

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук

На правах рукописи

Офенгейм Дмитрий Дмитриевич

**Модельно-независимый анализ эволюции  
нейтронных звёзд**

01.03.02 – Астрофизика и звёздная астрономия

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Яковлев Дмитрий Георгиевич

Санкт-Петербург – 2020

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Модельно-независимое описание остывания нейтронных звёзд</b> . .	8
1.1. Структура нейтронных звёзд . . . . .	8
1.2. Остывание нейтронных звёзд в изотермическом приближении . . . . .	10
1.3. Нейтринные светимости и теплоёмкости нейтронных звёзд в аналитической форме . . . . .	12
1.3.1. Основные случаи . . . . .	12
1.3.2. Набор моделей уравнения состояния . . . . .	15
1.3.3. Вычисление нейтринной светимости и теплоёмкости . . . . .	18
1.3.4. Роль гравитационного красного смещения в недрах нейтронных звёзд	24
1.4. Нейтринная светимость коры нейтронной звезды . . . . .	26
1.5. Аналитическое описание остывания нейтронных звёзд . . . . .	28
1.5.1. Решение уравнения изотермического остывания . . . . .	29
1.5.2. Сопоставление с численными расчётами . . . . .	31
1.6. Выводы к главе 1 . . . . .	32
<b>Глава 2. Модельно-независимый анализ остывания нейтронных звёзд</b> . . .	34
2.1. Наблюдения остывающих нейтронных звёзд со слабым магнитным полем . .	34
2.2. Остывание сверхтекучих нейтронных звёзд. Факторы остывания . . . . .	36
2.2.1. Нейтринная стадия. Фактор $f_\ell$ . . . . .	37
2.2.2. Фотонная стадия. Фактор $f_C$ . . . . .	39
2.2.3. Диаграмма $f_\ell - f_C$ . . . . .	40
2.3. Звёзды на нейтринной стадии остывания . . . . .	42
2.4. Темп нейтринного охлаждения пульсара Вела . . . . .	46
2.4.1. Спектральный анализ пульсара Вела . . . . .	47
2.4.2. Остывание пульсара Вела . . . . .	49
2.5. Анализ остывания XMMU J1732–344 . . . . .	51
2.6. Возможные сценарии остывания RX J1856–3754 . . . . .	56
2.7. Возможные сценарии остывания PSR J0633+0632 . . . . .	59
2.8. Выводы к главе 2 . . . . .	61
<b>Глава 3. Процессы в нейтронных звёздах с магнитным полем</b> . . . . .	63
3.1. Введение. Магнитные поля в недрах нейтронных звёзд . . . . .	63
3.2. Квазистационарная магнитная гидродинамика ядра нейтронной звезды . . .	64
3.3. Решение уравнений квазистационарной магнитогидродинамики . . . . .	67
3.3.1. Вычисление диффузионных скоростей и электрического поля . . . . .	67
3.3.2. Вычисление полоидальной компоненты скорости тока барионов . . . . .	68
3.3.3. Возмущения химических потенциалов . . . . .	69
3.3.4. Граничные условия для возмущений химических потенциалов . . . . .	70
3.3.5. Тороидальная компонента скорости потока барионов и эволюция магнитного поля в ядре звезды . . . . .	72
3.3.6. Сводка результатов раздела 3.3 . . . . .	75
3.4. Квазистационарные потоки в ядре: численные результаты . . . . .	76
3.4.1. «Минимальная» модель магнитного поля . . . . .	76
3.4.2. Возмущения химических потенциалов . . . . .	78

3.4.3.	Полоидальные потоки жидкости в «минимальной» модели магнитного поля . . . . .	81
3.4.4.	Модель магнитного поля без потока барионов между корой и ядром . . . . .	83
3.4.5.	Характерное время эволюции поля . . . . .	85
3.5.	Сдвиговая вязкость в коре нейтронной звезды с магнитным полем . . . . .	86
3.5.1.	Роль сдвиговой вязкости коры в физике нейтронных звёзд . . . . .	86
3.5.2.	Формализм . . . . .	87
3.5.3.	Вязкость в коре нейтронной звезды . . . . .	89
3.6.	Выводы к главе 3 . . . . .	93
3.6.1.	Квазистационарные течения в ядре звезды с магнитным полем . . . . .	93
3.6.2.	Сдвиговая вязкость в коре с магнитным полем . . . . .	94
<b>Глава 4.</b>	<b>Объёмная вязкость гиперонных ядер нейтронных звёзд . . . . .</b>	<b>95</b>
4.1.	Введение . . . . .	95
4.2.	Модели уравнения состояния . . . . .	97
4.3.	Объёмная вязкость в несверхтекучем веществе и скорости слабых процессов . . . . .	100
4.4.	Слабые безлептонные процессы . . . . .	104
4.4.1.	Основные формулы . . . . .	104
4.4.2.	Матричный элемент . . . . .	105
4.4.3.	Пропагаторы мезонов . . . . .	108
4.4.4.	Скорости реакций . . . . .	110
4.4.5.	Сравнение каналов обмена одним мезоном и контактного обмена $W$ -бозоном . . . . .	113
4.5.	Окна неустойчивости $r$ -мод . . . . .	115
4.6.	Нерешённые проблемы . . . . .	119
4.7.	Выводы к главе 4 . . . . .	121
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>123</b>
<b>Список сокращений и условных обозначений . . . . .</b>		<b>125</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>129</b>
<b>Приложение А. Вывод уравнения эволюции функции полоидального магнитного потока . . . . .</b>		<b>140</b>
<b>Приложение Б. Вывод уравнения (3.40) . . . . .</b>		<b>141</b>
<b>Приложение В. Пространственные производные невозмущённых концентраций частиц вблизи границы кора-ядро . . . . .</b>		<b>142</b>
<b>Приложение Г. Коэффициенты в формуле (4.30) . . . . .</b>		<b>143</b>
<b>Приложение Д. Преобразование выражения (4.20в) . . . . .</b>		<b>144</b>

## Введение

### Актуальность темы исследования.

Нейтронные звёзды — уникальные природные лаборатории по исследованию сверхплотного вещества в экстремальных условиях. Плотность вещества в этих звёздах превосходит стандартную плотность ядерной материи  $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14} \text{ г см}^{-3}$  в несколько раз, а магнитное поле достигает значений  $\sim 10^{16} \text{ Гс}$  (см., например, [1]). Изучение вещества при таких условиях — один из вызовов современной физики: такую материю сложно исследовать как в лабораторных экспериментах, так и чисто теоретически [1, 2]. В частности:

- Уравнение состояния сверхплотного вещества до сих пор не удаётся рассчитать точно, несмотря на прогресс теории [3]. Например, не ясно, появляются ли в ядрах нейтронных звёзд гипероны и/или экзотические формы материи.
- Считается, что барионы в недрах нейтронных звёзд должны быть сверхтекучими [4], однако истинные зависимости критических температур барионов от плотности пока неизвестны.
- Нейтронные звёзды обладают очень сильными магнитными полями, однако микрофизика вещества в таких полях, как и эволюция полей, изучены неполно.

Наблюдения нейтронных звёзд дают дополнительную информацию об их устройстве. Например:

- Сравнение наблюдений нейтронных звёзд, для которых измерены температура поверхности и возраст, с предсказаниями теории остывания этих звёзд позволяет делать выводы о свойствах сверхтекучести внутри звёзд (см. [4] и ссылки там).
- Оценки магнитных полей пульсаров по наблюдениям их торможения дают информацию о магнитной и тепловой эволюции нейтронных звёзд (например, [5]).
- Наблюдаемые нагретые и быстровращающиеся нейтронные звёзды в маломассивных рентгеновских двойных системах должны быть устойчивы по отношению к излучению гравитационных волн, что не просто объяснить теоретически [6].

Теоретические модели сверхплотного вещества сложны. Их использование требует больших вычислительных ресурсов. Поэтому актуальны методы, позволяющие единым образом сопоставлять с наблюдениями свойства широкого круга моделей нейтронных звёзд. Такие методы называют универсальными, или модельно-независимыми. Например, такой метод существует для анализа нейтринного остывания нейтронных звёзд [7]. Важно разработать подобные методы для фотонной стадии остывания и для изучения других проявлений нейтронных звёзд.

### Цели и задачи работы.

Целью диссертации является разработка методов исследования фундаментальных свойств сверхплотного вещества и основных параметров нейтронных звёзд по наблюдательным данным для широкого круга современных теоретических моделей сверхплотного вещества. Поставленные задачи:

- Исследовать универсальные свойства остывания нейтронных звёзд с разными уравнениями состояния. Используя результаты, развить модельно-независимый метод исследования остывания, в том числе на фотонной стадии, и применить его к анализу наблюдательных данных.

- Исследовать квазистационарные потоки вещества в ядре нейтронной звезды с магнитным полем с помощью недавно предложенного [8] самосогласованного метода.
- Рассчитать сдвиговую вязкость в коре нейтронной звезды с магнитным полем.
- Рассчитать и аппроксимировать универсальными выражениями объёмную вязкость вещества ядер нейтронных звёзд с гиперонами для современных уравнений состояния вещества. Применить результаты к расчёту окон неустойчивости  $\gamma$ -мод колебаний нейтронных звёзд.

