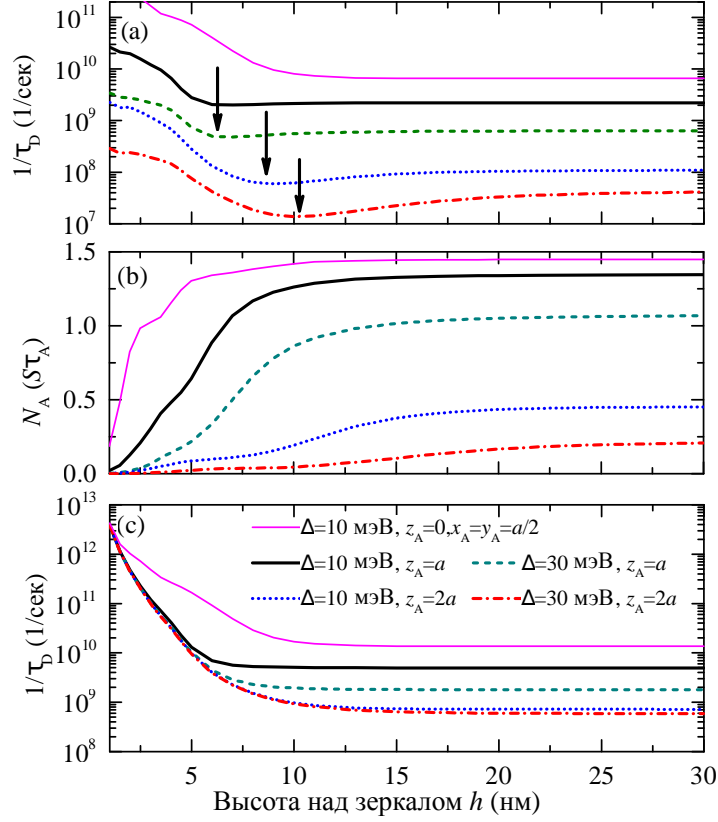


Рис. 4.2: Скорость переноса  $1/\tau_{ET}$  (а), заселённость акцепторов  $N_A$  (б) и время жизни доноров  $1/\tau_D$  (с) в зависимости от расстояния доноров от зеркала  $h$ . Расчёт выполнен для различных положений акцепторов относительно доноров и спектральных отстройек  $\Delta = \hbar(\omega_D - \omega_A)$  между донорами и акцепторами при следующих значениях параметров:  $a = 7.5$  нм,  $d_A = d_D = e \times 3 \text{ \AA}$  ( $e$  — заряд электрона),  $\tau_A = 0.1$  ps,  $\lambda \equiv 2\pi c/\omega_D = 500$  нм,  $\varepsilon_b = 2$ ,  $\Gamma_D = 0.1\Gamma_{0,D}$ ,  $\varepsilon_{\text{subs}} = -9.8 + 0.3i$  (соответствует серебру [327]). Значения параметров  $x_A, y_A, z_A$  и  $\Delta$  указаны на панели (с).

с рис. 4.2(с), на котором показано полное время жизни донорных экситонов  $\tau_D$ , определяющее их число  $N_D = S\tau_D$ . Время жизни контролируется следующими эффектами, см. (4.43): (а) безызлучательное затухание доноров, (б) излучательное затухание, связанное с взаимодействием с зеркалом, (в) перенос энергии от доноров к акцепторам. На больших расстояниях от зеркала и при больших спектральных отстройках и расстояниях между донорами и акцепторами второй и третий механизмы подавлены и затухание доноров является главным образом безызлучательным (красные и синие кривые). Когда доноры приближаются к зеркалу или к акцепторам, их время жизни становится короче. На малых расстояниях от зер-

кала затухание доноров ускоряется благодаря эффекту Парселла и определяется их взаимодействием с зеркалом,  $1/\tau_D \propto \text{Im } \varepsilon_{\text{subs}}/h^3$  [301]. Поэтому перенос энергии оказывается неэффективным и заселённость акцепторов падает [320]. Это проиллюстрировано на рис. 4.2(b): величина  $N_A(h)$  уменьшается на малых расстояниях от зеркала.

Перейдём от анализа стационарных заселённостей доноров и акцепторов к кинетике переноса. Скорость переноса  $1/\tau_{ET}$ , описывающая перенос от доноров к акцепторам, демонстрирует нетривиальное поведение, см. рис. 4.2(a). Если расстояния и спектральная отстройка между донорами и акцепторами малы ( $x_A = y_A = a/2$ ,  $z_A = 0$ ,  $\Delta = 10$  мэВ, пурпурная кривая), то скорость переноса монотонно возрастает с приближением к зеркалу. Для больших спектральных отстроек и расстояний между донорами и акцепторами абсолютная величина скорости переноса падает, а её зависимость от расстояния до зеркала качественно изменяется. В частности, кривые  $1/\tau_{ET}(h)$  ведут себя немонотонным образом и имеют минимум при значениях  $h$  порядка периода решётки  $a$ . Спектральные положения минимумов отмечены вертикальными стрелками на рис. 4.2(a). Положения минимумов сдвигаются в сторону больших расстояний от зеркала с увеличением расстояния между донорами и акцепторами, ср. зелёную и красную, черную и синие кривые для  $z_A = a$  и  $z_A = 2a$ , соответственно. Минимумы также становятся более выраженными с ростом спектральной отстройки  $\Delta$ , ср. черную и зелёную, синюю и красную кривые для  $\Delta = 10$  мэВ и  $\Delta = 30$  мэВ.

Из анализа результатов на рис. 4.2 заключаем, что металлическое зеркало приводит к сокращению полного времени жизни доноров, уменьшению числа акцепторов, возбуждаемых через доноры и может вызывать как ускорение, так и замедление переноса. Последний эффект проявляется если перенос в отсутствие зеркала уже был медленным. Далее эффект замедления переноса будет изучен более подробно. Он находится в качественном согласии с описанным в предыдущем разделе 4.1 экспериментом [A22], выполненным для более сложного разупорядоченного

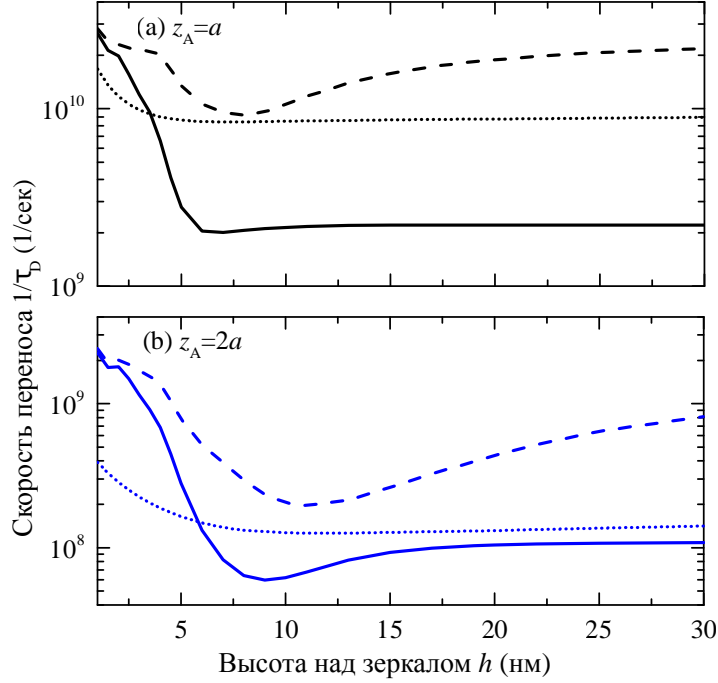


Рис. 4.3: Скорости переноса для двух различных расстояний между донорами и акцепторами,  $z_A = a = 7.5$  нм и  $z_A = 2a = 15$  нм. Расчёт выполнен для  $\Delta = 10$  мэВ согласно полной модели (4.50) (сплошные кривые), пренебрегая обратным влиянием акцепторов на доноры (штриховые кривые) и в модели одиночного донора и акцептора (4.55), пренебрегающее коллективными эффектами (пунктирные кривые). Остальные параметры расчёта такие же, как и для рис. 4.2.

образца, в котором также наблюдалось замедление переноса вблизи зеркала.

Скорость переноса может зависеть от взаимодействия доноров с акцепторами и друг с другом. Сравнение относительного влияния роли этих эффектов представлено на рис. 4.3. На панелях (a) и (b) приведены кривые  $1/\tau_{ET}(h)$ , рассчитанные для двух расстояний между донорами и акцепторами по вертикали  $z_A = a$  (a) и  $z_A = 2a$  (b). Сплошные кривые совпадают с приведёнными на рис. 4.2(a) и рассчитаны согласно полной модели (4.50). Пунктирные кривые вычислены согласно (4.55) в пренебрежении коллективными эффектами, т.е. они описывают перенос между индивидуальным донором в точке  $\mathbf{r}_D = \hat{z}h$  и акцептором в точке  $\mathbf{r}_A = \hat{z}(h + z_A)$ . Сравнивая сплошные и пунктирные кривые, заключаем, что скорость переноса от массива доноров к акцепторам значительно чувствительнее к наличию зеркала, чем скорость переноса между индивидуальными донорами

и акцепторами. Другими словами, коллективные эффекты приводят к усилению влияния зеркала на скорость переноса. Более того, немонотонная зависимость скорости переноса от расстояния до зеркала оказывается исключительно коллективным эффектом: пунктирные кривые, рассчитанные в пренебрежении взаимодействием между донорами, монотонно растут при уменьшении расстояния до зеркала и провала в них не проявляется. Для того, чтобы понять, почему минимум в кривых  $1/\tau_{ET}(h)$  становится более выраженным при уменьшении абсолютных значений скорости переноса [ср. рис. 4.3(b) и рис. 4.3(a)], пренебрежём обратным влиянием акцепторов на доноры, т.е. последним слагаемым в (4.16) и слагаемым  $\sim \mathcal{G}_{DA,k}\mathcal{G}_{AD,k}$  в (4.43) (пунктирные кривые). При этом времена жизни и энергии коллективных блоховских мод донорных состояний определяются лишь взаимодействием доноров друг с другом, т.е. собственными состояниями оператора  $\omega_D - i\Gamma_{0,D} - d_D^2 C_k/\hbar$ , и не зависят от взаимодействия с акцепторами. В таком приближении минимум становится более выраженным. Взаимодействием с акцепторами можно пренебречь лишь когда скорость переноса мала по абсолютной величине. Таким образом, минимум в кривой  $1/\tau_{ET}(h)$  связан со взаимодействием доноров друг с другом и проявляется для малых скоростей переноса. В следующем разделе будет более подробно проанализирована структура коллективных блоховских мод, определяющих перенос.

### 4.3 Коллективные экситон-поляритонные донорные моды

Для визуализации коллективных мод доноров рассмотрим их комплексную двумерную зонную структуру, построенную на рис. 4.4 и рис. 4.5. Далее в этом разделе изучается эффект взаимодействия доноров друг с другом, а взаимодействием с акцепторами пренебрегается. Рисунок 4.4 показывает скорости затухания и частоты собственных мод вдоль симметричных направлений зоны Бриллюэна. На рис. 4.5 представлены карты скоростей затухания во всей двумерной зоне Брил-

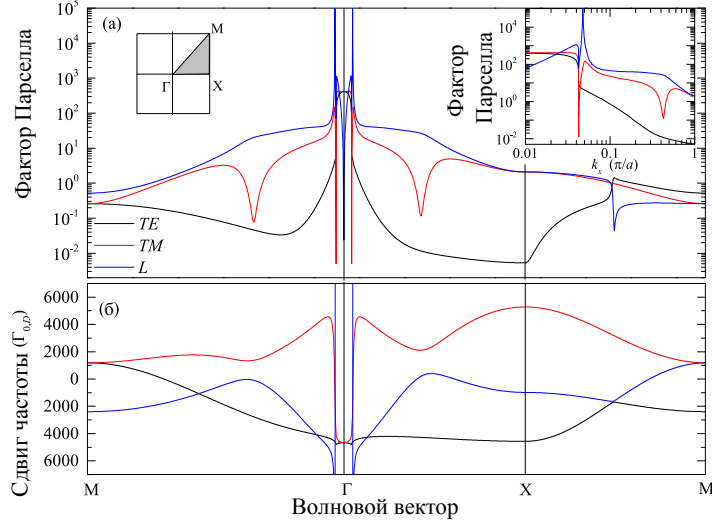


Рис. 4.4: Комплексная зонная структура коллективных блоховских мод донорных экситонов. На панелях (а) и (б) показаны мнимые и вещественные части собственных частот. Мнимые части нормированы на скорость затухания одного донора вдали от зеркала, что соответствует определению фактора Парселла. Вставка в панели (а) показывает факторы Парселла в логарифмическом масштабе вдоль направления  $\Gamma - X$ . Расчёт выполнен для  $h = 7$  нм,  $\Gamma_D = 0$ , в пренебрежении взаимодействием с акцепторами ( $\mathcal{G}_{AD} = \mathcal{G}_{DA} = 0$ ) и при тех же значениях остальных параметров, что и на рис. 4.2.

люэна. Скорости затухания нормированы на затухание одиночного донора вдали от зеркала  $\Gamma_{0,D}$ . Поэтому построенные значения можно рассматривать как факторы Парселла для коллективных мод. Для каждого блоховского вектора  $\mathbf{k}$  существуют три моды с различными поляризациями. Когда блоховский вектор направлен вдоль симметричных направлений  $\Gamma - X$  и  $\Gamma - M$ , одна из этих мод с  $V_{\mathbf{k},y}/V_{\mathbf{k},x} = -k_x/k_y$  оказывается независимой от двух других. Далее эта мода будет называться ТЕ-поляризованной. Две оставшиеся моды лежат в подпространстве с базисными векторами  $\hat{\mathbf{k}}$  и  $\hat{\mathbf{z}}$  и могут смешиваться. Для простоты они будут называться ТМ-подобной и L-подобной, при этом L-подобная оказывается в основном параллельной вектору  $\mathbf{k} + \hat{\mathbf{z}}\sqrt{q_b^2 - k^2}$ , а ТМ-подобная в основном перпендикулярна этому вектору. Точно в центре зоны Бриллюэна ( $k = 0$ ) ТЕ и ТМ моды вырождены. Для произвольного направления блоховского вектора все три моды оказываются смешанными.

Расчёт показывает, что времена жизни коллективных мод сильно зависят от



их поляризации и от величины блоховского вектора. Внутри светового конуса  $|k| < \omega\sqrt{\varepsilon_b}/c \sim 0.04\pi/a$  в центре зоны Бриллюэна фактор Парселла значительно больше единицы, см. вставку на рис. 4.4(а). Такое усиление скорости излучения аналогично эффекту сверхизлучения Дикке [174, 176, 323]: доноры, расстояния между которыми меньше, чем длина волны света, излучают сфазированно и с большей скоростью. Как было рассчитано в работе [40], скорость излучения увеличивается в  $\sim 1/(q_b a)^2$  раз по сравнению со скоростью излучения одиночного донора. Вблизи границы светового конуса скорости переноса резко изменяются. Скорость затухания мод  $L$ -типа возрастает вблизи резонанса поверхностных плазмон-поляритонов сразу же за границей светового конуса [см. пик в синей кривой на вставке в рис. 4.4(а)]. Для больших значений блоховского вектора  $k$  затухание мало. Действительно, излучение за световым конусом невозможно, и затухание определяется лишь экспоненциально слабой связью эванесцентных волн с зеркалом,  $1/\tau \propto \text{Im} \varepsilon_{\text{subs}} e^{-2kh}$ . При этом самыми долгоживущими оказываются моды ТЕ типа. Причиной является то, что их связь с подложкой дополнительно подавлена для больших блоховских векторов, поскольку  $r_{\text{ТЕ}}(k) \rightarrow 0$  при больших  $k$ , см. выражение (4.28).

В скоростях затухания также проявляются резкие особенности для определённых значений блоховских векторов  $\mathbf{k}$ . В частности, затухание ТМ-подобных мод сильно подавлено для  $|k| \sim 0.5\pi/a$ , см. провал в красной кривой на рис. 4.4(а) и соответствующую ему синюю дугу на рис. 4.5(б). Подавление излучательного затухания ранее изучалось в литературе для двумерного диэлектрического фотонного кристалла в воздухе [328]. В рамках настоящей модели эффект реализуется для структуры над металлическим зеркалом, и потери подавляются лишь частично. Эффект связан со структурой константы взаимодействия для определённых значений блоховских векторов. В частности, для  $|k| \sim 0.5\pi/a$  блок матрицы  $C_{\mathbf{k}}$  в подпространстве  $(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{z}})$  имеет следующую структуру:

$$C_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} A + iB & D + iE \\ -D + iE & A + iB \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

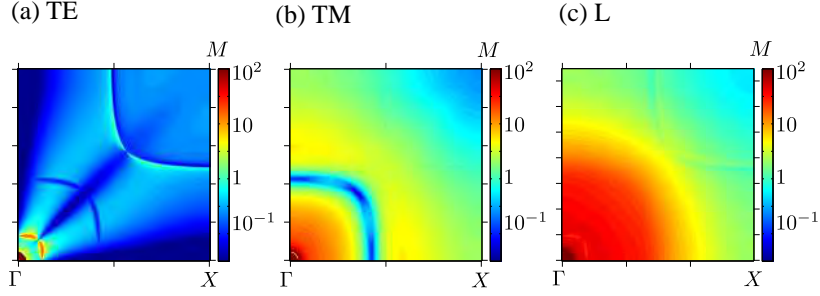


Рис. 4.5: Карты распределения факторов Парселла коллективных блоховских мод донорных экситонов с ТЕ- (а), ТМ-(b) и L-подобной (с) поляризацией внутри зоны Бриллюэна. Параметры расчёта такие же, как и на рис. 4.4.

где  $B \approx D$ . В результате, мнимая часть  $B - D$  собственного числа, соответствующего моде ТМ типа с собственным вектором  $\propto (1, -i)^T \equiv \hat{\mathbf{k}} - i\hat{\mathbf{z}}$  близка к нулю и скорость затухания подавлена.

Вещественные части собственных частот также сильно зависят от волнового вектора и поляризации. Из рис. 4.4(b) видно, что для  $k \gg \omega/c$  разброс между частотами для различных поляризаций значительно превосходит излучательные ширины мод. Это обосновывает приближение, использованное в уравнении (4.46), при котором пренебрегалось перекрёстными слагаемыми (4.45) и заселённость доноров представлялась в виде суммы независимых вкладов от различных состояний с определённой поляризацией.

Отметим, что в расчёте не учитывается частотная зависимость функций Грина на  $\mathcal{G}_{AD,\mathbf{k}}$ ,  $C_{\mathbf{k}}$ , а вместо этого они вычисляются на фиксированной частоте  $\omega_D$ . Это соответствует приближению слабой связи для взаимодействия донорных экситонов с модами зеркала. Приближение обосновано, поскольку типичные излучательные поправки к частотам доноров на рис. 4.4 малы по абсолютной величине,  $\lesssim 10^3 \hbar \Gamma_0 \sim 10^3 \hbar / 1 \text{ нс} \sim 1 \text{ мэВ}$ . Более детальное рассмотрение может потребоваться в окрестности резонанса поверхностных плазмонов, когда такие поправки возрастают и становятся  $\gtrsim 10^4 \hbar \Gamma_0$ , так что приближение слабой связи неприменимо. Для рассматриваемого диапазона параметров, соответствующего эксперименту в работе [A22], волновой вектор плазмона значительно меньше, чем размер

зоны Бриллюэна  $\pi/a$ , см. рис. 4.4. Поэтому число состояний, потенциально находящихся в режиме сильной связи с плазмонами, мало и их относительный вклад в скорость переноса оказывается несущественным. Ситуация может качественно измениться для более близких к плазменной резонансных частот, когда волновой вектор и плотность состояний плазмонов возрастают.

В эксперименте коллективные донорные состояния с блоховскими векторами внутри светового конуса непосредственно проявляются в спектрах излучения, разрешённых по углу детектирования [329]. Моды с большими значениями волновым векторов могут наблюдаться с помощью дифракционной решётки на поверхности или же призмы с высокими показателем преломления в геометрии нарушенного полного внутреннего отражения [330]. В режиме сильной накачки в спектральном и угловом распределении излучения доноров также могут проявляться нелинейные эффекты, по аналогии с тем, как это происходит для экситонных поляритонов в микрорезонаторах с квантовыми ямами [25]. Такие процессы требуют последовательного квантово-механического рассмотрения и находятся за рамками настоящей модели, в которой заселённости состояний линейно зависят от интенсивности накачки.

## 4.4 Подавление скорости переноса

Для объяснения подавления эффективной скорости переноса (4.50),(4.51), наблюдаемого на рис. 4.2(b) и рис. 4.3, изучим зависимости времён жизни  $\tau_{D,k\lambda}$  [рис. 4.6(a)], компонент функции Грина  $\mathcal{G}_{AD,k\lambda}$  [рис. 4.6(c)] и их произведений [рис. 4.6(b)] от величины блоховского волнового вектора для двух расстояний от доноров до зеркала,  $h = 30$  нм (жирные кривые) и  $h = 7$  нм (тонкие кривые). Все кривые были умножены на блоховский вектор  $k$ . Этот множитель соответствует двумерной плотности состояний  $d^2k \propto kdk$  и включён, чтобы подчеркнуть контролирующий вклад состояний с большими  $k$  в полную заселённость доноров и в скорость переноса. Из рис. 4.2 видно, что заселённость определяется модами

ТЕ типа, для которых максимально время жизни, в согласии с рис. 4.4 и рис. 4.5. Эти моды слабо взаимодействуют с зеркалом и их время жизни практически не зависит от расстояния до зеркала [ср. черные жирные и чёрные тонкие кривые на рис. 4.5(a)].

С другой стороны, компоненты функций Грина для ТЕ мод  $\mathcal{G}_{AD,\mathbf{k},\text{TE}}$  относительно малы, см рис. 4.6(c). Как следствие, заселённость акцепторов в основном определяется переносом из ТМ и L состояний доноров, а не из ТЕ мод. Поскольку заселённость донорных состояний и перенос контролируются различными модами, ТЕ-подобными и ТМ/L-подобными, матричный элемент (4.51), входящий в скорость переноса, можно представить в виде

$$\mathcal{M}^2 = \frac{|d_D|^2 |d_A|^2}{\sum_{\mathbf{k}} \tau_{D,\mathbf{k},\text{TE}} u_{\mathbf{k},\text{TE}}} \sum_{\mathbf{k},\lambda=L,\text{TM}} \tau_{D,\mathbf{k}\lambda} u_{\mathbf{k}\lambda} |\mathbf{G}_{AD,\mathbf{k}\lambda}|^2. \quad (4.57)$$

Время жизни ТЕ мод почти не зависит от расстояния до зеркала, а времена жизни L и ТМ мод уменьшаются вблизи зеркала. Поэтому первый множитель в произведении (4.51) остаётся постоянным, а второй — уменьшается. В результате скорость переноса вначале уменьшается при приближении к зеркалу, в согласии с рис. 4.2(a). На малых расстояниях от зеркала  $h \lesssim a$  коллективные эффекты несущественны, т.к. взаимодействие доноров с зеркалом становится сильнее, чем их взаимодействие друг с другом. Поэтому скорость переноса возрастает в согласии с результатами модели переноса между одиночными донорами и акцепторами (пунктирные кривые на рис. 4.3). Рост связан с усилением взаимодействия доноров с акцепторами из-за эффекта изображений [A22].