### Научная новизна

1. Нейтринные светимости нейтронных звёзд за счёт ряда важных нейтринных процессов, а также теплоёмкости этих звёзд аппроксимированы аналитическими функциями массы и радиуса звезды, едиными для широкого класса уравнений состояния плотного вещества.
2. На основе аппроксимаций разработано аналитическое описание остывания нейтронных звёзд, единым образом описывающее нейтринную и фотонную стадии остывания.
3. Выполнен модельно-независимый анализ нескольких остывающих нейтронных звёзд. Наложены ограничения на свойства сверхтекучести нуклонов в недрах звезды RX J1856–3754. Уточнены аналогичные ограничения для звезды XMMU J1732–344 и пульсара в созвездии Парусов (пульсара Вела); на их примере исследована возможность использования теории остывания для одновременного ограничения массы и радиуса нейтронных звёзд.
4. Самосогласованный метод расчёта квазистационарных процессов в нейтронных звёздах с магнитным полем применён к расчёту течений вещества, вызываемых в ядре звезды осесимметричным полем. Показано, что эволюция сильных магнитных полей (в магнитарах) может определяться увлечением полей этими течениями.
5. Вычислены коэффициенты электронной сдвиговой вязкости в коре нейтронной звезды с сильным магнитным полем; исследована зависимость вязкости от свойств вещества коры и величины поля.
6. Рассчитаны скорости слабых безлептонных процессов и объёмная вязкость в веществе ядер нейтронных звёзд с  $\Lambda$  и  $\Xi^-$ -гиперонами с учётом канала слабого взаимодействия за счёт обмена мезоном. Получены аппроксимации результатов, универсальные относительно уравнения состояния.
7. Найденная объёмная вязкость нейтронных звёзд с гиперонами использована для расчёта окон неустойчивости  $\gamma$ -мод колебаний таких звёзд. Показано, что наличие гиперонов в ядрах наблюдаемых нагретых быстровращающихся нейтронных звёзд в маломассивных рентгеновских двойных системах помогает объяснить существование этих звёзд, если учесть канал обмена мезоном в слабых безлептонных процессах.

### Научная и практическая значимость.

Результаты диссертации могут использоваться в различных областях физики нейтронных звёзд.

Разработанный модельно-независимый метод анализа остывающих нейтронных звёзд значительно упрощает интерпретацию их наблюдений и открывает широкие возможности

для исследования свойств сверхплотного вещества. Он позволяет делать выводы о параметрах сверхтекучести и уравнения состояния вещества в недрах наблюдаемых нейтронных звёзд, а также об их массах и радиусах.

Расчёт потоков вещества, обусловленных магнитным полем, важен для построения самосогласованной модели эволюции магнитного поля в ядре нейтронной звезды и свидетельствует о необходимости пересмотра общепринятой картины эволюции поля.

Сдвиговая вязкость электронов в замагниченной коре нейтронных звёзд и объёмная вязкость их гиперонных ядер важны для моделирования затухания колебаний звёзд, релаксации дифференциального вращения их недр, подавления неустойчивости колебаний звёзд относительно излучения гравитационных волн и других диссипативных явлений.

### **Достоверность полученных результатов.**

Результаты диссертации получены с помощью достоверных математических и вычислительных методов в рамках адекватных физических приближений с чётко сформулированными критериями применимости. Там, где возможно, выполнено сравнение с результатами предшествующих исследований.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Получение аппроксимаций нейтринной светимости и теплоёмкости нейтронных звёзд аналитическими функциями массы и радиуса звезды, пригодными для широкого класса уравнений состояния. Разработка единого аналитического модельно-независимого описания нейтринной и фотонной стадий остывания нейтронных звёзд.
2. Интерпретация наблюдений ряда остывающих нейтронных звёзд модельно-независимым методом. Наложение ограничений на свойства сверхтекучести нуклонов в звёздах RX J1856–3754, ХММУ J1732–344 и пульсара Вела; исследование возможности использовать теорию остывания для одновременного ограничения массы и радиуса нейтронных звёзд на примере последних двух звёзд.
3. Самосогласованный расчёт течений вещества в ядрах нейтронных звёзд с осесимметричным магнитным полем. Демонстрация того, что увлечение магнитного поля этими потоками может вносить важный вклад в эволюцию звёзд с сильным полем (магнетаров).
4. Расчёт и анализ электронной сдвиговой вязкости в коре нейтронной звезды с сильным магнитным полем.
5. Расчёт скоростей слабых безлептонных процессов и объёмной вязкости в ядрах нейтронных звёзд с  $\Lambda$  и  $\Xi^-$ -гиперонами. Учёт канала слабого взаимодействия за счёт обмена виртуальным мезоном. Аппроксимация результатов универсальными формулами.
6. Применение полученной объёмной вязкости для расчёта окон неустойчивости  $\gamma$ -мод колебаний нейтронных звёзд с гиперонными ядрами. Демонстрация того, что учёт канала слабого взаимодействия за счёт обмена мезоном может позволить добиться устойчивости  $\gamma$ -мод колебаний нейтронных звёзд в маломассивных рентгеновских двойных системах.

### **Апробация работы и публикации.**

Результаты диссертации получены в период с 2015 по 2020 гг. и опубликованы в 11 статьях в международных рецензируемых журналах (10 статей — в журналах из списка ВАК):

- A1. Neutrino luminosities and heat capacities of neutron stars in analytic form / D. D. Ofengeim, M. Fortin, P. Haensel et al. // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Vol. 96, no. 4. — P. 043002.
- A2. Ofengeim D. D., Yakovlev D. G. Analytic description of neutron star cooling // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — Vol. 467, no. 3. — P. 3598–3603.
- A3. Ofengeim D. D., Zyuzin D. A. Thermal Spectrum and Neutrino Cooling Rate of the Vela Pulsar // *Particles.* — 2018. — Vol. 1, no. 1. — P. 194–202.
- A4. Analysing neutron star in HESS J1731-347 from thermal emission and cooling theory / D. D. Ofengeim, A. D. Kaminker, D. Klochkov et al. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2015. — Vol. 454. — P. 2668–2676.
- A5. Ofengeim D. D., Yakovlev D. G. Cooling status of three neutron stars // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2017. — Vol. 932. — P. 012049.
- A6. XMM-Newton observations of a gamma-ray pulsar J0633+0632: pulsations, cooling and large-scale emission / A. Danilenko, A. Karpova, D. Ofengeim et al. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2020. — Vol. 493, no. 2. — P. 1874–1887.
- A7. Ofengeim D. D., Gusakov M. E., Kantor E. M. Quasistationary fluid motions in magnetized neutron stars // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2018. — Vol. 1038. — P. 012009.
- A8. Ofengeim D. D., Gusakov M. E. Fast magnetic field evolution in neutron stars: The key role of magnetically induced fluid motions in the core // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 98, no. 4. — P. 043007.
- A9. Ofengeim D. D., Yakovlev D. G. Shear viscosity in magnetized neutron star crust // *EPL (Europhysics Letters).* — 2015. — Vol. 112, no. 5. — P. 59001.
- A10. Bulk viscosity in neutron stars with hyperon cores / D. D. Ofengeim, M. E. Gusakov, P. Haensel, M. Fortin // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Vol. 100, no. 10. — P. 103017.
- A11. R-mode stabilization in neutron stars with hyperon cores / D. D. Ofengeim, M. E. Gusakov, P. Haensel, M. Fortin // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2019. — Vol. 1400. — P. 022029.

Основные результаты доложены на астрофизических семинарах ФТИ им. А.Ф. Иоффе, а также на всероссийских и международных конференциях: «Физика.СПб» (Санкт-Петербург, ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 2015–2017, 2019), «Фундаментальные и прикладные космические исследования» (Москва, ИКИ РАН, 2015), «Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра» (Москва, ИКИ РАН, 2016, 2017, 2019), «Physics of Neutron Stars» (St. Petersburg, Alferov University, 2017), «Modern Physics of Compact Stars and Relativistic Gravity» (Yerevan, Yerevan State University, 2017), «PHAROS WG2 meeting — Superfluids and superconductors in neutron stars: from laboratory to astrophysical observations» (Warsaw, N. Copernicus Astronomical Center, 2018), «PHAROS WG1+WG2 meeting “Neutron stars: the equation of state, superconductivity/superfluidity and transport coefficients”» (Coimbra, Coimbra University, 2018).

**Личный вклад автора.** Вклад автора в результаты, вынесенные на защиту, является определяющим. Опубликованные работы выполнены в соавторстве с научным руководителем, сотрудниками ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Астрономического центра им. Н. Коперника (Варшава, Польша) и Института астрономии и астрофизики Тюбингенского университета (Тюбинген, Германия), однако подавляющая часть расчётов проведена автором лично.

### Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка обозначений, списка литературы и 5 приложений. Объем диссертации составляет 145 страниц, включая 48 рисунков и 9 таблиц. Список литературы включает 211 наименований.

## Глава 1

# Модельно-независимое описание остывания нейтронных звёзд

## 1.1. Структура нейтронных звёзд

Поскольку диссертация посвящена процессам, происходящим внутри нейтронной звезды, опишем кратко устройство её недр. Простейшая модель структуры звезды получается, если предполагать её статической и невращающейся. Во всех задачах, затронутых в данном исследовании, такого предположения достаточно для расчёта строения звезды. Вращение, колебания и влияние магнитного поля будут рассмотрены как малые возмущения такой конфигурации.

Метрика пространства-времени, содержащего сферически симметричную статическую нейтронную звезду, может быть записана в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 e^{2\Phi} - dr^2 e^{2\lambda} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (1.1)$$

Здесь  $s$  — пространственно-временной интервал,  $t$  — шварцшильдовское время,  $r$  — окружный радиус,  $\theta$  и  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы,  $\Phi(r)$  и  $\lambda(r)$  — метрические функции. Последняя из них может быть переписана в виде  $\exp(-2\lambda) = 1 - 2Gm(r)/(rc^2)$ , где  $m(r)$  — гравитационная масса, заключённая внутри сферы радиуса  $r$ , а  $G$  и  $c$  — гравитационная постоянная и скорость света. В такой метрике гидростатическое равновесие с учётом эффектов общей теории относительности (ОТО) описывается следующей системой уравнений (см., например, главу 6 в книге [1]):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho m}{r^2} \left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi Pr^3}{mc^2}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1}, \quad (1.2a)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (1.2b)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{P + \rho c^2} \frac{dP}{dr}. \quad (1.2b)$$

Первое из них называется уравнением Толмана-Оппенгеймера-Волкова [9, 10]. Здесь  $P$  и  $\rho$  — давление и плотность вещества нейтронной звезды, связанные уравнением состояния (см. ниже). Радиус звезды  $R$  определяется условием  $P(R) = 0$ , величина  $m(R) = M$  является полной гравитационной массой нейтронной звезды. Граничным условием для функции  $\Phi$  является требование, чтобы снаружи звезды, где  $P = 0$  и  $\rho = 0$ , метрика (1.1) становилась метрикой Шварцшильда, т.е.  $\exp\{2\Phi(R)\} = 1 - 2GM/(Rc^2)$ .

Уравнение состояния вещества звезды в виде зависимости  $P(\rho)$  замыкает систему уравнений (1.2). Кроме давления, оно задаёт также связь между плотностью вещества и концентрациями различных частиц, появляющихся в недрах нейтронной звезды. Напомним, что, в силу вырожденности материи нейтронных звёзд (кроме тонкого приповерхностного слоя), зависимостью уравнения состояния от температуры можно пренебречь. При плотностях  $\rho \lesssim \rho_0$  ( $\rho_0 = 2.8 \times 10^{14} \text{ г см}^{-3}$  — стандартная плотность ядерной материи) уравнение состояния определено достаточно надёжно, потому что свойства вещества в таких условиях хорошо ограничиваются с помощью лабораторных экспериментов (см., например, [11]). При более высоких плотностях уравнение состояния до сих пор является предметом дискуссий и, по сути, главным вопросом физики нейтронных звёзд. Несмотря на гигантский прогресс теоретических методов [3] и растущее число наблюдательных ограничений [12, 13],



существующая неопределённость уравнения состояния всё ещё велика. В частности, не ясно, достигается ли в нейтронных звёздах плотность, необходимая для появления гиперонов и экзотических форм вещества (конденсат мезонов, кварковая материя). В данной диссертации в главах 1, 2 и 3 рассмотрены только нуклонные модели уравнения состояния, а глава 4 посвящена процессам в ядрах нейтронных звёзд, содержащих гипероны. Рассмотрение звёзд с экзотической материей в ядре находится за рамками данной диссертации.

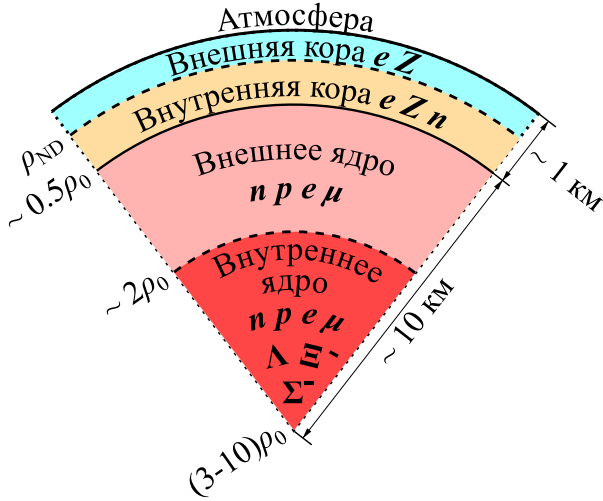


Рис. 1.1. Схематическое изображение строения нейтронной звезды.

Структура типичной нейтронной звезды изображена на рисунке 1.1. Поверхность нейтронной звезды окружена тонкой атмосферой (от нескольких мм до нескольких см). Её химический состав может быть различен (см. обзор [14]). Под атмосферой находится кора, подразделяемая на внешнюю [плотность менее  $\rho_{\text{ND}} = (4 - 6) \times 10^{11} \text{ г см}^{-3}$ ] и внутреннюю ( $\rho_{\text{ND}} < \rho \lesssim 0.5\rho_0$ ). Первая в основном состоит из электронов ( $e$ ), образующих вырожденный ферми-газ, и полностью ионизированных атомов ( $Z$ ), образующих кулоновский кристалл или жидкость. Во внутренней коре, кроме того, содержатся свободные, не связанные в атомных ядрах, нейтроны ( $n$ ), находящиеся, как правило, в сверхтекучем состоянии. По современным расчётам (см. обзор [4]), критическая температура нейтронной сверхтекучести в основном объёме внутренней коры составляет

$\gtrsim 2 \times 10^9 \text{ К}$ . Это означает, что по прошествии первых нескольких лет с момента рождения звезды во вспышке сверхновой нейтроны в коре в основном становятся сверхтекучими. Толщина коры составляет 1 – 2 км и уменьшается с ростом массы нейтронной звезды.

При плотности  $\sim 0.5\rho_0$  начинается ядро нейтронной звезды. Его условно разделяют на внутреннее и внешнее. Вещество внешнего ядра ( $\rho \lesssim 2\rho_0$ ) состоит из нейтронов с примесью протонов ( $p$ ), электронов и мюонов ( $\mu$ ). Во внутреннем ядре могут, в зависимости от модели уравнения состояния, появляться гипероны (в данной диссертации —  $\Lambda$ ,  $\Xi^-$ ,  $\Sigma^-$ ) и экзотические фазы материи (см. выше). Лептоны в ядре звезды образуют почти идеальные релятивистские ферми-газы. Барионы образуют сильно неидеальные ферми-жидкости, которые могут находиться в сверхтекучем состоянии. Отметим, что сверхтекучесть заряженных барионов (протонов,  $\Sigma^-$  и  $\Xi^-$ -гиперонов) означает также их сверхпроводимость. Однако в данной диссертации сверхпроводящие свойства сверхтекучих барионов не используются (за исключением обсуждения сдвиговой вязкости лептонов в ядре звезды в разделе 4.5). Фактически, единственное свойство сверхтекучести, важное для исследований в данной диссертации — это наличие энергетической щели в спектре возбуждений.

Критические температуры сверхтекучести барионов в ядре на данный момент, вообще говоря, неизвестны (обзор проблемы см. в [4]). Различные модели предсказывают для них различные значения и различные зависимости от плотности среды. Однако большинство моделей сверхтекучести протонов и нейтронов имеют несколько универсальных черт. Стандартная парадигма гласит, что в сверхтекучем состоянии протоны в ядре нейтронной звезды образуют куперовские пары в синглетном состоянии, нейтроны — в триплетном, а зависимости их критических температур от плотности среды,  $T_{cn}(\rho)$  и  $T_{cp}(\rho)$ , имеют куполообразный вид.<sup>1</sup> Максимум этого «купола» для протонов, как правило, располагается во внешней коре и имеет характерное значение несколько млрд. кельвинов. Профиль критической температуры нейтронов сдвинут в область более высоких плотностей, его максимум

<sup>1</sup> Более сложные модели также можно найти в обзоре [4].

имеет характерное значение несколько сотен млн. кельвинов. О критических температурах гиперонов в ядре нейтронной звезды известно ещё меньше (см. обзор [15]).

Вещество в ядре статической нейтронной звезды должно находиться не только в механическом равновесии, но и в равновесии относительно различных процессов превращения частиц друг в друга при неупругих столкновениях. В основном, это процессы слабого взаимодействия<sup>2</sup> (слабые процессы). В *пре-μ*-веществе это урка-процессы, протекающие с участием лептонов и сопровождающиеся испусканием нейтрино, для которых материя нейтронной звезды становится прозрачной уже спустя несколько минут после её рождения [16]. Это приводит к объёмному охлаждению звезды потоком нейтрино из её недр, который формируется за счёт урка- и других процессов, что описано в главах 1 и главе 2. В гиперонном веществе возможны также неупругие слабые безлептонные процессы. В условиях, характерных для недр нейтронных звёзд, они более интенсивны, чем урка-процессы, но не сопровождаются испусканием нейтрино. Вещество коры звезды может быть как равновесным, так и неравновесным, в зависимости от количества аккрецированного вещества и истории аккреции (см., например, [1]).

Вещество в ядре нейтронной звезды может быть слабо отклонено от равновесного состояния, например, за счёт колебаний звезды. Это, в частности, сопровождается появлением неравновесных урка- и безлептонных слабых процессов. Они ответственны за формирование объёмной вязкости в ядре звезды. В ряде важных случаев объёмная вязкость гиперонного вещества, определяемая безлептонными процессами, оказывается на несколько порядков выше объёмной вязкости нуклонного вещества, где она создаётся неравновесными урка-процессами. Этому посвящена глава 4, где вычислена объёмная вязкость гиперонных звёзд и исследовано её влияние на затухание  $\gamma$ -мод колебаний таких звёзд.

Другой источник отклонения вещества в ядре нейтронной звезды от равновесия — это магнитное поле. Его значение на поверхности звезды может колебаться от  $\sim 10^8 - 10^{10}$  Гс (центральные компактные объекты в остатках сверхновых и миллисекундные пульсары) до характерных значений  $10^{12} - 10^{13}$  Гс (типичные пульсары) и экстремальных величин  $10^{14} - 10^{15}$  Гс (магнитары) [17, 18]. Поля в недрах нейтронных звёзд могут быть ещё выше. Обычно считается, что магнитные поля в нейтронных звёздах не способны существенно исказить их гидростатическую конфигурацию. Тем не менее, эволюция магнитного поля является важной составляющей эволюции всей нейтронной звезды. В основном оно затухает за счёт трения между разными сортами частиц и неравновесных слабых процессов. Этим вопросам, а также влиянию магнитного поля на некоторые другие процессы в нейтронных звёздах, посвящена глава 3.

## 1.2. Остывание нейтронных звёзд в изотермическом приближении

Остывание нейтронных звёзд изучается на протяжении длительного времени, как теоретически, так и наблюдательно. К концу 2019 года было известно несколько десятков таких звёзд, чьё тепловое рентгеновское излучение можно наблюдать, а возраст измерить или ограничить (см., например, [19]). Потребность в анализе результатов таких наблюдений стимулирует разработку теоретических методов изучения остывания нейтронных звёзд (см., например, [4, 7, 20–22]). При этом выяснилось, что различные области звезды (см. рисунок 1.1) играют совершенно разные роли в процессе остывания.

Нейтронные звёзды охлаждаются за счёт излучения нейтрино из недр звёзд (в основном, из ядра) и электромагнитного излучения с их поверхности (из атмосферы). В главах 1 и 2 мы ограничимся рассмотрением моделей изолированных нейтронных звёзд с нуклонными ядрами, пренебрежём влиянием магнитного поля и возможными механизмами внутреннего

<sup>2</sup> При наличии более двух сортов гиперонов в ядре звезды протекают неупругие процессы сильного взаимодействия. См. раздел 4.3.