Когда спектральная отстройка и расстояния между донорами и акцепторами малы, времена жизни доноров  $\tau_{D,\mathbf{k}\lambda}$  определяются их взаимодействием с акцепторами, а не друг с другом. Поэтому их зависимость от расстояния до зеркала становится слабее и провал в кривой  $1/\tau_{ET}(h)$  пропадает, в согласии с рис. 4.2(c).

В развитой модели предполагалось, что доноры расположены в узлах периодической квадратной решётки. В реальных образцах молекулы или квантовые точки как правило разбросаны случайным образом. Тем не менее, можно ожидать, что

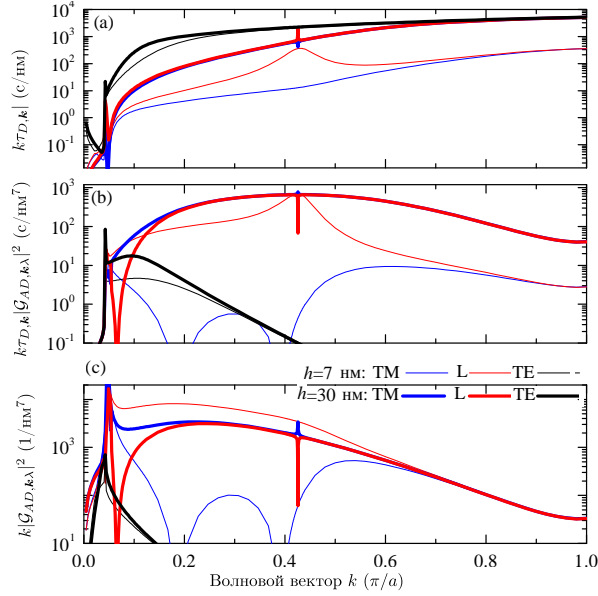


Рис. 4.6: Времена жизни коллективных донорных мод (а), вклады в скорость переноса (б) и компоненты функций Грина (с) для двух различных расстояний от массива доноров до поверхности зеркала:  $h = 7$  нм (тонкие кривые) и  $h = 30$  нм (толстые кривые). Блоховский вектор меняется вдоль направления  $\Gamma - X$ . Параметры расчёта такие же, как и на рис. 4.2.

основной результат модели, усиление чувствительности скорости переноса к наличию металлического зеркала из-за коллективных эффектов, сохранится и при наличии беспорядка. Приведём следующий качественный аргумент. Как в периодической, так и в аperiodической структурах можно ввести резонансные коллективные моды с различными поляризациями. Время жизни этих мод будет зависеть от их характерного пространственного масштаба. Если дипольные моменты изменяются в пространстве на масштабах значительно меньше, чем длина волны света, излучательное затухание будет подавлено. Простейшим примером являются светлая (симметричная) и тёмная (асимметричная) мода двух связанных резонансных излучателей [318]. Таким образом, как в периодической, так и в аperiodической системе гибридизация донорных состояний приведёт к разбросу времён жизни, которые будут отличаться от времён жизни отдельных, невзаимодействующих доноров. Эффективность процесса переноса будет разной для долгоживущих и короткоживущих мод. Присутствие зеркала приведёт к перераспределению вкладов

долгоживущих и короткоживущих мод. Это и составляет дополнительный коллективный механизм влияния зеркала на перенос.

## 4.5 Краткие итоги

В Главе 4 получены следующие основные результаты:

- Развита теория резонансного переноса возбуждений между плоскими периодическими массивами локализованных доноров и акцепторов, лежащих на поверхности плоского металлического зеркала. В роли доноров и акцепторов могут выступать молекулы красителя или полупроводниковые квантовые точки. Рассчитаны эффективные скорости переноса, заселённости доноров и акцепторов, и комплексная зонная структура коллективных мод донорных экситонов.
- Скорости затухания коллективных донорных мод резонансно усиливаются благодаря взаимодействию с поверхностными плазмонами и резонансно подавляются для определённых значений блоховских векторов, лежащих за пределами светового конуса.
- Благодаря гибридизации состояний донорных экситонов скорость переноса возбуждений от массивов доноров к акцепторам более чувствительна к наличию металлического зеркала, чем для изолированных невзаимодействующих друг с другом доноров. При этом скорость переноса может как подавляться, так и усиливаться при наличии зеркала. Подавление реализуется в случае больших спектральных расстройек и расстояний между донорами и акцепторами, когда абсолютное значение скорости переноса мало уже в отсутствие зеркала.
- Предсказанное подавление скорости переноса вблизи металлического зеркала находится в качественном согласии с результатами эксперимента [A22].

# Глава 5

## Краевые состояния в зигзагах резонансных наночастиц

В предыдущих главах диссертационной работы обсуждались эффекты, обусловленные объёмными свойствами фотонных структур. Настоящая глава посвящена краевым топологическим состояниям. В разделе 5.1.1 приведён обзор исследований в этой области и даны примеры конкретных экспериментальных реализаций таких состояний. В вступительном подразделе 5.1.2 описана простейшая одномерная модель, демонстрирующая топологические состояния — модель Су-Шриффера-Хигера. Раздел 5.2 посвящён построению теории топологических состояний в одномерных цепочках резонансных наночастиц в форме зигзага в рамках дискретного дипольного приближения [A23, A24]. Раздел 5.3 посвящён сопоставлению предсказаний теории с экспериментом для структур на основе металлических нанодисков [A25] с плазмонными резонансами (5.3.1) и диэлектрических нанодисков с резонансами Ми (5.3.2).

### 5.1 Оптические аналоги топологических краевых состояний (обзор)

#### 5.1.1 Экспериментальные реализации

Топологические изоляторы — вещества, обладающие объёмной запрещённой зоной и проводящими краевыми или поверхностными состояниями [337, 338]. От-

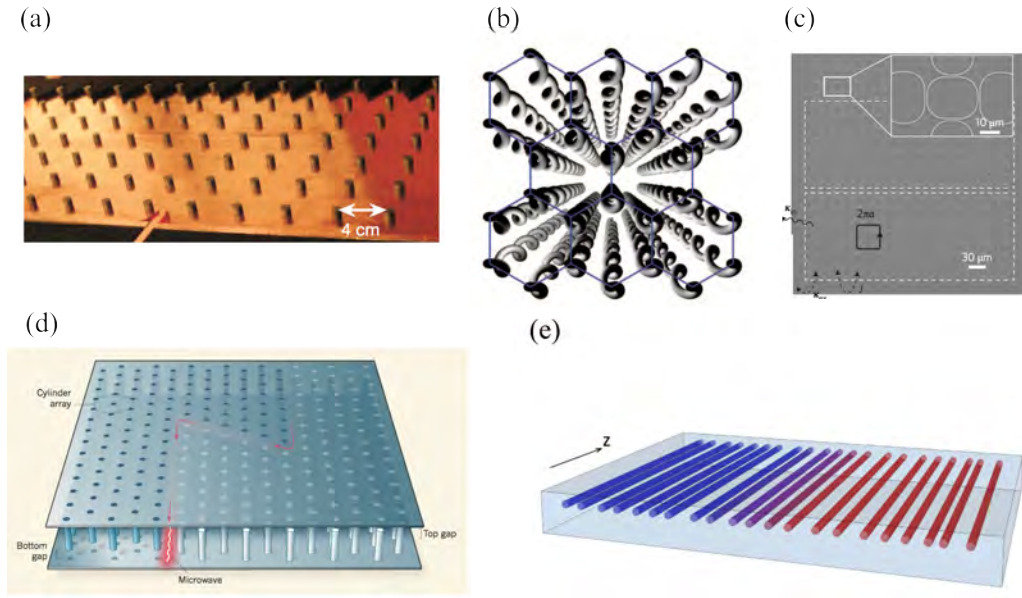


Рис. 5.1: Различные реализации аналогов топологических изоляторов для электромагнитных волн. (a) Массив ферритовых стержней [331]. (b) Решётка спиральных волноводов [332]. (c) Решётка кольцевых волноводов [333]. (d) Массив металлических стержней в волноводе [334, 335]. (e) Граница одномерных квазиристаллических массивов волноводов [336].

личительной чертой топологических изоляторов является устойчивость краевых состояний по отношению к рассеянию на примесях и дефектах. В твёрдом теле возникновение таких состояний происходит в условиях приложенного магнитного поля (фаза квантового эффекта Холла [339]) или из-за спин-орбитального взаимодействия (фаза квантового спинового эффекта Холла [340]). Примером двумерных топологических изоляторов со спин-орбитальным взаимодействием служат гетероструктуры с квантовыми ямами  $\text{HgCdTe}/\text{CdTe}$  [341, 342], спектр краевых состояний в которых был рассчитан ещё в 1980-х гг. [343, 344]. Понимание общей топологической природы краевых состояний привело к бурному росту исследований в этой области и синтезу новых двумерных и трёхмерных материалов и гетероструктур с сильным спин-орбитальным взаимодействием. Исследования топологических изоляторов стали бурно развивающейся областью современной физики твёрдого тела. Проникновение этих идей в оптику привело к поиску оптических аналогов



топологических краевых состояний. Интерес к исследованию был стимулирован как фундаментальным характером задачи о природе краевых мод в структурированных средах, так и перспективами реализации устойчивых к несовершенствам оптических устройств. Устойчивость к беспорядку определённого типа является отличительной особенностью топологических краевых состояний, выделяющей их из традиционных таммовских [11]. Последние исследования в этом направлении приведены в обзоре [12], далее кратко обсуждаются основные подходы к реализации краевых электромагнитных и оптических состояний.

Впервые топологические краевые состояния электромагнитных волн наблюдались в работе [331] в микроволновом частотном диапазоне. Структура представляла собой двумерный волновод из намагниченных ферритовых стержней, как показано на рис. 5.1(a). В системе была нарушена симметрия к инверсии времени и поведение волн было аналогично поведению электронов в режиме квантового эффекта Холла [345, 346]. Было продемонстрировано однонаправленное распространение вдоль края с подавлением рассеяния назад на дефектах [331].

В работе [332] исследовалось распространение света в решётке туннельно-связанных спиральных волноводов. Волноводы были расположены в узлах решётки графена, см. рис. 5.1(b). Благодаря спиралевидной форме волноводов, туннелирование между ними происходит с набором фазы. Поэтому распространение фотонов было аналогично распространению электронов в условиях постоянного магнитного поля, приложенного вдоль оси волноводов. Отметим, что симметрия к инверсии времени в системе не нарушена — знак эффективного магнитного поля изменяется при рассеянии фотонов назад внутри одного волновода. Для плавных волноводов рассеянием назад можно пренебречь. Тогда для однонаправленного распространения вдоль оси массив спиральных волноводов моделирует электронную систему в режиме квантового эффекта Холла. В эксперименте наблюдались краевые состояния, устойчивые к дефектам определённого типа — например, вакансиям в решётке.

Ещё одна реализация топологических краевых состояний на основе волноводов была предложена в работе [347]. Авторы рассматривали кольцевые волноводы со специальным образом организованными асимметричными туннельными связями, см. рис. 5.1(с). Каждый из кольцевых волноводов поддерживал две вырожденные моды, распространяющихся по и против часовой стрелки. Также как и в [332], туннелирование происходило с набегом фазы, который интерпретировался как проявление эффективного магнитного поля. При этом структура удовлетворяла симметрии к инверсии времени и знаки магнитных полей отличались для мод, распространявшихся по и против часовой стрелки. В пренебрежении рассеянием между этими модами, состояния всей системы распадаются на два набора, и каждый из наборов моделирует квантовый эффект Холла. Были продемонстрированы краевые оптические состояния, распространяющиеся вдоль края без рассеяния [333].

Оригинальный подход к реализации краевых состояний в оптике был предложен в работах [348, 334]. Авторы предложили рассмотреть двумерную решётку типа графена из связанных резонансных рассеивателей с электро- и магнитодипольными резонансами, причём так, чтобы резонансы были вырожденными по энергии. Если структура обладает горизонтальной плоскостью отражения, то электрические и магнитные моды оказываются независимыми. Спектр состояний системы аналогичен спектру графена и состоит из двух касающихся конусов. В дираковской точке состояния четырёхкратно вырождены — к вырождению из-за касания двух конусов добавляется дополнительное двукратное вырождение по поляризации, ТЕ или ТМ. Если теперь симметрия системы к отражению в плоскости будет нарушена, то ТЕ и ТМ состояния гибридизуются, а в энергетическом спектре открывается щель, в которой распространяются краевые состояния. Механизм возникновения краевых состояний полностью аналогичен квантовому спиновому эффекту Холла в работе [349], при этом роль спин-орбитального взаимодействия выполняет взаимодействие между модами электрического и магнитного типа. Та-

кие системы были смоделированы [334] и реализованы экспериментально в микроволновом частотном диапазоне [350], см. рис. 5.1(d). Их реализация в оптике сталкивается с существенными трудностями из-за необходимости точной подстройки частот ТЕ и ТМ мод друг к другу [351, 352].

Ещё один подход был предложен и реализован в работе [336], в которой рассматривалась одномерная цепочка туннельно-связанных волноводов, расположенных в узлах квазикристаллической решётки, см. рис. 5.1(e). Каждая такая цепочка характеризовалась фазой  $\phi$ , определяющей соотношение между константами туннелирования. Как было показано в [353], набор систем с различными фазами  $\phi$  соответствовал эффективной двумерной решётке с приложенным внешним магнитным полем в режиме квантового эффекта Холла. Из наличия краевых состояний в двумерной решётке автоматически следовало их наличие в одномерных структурах с конкретными значениями  $\phi$ . Такие системы принято называть *виртуальными* топологическими изоляторами, что подчёркивает происхождение краевых состояний из вспомогательной системы большей размерности.

Подчёркнём общую особенность перечисленных выше структур. Они построены по образу электронных систем в режиме квантового или квантового спинового эффектов Холла, но роль магнитного поля или спин-орбитального взаимодействия выполняют эффективные (т.н. синтетические) поля, обусловленные специальным дизайном структур. Поэтому несовершенства реальных образцов приводят к разрушению этих полей и краевых состояний, выполняя роль магнитных примесей в твёрдом теле. Таким образом, оптические краевые состояния как правило защищены от рассеяния лишь на дефектах определённого типа, и значительно менее устойчивы к беспорядку, чем краевые состояния носителей заряда в твёрдом теле. Ещё одним недостатком существовавших реализаций являлось использование структур на основе волноводов. По определению, характерные размеры волноводов ограничены снизу длиной световой волны. Это накладывает принципиальные ограничения на возможность реализации топологических состояний на наномас-

штабах. Альтернативной может служить использование субволновых резонансных наночастиц. Такой подход представлен в следующем разделе 5.2.

### 5.1.2 Модель Су-Шриффера-Хигера

Обсудим более подробно особенности краевых состояний в одномерных структурах. В качестве первого примера рассмотрим полубесконечную цепочку туннельно-связанных квантовых ям. В приближении сильной связи [32] уравнение Шредингера на собственные состояния в такой цепочке с энергией  $E$  имеет вид

$$E\psi_1 = E_1\psi_0 + t\psi_2, \quad (5.1)$$

$$E\psi_j = E_0\psi_j + t(\psi_{j-1} + \psi_{j+1}), \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.2)$$

Здесь  $E_1$  — положение энергетического уровня в первой яме,  $E_0$  — положения уровней в остальных ямах,  $t$  — интеграл переноса,  $\psi_n$  — коэффициенты разложения волновой функции по базису функций, локализованных в ямах. В бесконечной решётке собственными состояниями являются блоховские волны

$$\psi_j \propto e^{iKdj}, \quad (5.3)$$

где  $K$  — блоховский вектор,  $d$  — период решётки. Энергетический спектр даётся выражением  $E - E_0 = 2t \cos Kd$ . В полубесконечной решётке будем искать состояния также в виде (5.3), причём из условия нормировки  $\text{Im } K > 0$ . Тогда уравнения (5.2) с  $j > 1$  выполняются тождественно, а для  $j = 1$  из (5.1) получаем

$$E = E_1 + te^{iKd},$$

откуда находим

$$E = E_1 + \frac{t^2}{E_1 - E_0}. \quad (5.4)$$

Из условия  $\text{Im } K > 0$  находим критерий возникновения краевых состояний

$$|E_1 - E_0| > t. \quad (5.5)$$

Таким образом, краевые состояния возникают пороговым образом: энергия первой ямы  $E_1$  должна отличаться от энергии остальных ям не меньше, чем на величину интеграла переноса. Наличием порога типично для таммовских краевых состояний [354].

Теперь рассмотрим т.н. модель Су-Шриффера-Хигера (Su-Schrieffer-Heeger), впервые введённую для описания энергетического спектра молекулы полиацетилена [355]. Рассматриваемая структура может быть схематически записана как  $A-A=A-A=A-A\dots$ , где  $A$  — квантовые ямы и символами “—” и “=” обозначены связи двух типов, с интегралами переноса  $t_1$  и  $t_2$ , соответственно. Уравнения сильной связи принимают вид

$$\begin{aligned} E\psi_j &= E_0\psi_j + t_1\psi_{j+1} + t_2\psi_{j-1} & (j = 1, 3, 5 \dots), \\ E\psi_j &= E_0\psi_j + t_2\psi_{j+1} + t_1\psi_{j-1} & (j = 2, 4, 6 \dots), \end{aligned} \quad (5.6)$$

при этом в уравнении для  $j = 1$  полагаем  $\psi_0 = 0$ , а в уравнении для последнего элемента цепочки  $j = N$  полагаем  $\psi_{j+1} = 0$ . Модель может описывать квантовые ямы, разделённые барьерами двух различных толщин, массив туннельно-связанных волноводов [356, 357] или плазмонных наночастиц [358]. Блоховские состояния ищем в виде

$$\psi_j = \begin{cases} Ue^{iKd(j-1)/2} & (j = 1, 3, 5 \dots), \\ Ve^{iKdj/2} & (j = 2, 4, 5 \dots), \end{cases} \quad (5.7)$$

где  $d$  — период структуры. Подставляя (5.7) в (5.6), получаем систему уравнений для определения энергетического спектра

$$(E - E_0)\psi_K = \begin{pmatrix} 0 & t_1 + t_2e^{iKd} \\ t_1 + t_2e^{-iKd} & 0 \end{pmatrix} \psi_K, \quad \psi_K \equiv \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

откуда находим

$$E - E_0 = \pm|t_1 + t_2e^{iKd}|. \quad (5.9)$$

Спектр (5.9), рассчитанный для  $t_2/t_1 = 3/2$ , представлен на рис. 5.2(а). В центре спектра присутствует запрещённая зона шириной  $|t_1 - t_2|$ . Наличие центральной

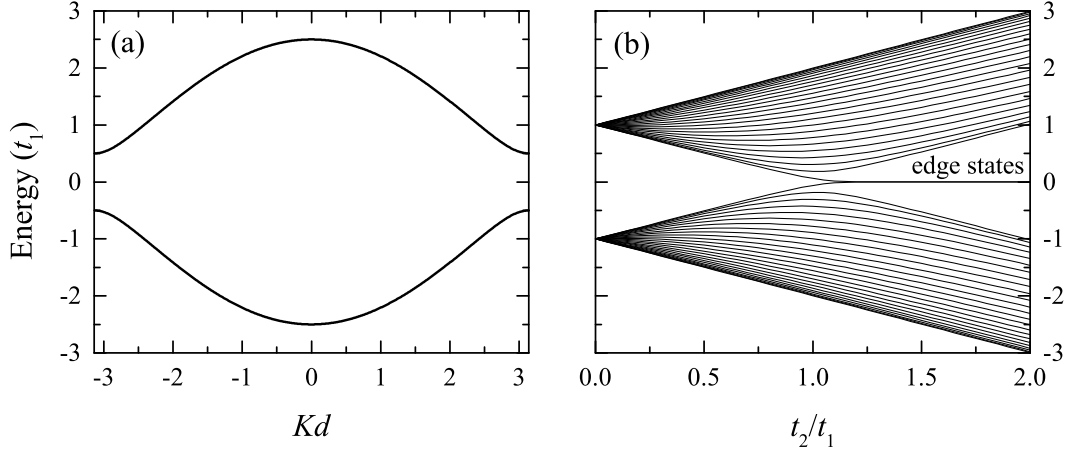


Рис. 5.2: (a) Спектр  $E(K)$  состояний в модели Су-Шриффера-Хигера для  $t_2 = 1.5t_1$ ,  $E_0 = 0$ . (b) Спектр состояний в модели Су-Шриффера-Хигера в зависимости от соотношения  $t_2/t_1$  для цепочки из  $N = 50$  узлов.

запрещённой зоны является качественным отличием бинарной решётки с  $t_1 \neq t_2$  и двумя атомами в элементарной ячейке от простой решётки с  $t_1 = t_2$ . Как будет показано далее, в этой запрещённой зоне могут беспороговым образом возникать краевые состояния.

Действительно, на рис. 5.2(b) представлена численно рассчитанная зависимость энергетического спектра конечной цепочки из  $N = 50$  узлов от соотношения  $t_2/t_1$ . В предельном случае  $t_2 = 0$  цепочка  $A-A=\dots A-A=A-A$  разбивается на набор независимых пар узлов  $A-A$ ,  $A-A$ ,  $A-A$  и собственные значения (5.9) сводятся к  $E = E_0 \pm t_1$ . В противоположном предельном случае  $t_2 \gg t_1$  связями  $t_1$  можно пренебречь, и вместо  $A-A=\dots A-A=A-A$  получаем  $A$ ,  $A=A$ ,  $\dots$   $A=A$ ,  $A$ . При этом первый и последний узлы не связаны с соседями и на них образуются краевые состояния с энергией  $E = E_0$ , лежащие в центре спектра. Более того, как видно из рис. 5.2(b), краевые состояния при  $E = E_0$  возникают не только в пределе  $|t_2/t_1| \rightarrow \infty$ , но и при любом соотношении  $|t_2/t_1|$ , по модулю большем единицы. Для доказательства этого утверждения заметим, что собственный вектор

уравнения (5.6) с  $E = E_0$  имеет вид

$$\psi_{2k+1} = \left(-\frac{t_1}{t_2}\right)^k, \quad \psi_{2k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.10)$$

и соответствует краевому состоянию при  $|t_2| > |t_1|$ . Топологическая природа краевых состояний в модели Су-Шриффера-Хигера связывается с т.н. *фазой Зака* [359]

$$\gamma = i \int_{-\pi}^{\pi} \psi_K^\dagger \frac{\partial \psi_K}{\partial K} dK = \begin{cases} 0 & |t_1| > |t_2|, \\ -\pi & |t_1| < |t_2|, \end{cases}$$

определяемой интегралом от блоховских функций (5.8) по зоне Бриллюэна. Отметим, что в отличие от *фазы Берри*, определённой для двумерных систем [360], фаза Зака в одномерных системах не является калибровочно-инвариантной величиной и её величина зависит от выбора элементарной ячейки ( $A-A$  или  $A=A$ ). Физически это приводит к тому, что при  $|t_1| < |t_2|$  краевые состояния будут присутствовать, если цепочка начинается со связи “-” ( $A-A=A-\dots$ ) и отсутствовать, если она начинается со связи “=” ( $A=A-A=A-\dots$ ). Поэтому, хотя краевые состояния в модели Су-Шриффера-Хигера в современной литературе принято называть простейшей реализацией топологических краевых состояний [337, 338, 361], строго говоря они не являются топологическими в том же смысле, что и краевые состояния в двумерных топологических изоляторах.