нагрева. В течение нескольких десятилетий после рождения внутренность звезды становится изотермической, резкий перепад температур сохраняется только в тонкой теплоизолирующей оболочке вблизи поверхности [23, 24]. С учётом эффектов ОТО, изотермичность означает пространственную однородность внутренней температуры  $\tilde{T}$ , вычисленной с учётом гравитационного красного смещения,

$$\tilde{T} = T \exp(\Phi) = \text{const}. \quad (1.3)$$

Здесь  $T = T(r)$  — локальная температура среды, а  $\Phi(r)$  — метрическая функция [см. формулы (1.1) и (1.2в)].

Закон остывания нейтронной звезды  $\tilde{T}(t)$  ( $t$  — возраст звезды) является основным объектом теории остывания. Мы будем рассматривать  $\tilde{T}(t)$  на стадии, когда внутри звезды уже произошла тепловая релаксация. На протяжении около 100 тыс. лет после рождения звезда остывает в основном за счёт излучения нейтрино; это т.н. нейтринная стадия остывания, переходящая в фотонную стадию, на которой звезда охлаждается в основном за счёт теплового излучения фотонов с поверхности [20, 25, 26]. Для расчёта  $\tilde{T}(t)$  необходимо знать теплоёмкость звезды  $C$ , а также её нейтринную  $L_\nu^\infty$  и фотонную  $L_\gamma^\infty$  светимости как функции температуры  $\tilde{T}$  (верхний индекс « $\infty$ » означают, что эти светимости определены в системе отсчёта удалённого наблюдателя). Чтобы найти  $C$  и  $L_\nu^\infty$ , необходимо задаться моделями уравнения состояния вещества звезды, сверхтекучести нейтронов и протонов. Для вычисления  $L_\gamma^\infty$  по известной температуре  $\tilde{T}$  требуется ещё модель теплоизолирующей оболочки. Она связывает эффективную температуру  $T_s$  поверхности звезды и температуру дна оболочки  $T_b$ . Тогда светимость  $L_\gamma^\infty$  представима в виде

$$L_\gamma^\infty = 4\pi\sigma R^2 T_s^4 (1 - x_g), \quad (1.4)$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана-Больцмана, а  $x_g = 2GM/(Rc^2)$  — параметр компактности звезды. Полезна также величина  $T_s^\infty = T_s \sqrt{1 - x_g}$  — температура поверхности звезды, регистрируемая удалённым наблюдателем. Температура  $\tilde{T}$  связана с температурой дна оболочки соотношением

$$\tilde{T} = T_b \sqrt{1 - x_g}. \quad (1.5)$$

Интегральная нейтринная светимость и теплоёмкость звезды,  $L_\nu^\infty$  и  $C$ , в основном определяются ядром нейтронной звезды и могут быть рассчитаны как

$$L_\nu^\infty(\tilde{T}) = \int_0^{R_{\text{core}}} Q(\rho, T) \frac{\exp(2\Phi) 4\pi r^2 dr}{\sqrt{1 - 2Gm/(rc^2)}}, \quad (1.6)$$

$$C(\tilde{T}) \approx C_{\text{core}}(\tilde{T}) = \int_0^{R_{\text{core}}} c_{\text{core}}(\rho, T) \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{1 - 2Gm/(rc^2)}}. \quad (1.7)$$

Здесь  $Q(\rho, T)$  и  $c_{\text{core}}(T, \rho)$  — нейтринная излучательная способность [эрг см<sup>-3</sup> с<sup>-1</sup>] и теплоёмкость [эрг см<sup>-3</sup> К<sup>-1</sup>] единицы объёма вещества ядра;  $R_{\text{core}}$  — радиус ядра.

Уравнение остывания изолированных нейтронных звёзд после релаксации недр имеет вид

$$C \frac{d\tilde{T}}{dt} = -L_\nu^\infty - L_\gamma^\infty. \quad (1.8)$$

При известных  $C(\tilde{T})$ ,  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$  и  $L_\gamma^\infty(\tilde{T})$  оно решается в квадратурах. Фотонная светимость представима в виде явной зависимости от  $\tilde{T}$  с помощью аппроксимаций из работ [27, 28]. Величины  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$  и  $C(\tilde{T})$  в ряде важных случаев могут быть факторизованы на два множителя, первый из которых является степенью температуры, а второй не зависит от  $\tilde{T}$ , но

требует расчёта по формулам (1.6) и (1.7) для каждой модели нейтронной звезды. В случае, когда необходимо рассчитывать остывание множества моделей нейтронных звёзд, непосредственное использование выражений (1.6) и (1.7) требует больших вычислительных затрат.

В данной главе представлено аналитическое описание остывания нейтронных звёзд. В разделе 1.3 получены удобные аналитические аппроксимации для  $L_\nu^\infty$  и  $C$ , с помощью которых можно существенно упростить расчёты остывания нейтронных звёзд и интерпретацию наблюдательных данных (результаты опубликованы в статье [29]). В разделе 1.4 получена аппроксимация нейтринной светимости коры звезды (в рамках данной диссертации она представляет академический интерес; опубликована в приложении В к статье [22]). Раздел 1.5 содержит вывод приближённого аналитического выражения для закона остывания  $\tilde{T}(t)$ , единым образом описывающее как нейтринную, так и фотонную стадии остывания (опубликовано в статье [30]). Преимущества использования полученных аппроксимаций будут проиллюстрированы примерами в следующей главе.

### 1.3. Нейтринные светимости и теплоёмкости нейтронных звёзд в аналитической форме

#### 1.3.1. Основные случаи

Величины  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$  и  $C(\tilde{T})$ , представляющие для нас интерес, определяются уравнением состояния сверхплотной материи ядра нейтронной звезды и соответствующей моделью звезды (с заданной массой  $M$ ), а также нейтринной излучательной способностью  $Q(\rho, T)$  и теплоёмкостью единицы объёма  $c_{\text{core}}(\rho, T)$  вещества ядра. Мы ограничимся случаем, когда ядро состоит только из нуклонов ( $n$  и  $p$ ) и лептонов ( $e$  и  $\mu$ ), и рассмотрим ряд различных уравнений состояния *прем*-вещества.

Даже в этом случае проблема вычисления  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$  и  $C(\tilde{T})$  сильно осложняется возможной сверхтекучестью нейтронов и протонов. Нейтронная и/или протонная сверхтекучесть влияет на  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$  и  $C(\tilde{T})$  из-за появления энергетических щелей в спектре возбуждений (квази)нуклонов. Сильная сверхтекучесть экспоненциально подавляет нейтринное излучение для процессов с участием сверхтекучих частиц; она же подавляет их парциальные теплоёмкости (см. обзор [16]). Кроме того, в сверхтекучем веществе возникает специфический механизм испускания нейтринных пар, обусловленный куперовским спариванием нуклонов (см. [25, 26, 31, 32] и ссылки там). Различные модели профилей критических температур могут приводить к принципиально разным зависимостям  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$  и  $C(\tilde{T})$ .

Здесь мы будем следовать стратегии, разработанной авторами статей [7, 33–35] для анализа наблюдений некоторых нейтронных звёзд (впоследствии эта стратегия была использована диссертантом в статьях [22, 29, 30] и др.; см. также главу 2). Сначала мы вычислим парциальные вклады различных процессов в  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$  и различных частиц в  $C(\tilde{T})$  для наиболее важных частных случаев. Затем мы аппроксимируем эти вклады аналитическими выражениями и используем их в качестве отправных точек при анализе остывания нейтронных звёзд. В несверхтекучей звезде фактические  $L_\nu(\tilde{T})$  и  $C(\tilde{T})$  можно представить в виде сумм таких выражений. В случае сильной сверхтекучести какого-либо из нуклонных компонентов среды, то или иное слагаемое может сильно подавляться (либо полностью, либо частично). Сравнивая теорию с наблюдениями, с помощью такого подхода можно попытаться исследовать сверхтекучие свойства нейтронных звёзд.

В таблице 1.1 представлены три важных процесса излучения нейтрино, определяющих нейтринную светимость  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$ . В схемах реакций  $N$  обозначает нуклон, а  $\ell$  — лептон (электрон или мюон). Первый столбец содержит условное обозначение того или иного процесса, второй показывает схемы соответствующих нейтринных реакций, третий — температурную зависимость соответствующей нейтринной светимости  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$ , а последний — сверхтекучее

Таблица 1.1. Три важных процесса излучения нейтрино в ядре нейтронной звезды

Усл. обозн.	Процесс излучения	$L_\nu^\infty(\tilde{T})$	Сверхтекучесть	
			$n$	$p$
DU	$n \rightarrow p\ell\tilde{\nu}_l, \quad p\ell \rightarrow n\nu_l$	$\tilde{T}^6$	Нет	Нет
MU	$nN \rightarrow pN\ell\tilde{\nu}_l, \quad pN\ell \rightarrow nN\nu_l$	$\tilde{T}^8$	Нет	Нет
$nn$	$nn \rightarrow nn\nu\tilde{\nu}$	$\tilde{T}^8$	Нет	Да (сильная)

$N = n$  либо  $p$ ;  $\ell = e$  либо  $\mu$

Таблица 1.2. Основные составляющие теплоёмкости ядра звезды

Случай	$C_{\text{core}}(\tilde{T})$
$n$	$C_n$
$p$	$C_p$
$\ell$	$C_\ell = C_e + C_\mu$
$tot$	$C_{tot} = C_n + C_p + C_e + C_\mu$
$n\ell$	$C_{n\ell} = C_n + C_e + C_\mu$

состояние ядра нейтронной звезды, в котором светимость за счёт данного процесса является ведущей. В первой строке рассмотрен самый мощный процесс нейтринного охлаждения, прямой урка-процесс (англ. «Direct Urca» = DU) [36] (последовательность бета-распада нейтрона и обратной реакции, в ходе которых излучается пара электронных или мюонных нейтрино). Прямой урка-процесс может протекать только во внутренних областях ядер массивных нейтронных звёзд с уравнениями состояния, которые предсказывают достаточно большую долю протонов. Второй случай соответствует менее мощному нейтринному охлаждению посредством модифицированного урка-процесса (англ. «modified Urca» = MU) (например, [16] и ссылки там). Этот процесс считается стандартным в не очень массивных несверхтекучих нейтронных звёздах. Наконец, последний случай  $nn$  относится к тормозному излучению нейтринной пары при столкновениях нейтронов (см., например, [16]). В несверхтекучей звезде такой процесс слабее, чем MU, но в условиях сильной протонной сверхтекучести процессы MU и DU сильно подавляются, и тормозное излучение нейтрино становится основным процессом охлаждения звезды.

В таблице 1.2 представлены пять основных сочетаний парциальных (несверхтекучих) теплоёмкостей  $C_{\text{core}}(\tilde{T})$  в ядре нейтронной звезды. Первые три строчки — парциальные теплоёмкости нейтронов ( $n$ ), протонов ( $p$ ) и суммарная теплоёмкость лептонов ( $\ell$ ); случай  $tot$  соответствует сумме вкладов всех компонент материи, а случай  $n\ell$  — сумму теплоёмкостей нейтронов и лептонов. Случай  $tot$  соответствует полностью несверхтекучему ядру. Остальные случаи могут быть полезны при наличии сверхтекучих нуклонов. Например, вариант  $n\ell$  соответствует сильной протонной сверхтекучести, а случай  $\ell$  — сильной сверхтекучести обоих нуклонов. Во всех случаях интегральная теплоёмкость пропорциональна  $\tilde{T}$  вследствие сильной вырожденности всех фермионов в ядре нейтронной звезды (например, [16]).

### 1.3.1.1. Излучение нейтрино

Опишем вкратце излучательные способности  $Q(\rho, T)$  для трёх основных процессов излучения нейтрино, указанных в таблице 1.1 (например, [16]).

Для модифицированного урка-процесса (MU)

$$Q_{\text{MU}} = Q_{\text{MU}0} \left( \frac{n_p}{n_0} \right)^{1/3} T_9^8 \Omega(n_n, n_p, n_e, n_\mu), \quad (1.9)$$

где  $n_\alpha$  — концентрация частиц сорта  $\alpha = n, p, e, \mu$ ;  $n_0 = 0.16 \text{ фм}^{-3}$  — стандартная концентрация нуклонов в ядерной материи,  $T_9$  — локальная температура среды  $T$  в единицах  $10^9 \text{ К}$ , а  $\Omega \sim 1$  — безразмерный множитель, с помощью которого учитывается наличие различных ветвей процесса, многочастичные эффекты и прочие неопределённости, влияющие на  $Q_{\text{MU}}$  (см. [16, 37] и ссылки там). Зависимость  $Q_{\text{MU}}$  от плотности главным образом описывается законом  $\propto n_p^{1/3}$ . Размерный множитель  $Q_{\text{MU}0} \approx 1.75 \times 10^{21} \text{ эрг см}^{-3} \text{ с}^{-1}$  (как и аналогичные множители для остальных процессов) вычислен в тех же предположениях, что сделаны в обзоре [16]. Эффективные массы нуклонов для определённости положены равными  $m_p^* = 0.7m_p$  и  $m_n^* = 0.7m_n$ . Различие между эффективной и «голой» массой нуклонов в ядре нейтронной звезды в основном определяется многочастичными эффектами, точный учёт которых сложен.

Излучательная способность за счёт прямого урка-процесса имеет вид

$$Q_{\text{DU}} = Q_{\text{DU}0} \left( \frac{n_e}{n_0} \right)^{1/3} T_9^6 (\Theta_{npe} + \Theta_{nr\mu}), \quad (1.10)$$

где  $Q_{\text{DU}0} \approx 1.96 \times 10^{27} \text{ эрг см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Множители  $\Theta_{npe}$  и  $\Theta_{nr\mu}$  равны 1, если импульсы Ферми частиц, участвующих в соответственно электронном и мюонном урка-процессах удовлетворяют закону сохранения (неравенству треугольника; импульс нейтрино при этом пренебрежимо мал); в противном случае эти факторы равны нулю. Таким образом, DU-процессы имеют пороги и могут протекать только в центральных областях массивных нейтронных звёзд.

В случае  $nn$  (сильная протонная сверхтекучесть; см., например, [22]) имеем

$$Q_{nn} = Q_{nn0} \left( \frac{n_n}{n_0} \right)^{1/3} T_9^8, \quad (1.11)$$

где  $Q_{nn0} \approx 1.77 \times 10^{19} \text{ эрг см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ .

### 1.3.1.2. Теплоёмкость

Опишем теперь теплоёмкость единицы объёма вещества ядра звезды для основных случаев, перечисленных в таблице 1.2, используя хорошо известные выражения, представленные, например, в работе [20].

Суммарная теплоёмкость всех компонент (случай *tot*) есть

$$c_{\text{tot}} = c_n + c_p + c_e + c_\mu. \quad (1.12)$$

Для каждого сорта фермионов  $\alpha = n, p, e, \mu$  имеем

$$c_\alpha = \frac{k_B^2}{3\hbar^3} T m_\alpha^* p_{F\alpha}, \quad (1.13)$$

где  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $m_\alpha^*$  и  $p_{F\alpha}$  — эффективная масса и импульс Ферми частиц сорта  $\alpha$ . Заметим, что основной вклад в теплоёмкость несверхтекучего ядра звезды вносят

Таблица 1.3. Основные параметры нейтронных звёзд для выбранных моделей уравнения состояния;  $M_{\max}$  и  $R_{\min}$  — масса и радиус самой тяжёлой стабильной звезды;  $M_{\text{DU}}$  и  $R_{\text{DU}}$  — минимальная масса и радиус звезды, в центре которой преодолён порог прямого урка-процесса.

EOS	$M_{\max}, M_{\odot}$	$R_{\min}, \text{км}$	$M_{\text{DU}}, M_{\odot}$	$R_{\text{DU}}, \text{км}$
NL3 $\omega\rho$	2.75	13.00	2.60	13.79
PAL4-240	1.93	10.24	1.64	11.93
BSk21	2.27	11.01	1.59	12.59
BSk20	2.16	10.10	—	—
SLy	2.05	9.91	—	—
HHJ II	1.92	10.20	1.89	10.83
HHJ IV	2.16	10.82	1.73	12.48
DDME2	2.48	12.07	—	—
APR	2.21	10.00	2.01	10.95

нейтроны и протоны (например, [38]). Предполагая, как сказано выше,  $m_n^* = 0.7 m_n$  и  $m_p^* = 0.7 m_p$ , получим

$$c_N \approx c_0 \left( \frac{n_N}{n_0} \right)^{1/3} T_9, \quad (1.14)$$

где  $c_0 = 1.12 \times 10^{20}$  эрг см<sup>-3</sup> К<sup>-1</sup>.

Эффективная масса ультрарелятивистских, почти не взаимодействующих электронов  $m_e^* = p_{Fe}/c$  определяется релятивистскими эффектами. Их парциальная теплоёмкость имеет вид

$$c_e \approx 0.355 c_0 \left( \frac{n_e}{n_0} \right)^{2/3} T_9. \quad (1.15)$$

Поскольку мюоны в ядре звезды умеренно релятивистские, выражение для  $c_\mu$  имеет более сложный вид. Однако приближённо вклад мюонов в формуле (1.12) можно учесть, искусственно увеличив  $c_e$ .

### 1.3.2. Набор моделей уравнения состояния

Чтобы вычислить  $L_\nu^\infty$  и  $C_{\text{core}}$ , мы выбрали девять моделей уравнения состояния вещества ядер нейтронных звёзд. Они перечислены в таблице 1.3 и проиллюстрированы на рис. 1.3 и 1.4. Модели NL3 $\omega\rho$  и DDME2 описаны в [39] и приведённых там ссылках. Модель SLy рассчитана в статье [40]. Модель PAL4-240 построена с использованием результатов [41], но с другим модулем сжатия симметричной материи атомных ядер,  $K_0 = 240$  МэВ (она же представлена в приложении D книги [1] под аббревиатурой PAPAL). Модель HHJ II введена в работе [42] (под названием APR II). Модели BSk20 и BSk21 подробно описаны и параметризованы в работе [43]. Модель HHJ IV построена в работе [44]. Модель APR разработана в [45]. Подчеркнём, что выбранные уравнения состояния основаны на существенно разных многочастичных теориях сверхплотной материи. Таким образом, рассматриваемая нами выборка уравнений состояния содержит принципиально разные модели.

Для построения модели нейтронной звезды также необходимо выбрать уравнение состояния её коры. Для моделей SLy, BSk20 и BSk21 уравнение состояния в коре и ядре звезды рассчитывалось единым образом. Кора для моделей NL3 $\omega\rho$  и DDME2 была описана в работе

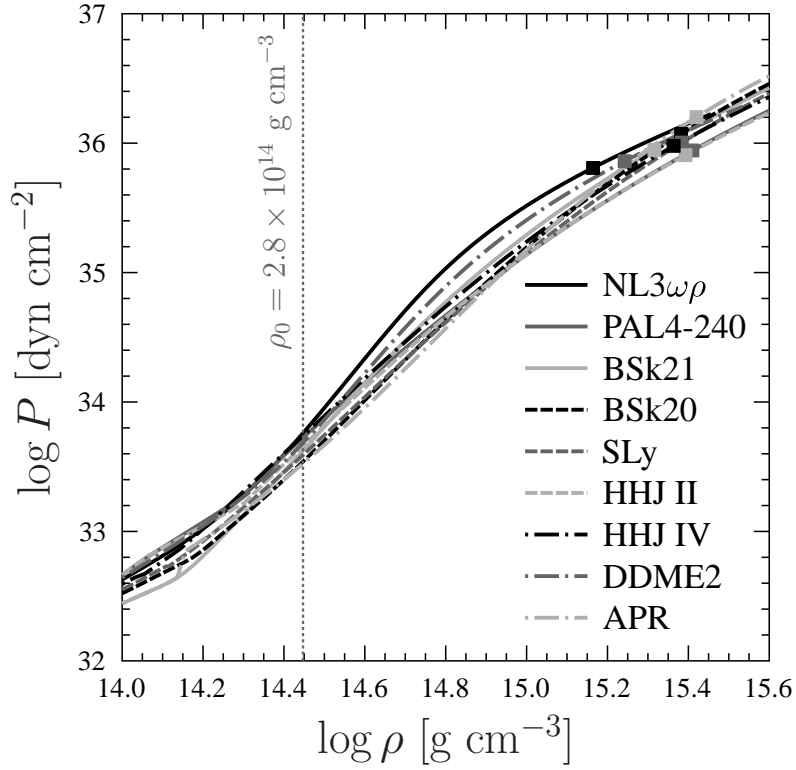


Рис. 1.2. Зависимости  $P(\rho)$  для выбранных уравнений состояния ядер нейтронных звёзд. Квадратики — максимальные центральные плотности недр стабильных нейтронных звёзд. Подробнее см. текст.