## 5.2 Краевые состояния в цепочках наночастиц

В настоящем разделе представлена аналитическая теория краевых состояний в цепочках резонансных наночастиц в форме зигзага, развитая в работах [A23, A24]. Структура схематически изображена на рис. 5.3. Она представляет собой набор одинаковых дисков или сфер, лежащих в плоскости  $xy$ , так что векторы расстояния между центрами  $\mathbf{r}_j$  соседних частиц принимают по очереди одно из двух значений,

$$\mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j = \begin{cases} a(-\sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{x}}) & (j = 1, 2, 3, \dots), \\ a \hat{\mathbf{x}} & (j = 2, 4, 6, \dots), \end{cases} \quad (5.11)$$

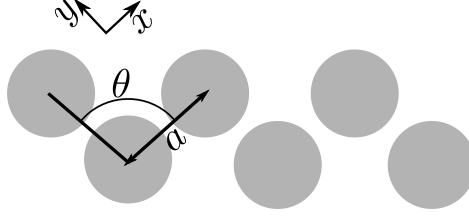


Рис. 5.3: Схематическое изображение зигзага резонансных наночастиц

где  $\theta$  — угол между соседними связями. В зависимости от типа наночастиц, диэлектрических или металлических, они поддерживают резонансы Ми или плазмонные резонансы. Резонансы отдельных частиц характеризуются типом (электрическим или магнитным) и поляризацией. Взаимодействие между частицами приводит к гибридизации резонансов и образованию коллективных мод. Построим теорию гибридизации мод, преобразующихся при поворотах в плоскости  $xy$  как компоненты вектора  $x$  и  $y$ . В их роли могут выступать  $x$ - или  $y$ - поляризованные дипольные моды, а также  $xz$ - и  $yz$ - поляризованные квадрупольные моды как электрического, так и магнитного типа. Взаимодействием между резонансами различных типов (дипольных с квадрупольными, электрических с магнитными) пренебрежём, считая, что они расстроены достаточно далеко по энергии. Поскольку структура обладает горизонтальной плоскостью отражения, моды, поляризованные в плоскости  $xy$  и параллельно оси  $z$  не смешиваются друг с другом. Тогда уравнения на собственные частоты  $\omega$  связанных мод принимают вид

$$\begin{aligned} \omega \mathbf{p}_j &= \omega_0 \mathbf{p}_j + T_1 \mathbf{p}_{j+1} + T_2 \mathbf{p}_{j-1} & (j = 1, 3, 5, \dots), \\ \omega \mathbf{p}_j &= \omega_0 \mathbf{p}_j + T_2 \mathbf{p}_{j+1} + T_1 \mathbf{p}_{j-1} & (j = 2, 4, 6, \dots), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где  $\mathbf{p}_j = (p_{j,x}, p_{j,y})^T$  — векторы-столбцы компонент соответствующих дипольных моментов или квадрупольных моментов  $(p_{j,xz}, p_{j,yz})^T$ , а  $\omega_0$  — резонансная частота собственных мод отдельной наночастицы. Матрицы  $T_1$  и  $T_2$  имеют вид

$$T_1 = \begin{pmatrix} t_{\parallel} \cos^2 \theta + t_{\perp} \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta (t_{\perp} - t_{\parallel}) \\ \sin \theta \cos \theta (t_{\perp} - t_{\parallel}) & t_{\parallel} \sin^2 \theta + t_{\perp} \cos^2 \theta \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} t_{\parallel} & 0 \\ 0 & t_{\perp} \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$



где  $t_{\parallel}$  и  $t_{\perp}$  — константы взаимодействия между модами, поляризованными вдоль и поперёк вектора расстояния между соседними частицами. Взаимодействие учитывается лишь между ближайшими соседями. Излучательными и омическими потерями на данном этапе рассмотрения пренебрегается. Структура уравнений (5.12) аналогична уравнениям модели Су-Шриффера-Хигера (5.6). В отличие от скалярной модели (5.6), уравнения (5.12) содержат дополнительную степень свободы — поляризацию собственных мод, причём константы взаимодействия  $t_{\parallel}$  и  $t_{\perp}$  зависят от поляризации. В частности, если дипольную поляризуемость одной наночастицы в спектральной окрестности резонанса представить в виде  $\alpha = f/(\omega_0 - \omega)$ , имеем  $t_{\parallel} = -2f/a^3$ ,  $t_{\perp} = f/a^3$ . Для взаимодействующих квадрупольных резонансов константы  $t$  ведут себя с расстоянием между частицами как  $1/a^5$  и соотносятся как  $t_{\parallel}/t_{\perp} = -4$ . Аналогичные уравнения описывают гибридизацию собственных мод туннельно-связанных оптических резонаторов в форме микроколонн, в этом случае константы взаимодействия  $t$  затухают с расстоянием экспоненциально, а их соотношение близко к единице [362].

Решение задачи начнём с расчёта дисперсии блоховских волн в бесконечном периодическом зигзаге. Будем искать решения в виде

$$\mathbf{p}_j = \begin{cases} \mathbf{p}_1 e^{iK(j-1)/2} & (j = 1, 3, 5 \dots), \\ \mathbf{p}_2 e^{iKj/2} & (j = 2, 4, 5 \dots), \end{cases} \quad (5.14)$$

где  $K \in (-\pi \dots \pi]$  — безразмерный блоховский волновой вектор. Подставляя (5.14) в (5.12) получаем, аналогично (5.8),

$$(\omega - \omega_0) \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}(K) \\ \mathcal{Q}^\dagger(K) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}(K) = T_1 + T_2 e^{-iK}. \quad (5.15)$$

Энергии собственных мод равняются

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= \omega_0 \pm (t_{\parallel} - t_{\perp}) \cos \theta \cos \frac{K}{2} + \sqrt{(t_{\parallel} + t_{\perp})^2 \cos^2 \frac{K}{2} + (t_{\parallel} - t_{\perp})^2 \sin^2 \frac{K}{2} \sin^2 \theta}, \\ \omega_{3,4} &= \omega_0 \pm (t_{\parallel} - t_{\perp}) \cos \theta \cos \frac{K}{2} - \sqrt{(t_{\parallel} + t_{\perp})^2 \cos^2 \frac{K}{2} - (t_{\parallel} - t_{\perp})^2 \sin^2 \frac{K}{2} \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Из уравнений (5.16) видно, что для прямой цепочки (угол связи  $\theta = \pi$ ) продольная и поперечные поляризации оказываются независимыми и частоты мод равняются

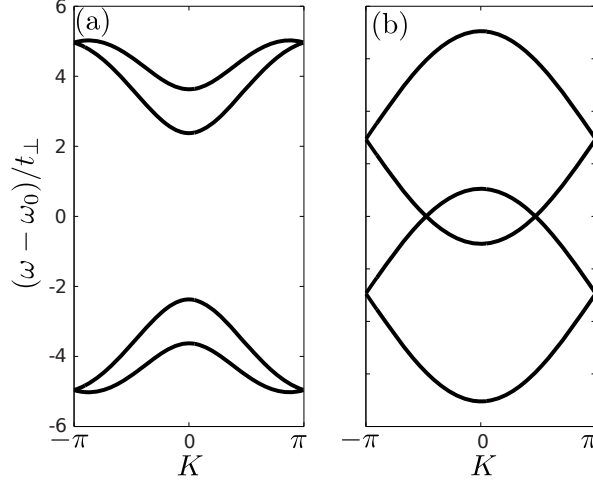


Рис. 5.4: Дисперсия собственных мод периодической решётки резонансных частиц в форме зигзага, рассчитанная согласно выражению (5.16) для  $t_{\parallel}/t_{\perp} = -4$  и (a)  $\theta = 0.45\pi$ , (b)  $\theta = 0.2\pi$ .

$\omega_{1,4} = \omega_0 \pm 2t_{\parallel} \cos(K/2)$ ,  $\omega_{2,3} = \omega_0 \pm 2t_{\perp} \cos(K/2)$ . В общем случае собственные моды обладают смешанной поляризацией. В зависимости от соотношения констант взаимодействия и угла между связями спектр может либо иметь, либо не иметь запрещенную зону вокруг частоты  $\omega_0$ . Критерием наличия запрещённой зоны является неравенство

$$|\cos \theta| < \left| \frac{t_{\parallel} + t_{\perp}}{t_{\parallel} - t_{\perp}} \right|. \quad (5.17)$$

На рис. 5.4 проиллюстрирована дисперсия собственных мод для двух различных углов  $\theta$ , соответствующих наличию [рис. 5.4(a)] и отсутствию [рис. 5.4(b)] запрещённой зоны.

Матрица  $\begin{pmatrix} 0 & Q \\ Q^{\dagger} & 0 \end{pmatrix}$  в правой части (5.15) выполняет роль гамильтониана задачи. Покажем, что из общей структуры этой матрицы можно сделать вывод о топологически нетривиальном спектре системы. Матрица обладает т.н. киральной симметрией и принадлежит к классу симметрии BDI [363]. Это означает, что каждому решению уравнений (5.12), (5.15) на частоте  $\omega$  соответствует решение на частоте  $2\omega_0 - \omega$ , отличающееся знаком компонент  $\mathbf{p}_j$  для всех чётных  $j$ . Таким образом, физически киральная симметрия соответствует инверсии дипольных моментов од-

ной из подрешёток. Отметим, что задача обладает киральной симметрией лишь в приближении взаимодействия между ближайшими соседями. Согласно работам [364], [365], киральная симметрия гарантирует наличие в системе по крайней мере одной пары краевых состояний с энергией  $\omega_0$  если число оборотов  $W$  величины  $\det \mathcal{Q}$  при изменении  $K$  от  $\pi$  до  $-\pi$  отлично от нуля. Число оборотов характеризует топологические свойства задачи и формально определяется как [363, 365]

$$W = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dK \frac{d \ln \det \mathcal{Q}(K)}{dK} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} d \arg \det \mathcal{Q}, \quad (5.18)$$

где за  $\mathcal{C}$  обозначен контур, описываемый  $\det \mathcal{Q}$  при изменении  $K$  по зоне Бриллюэна. Определитель  $\det \mathcal{Q}$  в явном виде равняется

$$\det \mathcal{Q} = e^{-iK} [(t_{\parallel} + t_{\perp})^2 \cos^2 \frac{K}{2} + (t_{\parallel} - t_{\perp})^2 (\sin^2 \frac{K}{2} - \cos^2 \theta)]. \quad (5.19)$$

Таким образом, при выполнении неравенства (5.17), выражение в квадратных скобках не обращается в ноль и  $\det \mathcal{Q}$  совершает ровно один оборот вокруг нуля [рис. 5.5(a)],  $W = 1$ . В противоположном случае система не обладает запрещённой зоной вокруг  $\omega_0$ , и, следовательно, краевыми состояниями. Формально получаем, что величина  $\det \mathcal{Q}$  проходит два раза точно через точку  $\det \mathcal{Q} = 0$  [см. рис. 5.5(b)]. Таким образом, чётность  $P$  числа оборотов  $W$  меняется и равняется нулю. Зависимость чётности числа оборотов от угла связи  $\theta$  показана на рис. 5.6(b). Она равняется единице при наличии в спектре щели и играет роль топологического индекса  $Z_2$  для рассматриваемой структуры [366].

Рассчитанный спектр собственных частот для конечной цепочки из  $N = 60$  частиц показан на рис. 5.6(a) в зависимости от угла между связями  $\theta$ . Угол  $\theta = \pi$  соответствует прямой линии, а угол  $\theta = 0$  — зигзагу, сложенному наподобие гармошки (отметим, что при  $\theta \leq \pi/3$  приближение ближайших соседей перестаёт быть обоснованным, т.к. расстояние между вторыми соседями  $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j+2}|$  становится меньше, чем расстояние  $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j+1}|$  между первыми). В согласии с приведённым выше анализом топологической структуры задачи, в области значений угла между связями (5.17), когда в спектре имеется щель, в структуре присутствуют два

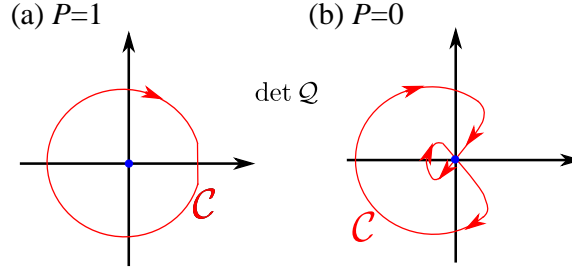


Рис. 5.5: Схематическая иллюстрация формы контура  $\mathcal{C}$  в комплексной плоскости, описываемого величиной  $\det \mathcal{Q}$  при изменении  $K$  от  $-\pi$  до  $\pi$ . Случаи (а) и (б) соответствуют выполнению и нарушению неравенства (5.17), соответственно.

краевых состояний, локализованные на левом и правом краях. Частоты состояний совпадают с резонансом одиночной частицы  $\omega_0$ .

Для демонстрации устойчивости краевых состояний к беспорядку был выполнен расчёт с учётом разброса величин  $t_{\parallel}$ ,  $t_{\perp}$  и угла между связями  $\theta$  в цепочке. Для каждого среднего значения угла связи  $\bar{\theta}$  и одной заданной реализации беспорядка было численно решено уравнение на собственные значения (5.12). Считалось, что константы взаимодействия являются независимыми и имеют гауссово распределение с дисперсией  $\delta t$ . Углы связи были независимо и однородно распределены в интервале  $\bar{\theta} - \delta\theta \dots \bar{\theta} + \delta\theta$ . Результат расчёта показан на рис. 5.7 и демонстрирует, что краевые состояния в области углов связи  $\bar{\theta}$  вокруг  $\pi/2$  сохраняются и при наличии беспорядка.

Природа краевых состояний может быть проще всего проанализирована для случая  $\theta = \pi/2$ . В этом случае матрицы  $T_{1,2}$  (5.13) являются диагональными,  $T_1 = \text{diag}(t_{\perp}, t_{\parallel})$  и  $T_2 = \text{diag}(t_{\parallel}, t_{\perp})$ . Задача о нахождении собственных мод разделяется на две независимых задачи для  $x$ - и  $y$ - поляризованных мод, каждая из которых в точности сводится к скалярной модели Су-Шриффера-Хигера (5.6) с константами  $t_{1,x} = t_{\perp}$ ,  $t_{2,x} = t_{\parallel}$  и  $t_{2,y} = t_{\perp}$ ,  $t_{1,y} = t_{\parallel}$ , соответственно. Условие  $|t_2/t_1| > 1$  наличия состояний на краю всегда выполняется для одной из поляризаций, если только константы  $|t_{\perp}|$  и  $|t_{\parallel}|$  не равняются друг другу. Таким образом, краевые состояния в зигзаге частиц присутствуют благодаря поляризационной зависимости взаимодействия между мультипольными модами. Состояния на краю существуют

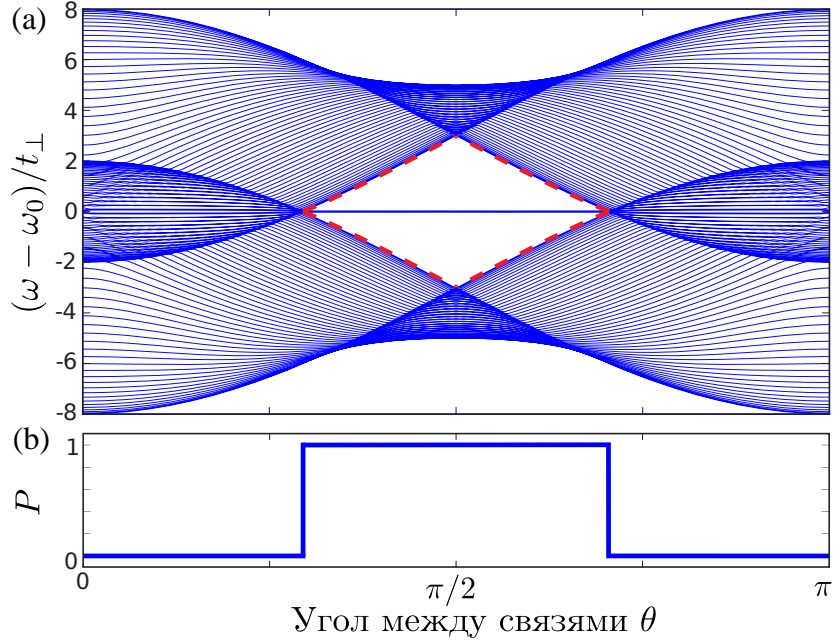


Рис. 5.6: Энергетический спектр и чётность числа оборотов  $P \equiv W \bmod 2$  в зависимости от угла между связями в зигзаге  $\theta$ . Красная пунктирная линия отмечает область, в которой формируются краевые состояния. Рассчитано для  $N = 60$  частиц при  $t_{\parallel}/t_{\perp} = -4$ .

независимо от того, какая связь является первой, а какая — последней. Это отличает рассматриваемую задачу от скалярной модели Су-Шриффера-Хигера, и свидетельствует о подлинно топологической природе краевых состояний. Интересно, что уравнения связанных диполей в зигзаге с  $\theta = 90^\circ$  формально полностью аналогичны уравнениям модели Китаева, описывающим одночастичные боголюбовские возбуждения в квантовой проволоке на поверхности сверхпроводника [367, 368]. При этом электронным и дырочным степеням свободы соответствуют две поляризационные степени свободы  $x$  и  $y$ . Поэтому существует математическая аналогия между краевыми состояниями в модели Китаева — майорановскими квазичастицами — и краевыми состояниями в зигзаге. Разумеется, рассматриваемые краевые состояния являются полностью классическими. Отметим, что для чётного числа  $N$  элементов в цепочке поляризация состояний на левом и правом краю совпадает, а для нечётного — поляризации ортогональны друг другу. Поэтому цепочки с нечётным числом элементов более предпочтительны для оптических эксперимен-

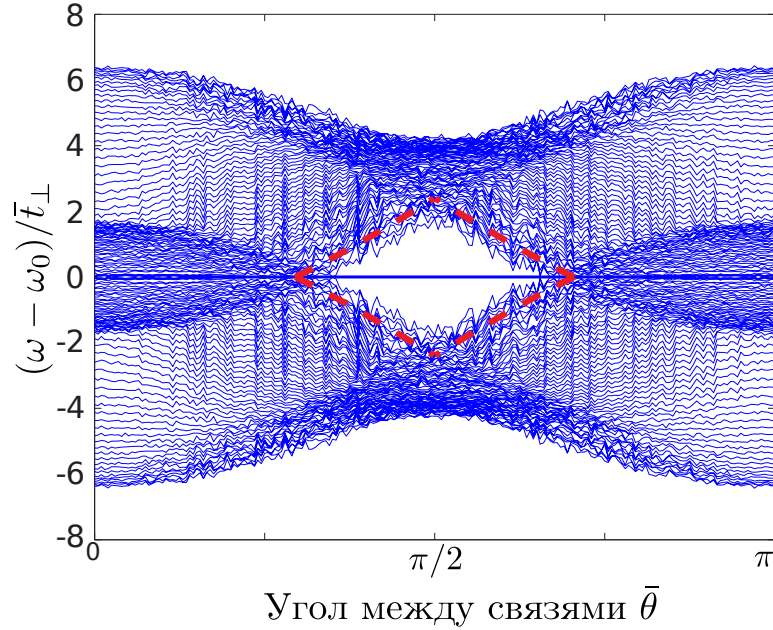


Рис. 5.7: Энергетический спектр в разупорядоченном зигзаге в зависимости от среднего угла между связями  $\bar{\theta}$ . Красная пунктирная линия отмечает область, в которой формируются краевые состояния в упорядоченной структуре. Расчёт выполнен при следующих значениях параметров:  $\bar{t}_\parallel / \bar{t}_\perp = -1$ ,  $\delta t = 0.1 \bar{t}_\perp$ ,  $\delta \theta = 0.1 \pi$ ,  $N = 60$ .

тов. Как будет показано в следующем разделе 5.3, для цепочек из нечётного числа частиц в зависимости от поляризации падающей плоской волны можно селективно возбуждать краевые состояния на левом и правом краях.

### 5.3 Ближнеполевая спектроскопия краевых состояний

В предыдущем разделе в рамках модели связанных мультипольных мод с взаимодействием между ближайшими соседями было продемонстрировано образование топологических краевых состояний в цепочке резонансных наночастиц в форме зигзага. Эта модель имеет ряд ограничений: (а) пренебрежение потерями на излучение и омическим потерями, (б) учёт лишь взаимодействия между ближайшими соседями, (в) учёт лишь двух вырожденных мультипольных мод в каждой частице. Далее будет показано, что, несмотря на эти упрощения, основные предсказания

модели согласуются с экспериментом и численным расчётом, и, таким образом, справедливы для реалистичных структур. В разделе 5.3.1 представлены результаты ближнеполевой спектроскопии краевых состояний в структуре с золотыми нанодисками 5.3.1, полученные в работе [A25], а раздел 5.3.2 посвящён структуре с кремниевыми нанодисками.

### 5.3.1 Металлические нанодиски

С целью экспериментальной демонстрации краевых состояний И.С. Мухиным в Университете ИТМО методом электронно-лучевой литографии был изготовлен образец из семи золотых нанодисков на стеклянной подложке. Диски имели диаметр 250 нм и высоту около 40 нм, расстояние между краями соседних дисков равнялось 40 нм, см. изображение сканирующей электронной микроскопии на вставке в рис. 5.8.

Структура освещалась со стороны подложки слабо сфокусированным линейно поляризованным лазерным лучом, как показано на рис. 5.8. Длина волны возбуждения пошагово перестраивалась вокруг плазмонного резонанса одиночного

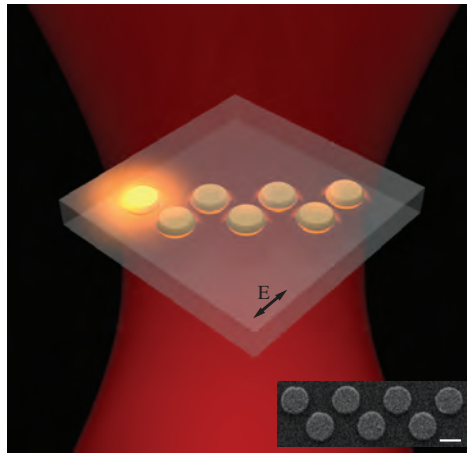


Рис. 5.8: Схематическая иллюстрация возбуждения краевых состояний в зигзагообразной цепочке с нечётным числом плазмонных нанодисков, возбуждаемой линейно поляризованным светом (направление поляризации показано стрелкой). На вставке показан снимок экспериментального образца в сканирующем электронном микроскопе (SEM), риска соответствует отрезку в 200 нм.