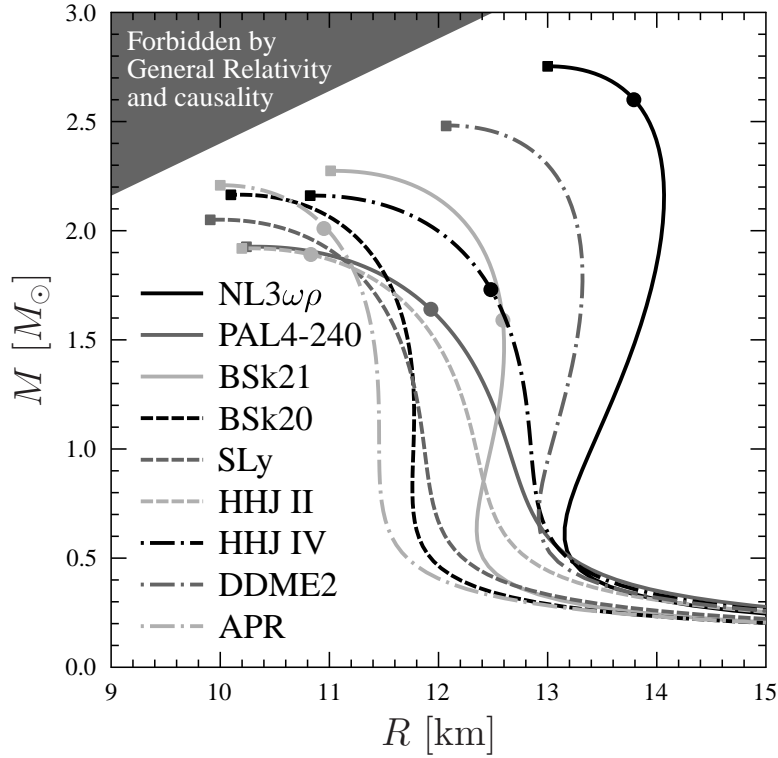


Рис. 1.3. Соотношения  $M - R$  для уравнений состояния, представленных на рис. 1.2. Квадратики — максимальные массы стабильных нейтронных звёзд; кружки — минимальная масса нейтронной звёзды, в недрах которой открыт прямой урка-процесс (см. таблицу 1.3).



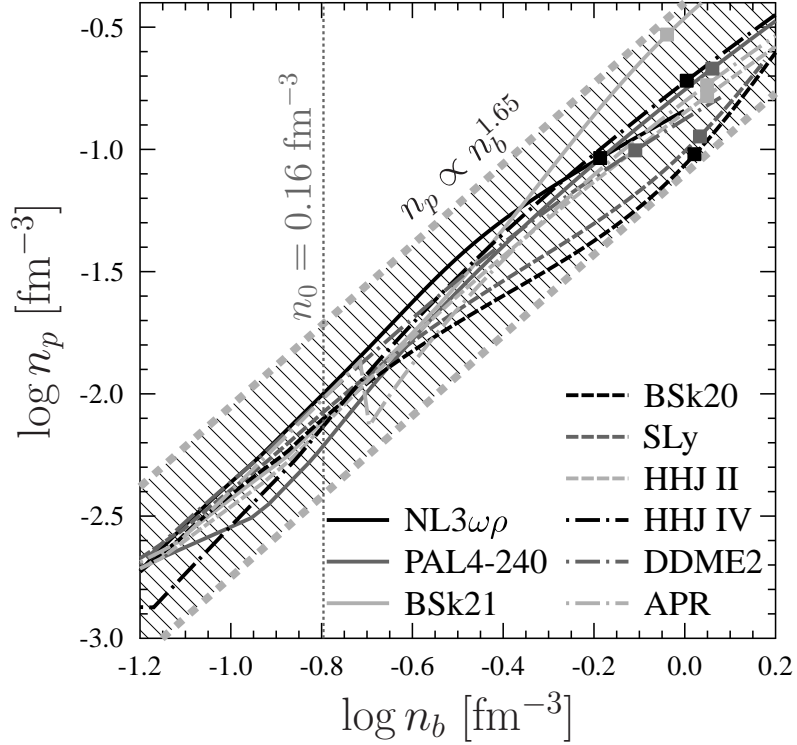


Рис. 1.4. Зависимости  $n_p - n_b$  для рассмотренной выборки уравнений состояния. Квадратики обозначают максимально достижимую концентрацию  $n_b$  в стабильных нейтронных звёздах. Широкая штрихованная полоса соответствует степенному закону  $n_p \propto n_b^{1.65}$ . Подробнее см. текст.

[39]. Модель APR, сама по себе пригодная только для ядра, была дополнена корой с уравнением состояния BSk21. Для остальных уравнений состояния использована модель сглаженного ядерного состава коры [1].

Зависимости давления от плотности  $P(\rho)$  для выбранных моделей уравнения состояния показаны на рис. 1.2. Вблизи стандартной плотности ядерной материи,  $\rho \sim \rho_0$  (вертикальная точечная линия), они похожи. Это связано с тем, что уравнения состояния обычно строятся таким образом, чтобы воспроизвести свойства обычного вещества атомных ядер, хорошо изученные в лабораторных экспериментах.

Наиболее важные параметры нейтронных звёзд для выбранных моделей перечислены в таблице 1.3. Соотношения  $M - R$  показаны на рис. 1.3. Поскольку выбраны достаточно разнообразные уравнения состояния, имеющие существенно различные жёсткости при  $\rho \gtrsim 2\rho_0$ , соотношения  $M - R$  для них также различны и покрывают значительную часть плоскости  $(M, R)$ . Квадратики на рис. 1.3 соответствуют стабильным нейтронным звёздам с максимально возможной массой. Выбранные уравнения состояния согласуются с недавними открытиями [46–48] двух массивных ( $M \approx 2M_\odot$ ) нейтронных звёзд. Кругами отмечены конфигурации, в которых прямой урка-процесс разрешён лишь в центре звезды. Только три уравнения состояния из таблицы 1.3 запрещают прямой урка-процесс для всех стабильных нейтронных звёзд.

Рисунок 1.4 иллюстрирует другое важное свойство выбранных уравнений состояния: соотношение между протонной  $n_p$  и барионной  $n_b = n_n + n_p$  концентрациями. Ширина пучка этих кривых наименьшая при  $n_b \sim n_0$  (вертикальная точечная линия). Это также является следствием калибровки моделей уравнения состояния по стандартной физике ядерной материи. Широкая прямая полоса соответствует зависимости  $n_p \propto n_b^{1.65}$ . Её можно рассматривать как феноменологическое улучшение формулы  $n_p \propto n_b^2$ , являющейся точной для модели нерелятивистского ферми-газа свободных частиц (см., например, [49, 50]). Меньший показатель

степени эффективно учитывает взаимодействие нуклонов. Согласно рисунку 1.4, эта простая аппроксимация оказывается весьма точной, что существенно поможет нам в дальнейшем.

Отметим, что в нашу задачу не входит очень точная аппроксимация уравнений состояния или концентраций различных частиц. Наша цель — найти простые соотношения подобия для этих величин, чтобы использовать их для описания таких интегральных характеристик нейтронных звёзд, как  $C_{\text{core}}$  и  $L_\nu^\infty$ . Данные соотношения подобия можно рассматривать как чисто феноменологические, однако мы стараемся вводить их физически мотивированно. Как будет видно далее, интегрирование по объёму ядра нивелирует погрешность этих соотношений и позволяет с хорошей точностью описать  $C_{\text{core}}$  и  $L_\nu^\infty$  в виде функций  $M$  и  $R$  для широкого класса моделей уравнений состояния.

### 1.3.3. Вычисление нейтринной светимости и теплоёмкости

#### 1.3.3.1. Предварительные замечания

Мы численно рассчитали  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$  и  $C_{\text{core}}(\tilde{T})$  по формулам (1.6) и (1.7) для трёх вариантов нейтринного излучения (таблица 1.1) и пяти вариантов теплоёмкости (таблица 1.2). Была использована частая «сетка» моделей нейтронных звёзд с различными значениями  $M$  для всех девяти моделей уравнений состояния из нашей выборки (раздел 1.3.2, таблица 1.3). В ходе вычислений использовались выражения для  $Q(\rho, T)$  и  $c_{\text{core}}(\rho, T)$  [7], которые также применяются в стандартном коде остывания [51] (при  $m_N^* = 0.7m_N$ ).