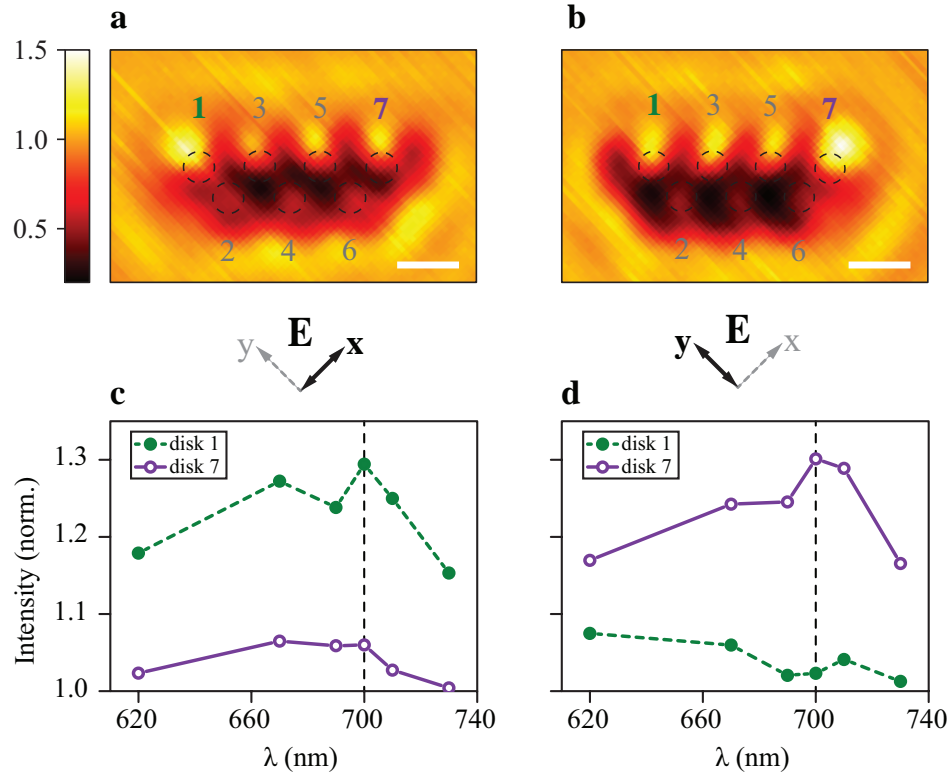


Рис. 5.9: (a,b). Карты ближнего поля плазмонных мод, измеренные на высоте 100 нм над подложкой при возбуждении на длине волны 700 нм с  $x$ - (a) и  $y$ - (b) поляризацией. Масштабная риска соответствует длине 500 нм. (c,d), Зависимость интенсивности горячих пятен, соответствующих первому и последнему дискам, от длины волны возбуждения для  $x$ - (c) и  $y$ - (d) поляризованного возбуждения.

диска. Карты возбуждаемых плазмонных мод измерялись с помощью апертурного ближнепольного сканирующего оптического микроскопа (near field scanning optical microscope, NSOM) для различных поляризаций возбуждения. Изменение длины волны возбуждения в видимой спектральной области осуществлялось с помощью источника суперконтинуума (Fianium WhiteLase SC400-6), скомбинированного с перестраиваемым фильтром (Fianium SuperChrome<sup>TM</sup>), и дающего на выходе луч со спектральной шириной около 10 нм. После фильтра луч поляризовался призмой Глана-Тейлора и фокусировался на поверхности образца в пятно диаметром 15 мкм. Ближнепольный сигнал собирался заостренным волоконно-оптическим зондом, покрытым алюминием, с диаметром апертуры 150 нм. Процесс сканирования выполнялся при постоянной высоте зонда над поверхностью подложки



$h = 100$  нм. Эксперимент выполнялся И.С. Синёвым в Университете ИТМО.

Рисунок 5.9 представляет основной экспериментальный результат: карты ближнего поля на длине волны возбуждения  $\lambda = 700$  нм. В ближнем поле видны горячие пятна на краях структуры, положение которых зависит от поляризации падающей волны. Этот результат находится в согласии с предсказанием аналитической модели в разделе 5.2, предсказывающей образование  $x$ - и  $y$ -поляризованных мод, локализованных на противоположных краях структуры с нечётным числом дисков. В ближнепольном эксперименте горячие пятна смещены относительно центров дисков, положение которых отмечено соответствующими цифрами, а область самих дисков оказывается тёмной.

Переключаясь между двумя ортогональными поляризациями падающей волны можно возбуждать либо левый край структуры [диск №1 на рис. 5.9(а)], либо правый край [диск №7 на рис. 5.9(б)]. Эффект носит резонансный характер, что продемонстрировано на рис. 5.9(с,д). Линиями отмечена спектральная зависимость сигнала, полученного с дисков №1 и №7, нормированная на средний сигнал с двух центральных дисков (№3 и №5) в верхнем ряду цепочки. Абсолютная интенсивность сигнала для каждого диска была получена интегрированием ближнеполевого сигнала по области соответствующего горячего пятна. Выраженные спектральные максимумы для дисков №1 и №7 при  $x$ - и  $y$ -поляризованном возбуждении, соответственно, находятся в согласии с аналитической моделью, которая предсказывает краевые состояния на частоте резонанса одиночного диска, см. рис. 5.6.

С целью более детального анализа экспериментальных результатов был выполнен численный расчёт электромагнитной задачи, основные результаты которого приведены на рис. 5.10. Расчёт выполнялся А.С. Слобожанюком с помощью программного пакета CST Microwave Studio® 2014 в рамках метода конечных элементов в частотной области. Моделирование сигналов ближнего поля, в особенности для апертурного микроскопа и плазмонных структур, представляет собой техни-

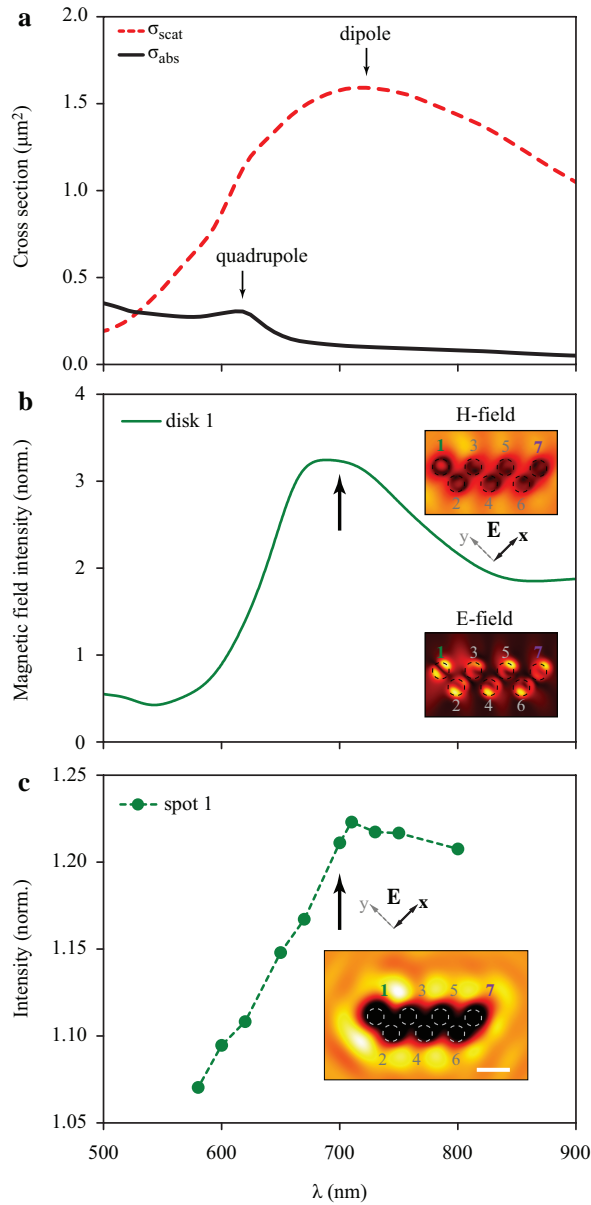


Рис. 5.10: Численный расчёт для зигзага из золотых нанодисков. (а) Рассчитанные сечения поглощения ( $\sigma_{\text{abs}}$ ) и рассеяния ( $\sigma_{\text{scat}}$ ) для  $y$ -поляризованного возбуждения структуры, лежащей в вакууме. Вертикальными стрелками отмечены положения дипольных и квадрупольных резонансов. (б) Спектральная зависимость нормированной интенсивности магнитного поля на высоте 50 нм над поверхностью диска №1, иллюстрирующая возбуждение краевого состояния. На вставке показаны двумерные карты интенсивности ближних магнитных и электрических полей на высоте 50 нм над поверхностью диска №1. (с) Спектральная зависимость относительной интенсивности горячего пятна, соответствующая диску №1 в реконструированных картах ближнего поля. На вставке показана реконструированная карта ближнего поля на длине волны 700 нм, масштабная риска соответствует длине 500 нм.

чески сложную задачу, не окончательно решённую на настоящий момент. Сигнал, собираемый зондом, зависит от распределений как магнитного, так и электрического полей [369], а также от формы и материала зонда и взаимодействия зонда с подложкой, которое для плазмонных структур является существенным [370, 371].

На рисунке 5.10(а) представлены рассчитанные сечения поглощения и рассеяния структуры, лежащей в свободном пространстве. Основной резонанс в спектре рассеяния на длине волны  $\lambda \approx 700$  нм имеет электродипольный характер. Резонанс сильно уширен из-за потерь на излучение. С другой стороны, в спектре поглощения проявляется резкая резонансная особенность на длине волны  $\lambda \approx 600$  нм, соответствующая резонансу квадрупольного типа. Для одиночного диска этот резонанс дважды вырожден по поляризации ( $x^2 - y^2$  и  $2xy$ ) и соответствует модулю углового момента  $|m| = 2$ . При нормальном падении такой квадрупольный резонанс не может возбуждаться в одиночном диске, поскольку компоненты электрического поля  $E_x$ ,  $E_y$  квадрупольной моды нечётны относительно отражения в плоскостях  $x = 0$ ,  $y = 0$ , в отличие от поля падающей волны. Для цепочки дисков симметрия ниже, чем для одиночного диска. Квадрупольные моды в цепочке могут смешиваться с  $x$ - и  $y$ - поляризованными электродипольными модами и становиться оптически активным. Хотя квадрупольный резонанс не проявляется в спектрах рассеяния в дальнем поле, он является существенным для поглощения и при ближнеполевых измерениях. Из анализа спектральных зависимостей сечений заключаем, что оптические моды, резонансно возбуждаемые на рис. 5.9 на длине волны 700 нм имеют в основном электродипольный характер, с возможным подмешиванием квадрупольной моды.

В ближнеполюном эксперименте на оптические свойства структуры влияют также подложка и зонд. Они могут приводить к локальному изменению диэлектрической проницаемости, сдвигу резонансов, и изменению их относительной силы. Для учёта этих факторов численная модель была дополнена подложкой с показателем преломления 1.5. Зонд моделировался идеально проводящим (perfectly

conducting, PEC) слоем на высоте 100 нм над подложкой. Рассчитанные карты магнитного и электрического поля под PEC слоем на длине волны  $\lambda = 700$  нм показаны на вставке в рис. 5.10(b). Зелёной кривой на рис. 5.10(b) показана интенсивность магнитного поля на высоте 50 нм над центром диска №1, нормированная на среднюю интенсивность магнитного поля над дисками №3 и №5. Расчёт демонстрирует, что краевые состояния проявляются наиболее ярко в картах ближнего магнитного поля, при этом им соответствуют резонансно возбуждаемые горячие пятна над центрами дисков.

Для численной реконструкции измеренного сигнала рассчитанное распределение ближнего электромагнитного поля было свёрнуто с функцией отклика зонда согласно методу, изложенному в работе [372]. Полученная таким образом карта на длине волны  $\lambda = 700$  нм показана на вставке в рис. 5.10(c). Выполненный расчёт позволил объяснить наблюдаемое в эксперименте на рис. 5.9(a,b) образование тёмных пятен над центрами дисков, см. также работы [370, 371]. Тем не менее, видно отличие экспериментальных и реконструированных карт ближнего поля, заключающееся в другом положении горячих пятен относительно центра дисков. Рассогласование может быть связано с относительной простотой использованной модели зонда, не учитывающей его конечный размер, особенности его формы, возможное возбуждение поверхностных волн на поверхности зонда и т.д. К сожалению, численный расчёт всей структуры с учётом реальной формы зонда оказывается на настоящем этапе слишком трудоёмким.

Кривая на рис. 5.10(c) демонстрирует спектральную зависимость сигнала, полученного с диска №1, нормированного на средний сигнал с двух центральных дисков (№3 и №5) для  $x$ -поляризованного возбуждения. Точно так же, как и для экспериментальных кривых на рис. 5.9(c),(d), абсолютная интенсивность сигнала для каждого диска была получена интегрированием ближнеполевого сигнала по области горячего пятна. И экспериментальные [рис. 5.9(c,d)], и расчётные [рис. 5.10(c)] кривые следуют спектральной зависимости интенсивности магнит-

ного поля, показанной на рис. 5.10(b). Таким образом, анализ спектральных и поляризационных зависимостей интенсивностей горячих пятен, наблюдаемых в экспериментальных и численно реконструированных картах ближнего поля, согласуется с моделью возбуждения краевых состояний.

### 5.3.2 Диэлектрические нанодиски

Далее представлены экспериментальные результаты по спектроскопии образца с кремниевыми нанодисками. В отличие от металлических дисков, в которых основной оптический резонанс имеет электродипольный характер, основной резонанс в кремниевых дисках является магнитодипольным [373]. Образец был изготовлен в группе А.И. Кузнецова в Институте хранения данных (Сингапур) и состоял из девяти касающихся кремниевых дисков диаметром 350 нм с высотой 165 нм, находящихся на стеклянной подложке [374]. Снимок образца в сканирующем электронном микроскопе представлен на рис. 5.11(a). Эксперимент по ближнепольной сканирующей микроскопии образца выполнялся И.С. Синёвым в Университете ИТМО. Схема эксперимента аналогична представленной в предыдущем разделе 5.3.1 для металлических нанодисков.

Результаты ближнепольной микроскопии со спектральным и поляризационным разрешением приведены на рис. 5.11. В согласии с предсказаниями теории, наблюдается резонансное возбуждение горячих пятен на краях структуры, см. стрелки на рис. 5.11(b,c). При этом при  $y$ -поляризации электрического поля возбуждается пятно на первом диске, а при  $x$ -поляризации — на последнем. Такая поляризационная зависимость противоположна наблюдаемой для золотых нанодисков на рис. 5.9. Наблюдаемый в кремниевых нанодисках резонанс носит магнитодипольный характер и определяется направлением магнитного поля, поляризованным под углом  $90^\circ$  к электрическому. Из сравнения рис. 5.11(b,c) и рис. 5.9 видно, что горячие пятна для электродипольного резонанса смещены относительно центров металлических дисков, а для магнитодипольного — расположены над центрами диэлектрических дисков. Возможным объяснением может быть то, что для

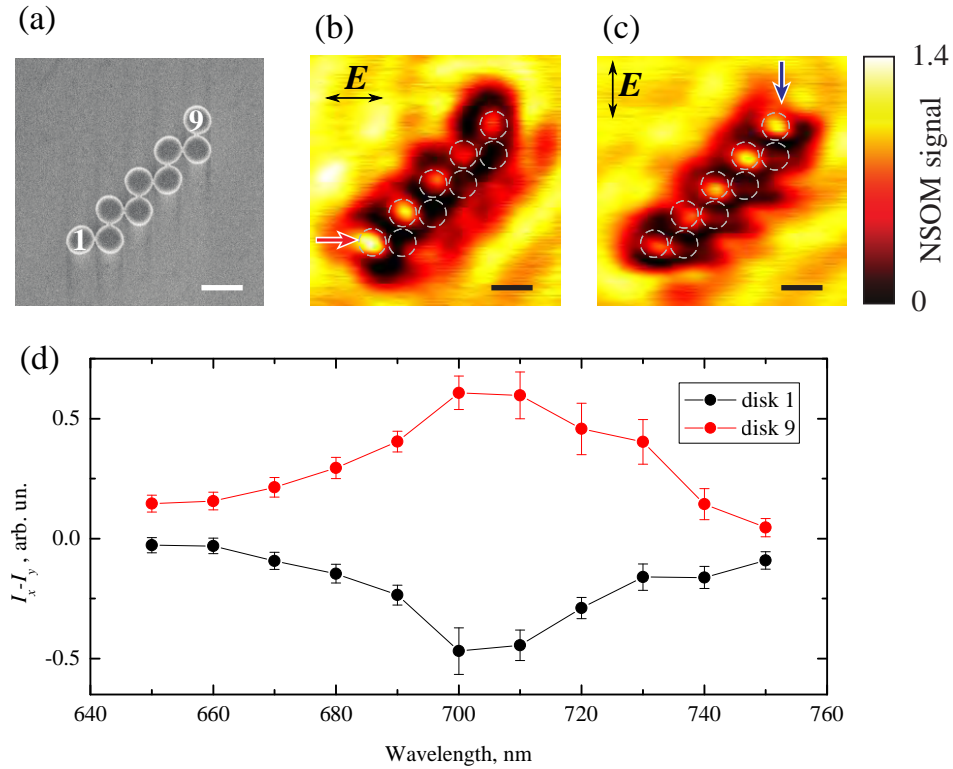


Рис. 5.11: (a) Снимок образца из кремниевых нанодисков в сканирующем электронном микроскопе. (b,c) Картины ближнего поля на длине волны 710 нм, полученные для возбуждения в  $y$ - (b) и  $x$ - (c) поляризации. Стрелками обозначены горячие пятна, соответствующие возбуждению краевых состояний. (d) Экспериментальные зависимости разности интенсивностей сигнала ближнего поля над крайними дисками №1 и №9 для двух линейных поляризаций. Номера дисков отмечены на панели (a), стрелками на панелях (b) и (c) отмечены горячие пятна в сигнале в ближнем поле. Масштабная риска соответствует длине 500 нм.

диэлектрической структуры апертурный зонд слабее искажает локальные электромагнитные поля, чем для металлической. Резонансный характер возбуждения горячих пятен на краях зигзага подтверждается спектральными зависимостями интенсивности сигнала на крайних дисках, приведёнными на рис. 5.11(d). Максимум сигнала достигается в спектральном диапазоне 680 нм–730 нм, соответствующем расчётному положению магнито-дипольного резонанса одиночного кремниевого диска.

## 5.4 Краткие итоги

В Главе 5 получены следующие основные результаты:

- В рамках модели взаимодействия ближайших соседей аналитически рассчитана зонная структура зигзагообразной цепочки наночастиц с плазмонными резонансами или резонансами Ми в зависимости от угла между связями. Введён топологический индекс и продемонстрировано, что в определённой области углов структура является топологически нетривиальной.
- Предсказано возникновение пар поляризационно-вырожденных краевых состояний в структуре. Численно продемонстрирована устойчивость краевых состояний к беспорядку.
- Краевые состояния могут регистрироваться по зависимости пространственного распределения ближнего электромагнитного поля от частоты и поляризации возбуждающей плоской волны.
- Предсказания теории находятся в согласии с экспериментами по ближнеполевой спектроскопии образцов из металлических и диэлектрических нанодисков.

# Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Построена теория рассеяния экситонных поляритонов на акустических фонах со сложным спектром в структурах с квантовыми ямами. Показано, что для описания экспериментов по рассеянию в короткопериодных полупроводниковых сверхрешётках необходимо учитывать экситон-поляритонный эффект. Из сопоставления с экспериментом определены скорость излучательного затухания квазидвумерных экситонов, температурная зависимость скорости безызлучательного затухания и спектральная зависимость коэффициента фотоупругости.
2. Предложен новый класс фотонных квазикристаллов — резонансные брэгговские структуры Фибоначчи с квантовыми ямами. В их спектрах отражения на частоте экситона проявляется структурированный провал, отсутствующий в периодических структурах. В оптических спектрах структур Фибоначчи выявлены два режима: сверхизлучательный ( $\lesssim 100$  ям при типичных параметрах структур) и квазикристаллический ( $\gtrsim 100$  ям).
3. Развита теория поляризационно-зависимого пропускания света резонансными двумерными фотонными квазикристаллами. Аналитически объяснена угловая зависимость циркулярного дихроизма пропускания, экспериментально наблюдаемая для регулярной двумерной решётки и мозаики Пенроуза, составленных из плазмонных дисков.



4. Построена теория локализации света в одномерных фотонных кристаллах со случайной диэлектрической проницаемостью каждого второго слоя. Показано, что с усилением беспорядка спектры коэффициента экстинкции вблизи брэгговских частот испытывают асимметричную трансформацию, описываемую формулой Фано.
5. Построена теория спонтанного излучения в гиперболических средах и метаматериалах. Получены аналитические выражения для фактора Парселла в метаматериалах на основе массивов металлических проводов и наночастиц. Установлено, что максимальное значение фактора Парселла достигается на границе между эллиптическим и гиперболическим режимами.
6. Исследовано влияние эффектов локального поля на фактор Парселла в метаматериалах. Показано, что фактор Парселла сильно зависит от поляризации и положения источника излучения внутри элементарной ячейки метаматериала.
7. Построена теория фёрстеровского переноса возбуждений между периодическими массивами локализованных доноров и акцепторов, расположенных вблизи металлического зеркала. Показано, что эффективность переноса и влияние зеркала на перенос определяются свойствами коллективных экситон-поляритонных мод.
8. Предсказано возникновение пар поляризационно-вырожденных краевых состояний в зигзагообразной цепочке наночастиц с плазмонными резонансами или резонансами Ми. Установлен топологический характер краевых состояний. Показано, что эти состояния могут идентифицироваться по зависимости пространственного распределения ближнего электромагнитного поля от частоты и поляризации возбуждающей плоской волны.