К вычислению  $L_{\text{DU}}^\infty(\tilde{T})$  необходимо дать комментарий. Как обсуждалось выше, прямой урка-процесс разрешён только при достижении достаточно высокой плотности во внутренней области ядра массивной звезды. В целях упрощения, мы используем  $Q = Q_{\text{DU}}$  во всём ядре нейтронной звезды (чтобы избежать сложностей, связанных с наличием порога). Такое упрощение качественно оправдано, поскольку, как правило,  $Q_{\text{DU}} \sim 10^6 Q_{\text{MU}}$  (см., например, [16]), и даже маленькое «ядрышко» в центре звезды с разрешённым прямым урка-процессом делает  $L_{\text{DU}}^\infty(\tilde{T})$  много больше, чем  $L_{\text{MU}}^\infty(\tilde{T})$ . Впрочем, такой подход приводит к переоценке  $L_{\text{DU}}^\infty(\tilde{T})$  и позволяет найти лишь верхний предел этой величины (хоть и довольно точный). В рамках такого подхода во всех рассмотренных вариантах зависимость  $L_\alpha^\infty(\tilde{T})$  и  $C_\alpha(\tilde{T})$  от  $\tilde{T}$  жёстко задана (раздел 1.3.1), так что достаточно зафиксировать какое-нибудь значение  $\tilde{T}$  и вычислить  $L_\alpha^\infty(\tilde{T})$  и  $C_\alpha(\tilde{T})$  для различных  $M$  и уравнений состояния. Мы использовали значения массы звезды  $M = 1.0 M_\odot, 1.1 M_\odot, \dots M_{\text{max}}$ . Как сказано выше, при вычислении  $L_{\text{DU}}^\infty$  излучательная способность  $Q_{\text{DU}}$  была экстраполирована на всё ядро, однако в этом случае не рассматривались модели звёзд с  $M < 1.5 M_\odot$ , так как  $M_{\text{DU}} > 1.5 M_\odot$  для всех используемых уравнений состояния (таблица 1.3).

#### 1.3.3.2. Аналитические аппроксимации $L_\nu^\infty$ и $C_{\text{core}}$

Точное аналитическое вычисление интегралов в формулах (1.6) и (1.7) невозможно. Вместо этого, мы получим приближённые аналитические выражения для  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$  и  $C_{\text{core}}(\tilde{T})$  и откалибруем их с использованием численных расчётов.

Разумно предположить, что основной вклад в барионную концентрацию  $n_b = n_n + n_p$  дают нейтроны. С использованием простого феноменологического соотношения  $n_p \propto n_b^{1.65}$ , мы получаем

$$n_n \approx n_b, \quad n_p \approx n_e \approx a n_0 \left( \frac{n_b}{n_0} \right)^{1.65}. \quad (1.16)$$

Здесь  $a$  — безразмерная константа; её следует трактовать как величину, усреднённую по всем уравнениям состояния. Приближение  $n_e \approx n_p$  может существенно нарушаться при высоких плотностях, когда  $n_\mu \sim n_e$  (центральные области очень массивных нейтронных звёзд). Вклад

таких областей в интегральную нейтринную светимость и теплоёмкость может быть приближённо учтён посредством искусственного увеличения электронного вклада. Для  $L_{\text{DU}}^{\infty}(\tilde{T})$  вклад электронного и мюонного прямого урка-процессов одинаков.

Согласно таблице 1.1, мы рассмотрим три случая ( $\alpha = nn$ , MU и DU) для  $L_{\alpha}^{\infty}(\tilde{T})$  в формуле (1.6). Чтобы найти аппроксимацию для  $L_{nn}^{\infty}(\tilde{T})$ , возьмём  $Q = Q_{nn}$  из формулы (1.11). Во втором случае ( $\alpha = \text{MU}$ ) используем  $Q_{\text{MU}}$  из формулы (1.9), причём положим  $\Omega = \text{const}$ . В случае  $\alpha = \text{DU}$  будем использовать формулу (1.10), но заменим сумму электронной и мюонной  $\Theta$ -функций на множитель 2. Поскольку типичные значения плотности, при которой разрешён прямой урка-процесс, настолько велики, что мюоны уже присутствуют в среде, такое упрощение оправдано.

Тогда светимость  $L_{\nu}^{\infty}(\tilde{T})$  может быть оценена по формуле (1.6) с помощью метода средней точки, т.е. с использованием подынтегрального выражения при некотором фиксированном значении  $r = r^*$  между 0 и  $R_{\text{core}}$ :

$$L_{\nu}^{\infty} = Q_0 R^3 \tilde{T}_9^n \times a' \left( \frac{R_{\text{core}}}{R} \right)^3 \frac{(n_{b^*}/n_0)^{k/3} \exp[(2-n)\Phi_*]}{\sqrt{1-2Gm_*/(r_*c^2)}}. \quad (1.17)$$

Здесь  $k = 1$ ,  $n = 8$  и  $Q_0 = Q_{nn0}$  при  $\alpha = nn$ ;  $k = 1.65$ ,  $n = 8$  и  $Q_0 = Q_{\text{MU}0}$  при  $\alpha = \text{MU}$ ;  $k = 1.65$ ,  $n = 6$  и  $Q_0 = Q_{\text{DU}0}$  при  $\alpha = \text{DU}$ . В формуле (1.17) введена безразмерная константа  $a'$ , учитывающая неточность  $L_{\nu}^{\infty}$ , которая возникает из-за использованных упрощений для  $n_p(n_b)$  и  $\Omega$  в случаях DU и MU; в случае  $nn$  положим  $a' = 1$ . Значения  $n_{b^*}$ ,  $\Phi_*$  and  $m_*$  вычислены в средней точке, т.е. на сферической поверхности  $r = r_*$ .

Пять основных вариантов теплоёмкости (таблица 1.2) могут быть представлены в аналогичном виде:

$$C_{\text{core}} = c_0 R^3 \tilde{T}_9 \times b' \left( \frac{R_{\text{core}}}{R} \right)^3 \frac{(n_{b^*}/n_0)^{k/3} \exp(-\Phi_*)}{\sqrt{1-2Gm_*/(r_*c^2)}}. \quad (1.18)$$

Согласно формуле (1.14), в случае  $C_n$  следует использовать значения  $k = 1$  и  $b' = 1$ . В случае  $C_p$  из формулы (1.16) следует  $k = 1.65$ . В случае  $C_{\ell}$ , мы предполагаем, что основной вклад в лептонную теплоёмкость дают электроны и используем выражение (1.15); с помощью соотношения (1.16) получаем  $k = 2 \times 1.65 = 3.30$ . Предполагается, что константа  $b'$  в последних двух случаях вберёт в себя погрешности, возникающие из-за описанных аналитических допущений. Мы считаем, что основной вклад в теплоёмкости  $C_{\text{tot}}$  и  $C_{\text{ne}}$  дают нейтроны, поэтому используем  $k = 1$  в обоих этих случаях и надеемся, что должный подбор  $b'$  позволит сделать аппроксимации достаточно точными.

В качестве следующего шага рассмотрим политропную модель уравнения состояния,  $P = K\rho^{\gamma}$ , где  $K$  и  $\gamma$  — параметры модели. Она крайне примитивна, но полезна при поиске аналитических аппроксимаций. В этом случае справедливо выражение

$$P = c^2 n_b^2 \frac{d(\rho/n_b)}{dn_b}. \quad (1.19)$$

Тогда, пользуясь политропностью и предполагая граничное условие  $d\rho/dn_b = m_0$  вблизи поверхности нейтронной звезды, мы получаем

$$n_b = \frac{\rho}{m_0} \left( 1 + \frac{K}{c^2} \rho^{\gamma-1} \right)^{-1/(\gamma-1)}. \quad (1.20)$$

Здесь  $m_0$  — масса, приходящаяся на один барион в ядре  $^{56}\text{Fe}$ . Для любой нейтронной звезды можно найти такие  $\rho_*$ ,  $K$  и  $\gamma$ , чтобы при подстановке в формулу (1.20) получалось значение  $n_{b^*}$ , требующееся для выражений (1.17) и (1.18). Обращаем внимание, что подбираемое значение  $\gamma$  будет различным для нейтронных звёзд разной массы; оно будет слегка увеличиваться с ростом  $M$ .

Таблица 1.4. Параметры аппроксимаций (1.25) и (1.26) для трёх основных моделей нейтринной светимости  $L_\nu^\infty$  и пяти моделей теплоёмкости  $C_{\text{core}}$ .

$L_\nu^\infty / C_{\text{core}}$	$Q_0^\dagger / c_0^\ddagger$	$n$	$k$	$p$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	rms	max	
$nn$	$1.77 \times 10^{19}$	8	1	6	3.54	0.0125	2.73	4.33	0.509	0.05	0.17	
$L_\nu^\infty$	MU	$1.75 \times 10^{21}$	8	1.65	6	2.05	0.0125	2.58	4.40	0.15	0.42	
	DU	$1.96 \times 10^{27}$	6	1.65	4	1.80	0.0070	2.62	4.80	0.08	0.20	
$C_{\text{core}}$	$n$	$1.12 \times 10^{20}$	1	1	1	2.86	0.0119	2.49	3.68	0.408	0.0084	0.025
	$p$	$1.12 \times 10^{20}$	1	1.65	1	0.781	0.0069	2.70	5.75	0.657	0.062	0.17
	$\ell$	$1.12 \times 10^{20}$	1	3.30	1	0.0823	0.0033	2.60	5.00	0.800	0.14	0.31
	$tot$	$1.12 \times 10^{20}$	1	1	1	4.17	0.0130	2.59	3.50	0.800	0.023	0.075
	$n\ell$	$1.12 \times 10^{20}$	1	1	1	3.01	0.0130	2.59	3.50	0.799	0.015	0.047

$^\dagger$ эрг см $^{-3}$  с $^{-1}$ ;  $^\ddagger$ эрг см $^{-3}$  К $^{-1}$

Вычислим теперь связь между  $\Phi_*$  и  $\rho_*$ . Используя соотношение (1.20), получаем решение уравнения (1.2в) в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln(1 - x_g) - \ln \left( \frac{P + \rho c^2}{m_0 c^2 n_b} \right). \quad (1.21)$$

Здесь использовано граничное условие  $\Phi_s = \frac{1}{2} \ln(1 - x_g)$  на поверхности звезды и введён безразмерный параметр  $x_g = 2GM/(Rc^2)$ . В рамках политропной модели имеем

$$\exp \Phi_* = \sqrt{1 - x_g} \left( 1 + \frac{K}{c^2} \rho_*^{\gamma-1} \right)^{-\gamma/(\gamma-1)}. \quad (1.22)$$

Безразмерная величина  $\xi(M, R) = R/R_{\text{core}}$  вычислена в статьях [52, 53] в виде

$$\xi(M, R) \equiv \frac{R}{R_{\text{core}}} = 1/x_g - \exp(-2\chi_{cc})(1/x_g - 1), \quad (1.23)$$

где  $\chi_{cc} = \int_0^{P_{cc}} dP/(P + \rho c^2)$  интегрируется по всему объёму коры, а  $P_{cc}$  — давление на границе коры и ядра. Для равновесного вещества  $\exp(\chi_{cc}) = \mu_{cc}/m_0 c^2$ , где  $\mu$  — химический потенциал барионов. Значение  $\chi_{cc}$  слегка меняется от одного уравнения состояния к другому, но мы будем использовать  $\chi_{cc} = 0.03$  для всех исследуемых моделей.