Основные результаты диссертационной работы изложены в публикациях:

- [A1] A.N. Poddubny, A.V. Poshakinskiy, B. Jusserand, and A. Lemaître, Resonant Brillouin scattering of excitonic polaritons in multiple-quantum-well structures// Phys. Rev. B **89**, 235313 (2014).
- [A2] B. Jusserand, A. Poddubny, A. Poshakinskiy, A. Fainstein and A. Lemaître, Polariton resonances for ultra-strong coupling cavity optomechanics in GaAs/AlAs multiple quantum wells// Phys. Rev. Lett. **115**, 267402 (2015).
- [A3] Е.Л. Ивченко, А.Н. Поддубный, Резонансная дифракция электромагнитных волн на твердом теле (Обзор)// ФТТ **55**, 833 (2013).
- [A4] A.N. Poddubny and E.L. Ivchenko, Photonic quasicrystalline and aperiodic structures// Physica E **42**, 1871 (2010).
- [A5] A.N. Poddubny and E.L. Ivchenko, Quasicrystalline photonic structures: Between order and disorder// гл. в книге Optical Properties of Photonic Structures: Interplay of Order and Disorder, ред. M.F. Limonov and R.M. De La Rue, CRC Press, Boca Raton (2012).
- [A6] A.N. Poddubny, L. Pilozzi, M.M. Voronov, and E.L. Ivchenko, Resonant Fibonacci quantum well structures in one dimension// Phys. Rev. B **77**, 113306 (2008).
- [A7] A.N. Poddubny, L. Pilozzi, M.M. Voronov, and E.L. Ivchenko, Exciton-polaritonic quasicrystalline and aperiodic structures// Phys. Rev. B **80**, 115314 (2009).
- [A8] J. Hendrickson, B.C. Richards, J. Sweet, G. Khitrova, A.N. Poddubny, E.L. Ivchenko, M. Wegener, and H.M. Gibbs, Excitonic polaritons in Fibonacci quasicrystals// Opt. Express **16**, 15382 (2008).
- [A9] M. Werchner, M. Schafer, M. Kira, S.W. Koch, J. Sweet, J.D. Olitzky, J. Hendrickson, B.C. Richards, G. Khitrova, H.M. Gibbs, A.N. Poddubny, E.L. Ivchenko, M. Voronov, M. Wegener, One dimensional resonant Fibonacci quasicrystals:

- noncanonical linear and canonical nonlinear effects// *Opt. Express*, **17**, 6813 (2009).
- [A10] A.N. Poddubny, Wood anomalies in resonant photonic quasicrystals// *Phys. Rev. B* **83**, 075106 (2011).
- [A11] S.S. Kruk, A.N. Poddubny, D.A. Powell, C. Helgert, M. Decker, T. Pertsch, D.N. Neshev, and Yu.S. Kivshar, Polarization properties of optical metasurfaces of different symmetries// *Phys. Rev. B* **91**, 195401 (2015).
- [A12] A.N. Poddubny, M.V. Rybin, M.F. Limonov and Yu.S. Kivshar, Fano interference governs wave transport in disordered systems// *Nat. Commun.* **3**, 914 (2012).
- [A13] A. Poddubny, I. Iorsh, P. Belov and Yu. Kivshar, Hyperbolic metamaterials// *Nature Photon.* **7**, 958 (2013).
- [A14] A.N. Poddubny, P.A. Belov, and Yu.S. Kivshar, Spontaneous radiation of a finite-size dipole emitter in hyperbolic media// *Phys. Rev. A* **84**, 023807 (2011).
- [A15] A.N. Poddubny, P.A. Belov, and Yu.S. Kivshar, Electric and magnetic dipole radiation and Purcell effect in hyperbolic metamaterials// *Proc. of SPIE* **8806**, 88060T-1 (2013).
- [A16] A.N. Poddubny, P.A. Belov, P. Ginzburg, A.V. Zayats, and Yu.S. Kivshar, Microscopic model of Purcell enhancement in hyperbolic metamaterials// *Phys. Rev. B* **86**, 035148 (2012).
- [A17] A.N. Poddubny, Local field corrections to the spontaneous emission in arrays of Si nanocrystals// *J. Opt.* **17**, 035102 (2015).
- [A18] A.N. Poddubny, P.A. Belov, and Yu.S. Kivshar, Purcell effect in wire metamaterials, *Phys. Rev. B* **87**, 035136 (2013).

- [A19] A.V. Chebykin, A.A. Orlov, A.S. Shalin, A.N. Poddubny, and P.A. Belov, Strong Purcell effect in anisotropic  $\varepsilon$ -near-zero metamaterials, *Phys. Rev. B* **91**, 205126 (2015).
- [A20] A.N. Poddubny and A.V. Rodina, Nonradiative and radiative Förster energy transfer between quantum dots // *ЖЭТФ* **149**, 614 (2016).
- [A21] A.N. Poddubny, Collective Förster energy transfer modified by a planar metallic mirror // *Phys. Rev. B* **92**, 155418 (2015).
- [A22] T.U. Tumkur, J.K. Kitur, C.E. Bonner, A.N. Poddubny, E.E. Narimanov and M.A. Noginov, Control of Förster energy transfer in the vicinity of metallic surfaces and hyperbolic metamaterials // *Faraday Discuss.* **178**, 395 (2015).
- [A23] A. Poddubny, A. Miroschnichenko, A. Slobozhanyuk, and Yu. Kivshar, Topological Majorana states in zigzag chains of plasmonic nanoparticles // *ACS Photonics* **1**, 101 (2014).
- [A24] A.P. Slobozhanyuk, A.N. Poddubny, A.E. Miroschnichenko, P.A. Belov, and Yu.S. Kivshar, Subwavelength topological edge states in optically resonant dielectric structures // *Phys. Rev. Lett.* **114**, 123901 (2015).
- [A25] I.S. Sinev, I.S. Mukhin, A.P. Slobozhanyuk, A.N. Poddubny, A.E. Miroschnichenko, A.K. Samusev and Yu.S. Kivshar, Mapping plasmonic topological states at the nanoscale // *Nanoscale* **7**, 11904 (2015).

Я признателен и благодарен своим друзьям и коллегам, внимание и поддержка которых были крайне важны для меня на протяжении выполнения этой работы. Фундаментальную роль для меня сыграла работа под руководством моих учителей Е.Л. Ивченко и И.Н. Ясиевич, а также общение с этими замечательными теоретиками. Крайне важным является сотрудничество с Ю.С. Кившарём и П.А. Беловым. Я глубоко признателен Г. Хитровой, Б. Жюсрану, К. Доналовой, М.Ф. Лимонову, В.В. Чалдышеву, И.С. Синёву и А.К. Самусеву, которые помогли мне оценить красоту и глубину экспериментальной физики. Неценима возможность совместной работы и обсуждения разнообразных вопросов с А.В. Пошакиным, А.П. Слобожанюком, М.А. Горлачом, М.М. Глазовым, М.О. Нестоклоном, С.В. Гупаловым, Н.С. Аверкиевым, А.В. Родиной, С.А. Тарасенко, Л.Е. Голубом, М.В. Дурневым, и другими сотрудниками нашего Сектора в ФТИ и лаборатории “Метаматериалы” университета ИТМО. Крайне ценной была помощь М.М. Глазова и Л.Е. Голуба при оформлении диссертации и сопутствующих документов. Исключительно полезным являлось представление вошедших в диссертацию работ на Низкоразмерном и Чайном семинарах ФТИ, всем участникам которых я очень признателен.

Я благодарен своим родителям, Н.А. Поддубному и Е.М. Голинец, за неоценимую помощь и постоянную поддержку.

# Литература

- [1] Photonic crystals. Molding the flow of light. / J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade. — Princeton University Press, 2008.
- [2] *Климов В. В.* Наноплазмоника. — М.: Физматлит, 2009.
- [3] *Быков В. П.* Спонтанное излучение в периодических структурах // *ЖЭТФ*. — 1972. — Т. 35. — С. 269.
- [4] Polarization control of quantum dot emission by chiral photonic crystal slabs / S. V. Lobanov, T. Weiss, N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev, V. D. Kulakovskii, K. Konishi, M. Kuwata-Gonokami // *Opt. Lett.* — 2015. — Vol. 40, no. 7. — Pp. 1528–1531.
- [5] Disorder-enhanced transport in photonic quasicrystals / L. Levi, M. Rechtsman, B. Freedman, T. Schwartz, O. Manela, M. Segev // *Science*. — 2011. — Vol. 332, no. 6037. — Pp. 1541–1544.
- [6] Spin noise amplification and giant noise in optical microcavity / I. I. Ryzhov, S. V. Poltavtsev, G. G. Kozlov, A. V. Kavokin, P. V. Lagoudakis, V. S. Zapasskii // *J. Appl. Phys.* — 2015. — Vol. 117, no. 22.
- [7] *Veselago V. G., Narimanov E. E.* The left hand of brightness: past, present and future of negative index materials // *Nature Mat.* — 2006. — Vol. 5. — P. 759.
- [8] *Toropov A., Shubina T.* Plasmonic Effects in Metal-Semiconductor

- Nanostructures. Oxford science publications.— Oxford University Press, 2015.
- [9] Оптические наноантенны / А. Е. Краснок, И. С. Максимов, А. И. Денисюк, П. А. Белов, А. Е. Мирошниченко, К. Р. Симовский, Ю. С. Кившарь // *УФН*. — 2013. — Т. 183, № 6. — С. 561–589.
- [10] *Kildishev A. V., Boltasseva A., Shalaev V. M.* Planar photonics with metasurfaces // *Science*. — 2013. — Vol. 339, no. 6125.
- [11] Поверхностные состояния в фотонных кристаллах / А. П. Виноградов, А. В. Дорофеев, А. М. Мерзликин, А. А. Лисянский // *УФН*. — 2010. — Т. 180, № 3. — С. 249–263.
- [12] *Lu L., Joannopoulos J. D., Soljačić M.* Topological photonics // *Nature Photonics*. — 2014. — Vol. 8. — Pp. 821–829.
- [13] Excitons / Ed. by E. Rashba, M. Sturge. — Amsterdam: North-Holland, 1982. — Vol. 2 of *Modern Problems in Condensed Matter Science*.
- [14] *Пекар С. И.* Теория электромагнитных волн в кристаллах, в которых возникают экситоны // *ЖЭТФ*. — 1957. — Т. 33. — С. 1022–1036.
- [15] *Hopfield J. J.* Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals // *Phys. Rev.* — 1958. — Vol. 112. — Pp. 1555–1567.
- [16] *Киселев В. А., Разбирин Б. С., Уральцев И. Н.* Интерференционные состояния светоекситонов. Наблюдение добавочных волн // *Письма в ЖЭТФ*. — 1973. — Т. 18. — С. 504–507.
- [17] *Yu P. Y., Evangelisti F.* Brillouin scattering efficiencies of exciton polaritons and the additional boundary conditions in CdS // *Phys. Rev. Lett.* — 1979. — Vol. 42. — Pp. 1642–1645.

- [18] *Weisbuch C., Ulbrich R.* Light Scattering in Solids III / Ed. by M. Cardona, G. Güntherodt. — Berlin: Springer, 1982. — P. 207.
- [19] *Bendow B., Birman J. L.* Polariton theory of resonance Raman scattering in insulating crystals // *Phys. Rev. B.* — 1970. — Vol. 1. — Pp. 1678–1686.
- [20] *Bendow B.* Polariton Theory of Raman Scattering in Insulating Crystals. II. // *Phys. Rev. B.* — 1970. — Vol. 2. — Pp. 5051–5062.
- [21] *Zeyher R., Ting C.-S., Birman J. L.* Polariton theory of first-order Raman scattering in finite crystals for transparent and absorbing frequency regions // *Phys. Rev. B.* — 1974. — Vol. 10. — Pp. 1725–1740.
- [22] *Matsushita M., Wicksted J., Cummins H. Z.* Resonant Brillouin scattering in CdS. II. Theory // *Phys. Rev. B.* — 1984. — Vol. 29. — Pp. 3362–3381.
- [23] *Matsushita M., Nakayama M.* Theory of resonant light scattering through exciton-polaritons // *Phys. Rev. B.* — 1984. — Vol. 30. — Pp. 2074–2083.
- [24] *Келдыш Л. В., Туходеев С. Г.* Интенсивная поляритонная волна вблизи порога стимулированного рассеяния // *ЖЭТФ.* — 1986. — Т. 90. — С. 1852.
- [25] *Microcavities* / A. Kavokin, J. Baumberg, G. Malpuech, F. Laussy. — Oxford: Clarendon Press, 2006.
- [26] *Fainstein A., Jusserand B., Thierry-Mieg V.* Cavity-polariton mediated resonant Raman scattering // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78. — Pp. 1576–1579.
- [27] *Microcavity exciton-polariton mediated Raman scattering: Experiments and theory* / A. Bruchhausen, L. M. L. Hilario, A. A. Aligia, A. M. Lobos, A. Fainstein, B. Jusserand, R. André // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78. — P. 125326.



- [28] Bragg diffraction of microcavity polaritons by a surface acoustic wave / K. Cho, K. Okumoto, N. I. Nikolaev, A. L. Ivanov // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 94. — P. 226406.
- [29] *Ивченко Е. Л., Несвижский А. И., Йорда С.* Брэгговское отражение света от структур с квантовыми ямами // *ФТТ.* — 1994. — Т. 36. — С. 1156–1161.
- [30] *Andreani L. C.* Polaritons in multiple quantum wells // *Physica Status Solidi B.* — 1995. — Vol. 188. — Pp. 29–42.
- [31] Collective effects of excitons in multiple-quantum-well Bragg and anti-Bragg structures / M. Hübner, J. Kuhl, T. Stroucken, A. Knorr, S. W. Koch, R. Hey, K. Ploog // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 76, no. 22. — Pp. 4199–4202.
- [32] *Ivchenko E. L.* Optical Spectroscopy of Semiconductor Nanostructures. — Harrow, UK: Alpha Science International, 2005.
- [33] Resonant photonic band gap structures realized from molecular-beam-epitaxially grown InGaAs/GaAs Bragg-spaced quantum wells / J. P. Prineas, C. Cao, M. Yildirim, W. Johnston, M. Reddy // *J. Appl. Phys.* — 2006. — Vol. 100, no. 6. — P. 063101.
- [34] Tunable slow light in Bragg-spaced quantum wells / J. P. Prineas, W. J. Johnston, M. Yildirim, J. Zhao, A. L. Smirl // *Appl. Phys. Lett.* — 2006. — Vol. 89, no. 24. — P. 241106.
- [35] Exciton-lattice polaritons in multiple-quantum-well-based photonic crystals / D. Goldberg, L. I. Deych, A. A. Lisyansky, Z. Shi, V. M. Menon, V. Tokranov, M. Yakimov, S. Oktyabrsky // *Nature Photonics.* — 2009. — Vol. 3. — Pp. 662–666.
- [36] Bragg Polaritons: Strong Coupling and Amplification in an Unfolded Microcavity / A. Askitopoulos, L. Mouchliadis, I. Iorsh, G. Christmann,

- J. J. Baumberg, M. A. Kaliteevski, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106, no. 7. — P. 076401.
- [37] Resonant optical reflection by a periodic system of the quantum well excitons at the second quantum state / V. V. Chaldyshev, Y. Chen, A. N. Poddubny, A. P. Vasil'ev, Z. Liu // *Appl. Phys. Lett.* — 2011. — Vol. 98, no. 7. — P. 073112.
- [38] Optical lattices of InGaN quantum well excitons / V. V. Chaldyshev, A. S. Bolshakov, E. E. Zavarin, A. V. Sakharov, W. V. Lundin, A. F. Tsatsulnikov, M. A. Yagovkina, T. Kim, Y. Park // *Appl. Phys. Lett.* — 2011. — Vol. 99, no. 25. — P. 251103.
- [39] Resonance reflection of light by a periodic system of excitons in GaAs/AlGaAs quantum wells / V. V. Chaldyshev, E. V. Kundelev, E. V. Nikitina, A. Y. Egorov, A. A. Gorbatsевич // *Semiconductors.* — 2012. — Vol. 46, no. 8. — Pp. 1016–1019.
- [40] *Ивченко Е.* Экситонные поляритоны в периодических структурах с квантовыми ямами // *ФТТ.* — 1991. — Т. 33, № 8. — С. 2388–2393.
- [41] *Ivchenko E. L., Pikus G.* Superlattices and Other Heterostructures: Symmetry and Optical Phenomena. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
- [42] Dispersion and damping of multiple quantum-well polaritons from resonant Brillouin scattering by folded acoustic modes / B. Jusserand, A. Fainstein, R. Ferreira, S. Majrab, A. Lemaitre // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 85. — P. 041302.
- [43] *Jusserand B., Cardona M.* Raman spectroscopy of vibrations in superlattices // *Light scattering in Solids V* / Ed. by M. Cardona, G. Guntherodt. — Springer, 1989. — P. 49.

- [44] Influence of the supercell structure on the folded acoustical Raman line intensities in superlattices / B. Jusserand, D. Paquet, F. Mollot, F. Alexandre, G. Le Roux // *Phys. Rev. B.* — 1987. — Vol. 35. — Pp. 2808–2817.
- [45] He J., Djafari-Rouhani B., Sapriel J. Theory of light scattering by longitudinal-acoustic phonons in superlattices // *Phys. Rev. B.* — 1988. — Vol. 37. — Pp. 4086–4098.
- [46] Jusserand B. Selective resonant interaction between confined excitons and folded acoustic phonons in GaAs/AlAs multi-quantum wells // *Appl. Phys. Lett.* — 2013. — Vol. 103, no. 9. — P. 093112.
- [47] Garrod D. K., Bray R. Resonant Brillouin scattering in GaAs // *Phys. Rev. B.* — 1972. — Vol. 6. — Pp. 1314–1321.
- [48] Kippenberg T. J., Vahala K. J. Cavity Optomechanics: Back-Action at the Mesoscale // *Science.* — 2008. — Vol. 321, no. 5893. — Pp. 1172–1176.
- [49] Aspelmeyer M., Kippenberg T. J., Marquardt F. Cavity optomechanics // *Rev. Mod. Phys.* — 2014. — Vol. 86. — Pp. 1391–1452.
- [50] Critical optical coupling between a GaAs disk and a nanowaveguide suspended on the chip / C. Baker, C. Belacel, A. Andronico, P. Senellart, A. Lemaitre, E. Galopin, S. Ducci, G. Leo, I. Favero // *Appl. Phys. Lett.* — 2011. — Vol. 99, no. 15.
- [51] Strong optical-mechanical coupling in a vertical GaAs/AlAs microcavity for subterahertz phonons and near-infrared light / A. Fainstein, N. D. Lanzillotti-Kimura, B. Jusserand, B. Perrin // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 110. — P. 037403.
- [52] Renosi P., Sapriel J. Near-resonance acousto-optical interactions in GaAs and InP // *Appl. Phys. Lett.* — 1994. — Vol. 64, no. 21. — Pp. 2794–2796.

- [53] Piezo-optics of GaAs / P. Etchegoin, J. Kircher, M. Cardona, C. Grein, E. Bustarret // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 46. — Pp. 15139–15149.
- [54] Yu P., Cardona M. Fundamentals of Semiconductors. Graduate texts in physics. — Springer, 2010.
- [55] Photoluminescence spectroscopy of one-dimensional resonant photonic crystals / M. Voronov, E. Ivchenko, M. Erementchouk, L. Deych, A. Lisiansky // *J. of Luminescence.* — 2007. — Vol. 125. — Pp. 112–117.
- [56] Loudon R. Theory of the first-order Raman effect in crystals // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences.* — 1963. — Vol. 275, no. 1361. — Pp. 218–232.
- [57] Brenig W., Zeyher R., Birman J. L. Spatial dispersion effects in resonant polariton scattering. II. Resonant Brillouin scattering // *Phys. Rev. B.* — 1972. — Vol. 6. — Pp. 4617–4622.
- [58] Interface roughness and homogeneous linewidths in quantum wells and superlattices studied by resonant acoustic-phonon Raman scattering / T. Ruf, J. Spitzer, V. F. Sapega, V. I. Belitsky, M. Cardona, K. Ploog // *Phys. Rev. B.* — 1994. — Vol. 50. — Pp. 1792–1806.
- [59] Phonon broadening of excitons in GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As quantum wells / D. Gammon, S. Rudin, T. L. Reinecke, D. S. Katzer, C. S. Kyono // *Phys. Rev. B.* — 1995. — Vol. 51. — Pp. 16785–16789.
- [60] Exciton-polariton eigenmodes in light-coupled In<sub>0.04</sub>Ga<sub>0.96</sub>As/GaAs semiconductor multiple-quantum-well periodic structures / J. P. Prineas, C. Ell, E. S. Lee, G. Khitrova, H. M. Gibbs, S. W. Koch // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 61, no. 20. — Pp. 13863–13872.

- [61] Nontrivial relaxation dynamics of excitons in high-quality InGaAs/GaAs quantum wells / A. V. Trifonov, S. N. Korotan, A. S. Kurdyubov, I. Y. Gerlovin, I. V. Ignatiev, Y. P. Efimov, S. A. Eliseev, V. V. Petrov, Y. K. Dolgikh, V. V. Ovsyankin, A. V. Kavokin // *Phys. Rev. B*. — 2015. — Vol. 91. — P. 115307.
- [62] *Itoh Y., Adachi S., Hamaguchi C.* Analysis of resonant Brillouin scattering in GaAs // *physica status solidi (b)*. — 1979. — Vol. 93, no. 1. — Pp. 381–389.
- [63] *von Laue M.* Concerning the detection of x-ray interferences. Nobel Lecture // [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1914/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1914/).
- [64] *Bragg W.* The diffraction of x-rays by crystals. Nobel Lecture // [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1915/wl-bragg-lecture.html](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1915/wl-bragg-lecture.html).
- [65] *Ewald P. P.* Zur Begründung der Kristalloptik // *Annalen der Physik*. — 1916. — Vol. 354, no. 1. — Pp. 1–38.
- [66] *Жданов Г. С.* 75-летие открытия дифракции рентгеновских лучей // *УФН*. — 1987. — Т. 153, № 12. — С. 619–631.
- [67] *Anderson P. W.* Absence of diffusion in certain random lattices // *Phys. Rev.* — 1958. — Vol. 109. — Pp. 1492–1505.
- [68] Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry / D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn // *Phys. Rev. Lett.* — 1984. — Vol. 53, no. 20. — Pp. 1951–1953.
- [69] *Пинскер З.* Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в идеальных кристаллах. — М.: Наука, 1974.
- [70] *Borrmann G.* Die Absorption von Röntgenstrahlen im Fall der Interferenz // *Zeitschrift für Physik*. — 1950. — Vol. 127. — Pp. 297–323.

- [71] *John S.* Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 58, no. 23. — Pp. 2486–2489.
- [72] *Yablonovitch E.* Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 58, no. 20. — Pp. 2059–2062.
- [73] Photonic Crystals: Molding the Flow of Light / J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade. — 2nd edition. — Princeton Univ. Press, 2008. — P. 304.
- [74] *Krauss T. F., de la Rue R., Brand S.* Two-dimensional photonic-bandgap structures operating at near-infrared wavelengths // *Nature.* — 1996. — Vol. 383. — Pp. 699–702.
- [75] Optical spectroscopy of opal matrices with CdS embedded in its pores: Quantum confinement and photonic band gap effects / V. N. Astratov, V. N. Bogomolov, A. A. Kaplyanskii, A. V. Prokofiev, L. A. Samoilovich, S. M. Samoilovich, Y. A. Vlasov // *Nuovo Cimento D.* — 1995. — Vol. 17. — Pp. 1349–1354.
- [76] Photonic band-gap structure: From spectroscopy towards visualization / A. V. Baryshev, A. A. Kaplyanskii, V. A. Kosobukin, K. B. Samusev, D. E. Usvyat, M. F. Limonov // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Vol. 70, no. 11. — P. 113104.
- [77] Phase transition-governed opal-VO<sub>2</sub> photonic crystal / V. G. Golubev, V. Y. Davydov, N. F. Kartenko, D. A. Kurdyukov, A. V. Medvedev, A. B. Pevtsov, A. V. Scherbakov, E. B. Shadrin // *Appl. Phys. Lett.* — 2001. — Vol. 79. — P. 2127.
- [78] A three-dimensional photonic crystal operating at infrared wavelengths / S. Y. Lin, J. G. Fleming, D. L. Hetherington, B. K. Smith, R. Biswas, K. M. Ho, M. M. Sigalas, W. Zubrzycki, S. R. Kurtz, J. Bur // *Nature.* — 1998. — Vol. 394. — Pp. 251–253.

- [79] Fabrication of photonic crystals for the visible spectrum by holographic lithography / M. Campbell, D. N. Sharp, M. T. Harrison, R. G. Denning, A. J. Turberfield // *Nature*. — 2000. — Vol. 404. — Pp. 53–56.
- [80] Direct laser writing of three-dimensional photonic-crystal templates for telecommunications / M. Deubel, G. von Freymann, M. Wegener, S. Pereira, K. Busch, C. M. Soukoulis // *Nature Materials*. — 2004. — Vol. 3. — Pp. 444–447.
- [81] *Russell P.* Photonic crystal fibers // *Science*. — 2003. — Vol. 299, no. 5605. — Pp. 358–362.
- [82] *Беляков В. А.* Дифракция мёссбауэровского гамма-излучения на кристаллах // *УФН*. — 1975. — Т. 115, № 4. — С. 553–601.
- [83] *Беляков В. А.* Мёссбауэровская фильтрация синхротронного излучения // *УФН*. — 1987. — Т. 151, № 4. — С. 699–714.
- [84] *Smirnov G. V.* Coherent effects in resonant diffraction: experiment // *Hyperfine Interactions*. — 1986. — Vol. 27, no. 1. — Pp. 203–218.
- [85] *Black P. J., Longworth G., O'Connor D. A.* Interference between Rayleigh and nuclear resonant scattering in single crystals // *Proc. Phys. Soc.* — 1964. — Vol. 83, no. 6. — P. 925.
- [86] *Black P. J., Duerdoth I. P.* A direct observation of diffraction in nuclear resonant scattering // *Proceedings of the Physical Society*. — 1964. — Vol. 84, no. 1. — P. 169.
- [87] *Afanas'ev A. M., Kagan Y.* Suppression of inelastic channels in resonant nuclear scattering in crystals // *JETP*. — 1965. — Vol. 21. — P. 215.

- [88] Каган Ю., Афанасьев А., Перстнев И. Теория резонансного рассеяния  $\gamma$  квантов регулярными кристаллами // *ЖЭТФ*. — 1968. — Т. 54, № 5. — С. 1530.
- [89] Kagan Y. Theory of coherent phenomena and fundamentals in nuclear resonant scattering // *Hyperfine Interactions*. — 1999. — Vol. 123, no. 1. — Pp. 83–126.
- [90] Hannon J. P., Trammell G. T. Mössbauer diffraction. I. Quantum theory of gamma-ray and X-ray optics // *Phys. Rev.* — 1968. — Vol. 169. — Pp. 315–329.
- [91] Hannon J. P., Trammell G. T. Mössbauer diffraction. II. Dynamical theory of Mössbauer optics // *Phys. Rev.* — 1969. — Vol. 186. — Pp. 306–325.
- [92] Hannon J., Trammell G. Coherent  $\gamma$ -ray optics // *Hyperfine Interactions*. — 1999. — Vol. 123, no. 1. — Pp. 127–274.
- [93] Dingle R., Wiegmann W., Henry C. H. Quantum states of confined carriers in very thin  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As-GaAs-Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  heterostructures // *Phys. Rev. Lett.* — 1974. — Vol. 33. — Pp. 827–830.
- [94] Giant exciton resonance reflectance in Bragg MQW structures / V. P. Kochereshko, G. R. Pozina, E. L. Ivchenko, D. R. Yakovlev, A. Waag, W. Ossau, G. Landwehr, R. Hellmann, E. O. Göbel // *Superlatt. Microstruct.* — 1994. — Vol. 15. — Pp. 471–471.
- [95] Polariton effects in multiple-quantum-well structures of  $\text{CdTe/Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{Te}$  / Y. Merle d'Aubigné, A. Wasiela, H. Mariette, T. Dietl // *Phys. Rev. B*. — 1996. — Vol. 54, no. 19. — Pp. 14003–14011.
- [96] Intensity dependence of superradiant emission from radiatively coupled excitons in multiple-quantum-well Bragg structures / S. Haas, T. Stroucken, M. Hübner, J. Kuhl, B. Grote, A. Knorr, F. Jahnke, S. W. Koch, R. Hey, K. Ploog // *Phys. Rev. B*. — 1998. — Vol. 57, no. 23. — Pp. 14860–14868.



- [97] Influence of structural disorder and light coupling on the excitonic response of semiconductor microcavities / C. Ell, J. Prineas, T. R. Nelson, S. Park, H. M. Gibbs, G. Khitrova, S. W. Koch, R. Houdré // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 80, no. 21. — Pp. 4795–4798.
- [98] Suppression of exciton-polariton light absorption in multiple quantum well Bragg structures / G. R. Hayes, J. L. Staehli, U. Oesterle, B. Deveaud, R. T. Phillips, C. Ciuti // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 83, no. 14. — Pp. 2837–2840.
- [99] *Gibbs H., Khitrova G., Koch S.* Exciton-polariton light-semiconductor coupling effects // *Nature Phot.* — 2011. — Vol. 5. — P. 273.
- [100] Исследование структур с множественными квантовыми ямами InAs/GaAs методом спектроскопии электроотражения / А. Большаков, В. Чалдышев, А. Бабичев, Д. Кудряшов, А. Гудовских, И. Морозов, М. Соболев, Е. Никитина // *ФТП.* — 2015. — Т. 49, № 11. — С. 1448–1452.
- [101] Magnetic field effect on polarization and dispersion of exciton-polaritons in planar microcavities / D. D. Solnyshkov, M. M. Glazov, I. A. Shelykh, A. V. Kavokin, E. L. Ivchenko, G. Malpuech // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78, no. 16. — P. 165323.
- [102] Chirping of an optical transition by an ultrafast acoustic soliton train in a semiconductor quantum well / A. V. Scherbakov, P. J. S. van Capel, A. V. Akimov, J. I. Dijkhuis, D. R. Yakovlev, T. Berstermann, M. Bayer // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99. — P. 057402.
- [103] *Johnston W. J., Prineas J. P., Smirl A. L.* Ultrafast all-optical polarization switching in Bragg-spaced quantum wells at 80 K // *J. Appl. Phys.* — 2007. — Vol. 101, no. 4. — P. 046101.
- [104] *Ivchenko E. L., Fu Y., Willander M.* Exciton polaritons in quantum-dot photonic crystals // *ФТТ.* — 2000. — Т. 42. — С. 1707–1715.

- [105] Complete band gaps in three-dimensional quantum dot photonic crystals / Y. Zeng, Y. Fu, X. Chen, W. Lu, H. Ågren // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 74, no. 11. — P. 115325.
- [106] *Kessler E. M., Grochol M., Piermarocchi C.* Light-mass Bragg cavity polaritons in planar quantum dot lattices // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77, no. 8. — P. 085306.
- [107] Exciton polaritons in two-dimensional photonic crystals / D. Bajoni, D. Gerace, M. Galli, J. Bloch, R. Braive, I. Sagnes, A. Miard, A. Lemaitre, M. Patrini, L. C. Andreani // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 80, no. 20. — P. 201308.
- [108] *Gerace D., Andreani L. C.* Quantum theory of exciton-photon coupling in photonic crystal slabs with embedded quantum wells // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 75, no. 23. — P. 235325.
- [109] Optical reflection from excitonic quantum-dot multilayer structures / Y. Fu, H. Ågren, L. Höglund, J. Y. Andersson, C. Asplund, M. Qiu, L. Thylén // *Appl. Phys. Lett.* — 2008. — Vol. 93, no. 18. — P. 183117.
- [110] Evidence for braggiton excitations in opal photonic crystals infiltrated with highly polarizable dyes / N. Eradat, A. Y. Sivachenko, M. E. Raikh, Z. V. Vardeny, A. A. Zakhidov, R. H. Baughman // *Appl. Phys. Lett.* — 2002. — Vol. 80. — P. 3491.
- [111] Bragg scattering from atoms in optical lattices / G. Birkl, M. Gatzke, I. H. Deutsch, S. L. Rolston, W. D. Phillips // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 75. — Pp. 2823–2826.
- [112] Bragg diffraction in an atomic lattice bound by light / M. Weidemüller, A. Hemmerich, A. Görlitz, T. Esslinger, T. W. Hänsch // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 75. — Pp. 4583–4586.

- [113] Филлипс У. Д. Лазерное охлаждение и пленение нейтральных атомов // УФН. — 1999. — Vol. 169, no. 3. — P. 305.
- [114] Husaini S., Deych L., Menon V. M. Plasmon-resonance-induced enhancement of the reflection band in a one-dimensional metal nanocomposite photonic crystal // *Opt. Lett.* — 2011. — Vol. 36, no. 8. — Pp. 1368–1370.
- [115] Octave-wide photonic band gap in three-dimensional plasmonic Bragg structures and limitations of radiative coupling / R. Taubert, D. Dregely, T. Stroucken, A. Christ, H. Giessen // *Nature Communications.* — 2012. — Vol. 3.
- [116] Stopping light in a waveguide with an all-optical analog of electromagnetically induced transparency / M. F. Yanik, W. Suh, Z. Wang, S. Fan // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93, no. 23. — P. 233903.
- [117] Collective emission and absorption in a linear resonator chain / A. B. Matsko, A. A. Savchenkov, W. Liang, V. S. Ilchenko, D. Seidel, L. Maleki // *Opt. Express.* — 2009. — Vol. 17, no. 17. — Pp. 15210–15215.
- [118] Фёдоров Е. Краткое руководство по кристаллографии. Ч. 1. — СПб: Тип. Ю.Н. Эрлих, 1891.
- [119] Shechtman D. The discovery of quasi-periodic materials. Nobel Lecture // [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/chemistry/laureates/2011/shechtman-lecture\\_slides.pdf](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/2011/shechtman-lecture_slides.pdf).
- [120] Levine D., Steinhardt P. J. Quasicrystals: A New Class of Ordered Structures // *Phys. Rev. Lett.* — 1984. — Vol. 53, no. 26. — Pp. 2477–2480.
- [121] Kohmoto M., Sutherland B., Iguchi K. Localization of optics: Quasiperiodic media // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 58, no. 23. — Pp. 2436–2438.

- [122] Photonic dispersion relation in a one-dimensional quasicrystal / T. Hattori, N. Tsurumachi, S. Kawato, H. Nakatsuka // *Phys. Rev. B.* — 1994. — Vol. 50, no. 6. — Pp. 4220–4223.
- [123] Diffraction and transmission of light in low-refractive index Penrose-tiled photonic quasicrystals / M. A. Kaliteevski, S. Brand, R. A. Abram, T. F. Krauss, P. Millar, R. M. DeLa Rue // *J. Phys.: Condens. Matter.* — 2001. — Vol. 13. — Pp. 10459–10470.
- [124] Enhanced transmission of periodic, quasiperiodic, and random nanoaperture arrays / C. Rockstuhl, F. Lederer, T. Zentgraf, H. Giessen // *Appl. Phys. Lett.* — 2007. — Vol. 91, no. 15. — P. 151109.
- [125] Transmission resonances through aperiodic arrays of subwavelength apertures / T. Matsui, A. Agrawal, A. Nahata, Z. V. Vardeny // *Nature.* — 2007. — Vol. 446. — Pp. 517–521.
- [126] Light transmission through Fibonacci and periodic sub-wavelength slit arrays / J. Li, S. Liu, C. Huang, T. Li, Q. Wang, Y. Zhu // *J. Optics A: Pure and Appl. Optics.* — 2008. — Vol. 10, no. 7. — P. 075202.
- [127] Photonic quasicrystal single-cell cavity mode / S.-K. Kim, J.-H. Lee, S.-H. Kim, I.-K. Hwang, Y.-H. Lee, S.-B. Kim // *Appl. Phys. Lett.* — 2005. — Vol. 86, no. 3. — P. 031101.
- [128] *Nozaki K., Baba T.* Quasiperiodic photonic crystal microcavity lasers // *Appl. Phys. Lett.* — 2004. — Vol. 84. — P. 4875.
- [129] *Oxborrow M., Henley C. L.* Random square-triangle tilings: A model for twelvefold-symmetric quasicrystals // *Phys. Rev. B.* — 1993. — Vol. 48, no. 10. — Pp. 6966–6998.

- [130] Complete photonic bandgaps in 12-fold symmetric quasicrystals / M. E. Zoorob, M. D. B. Charlton, G. J. Parker, J. J. Baumberg, M. C. Netti // *Nature*. — 2000. — Vol. 404. — Pp. 740–743.
- [131] Three-dimensional silicon inverse photonic quasicrystals for infrared wavelengths / A. Ledermann, L. Cademartiri, M. Hermatschweiler, C. Toninelli, G. A. Ozin, D. S. Wiersma, M. Wegener, G. von Freymann // *Nature Materials*. — 2006. — Vol. 5. — Pp. 942–945.
- [132] Spectrally enhanced light emission from aperiodic photonic structures / L. D. Negro, J. H. Yi, V. Nguyen, Y. Yi, J. Michel, L. C. Kimerling // *Appl. Phys. Lett.* — 2005. — Vol. 86, no. 26. — P. 261905.
- [133] Deterministic aperiodic arrays of metal nanoparticles for surface-enhanced Raman scattering (SERS) / A. Gopinath, S. V. Boriskina, B. M. Reinhard, L. Dal Negro // *Optics Express*. — 2009. — Vol. 17. — P. 3741.
- [134] Propagation of classical waves in nonperiodic media: Scaling properties of an optical Cantor filter / A. V. Lavrinenko, S. V. Zhukovsky, K. S. Sandomirski, S. V. Gaponenko // *Phys. Rev. E*. — 2002. — Vol. 65, no. 3. — P. 036621.
- [135] *Maciá E.* Exploiting aperiodic designs in nanophotonic devices // *Reports on Progress in Physics*. — 2012. — Vol. 75, no. 3. — P. 036502.
- [136] *Vardeny Z., Nahata A., Agrawal A.* Optics of photonic quasicrystals // *Nature Photonics*. — 2013. — Vol. 7. — Pp. 177–187.
- [137] *Wiersma D. S.* Disordered photonics // *Nature Photonics*. — 2013. — Vol. 7. — Pp. 188–196.
- [138] *Segev M., Silberberg Y., Christodoulides D. N.* Anderson localization of light // *Nature Photonics*. — 2013. — Vol. 7. — Pp. 197–204.

- [139] *Барабаненков Ю. Н.* Многократное рассеяние волн на ансамбле частиц и теория переноса излучения // *УФН.* — 1975. — Т. 117, № 9. — С. 49–78.
- [140] Optical orientation and alignment of free excitons in GaSe during resonant excitation - Theory / E. L. Ivchenko, G. E. Pikus, B. S. Razbirin, A. I. Starukhin // *Sov. Phys. JETP.* — 1977. — Vol. 72. — Pp. 2230–2245.
- [141] *Wolf P.-E., Maret G.* Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media // *Phys. Rev. Lett.* — 1985. — Vol. 55. — Pp. 2696–2699.
- [142] Localization of light in a disordered medium / D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, R. Righini // *Nature.* — 1997. — Vol. 390. — Pp. 671–673.
- [143] Enhanced transmission due to disorder / V. D. Freilikher, B. A. Liansky, I. V. Yurkevich, A. A. Maradudin, A. R. McGurn // *Phys. Rev. E.* — 1995. — Vol. 51. — Pp. 6301–6304.
- [144] *Greshnov A., Kaliteevski M., Abram R.* Analytical theory of light localization in one-dimensional disordered photonic crystals // *Solid State Communications.* — 2013. — Vol. 158. — Pp. 38 – 45.
- [145] *Vlasov Y. A., Kaliteevski M. I., Nikolaev V. V.* Different regimes of light localization in a disordered photonic crystal // *Phys. Rev. B.* — 1999. — Vol. 60. — P. 1555.
- [146] Photonic band gaps of porous solids / R. Biswas, M. M. Sigalas, G. Subramania, C. M. Soukoulis, K.-M. Ho // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 61. — Pp. 4549–4553.
- [147] *Li Z.-Y., Zhang Z.-Q.* Fragility of photonic band gaps in inverse-opal photonic crystals // *Phys. Rev. B.* — 2000. — Vol. 62. — Pp. 1516–1519.
- [148] *Allard M., Sargent E. H.* Impact of polydispersity on light propagation in colloidal photonic crystals // *Appl. Phys. Lett.* — 2004. — Vol. 85. — P. 5887.

- [149] *Koenderink A. F., Lagendijk A., Vos W. L.* Optical extinction due to intrinsic structural variations of photonic crystals // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 72. — P. 153102.
- [150] Effect of disorder on the optical properties of colloidal crystals / R. Rengarajan, D. Mittleman, C. Rich, V. Colvin // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 71. — P. 16615.
- [151] Optical and morphological study of disorder in opals / E. Palacios-Lidón, B. H. Juárez, E. Castillo-Martínez, C. López // *J. Appl. Phys.* — 2005. — Vol. 97. — P. 63502.
- [152] Light diffraction from opal-based photonic crystals with growth-induced disorder: Experiment and theory / A. V. Baryshev, V. A. Kosobukin, K. B. Samusev, D. E. Usvyat, M. F. Limonov // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73, no. 20. — P. 205118.
- [153] Resonant Behavior and Selective Switching of Stop Bands in Three-Dimensional Photonic Crystals with Inhomogeneous Components / A. V. Baryshev, A. B. Khanikaev, M. Inoue, P. B. Lim, A. V. Sel'kin, G. Yushin, M. F. Limonov // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99, no. 6. — P. 063906.
- [154] Fano resonance between Mie and Bragg scattering in photonic crystals / M. V. Rybin, A. B. Khanikaev, M. Inoue, K. B. Samusev, M. Steel, G. Yushin, M. F. Limonov // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 103. — P. 023901.
- [155] Anderson localization in one-dimensional randomly disordered optical systems that are periodic on average / A. R. McGurn, K. T. Christensen, F. M. Mueller, A. A. Maradudin // *Phys. Rev. B.* — 1993. — Vol. 47. — Pp. 13120–13125.
- [156] *Deych L. I., Zaslavsky D., Lisyansky A. A.* Statistics of the Lyapunov exponent in 1D random periodic-on-average systems // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 81. — Pp. 5390–5393.

- [157] Statistics of the eigenmodes and optical properties of one-dimensional disordered photonic crystals / M. A. Kaliteevski, D. M. Beggs, S. Brand, R. A. Abram, V. V. Nikolaev // *Phys. Rev. E*. — 2006. — Vol. 73, no. 5. — P. 056616.
- [158] Density of states in 1D disordered photonic crystals: Analytical solution / A. Greshnov, M. Kaliteevski, R. Abram, S. Brand, G. Zegrya // *Solid State Comm.* — 2008. — Vol. 146, no. 3-4. — Pp. 157 – 160.
- [159] *Izrailev F., Makarov N., Torres-Herrera E.* Anderson localization in bi-layer array with compositional disorder: Conventional photonic crystals versus metamaterials // *Physica B: Condensed Matter*. — 2010. — Vol. 405, no. 14. — Pp. 3022 – 3025.
- [160] Luminescence properties of a Fibonacci photonic quasicrystal / V. Passias, N. V. Valappil, Z. Shi, L. Deych, A. A. Lisyansky, V. M. Menon // *Opt. Express*. — 2009. — Vol. 17, no. 8. — Pp. 6636–6642.
- [161] *Janot C.* Quasicrystals. A Primer. — Oxford, UK: Clarendon Press, 1994.
- [162] *Azbel M. Y.* Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field // *Sov. Phys. JETP*. — 1964. — Vol. 19. — P. 634.
- [163] *Azbel M. Y.* Quantum particle in one-dimensional potentials with incommensurate periods // *Phys. Rev. Lett.* — 1979. — Vol. 43, no. 26. — Pp. 1954–1957.
- [164] *Lin Z., Goda M., Kubo H.* A family of generalized Fibonacci lattices: self-similarity and scaling of the wavefunction // *J. Phys. A*. — 1995. — Vol. 28, no. 4. — Pp. 853–866.
- [165] The nature of the atomic surfaces of quasiperiodic self-similar structures / J. M. Luck, C. Godreche, A. Janner, T. Janssen // *J. Phys. A*. — 1993. — Vol. 26, no. 8. — Pp. 1951–1999.



- [166] Perfect self-similarity of energy spectra and gap-labeling properties in one-dimensional Fibonacci-class quasilattices / X. Fu, Y. Liu, P. Zhou, W. Sritrakool // *Phys. Rev. B.* — 1997. — Vol. 55, no. 5. — Pp. 2882–2889.
- [167] *Kolář M.* New class of one-dimensional quasicrystals // *Phys. Rev. B.* — 1993. — Vol. 47, no. 9. — Pp. 5489–5492.
- [168] *Valsakumar M. C., Kumar V.* Diffraction from a quasi-crystalline chain // *Pramana.* — 1986. — Vol. 26. — P. 215.
- [169] *Lin Z., Kubo H., Goda M.* Self-similarity and scaling of wave function for binary quasiperiodic chains associated with quadratic irrationals // *Z. Phys. B: Cond. Matter.* — 1995. — Vol. 98, no. 1. — Pp. 111–118.
- [170] *Levine D., Steinhardt P. J.* Quasicrystals. I. Definition and structure // *Phys. Rev. B.* — 1986. — Vol. 34, no. 2. — Pp. 596–616.
- [171] *Aviram I.* The diffraction spectrum of a general family of linear quasiperiodic arrays // *J. Phys. A.* — 1986. — Vol. 19. — Pp. 3299–3312.
- [172] Raman scattering in Fibonacci superlattices / M. W. C. Dharma-wardana, A. H. MacDonald, D. J. Lockwood, J.-M. Baribeau, Houghton, D. C. // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 58, no. 17. — Pp. 1761–1764.
- [173] Exciton-polariton confinement in Fibonacci quasiperiodic superlattice / F. de Medeiros, E. Albuquerque, M. Vasconcelos, G. Farias // *Surface Science.* — 2006. — Vol. 600, no. 18. — Pp. 4337–4341.
- [174] *Dicke R. H.* Coherence in spontaneous radiation processes // *Phys. Rev.* — 1954. — Vol. 93, no. 1. — P. 99.
- [175] Superradiance of a subwavelength array of classical nonlinear emitters / N. E. Nefedkin, E. S. Andrianov, A. A. Zyablovsky, A. A. Pukhov,

- A. V. Dorofeenko, A. P. Vinogradov, A. A. Lisyansky // *Opt. Express*. — 2016. — Vol. 24, no. 4. — Pp. 3464–3478.
- [176] *Khitrova G., Gibbs H. M.* Quantum dots: Collective radiance // *Nat. Phys.* — 2007. — Vol. 3. — Pp. 84–86.
- [177] Multiple-quantum-well-based photonic crystals with simple and compound elementary supercells / E. L. Ivchenko, M. M. Voronov, M. V. Erementchouk, L. I. Deych, A. A. Lisyansky // *Phys. Rev. B*. — 2004. — Vol. 70, no. 19. — P. 195106.
- [178] *Würtz D., Schneider T., Politi A.* Renormalization-group study of Fibonacci chains // *Phys. Lett. A*. — 1988. — Vol. 129, no. 2. — Pp. 88–92.
- [179] *Mandelbrot B.* The Fractal geometry of Nature. — Henry Holt and Company, 1983.
- [180] *Sutherland B., Kohmoto M.* Resistance of a one-dimensional quasicrystal: Power-law growth // *Phys. Rev. B*. — 1987. — Vol. 36, no. 11. — Pp. 5877–5886.
- [181] *Penrose R.* The role of aesthetics in pure and appl. mathematical research // *Bull. Inst. Math. and Its Appl.* — 1974. — Vol. 10. — Pp. 266—271.
- [182] *Steurera W., Haibacha T.* International tables for crystallography. Volume B. Chapter 4.6. Reciprocal-space images of aperiodic crystals. — International Union of Crystallography, 2006.
- [183] *de Bruijn N.* Algebraic theory of Penrose’s nonperiodic tilings of the plane, I, II // *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* — 1981. — Vol. 43. — Pp. 39–68.
- [184] *Gahler F., Rhyner J.* Equivalence of the generalised grid and projection methods for the construction of quasiperiodic tilings // *J. Phys. A*. — 1986. — Vol. 19, no. 2. — Pp. 267–277.

- [185] *Gummelt P.* Penrose tilings as coverings of congruent decagons // *Geometriae Dedicata*. — 1996. — Vol. 62. — Pp. 1–17.
- [186] *Ishihara K. N., Yamamoto A.* Penrose patterns and related structures. I. Superstructure and generalized Penrose pattern // *Acta Cryst. A*. — 1988. — Vol. 44. — Pp. 508–516.
- [187] *Socolar J. E. S., Steinhardt P. J.* Quasicrystals. II. Unit-cell configurations // *Phys. Rev. B*. — 1986. — Vol. 34, no. 2. — Pp. 617–647.
- [188] Optical metamaterials with quasicrystalline symmetry: Symmetry-induced optical isotropy / S. S. Kruk, C. Helgert, M. Decker, I. Staude, C. Menzel, C. Etrich, C. Rockstuhl, C. Jagadish, T. Pertsch, D. N. Neshev, Y. S. Kivshar // *Phys. Rev. B*. — 2013. — Vol. 88. — P. 201404.
- [189] *Menzel C., Rockstuhl C., Lederer F.* Advanced Jones calculus for the classification of periodic metamaterials // *Phys. Rev. A*. — 2010. — Vol. 82. — P. 053811.
- [190] Естественное двойное лучепреломление кубических кристаллов CuBr в экситонной области спектра / О. Гоголин, Е. Цицишвили, Ж. Дайс, К. Клингсхирн, В. Соломко // *Письма в ЖЭТФ*. — 1981. — Т. 34. — С. 328.
- [191] *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. — М.: Наука, 1965.
- [192] Controlling circular polarization of light emitted by quantum dots using chiral photonic crystal slabs / S. V. Lobanov, S. G. Tikhodeev, N. A. Gippius, A. A. Maksimov, E. V. Filatov, I. I. Tartakovskii, V. D. Kulakovskii, T. Weiss, C. Schneider, J. Geßler, M. Kamp, S. Höfiling // *Phys. Rev. B*. — 2015. — Vol. 92. — P. 205309.
- [193] *Lifshits I., Gredeskul S., Pastur L.* Introduction to the theory of disordered systems. — New York: Wiley, 1988.

- [194] *Miroshnichenko A. E., Flach S., Kivshar Y. S.* Fano resonances in nanoscale structures // *Rev. Mod. Phys.* — 2010. — Vol. 82, no. 3. — Pp. 2257–2298.
- [195] The Fano resonance in plasmonic nanostructures and metamaterials / B. Luk'yanchuk, N. I. Zheludev, S. A. Maier, N. J. Halas, P. Nordlander, H. Giessen, C. T. Chong // *Nature Materials.* — 2010. — Vol. 9. — Pp. 707–715.
- [196] *Yariv A., Yeh P.* Optical waves in crystals: propagation and control of laser radiation. — New York: Wiley, 2002.
- [197] Selective manipulation of stop-bands in multi-component photonic crystals: Opals as an example / M. V. Rybin, A. V. Baryshev, A. B. Khanikaev, M. Inoue, K. B. Samusev, A. V. Sel'kin, G. Yushin, M. F. Limonov // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77, no. 20. — P. 205106.
- [198] *DeFranzo A. C., Pazol B. G.* Index of refraction measurement on sapphire at low temperatures and visible wavelengths // *Appl. Opt.* — 1993. — Vol. 32, no. 13. — Pp. 2224–2234.
- [199] *Fisher R. K., Gould R. W.* Resonance Cones in the Field Pattern of a Short Antenna in an Anisotropic Plasma // *Phys. Rev. Lett.* — 1969. — Vol. 22, no. 21. — Pp. 1093–1095.
- [200] *Alekseyev L., Podolskiy A., Narimanov E.* Homogeneous Hyperbolic Systems for Terahertz and Far-Infrared Frequencies // *Advances in Optoelectronics.* — 2012. — Vol. 2012. — P. 267564.
- [201] Tunable phonon polaritons in atomically thin van der Waals crystals of boron nitride / S. Dai, Z. Fei, Q. Ma, A. S. Rodin, M. Wagner, A. S. McLeod, M. K. Liu, W. Gannett, W. Regan, K. Watanabe, T. Taniguchi, M. Thiemens, G. Dominguez, A. H. C. Neto, A. Zettl, F. Keilmann et al. // *Science.* — 2014. — Vol. 343, no. 6175. — Pp. 1125–1129.

- [202] Focus issue: hyperbolic metamaterials / M. Noginov, M. Lapine, V. Podolskiy, Y. Kivshar // *Opt. Express*. — 2013. — Vol. 21, no. 12. — Pp. 14895–14897.
- [203] *Веселаго В. Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\varepsilon$  и  $\mu$  // *УФН*. — 1967. — Т. 92, № 3. — С. 517–526.
- [204] Magnetic hyperbolic optical metamaterials / S. S. Kruk, Z. J. Wong, E. Pshenay-Severin, K. O’Brien, D. N. Neshev, Y. S. Kivshar, X. Zhang // *ArXiv e-prints*. — 2015.
- [205] *Agranovich V., Kravtsov V.* Notes on crystal optics of superlattices // *Solid State Communications*. — 1985. — Vol. 55, no. 1. — Pp. 85 – 90.
- [206] *Shen L., Yang T., Chau Y. F.* Effect of internal period on the optical dispersion of indefinite-medium materials // *Phys. Rev. B*. — 2008. — Vol. 77, no. 20. — P. 205124.
- [207] Engineered optical nonlocality in nanostructured metamaterials / A. A. Orlov, P. M. Voroshilov, P. A. Belov, Y. S. Kivshar // *Phys. Rev. B*. — 2011. — Vol. 84, no. 4. — P. 045424.
- [208] Far-field optical hyperlens magnifying sub-diffraction-limited objects / Z. Liu, H. Lee, Y. Xiong, C. Sun, X. Zhang // *Science*. — 2007. — Vol. 315, no. 5819. — P. 1686.
- [209] Negative refraction in semiconductor metamaterials / A. J. Hoffman, L. Alekseyev, S. S. Howard, K. J. Franz, D. Wasserman, V. A. Podolskiy, E. E. Narimanov, D. L. Sivco, C. Gmachl // *Nature Materials*. — 2007. — Vol. 6. — P. 946.
- [210] Control of spontaneous emission in a volume of functionalized hyperbolic metamaterial / T. Tumkur, G. Zhu, P. Black, Y. A. Barnakov, C. E. Bonner, M. A. Noginov // *Appl. Phys. Lett.* — 2011. — Vol. 99, no. 15. — P. 151115.

- [211] Topological transitions in metamaterials / H. Krishnamoorthy, Z. Jacob, E. Narimanov, I. Kretzschmar, V. Menon // *Science*. — 2012. — Vol. 13. — Pp. 205–209.
- [212] Experimental realization of three-dimensional indefinite cavities at the nanoscale with anomalous scaling laws / X. Yang, J. Yao, J. Rho, X. Yin, X. Zhang // *Nature Photonics*. — 2012. — Vol. 6. — Pp. 450–454.
- [213] Improving the radiative decay rate for dye molecules with hyperbolic metamaterials / J. Kim, V. P. Drachev, Z. Jacob, G. V. Naik, A. Boltasseva, E. E. Narimanov, V. M. Shalaev // *Opt. Express*. — 2012. — Vol. 20, no. 7. — Pp. 8100–8116.
- [214] Control of absorption with hyperbolic metamaterials / T. U. Tumkur, L. Gu, J. K. Kitur, E. E. Narimanov, M. A. Noginov // *Appl. Phys. Lett.* — 2012. — Vol. 100, no. 16. — P. 161103.
- [215] Spherical hyperlens for two-dimensional sub-diffractive imaging at visible frequencies / J. Rho, Z. Ye, Y. Xiong, X. Yin, Z. Liu, H. Choi, G. Bartal, X. Zhang // *Nature Communications*. — 2010. — Vol. 1. — P. 143.
- [216] *Schilling J.* Uniaxial metallo-dielectric metamaterials with scalar positive permeability // *Phys. Rev. E*. — 2006. — Vol. 74. — P. 046618.
- [217] Nonlocal effective medium model for multilayered metal-dielectric metamaterials / A. V. Chebykin, A. A. Orlov, A. V. Vozianova, S. I. Maslovski, Y. S. Kivshar, P. A. Belov // *Phys. Rev. B*. — 2011. — Vol. 84. — P. 115438.
- [218] High-frequency homogenization for layered hyperbolic metamaterials / A. A. Krokhin, J. Arriaga, L. N. Gumen, V. P. Drachev // *Phys. Rev. B*. — 2016. — Vol. 93. — P. 075418.

- [219] Quantum nanophotonics using hyperbolic metamaterials / C. L. Cortes, W. Newman, S. Molesky, Z. Jacob // *J. Optics*. — 2012. — Vol. 14. — P. 063001.
- [220] Богданов А. А., Сурис Р. А. Влияние анизотропии проводящего слоя на закон дисперсии электромагнитных волн в слоистых металл-диэлектрических структурах // *Письма в ЖЭТФ*. — 2012. — Т. 96, № 1. — С. 52–58.
- [221] Loss compensation in metal-dielectric structures in negative-refraction and super-resolving regimes / M. A. Vincenti, D. de Ceglia, V. Rondinone, A. Ladisa, A. D’Orazio, M. J. Bloemer, M. Scalora // *Phys. Rev. A*. — 2009. — Vol. 80. — P. 053807.
- [222] Loss-compensated and active hyperbolic metamaterials / X. Ni, S. Ishii, M. D. Thoreson, V. M. Shalaev, S. Han, S. Lee, A. V. Kildishev // *Opt. Express*. — 2011. — Vol. 19, no. 25. — Pp. 25242–25254.
- [223] Boltasseva A., Atwater H. A. Low-Loss Plasmonic Metamaterials // *Science*. — 2011. — Vol. 331, no. 6015. — Pp. 290–291.
- [224] Demonstration of Al:ZnO as a plasmonic component for near-infrared metamaterials / G. V. Naik, J. Liu, A. V. Kildishev, V. M. Shalaev, A. Boltasseva // *Proc. Nat. Acad. Sci.* — 2012. — Vol. 109. — Pp. 8834–8838.
- [225] Wire Metamaterials: Physics and Applications / C. R. Simovski, P. A. Belov, A. V. Atrashchenko, Y. S. Kivshar // *Advanced Materials*. — 2012. — Vol. 24. — P. 4229.
- [226] Silveirinha M. G. Nonlocal homogenization model for a periodic array of  $\varepsilon$ -negative rods // *Phys. Rev. E*. — 2006. — Vol. 73. — P. 046612.
- [227] Strong spatial dispersion in wire media in the very large wavelength limit / P. A. Belov, R. Marqués, S. I. Maslovski, I. S. Nefedov, M. Silveirinha,

- C. R. Simovski, S. A. Tretyakov // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 67, no. 11. — P. 113103.
- [228] Wells B. M., Zayats A. V., Podolskiy V. A. Nonlocal Response of Plasmonic Nanorod Metamaterials // CLEO: QELS-Fundamental Science. — Optical Society of America, 2012. — P. JTh2A.81.
- [229] Growth and properties of gold and nickel nanorods in thin film alumina / P. Evans, W. Hendren, R. Atkinson, G. Wurtz, W. Dickson, A. Zayats, R. Pollard // *Nanotechnology.* — 2006. — Vol. 17. — Pp. 5746–5753.
- [230] Bulk photonic metamaterial with hyperbolic dispersion / M. A. Noginov, Y. A. Barnakov, G. Zhu, T. Tumkur, H. Li, E. E. Narimanov // *Appl. Phys. Lett.* — 2009. — Vol. 94, no. 15. — P. 151105.
- [231] Optical Negative Refraction in Bulk Metamaterials of Nanowires / J. Yao, Z. Liu, Y. Liu, Y. Wang, C. Sun, G. Bartal, A. Stacy, X. Zhang // *Science.* — 2008. — Vol. 321.
- [232] Plasmonic nanorod metamaterials for biosensing / A. V. Kabashin, P. Evans, S. Pastkovsky, W. Hendren, G. A. Wurtz, R. Atkinson, R. Pollard, V. A. Podolskiy, A. Zayats // *Nature Materials.* — 2009. — Vol. 8. — Pp. 867–871.
- [233] Controlling spontaneous emission with metamaterials / M. A. Noginov, H. Li, Y. A. Barnakov, D. Dryden, G. Nataraj, G. Zhu, C. E. Bonner, M. Mayy, Z. Jacob, E. E. Narimanov // *Opt. Lett.* — 2010. — Vol. 35, no. 11. — Pp. 1863–1865.
- [234] Kanungo J., Schilling J. Experimental determination of the principal dielectric functions in silver nanowire metamaterials // *Appl. Phys. Lett.* — 2010. — Vol. 97, no. 2. — P. 021903.



- [235] Designed ultrafast optical nonlinearity in a plasmonic nanorod metamaterial enhanced by nonlocality / G. Wurtz, R. Pollard, W. Hendren, G. Wiederrecht, D. Gosztola, V. Podolskiy, V. Zayats // *Nature Nanotechnology*. — 2011. — Vol. 6. — Pp. 107–11.
- [236] Birefringence swap at the transition to hyperbolic dispersion in metamaterials / L. M. Custodio, C. T. Sousa, J. Ventura, J. M. Teixeira, P. V. S. Marques, J. P. Araujo // *Phys. Rev. B*. — 2012. — Vol. 85. — P. 165408.
- [237] Giant enhancement of terahertz emission from nanoporous gap / A. Atrashchenko, A. Arlauskas, R. Adomavičius, A. Korotchenkov, V. P. Ulin, P. Belov, A. Krotkus, V. P. Evtikhiev // *Appl. Phys. Lett.* — 2014. — Vol. 105, no. 19.
- [238] Indefinite permittivity and negative refraction in natural material: Graphite / J. Sun, J. Zhou, B. Li, F. Kang // *Appl. Phys. Lett.* — 2011. — Vol. 98. — P. 101901.
- [239] Sub-diffractive volume-confined polaritons in the natural hyperbolic material hexagonal boron nitride / J. D. Caldwell, A. V. Kretinin, Y. Chen, V. Giannini, M. M. Fogler, Y. Francescato, C. T. Ellis, J. G. Tischler, C. R. Woods, A. J. Giles, M. Hong, K. Watanabe, T. Taniguchi, S. A. Maier, K. S. Novoselov // *Nature Communications*. — 2014. — Vol. 5. — P. 5221.
- [240] Hyperbolic phonon-polaritons in boron nitride for near-field optical imaging and focusing / P. Li, M. Lewin, A. V. Kretinin, J. D. Caldwell, K. S. Novoselov, T. Taniguchi, K. Watanabe, F. Gaussmann, T. Taubner // *Nature Communications*. — 2015. — Vol. 6. — P. 7507.
- [241] Gomez-Diaz J. S., Tymchenko M., Alù A. Hyperbolic plasmons and topological transitions over uniaxial metasurfaces // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114. — P. 233901.

- [242] Hybrid waves localized at hyperbolic metasurfaces / O. Y. Yermakov, A. I. Ovcharenko, M. Song, A. A. Bogdanov, I. V. Iorsh, Y. S. Kivshar // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 91, no. 23. — P. 235423.
- [243] *Nemilentsau A., Low T., Hanson G.* Anisotropic 2D materials for tunable hyperbolic plasmonics // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Vol. 116. — P. 066804.
- [244] *Purcell E. M.* Spontaneous emission probabilities at radio frequencies // *Phys. Rev.* — 1946. — Vol. 69, no. 11-12. — P. 681.
- [245] Multifold Enhancement of Quantum Dot Luminescence in Plasmonic Metamaterials / K. Tanaka, E. Plum, J. Y. Ou, T. Uchino, N. I. Zheludev // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 105, no. 22. — P. 227403.
- [246] Plasmon-induced Purcell effect in InN/In metal-semiconductor nanocomposites / T. V. Shubina, A. A. Toropov, V. N. Jmerik, D. I. Kuritsyn, L. V. Gavrilenko, Z. F. Krasil'nik, T. Araki, Y. Nanishi, B. Gil, A. O. Govorov, S. V. Ivanov // *Phys. Rev. B.* — 2010. — Vol. 82, no. 7. — P. 073304.
- [247] Arrays of Ag split-ring resonators coupled to InGaAs single-quantum-well gain / N. Meinzer, M. Ruther, S. Linden, C. M. Soukoulis, G. Khitrova, J. Hendrickson, J. D. Olitzky, H. M. Gibbs, M. Wegener // *Opt. Express.* — 2010. — Vol. 18, no. 23. — Pp. 24140–24151.
- [248] Vacuum Rabi splitting in semiconductors / G. Khitrova, H. M. Gibbs, M. Kira, S. W. Koch, A. Scherer // *Nature Phys.* — 2006. — Vol. 2. — Pp. 81–90.
- [249] Ultrabright source of entangled photon pairs / A. Dousse, J. Suffczynski, A. Beveratos, O. Krebs, A. Lemaitre, I. Sagnes, J. Bloch, P. Voisin, P. Senellart // *Nature.* — 2010. — Vol. 466, no. 7303. — Pp. 217–220.
- [250] Estimation of Purcell factor from mode-splitting spectra in an optical

- microcavity / S. K. Özdemir, J. Zhu, L. He, L. Yang // *Phys. Rev. A.* — 2011. — Vol. 83, no. 3. — P. 033817.
- [251] Xie H., Leung P., Tsai D. Molecular decay rates and emission frequencies in the vicinity of an anisotropic metamaterial // *Solid State Comm.* — 2009. — Vol. 149, no. 15-16. — Pp. 625 – 629.
- [252] Ultrahigh Purcell factors and Lamb shifts in slow-light metamaterial waveguides / P. Yao, C. Van Vlack, A. Reza, M. Patterson, M. M. Dignam, S. Hughes // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 80, no. 19. — P. 195106.
- [253] Engineering photonic density of states using metamaterials / Z. Jacob, J. Kim, G. V. Naik, A. Boltasseva, E. E. Narimanov, V. M. Shalaev // *Appl. Phys. B: Lasers and Optics.* — 2010. — Vol. 100. — Pp. 215–218.
- [254] Uniaxial epsilon-near-zero metamaterial for angular filtering and polarization control / L. V. Alekseyev, E. E. Narimanov, T. Tunkur, H. Li, Y. A. Barnakov, M. A. Noginov // *Appl. Phys. Lett.* — 2010. — Vol. 97, no. 13. — P. 131107.
- [255] Jacob Z., Smolyaninov I., Narimanov E. Broadband Purcell effect: Radiative decay engineering with metamaterials // *ArXiv e-prints.* — 2009.
- [256] Kidwai O., Zhukovsky S. V., Sipe J. E. Dipole radiation near hyperbolic metamaterials: applicability of effective-medium approximation // *Opt. Lett.* — 2011. — Vol. 36, no. 13. — Pp. 2530–2532.
- [257] Kidwai O., Zhukovsky S. V., Sipe J. E. Effective-medium approach to planar multilayer hyperbolic metamaterials: Strengths and limitations // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Vol. 85. — P. 053842.
- [258] Yan W., Wubs M., Mortensen N. A. Hyperbolic metamaterials: Nonlocal response regularizes broadband supersingularity // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 86. — P. 205429.

- [259] *Pilozzi L., D'Andrea A., Cho K.* Spatial dispersion effects on the optical properties of a resonant Bragg reflector // *Phys. Rev. B.* — 2004. — Vol. 69, no. 20. — P. 205311.
- [260] Relation between dipole moment and radiative lifetime in interface fluctuation quantum dots / A. Thränhardt, C. Ell, G. Khitrova, H. M. Gibbs // *Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 65, no. 3. — P. 035327.
- [261] *Goupalov S. V.* Light scattering on exciton resonance in a semiconductor quantum dot: Exact solution // *Phys. Rev. B.* — 2003. — Vol. 68, no. 12. — P. 125311.
- [262] *Banyai L., Koch S. W.* Semiconductor Quantum Dots. — Singapore: World Scientific, 1993.
- [263] *Ивченко Е. Л., Кавокин А. В.* Отражение света от структур с квантовыми ямами, квантовыми проводами и квантовыми точками // *ФТТ.* — 1992. — Т. 34, № 6. — С. 1815.
- [264] Purcell factor in small metallic cavities / M. Glazov, E. Ivchenko, A. Poddubny, G. Khitrova // *Phys. Solid State.* — 2011. — Vol. 53, no. 9. — P. 1753.
- [265] *Au C.-K., Feinberg G.* Effects of retardation on electromagnetic self-energy of atomic states // *Phys. Rev. A.* — 1974. — Vol. 9, no. 5. — Pp. 1794–1800.
- [266] Enhancing spontaneous emission rates of molecules using nanopatterned multilayer hyperbolic metamaterials / D. Lu, J. J. Kan, E. E. Fullerton, Z. Liu // *Nature Nanotechnology.* — 2014. — Vol. 9. — P. 48.
- [267] Enhancement of single-photon emission from nitrogen-vacancy centers with TiN/(Al,Sc)N hyperbolic metamaterial / M. Y. Shalaginov, V. V. Vorobyov, J. Liu, M. Ferrera, A. V. Akimov, A. Lagutchev, A. N. Smolyaninov, V. V. Klimov, J. Irudayaraj, A. V. Kildishev, A. Boltasseva, V. M. Shalaev // *Laser & Photonics Reviews.* — 2015. — Vol. 9, no. 1. — Pp. 120–127.

- [268] *Delerue C., Lannoo M.* Nanostructures. Theory and Modelling. — Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2004.
- [269] Decay of excited atoms in absorbing dielectrics / S. M. Barnett, B. Huttner, R. Loudon, R. Matloob // *J. Phys. B.* — 1996. — Vol. 29, no. 16. — P. 3763.
- [270] *Tomaš M. S., Lenac Z.* Spontaneous-emission spectrum in an absorbing Fabry-Perot cavity // *Phys. Rev. A.* — 1999. — Vol. 60, no. 3. — Pp. 2431–2437.
- [271] Effect of metallic surface on electric dipole and magnetic dipole emission transitions in  $\text{Eu}^{3+}$  doped polymeric film / N. Noginova, Y. Barnakov, H. Li, M. A. Noginov // *Opt. Express.* — 2009. — Vol. 17, no. 13. — Pp. 10767–10772.
- [272] Mapping and quantifying electric and magnetic dipole luminescence at the nanoscale / L. Aigouy, A. Cazé, P. Gredin, M. Mortier, R. Carminati // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 113. — P. 076101.
- [273] Magnetic Purcell factor in wire metamaterials / A. P. Slobozhanyuk, A. N. Poddubny, A. E. Krasnok, P. A. Belov // *Appl. Phys. Lett.* — 2014. — Vol. 104, no. 16. — P. 161105.
- [274] Photonic band gaps in optical lattices / I. H. Deutsch, R. J. C. Spreeuw, S. L. Rolston, W. D. Phillips // *Phys. Rev. A.* — 1995. — Vol. 52. — Pp. 1394–1410.
- [275] Photonic Band Structure of Atomic Lattices / D. V. van Coevorden, R. Sprik, A. Tip, A. Lagendijk // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 77. — Pp. 2412–2415.
- [276] *Klugkist J. A., Mostovoy M., Knoester J.* Mode softening, ferroelectric transition, and tunable photonic band structures in a point-dipole crystal // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96. — P. 163903.
- [277] Bragg scattering as a probe of atomic wave functions and quantum phase transitions in optical Lattices / H. Miyake, G. A. Siviloglou, G. Puentes,

- D. E. Pritchard, W. Ketterle, D. M. Weld // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 107. — P. 175302.
- [278] *Purcell E. M., Pennypacker C. R.* Scattering and absorption of light by nonspherical dielectric grains // *Astroph. J.* — 1973. — Vol. 186. — Pp. 705–714.
- [279] *Rahmani A., Chaumet P. C., Bryant G. W.* Discrete dipole approximation for the study of radiation dynamics in a magnetodielectric environment // *Opt. Express.* — 2010. — Vol. 18, no. 8. — Pp. 8499–8504.
- [280] Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity / D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, S. Schultz // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 84. — Pp. 4184–4187.
- [281] *Belov P. A., Simovski C. R.* Homogenization of electromagnetic crystals formed by uniaxial resonant scatterers // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 72. — P. 026615.
- [282] Nonlinear magnetoinductive waves and domain walls in composite metamaterials / I. V. Shadrivov, A. A. Zharov, N. A. Zharova, Y. S. Kivshar // *Photonics and Nanostructures-Fundamentals and Applications.* — 2006. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 69–74.
- [283] *Silveirinha M. G., Belov P. A.* Spatial dispersion in lattices of split ring resonators with permeability near zero // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77. — P. 233104.
- [284] Ubiquity of Optical Activity in Planar Metamaterial Scatterers / I. Sersic, M. A. van de Haar, F. B. Arango, A. F. Koenderink // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 108. — P. 223903.
- [285] Spontaneous emission enhancement in metal–dielectric metamaterials / I. Iorsh, A. Poddubny, A. Orlov, P. Belov, Y. S. Kivshar // *Phys. Lett. A.* — 2012. — Vol. 376, no. 3. — Pp. 185 – 187.

- [286] *Maslovski S. I., Silveirinha M. G.* Mimicking Boyer's Casimir repulsion with a nanowire material // *Phys. Rev. A.* — 2011. — Vol. 83, no. 2. — P. 022508.
- [287] *de Vries P., van Coevorden D. V., Lagendijk A.* Point scatterers for classical waves // *Rev. Mod. Phys.* — 1998. — Vol. 70, no. 2. — Pp. 447–466.
- [288] *Korringa J.* On the calculation of the energy of a Bloch wave in a metal // *Physica.* — 1947. — Vol. 13, no. 6-7. — Pp. 392 – 400.
- [289] *de Wette F. W., Schacher G. E.* Internal field in general dipole lattices // *Phys. Rev.* — 1965. — Vol. 137. — Pp. A78–A91.
- [290] *Ландау Л., Лифшиц Е.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
- [291] *Gorlach M. A., Belov P. A.* Effect of spatial dispersion on the topological transition in metamaterials // *Phys. Rev. B.* — 2014. — Vol. 90. — P. 115136.
- [292] *Vogel W., Welsch D.-G.* Quantum Optics. — Weinheim: Wiley, 2006.
- [293] *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л.* Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1989.
- [294] *Rahmani A., Chaumet P. C., Bryant G. W.* Local-field correction for an interstitial impurity in a crystal // *Opt. Lett.* — 2002. — Vol. 27, no. 6. — Pp. 430–432.
- [295] *Novotny L., Hecht B.* Principles of Nano-Optics. — New York: Cambridge University Press, 2006.
- [296] *Reitzenstein S., Forchel A.* Topical review: Quantum dot micropillars // *J. Phys. D.* — 2010. — Vol. 43, no. 3. — P. 033001.
- [297] *Belov P., Tretyakov S., Viitanen A.* Dispersion and reflection properties of artificial media formed by regular lattices of ideally conducting wires // *J. Electromagnet. Waves.* — 2002. — Vol. 16, no. 8. — Pp. 1153–1170.

- [298] Multiple-scattering theory for electromagnetic waves / X. Wang, X.-G. Zhang, Q. Yu, B. N. Harmon // *Phys. Rev. B.* — 1993. — Vol. 47, no. 8. — Pp. 4161–4167.
- [299] *Collin R. E.* Field theory of guided waves. — New York: Mc. Graw-Hill, 1960.
- [300] Anisotropic optical properties of arrays of gold nanorods embedded in alumina / R. Atkinson, W. R. Hendren, G. A. Wurtz, W. Dickson, A. V. Zayats, P. Evans, R. J. Pollard // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73. — P. 235402.
- [301] *Agranovich V. M., Gartstein Y. N., Litinskaya M.* Hybrid resonant organic-inorganic nanostructures for optoelectronic applications // *Chemical Reviews.* — 2011. — Vol. 111, no. 9. — Pp. 5179–5214.
- [302] Spectroscopic evidence of resonance energy transfer mechanism from PbS QDs to bulk silicon / Andreakou, P., Brossard, M., Li, C., Lagoudakis, P. G., Bernechea, M., Konstantatos, G. // *EPJ Web of Conferences.* — 2013. — Vol. 54. — P. 01017.
- [303] Dependence of resonance energy transfer on exciton dimensionality / J. J. Rindermann, G. Pozina, B. Monemar, L. Hultman, H. Amano, P. G. Lagoudakis // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 107. — P. 236805.
- [304] Förster energy transfer of dark excitons enhanced by a magnetic field in an ensemble of CdTe colloidal nanocrystals / F. Liu, A. V. Rodina, D. R. Yakovlev, A. A. Golovatenko, A. Grelich, E. D. Vakhtin, A. Susha, A. L. Rogach, Y. G. Kusrayev, M. Bayer // *Phys. Rev. B.* — 2015. — Vol. 92. — P. 125403.
- [305] How Förster Resonance Energy Transfer Imaging Improves the Understanding of Protein Interaction Networks in Cancer Biology / G. O. Fruhwirth, L. P. Fernandes, G. Weitsman, G. Patel, M. Kelleher, K. Lawler, A. Brock, S. P. Poland, D. R. Matthews, G. Kéri, P. R. Barber, B. Vojnovic, S. M. Ameer-Beg, A. C. C. Coolen, F. Fraternali, T. Ng // *ChemPhysChem.* — 2011. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 442–461.



- [306] Galisteo-Lopez J. F., Ibisate M., Lopez C. FRET-tuned resonant random lasing // *J. Phys. Chem. C.* — 2014. — Vol. 118, no. 18. — Pp. 9665–9669.
- [307] Energy transfer between amorphous Si nanoclusters and  $\text{Er}^{3+}$  ions in a  $\text{SiO}_2$  matrix / D. Navarro-Urrios, A. Pitanti, N. Daldosso, F. Goubilleau, R. Rizk, B. Garrido, L. Pavesi // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 79, no. 19. — P. 193312.
- [308] Energy transfer in Er-doped  $\text{SiO}_2$  sensitized with Si nanocrystals / I. Izeddin, D. Timmerman, T. Gregorkiewicz, A. S. Moskalenko, A. A. Prokofiev, I. N. Yassievich, M. Fujii // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78, no. 3. — P. 035327.
- [309] Agranovich V. M., Galanin M. Electronic excitation energy transfer in condensed matter. — Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1982.
- [310] Andrew P., Barnes W. L. Förster energy transfer in an optical microcavity // *Science.* — 2000. — Vol. 290, no. 5492. — Pp. 785–788.
- [311] Modification of energy transfer from Si nanocrystals to  $\text{Er}^{3+}$  near a Au thin film / T. Nakamura, M. Fujii, K. Imakita, S. Hayashi // *Phys. Rev. B.* — 2005. — Vol. 72. — P. 235412.
- [312] Photonic effects on the Förster resonance energy transfer efficiency / F. T. Rabouw, S. A. den Hartog, T. Senden, A. Meijerink // *Nature Communications.* — 2014. — Vol. 5.
- [313] Nanophotonic control of the Förster resonance energy transfer efficiency / C. Blum, N. Zijlstra, A. Legendijk, M. Wubs, A. P. Mosk, V. Subramaniam, W. L. Vos // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 109. — P. 203601.
- [314] Resonant energy transfer in Si nanocrystal solids / R. Limpens, A. Lesage, P. Stallinga, A. N. Poddubny, M. Fujii, T. Gregorkiewicz // *The Journal of Physical Chemistry C.* — 2015. — Vol. 119, no. 33. — Pp. 19565–19570.

- [315] *Juzeliūnas G., Andrews D. L.* Quantum electrodynamics of resonant energy transfer in condensed matter // *Phys. Rev. B.* — 1994. — Vol. 49. — Pp. 8751–8763.
- [316] *Dung H. T., Knöll L., Welsch D.-G.* Intermolecular energy transfer in the presence of dispersing and absorbing media // *Phys. Rev. A.* — 2002. — Vol. 65. — P. 043813.
- [317] *Andrews D. L., Bradshaw D. S.* Virtual photons, dipole fields and energy transfer: a quantum electrodynamical approach // *Europ. J. Phys.* — 2004. — Vol. 25, no. 6. — P. 845.
- [318] *Klimov V., Sekatskii S. K., Dietler G.* Coherent fluorescence resonance energy transfer between two dipoles: full quantum electrodynamics approach // *J. Modern Opt.* — 2004. — Vol. 51. — Pp. 1919–1947.
- [319] *Pustovit V. N., Shahbazyan T. V.* Resonance energy transfer near metal nanostructures mediated by surface plasmons // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Vol. 83. — P. 085427.
- [320] *Pustovit V. N., Urbas A. M., Shahbazyan T. V.* Cooperative amplification of energy transfer in plasmonic systems // *Phys. Rev. B.* — 2013. — Vol. 88. — P. 245427.
- [321] *Пухов К. К., Басиев Т. Т., Орловский Ю. В.* Спонтанное излучение в диэлектрических наночастицах // *Письма в ЖЭТФ.* — 2008. — Т. 88. — С. 14–20.
- [322] Exciton luminescence in one-dimensional resonant photonic crystals: A phenomenological approach / L. I. Deych, M. V. Erementchouk, A. A. Lisyansky, E. L. Ivchenko, M. M. Voronov // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 76, no. 7. — P. 075350.

- [323] *Аверкиев Н. С., Глазов М. М., Поддубный А. Н.* Коллективные моды ансамблей квантовых точек в микрорезонаторах // *ЖЭТФ*. — 2009. — Vol. 135. — P. 858.
- [324] *Tomaš M. S.* Green function for multilayers: Light scattering in planar cavities // *Phys. Rev. A*. — 1995. — Vol. 51, no. 3. — Pp. 2545–2559.
- [325] Green function for hyperbolic media / A. S. Potemkin, A. N. Poddubny, P. A. Belov, Y. S. Kivshar // *Phys. Rev. A*. — 2012. — Vol. 86. — P. 023848.
- [326] *Kambe K.* Theory of Low-Energy Electron Diffraction. I. Application of the Cellular Method of Monatomic Layers // *Zeitschrift Naturforschung Teil A*. — 1967. — Vol. 22. — P. 322.
- [327] *Johnson P. B., Christy R. W.* Optical Constants of the Noble Metals // *Phys. Rev. B*. — 1972. — Vol. 6, no. 12. — Pp. 4370–4379.
- [328] Observation of trapped light within the radiation continuum / C. W. Hsu, B. Zhen, J. Lee, S.-L. Chua, S. G. Johnson, J. D. Joannopoulos, M. Soljačić // *Nature*. — 2013. — Vol. 499. — Pp. 188–191.
- [329] Modifying chemical landscapes by coupling to vacuum fields / J. A. Hutchison, T. Schwartz, C. Genet, E. Devaux, T. W. Ebbesen // *Angewandte Chemie International Edition*. — 2012. — Vol. 51, no. 7. — Pp. 1592–1596.
- [330] Surface plasmon mediated strong exciton-photon coupling in semiconductor nanocrystals / D. E. Gómez, K. C. Vernon, P. Mulvaney, T. J. Davis // *Nano Lett.* — 2010. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 274–278.
- [331] Observation of unidirectional backscattering-immune topological electromagnetic states / Z. Wang, Y. Chong, J. D. Joannopoulos, M. Soljagic // *Nature*. — 2009. — Vol. 461. — Pp. 772–775.

- [332] Photonic Floquet topological insulators / M. C. Rechtsman, J. M. Zeuner, Y. Plotnik, Y. Lumer, D. Podolsky, F. Dreisow, S. Nolte, M. Segev, A. Szameit // *Nature*. — 2013. — Vol. 496. — Pp. 196–200.
- [333] Imaging topological edge states in silicon photonics / M. Hafezi, S. Mittal, J. Fan, A. Migdall, J. M. Taylor // *Nature Photonics*. — 2013. — Vol. 7.
- [334] Guiding electromagnetic waves around sharp corners: Topologically protected photonic transport in metawaveguides / T. Ma, A. B. Khanikaev, S. H. Mousavi, G. Shvets // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114. — P. 127401.
- [335] Imaging topological edge states in silicon photonics / M. Hafezi, S. Mittal, J. Fan, A. Migdall, J. M. Taylor // *Nature Photonics*. — 2013. — Vol. 7, no. 12. — Pp. 1001–1005.
- [336] Observation of Topological Phase Transitions in Photonic Quasicrystals / M. Verbin, O. Zilberberg, Y. E. Kraus, Y. Lahini, Y. Silberberg // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 110. — P. 076403.
- [337] *Bernevig B., Hughes T.* Topological Insulators and Topological Superconductors. — Princeton University Press, 2013.
- [338] *Franz M., Molenkamp L.* Topological Insulators. Contemporary concepts of condensed matter science. — Elsevier, 2013.
- [339] Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential / D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. den Nijs // *Phys. Rev. Lett.* — 1982. — Vol. 49. — Pp. 405–408.
- [340] *Kane C. L., Mele E. J.*  $Z_2$  Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95. — P. 146802.

- [341] *Bernevig B. A., Hughes T. L., Zhang S.-C.* Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells // *Science*. — 2006. — Vol. 314, no. 5806. — Pp. 1757–1761.
- [342] Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells / M. König, S. Wiedmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X.-L. Qi, S.-C. Zhang // *Science*. — 2007. — Vol. 318, no. 5851. — Pp. 766–770.
- [343] *Волков Б., Панкратов О.* Безмассовые двумерные электроны в инверсном контакте // *Письма в ЖЭТФ*. — 1985. — Т. 42. — С. 145.
- [344] *Gerchikov L. G., Subashiev A. V.* Interface states in subband structure of semiconductor quantum wells // *physica status solidi (b)*. — 1990. — Vol. 160, no. 2. — Pp. 443–457.
- [345] *Haldane F. D. M., Raghu S.* Possible Realization of Directional Optical Waveguides in Photonic Crystals with Broken Time-Reversal Symmetry // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100. — P. 013904.
- [346] Reflection-free one-way edge modes in a gyromagnetic photonic crystal / Z. Wang, Y. D. Chong, J. D. Joannopoulos, M. Soljačić // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100. — P. 013905.
- [347] Robust optical delay lines with topological protection / M. Hafezi, E. A. Demler, M. D. Lukin, J. M. Taylor // *Nature Physics*. — 2011. — Vol. 7. — Pp. 907–912.
- [348] Photonic topological insulators / A. B. Khanikaev, S. Hossein Mousavi, W.-K. Tse, M. Kargarian, A. H. MacDonald, G. Shvets // *Nature Materials*. — 2013. — Vol. 12. — Pp. 233–239.
- [349] *Kane C. L., Mele E. J.* Quantum Spin Hall Effect in Graphene // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95. — P. 226801.

- [350] Observation of topological edge modes in bianisotropic metamaterials / A. P. Slobozhanyuk, A. B. Khanikaev, D. S. Filonov, D. A. Smirnova, A. E. Miroschnichenko, Y. S. Kivshar // *ArXiv e-prints*. — 2015.
- [351] *Wu L.-H., Hu X.* Scheme for achieving a topological photonic crystal by using dielectric material // *Phys. Rev. Lett.* — 2015. — Vol. 114. — P. 223901.
- [352] Three-Dimensional All-Dielectric Photonic Topological Insulator / A. Slobozhanyuk, S. H. Mousavi, X. Ni, D. Smirnova, Y. S. Kivshar, A. B. Khanikaev // *ArXiv e-prints*. — 2016.
- [353] *Kraus Y. E., Zilberberg O.* Topological Equivalence between the Fibonacci Quasicrystal and the Harper Model // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Vol. 109. — P. 116404.
- [354] Surface states in the optical spectra of two-dimensional photonic crystals with various surface terminations / S. A. Dyakov, A. Baldycheva, T. S. Perova, G. V. Li, E. V. Astrova, N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev // *Phys. Rev. B*. — 2012. — Vol. 86. — P. 115126.
- [355] Solitons in conducting polymers / A. J. Heeger, S. Kivelson, J. R. Schrieffer, W. P. Su // *Rev. Mod. Phys.* — 1988. — Vol. 60. — Pp. 781–850.
- [356] *Sukhorukov A. A., Kivshar Y. S.* Multigap Discrete Vector Solitons // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 91. — P. 113902.
- [357] *Schomerus H.* Topologically protected midgap states in complex photonic lattices // *Opt. Lett.* — 2013. — Vol. 38, no. 11. — Pp. 1912–1914.
- [358] Topologically protected interface mode in plasmonic waveguide arrays / Q. Cheng, Y. Pan, Q. Wang, T. Li, S. Zhu // *Laser & Photonics Rev.* — 2015. — Vol. 9, no. 4. — Pp. 392–398.

- [359] *Zak J.* Berry's phase for energy bands in solids // *Phys. Rev. Lett.* — 1989. — Vol. 62. — Pp. 2747–2750.
- [360] *Berry M. V.* Quantal phase factors accompanying adiabatic changes // *Proc. R. Soc. A.* — 1984. — Vol. 392, no. 1802. — Pp. 45–57.
- [361] *Shen S.-Q.* Topological Insulators. Dirac Equation in Condensed Matters. Springer Series in solid-state sciences. — Heidelberg: Springer, 2013.
- [362] Spatial, spectral, and polarization properties of coupled micropillar cavities / S. M. de Vasconcellos, A. Calvar, A. Dousse, J. Suffczyński, N. Dupuis, A. Lemaitre, I. Sagnes, J. Bloch, P. Voisin, P. Senellart // *Appl. Phys. Lett.* — 2011. — Vol. 99, no. 10. — P. 101103.
- [363] Topological insulators and superconductors: tenfold way and dimensional hierarchy / S. Ryu, A. P. Schnyder, A. Furusaki, A. W. W. Ludwig // *New J. Phys.* — 2010. — Vol. 12, no. 6. — P. 065010.
- [364] *Ryu S., Hatsugai Y.* Topological origin of zero-energy edge states in particle-hole symmetric systems // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 077002.
- [365] Topology of andreev bound states with flat dispersion / M. Sato, Y. Tanaka, K. Yada, T. Yokoyama // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Vol. 83. — P. 224511.
- [366] *Ganeshan S., Sun K., Das Sarma S.* Topological Zero-Energy Modes in Gapless Commensurate Aubry-André-Harper Models // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 110. — P. 180403.
- [367] *Kitaev A. Y.* Unpaired Majorana fermions in quantum wires // *Physics-Uspekhi.* — 2001. — Vol. 44, no. 10S. — P. 131.
- [368] *Alicea J.* New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems // *Rep. Progr. Phys.* — 2012. — Vol. 75, no. 7. — P. 076501.

- [369] Simultaneous measurement of nanoscale electric and magnetic optical fields / B. le Feber, N. M. Rotenberg, D. Beggs, L. Kuipers // *Nat Photon.* — 2014. — Vol. 8, no. 1. — Pp. 43–46.
- [370] Lateral magnetic near-field imaging of plasmonic nanoantennas with increasing complexity / D. Denkova, N. Verellen, A. V. Silhanek, P. Van Dorpe, V. V. Moshchalkov // *Small.* — 2014. — Vol. 10, no. 10. — Pp. 1959–1966.
- [371] *Okamoto H., Imura K.* Visualizing the optical field structures in metal nanostructures // *J. Phys. Chem. Lett.* — 2013. — Vol. 4, no. 13. — Pp. 2230–2241.
- [372] *Porto J., Carminati R., Greffet J.-J.* Theory of electromagnetic field imaging and spectroscopy in scanning near-field optical microscopy // *J. Appl. Phys.* — 2000. — Vol. 88, no. 8. — Pp. 4845–4850.
- [373] Tailoring Directional Scattering through Magnetic and Electric Resonances in Subwavelength Silicon Nanodisks / I. Staude, A. E. Miroshnichenko, M. Decker, N. T. Fofang, S. Liu, E. Gonzales, J. Dominguez, T. S. Luk, D. N. Neshev, I. Brener, Y. Kivshar // *ACS Nano.* — 2013. — Vol. 7, no. 9. — Pp. 7824–7832.
- [374] Enhanced photonic spin Hall effect with subwavelength topological edge states / A. P. Slobozhanyuk, A. N. Poddubny, I. S. Sinev, A. K. Samusev, Y. F. Yu, A. I. Kuznetsov, A. E. Miroshnichenko, Y. S. Kivshar // *ArXiv e-prints.* — 2016.