Чтобы найти подгоночные выражения для  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$  и  $C_{\text{core}}(\tilde{T})$ , подставим выражения (1.20), (1.22) и (1.23) в формулы (1.17) и (1.18) и зададим параметры  $a'$ ,  $b'$ ,  $\rho_*$ ,  $m_*$ ,  $r_*$ ,  $\gamma$  и  $K$  следующим образом. Введём безразмерную величину  $x_\rho = M/(\rho_0 R^3)$ , и предположим, что  $\rho_* \sim M/R_{\text{core}}^3$ . Тогда аппроксимации будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} a' \\ b' \end{array} \right\} \left( \frac{\rho_*}{m_0 n_0} \right)^{k/3} \rightarrow a_1 \xi^k x_\rho^{k/3}, \quad (1.24a)$$

$$K \rho_*^{\gamma-1} / c^2 \rightarrow (a_2 x_\rho \xi^3)^{\gamma-1}, \quad (1.24б)$$

$$\gamma \rightarrow \frac{a_3}{1 + a_4 \xi \sqrt{x_g^5 / x_\rho}}, \quad (1.24в)$$

$$\frac{2Gm_*}{r_* c^2} \rightarrow a_5 x_g, \quad (1.24г)$$

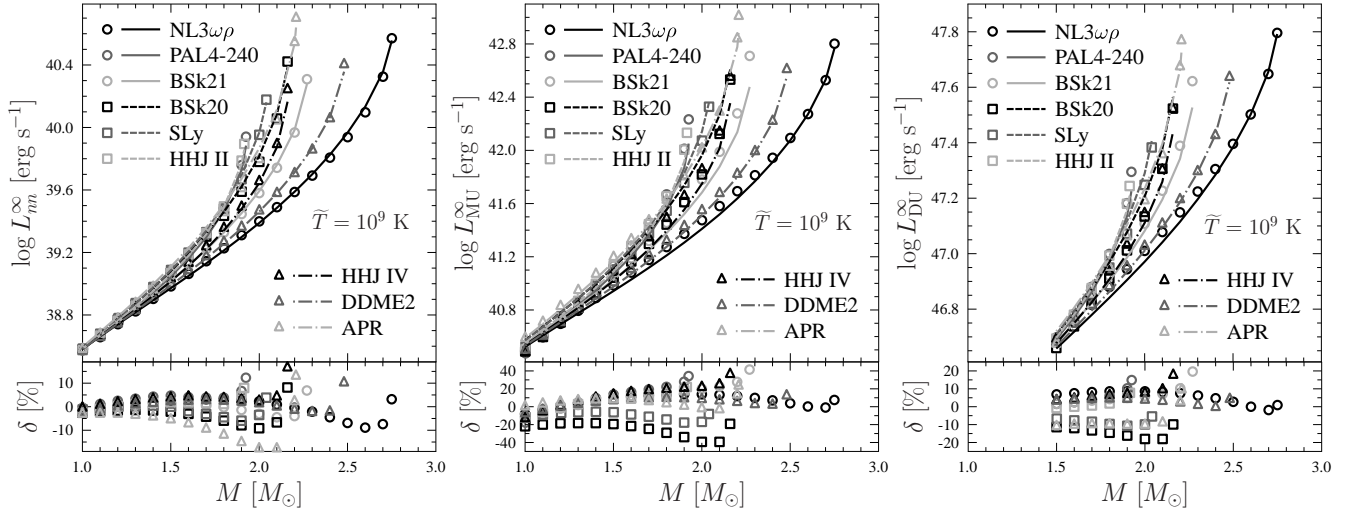


Рис. 1.5. Соотношения  $L_\nu^\infty - M$  для используемых девяти уравнений состояния при  $\tilde{T} = 10^9$  К. Кривые — аппроксимация (1.26); квадратики, кружки, треугольники — численный расчёт по формуле (1.6). Для  $L_{\text{DU}}^\infty$  прямой урка-процесс искусственно экстраполирован на всё ядро, но вычисления проведены только при  $M \geq 1.5M_\odot$ . Внизу изображены относительные ошибки аппроксимации. Детали см. в тексте.

где  $a_1, \dots, a_5$  — подгоночные параметры, определяемые калибровкой по «точным», численно рассчитанным значениям  $L_\nu^\infty$  и  $C_{\text{core}}$ . Параметры  $a_1, \dots, a_5$  будут различны для разных подгоняемых величин из таблиц 1.1 и 1.2. Отметим, что выражение (1.24в) для  $\gamma$  введено феноменологически.

Далее удобно ввести безразмерную функцию

$$J_{kp}(M, R) = a_1 \xi^{k-3} \frac{x_\rho^{k/3} \left[ 1 + (a_2 x_\rho \xi^3)^{\gamma-1} \right]^{\frac{p\gamma-k/3}{\gamma-1}}}{(1-x_g)^{p/2} \sqrt{1-a_5 x_g}} \quad (1.25)$$

где  $\xi$  определяется выражением (1.23), а  $\gamma$  — формулой (1.24в). Наконец, итоговая аппроксимация принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{c} L_\nu^\infty(\tilde{T}) \\ C_{\text{core}}(\tilde{T}) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} Q_0 \\ c_0 \end{array} \right\} R^3 \tilde{T}_9^n J_{kp}(M, R). \quad (1.26)$$

Значения степеней  $n$ ,  $p$  и  $k$  берутся из формул (1.17) и (1.18); они приведены в таблице 1.4. Безразмерные параметры  $a_1, \dots, a_5$  в (1.25) будут получены ниже в процессе подгонки результатов численных расчётов выражением (1.26).

### 1.3.3.3. Калибровка аппроксимаций по численным расчётам

Результаты численных расчётов согласно методу из раздела 1.3.3.1 показаны различными символами на рисунках 1.5–1.7. Было получено 123 значения  $L_\alpha^\infty$  (для  $\alpha = nn$  и MU), равно как и 123 значения для  $C_\alpha$  (для каждого  $\alpha = n, p, \ell, tot, nl$ ). Для  $L_{\text{DU}}^\infty$  были исключены из рассмотрения 45 точек с  $M < 1.5 M_\odot$ . Подгоняемые функции  $L_\nu^\infty(M, R)$  и  $C_{\text{core}}(M, R)$  [выражения (1.25) и (1.26)] калибровались по этим наборам данных. Оптимальной подгонкой считалась та, что минимизирует среднеквадратичную ошибку. Также приведены значения наибольшей относительной ошибки аппроксимации. Параметры  $Q_0$ ,  $c_0$ ,  $n$ ,  $p$  и  $k$  считались известными и заданными, согласно рассуждениям из раздела 1.3.3.2. Подгонка осуществлялась посредством варьирования  $a_1, \dots, a_5$  в целях минимизации среднеквадратичной ошибки. Полученные значения этих параметров (с минимальным числом значащих цифр, необходимых

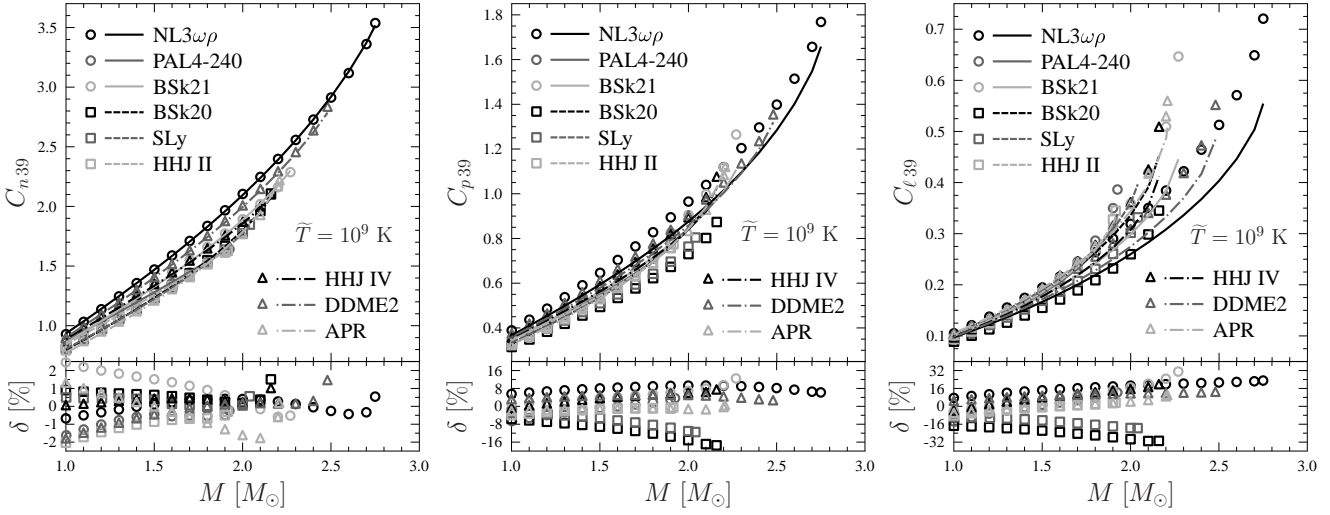


Рис. 1.6. Соотношения  $C_{\text{core}} - M$  для используемых девяти уравнений состояния при  $\tilde{T} = 10^9 \text{ K}$ , где  $C_{\alpha 39} = C_{\alpha} / (10^{39} \text{ erg K}^{-1})$  для  $\alpha = n, p$  и  $\ell$ . Кривые — аппроксимация (1.26); квадратики, кружки и треугольники — численный расчёт по формуле (1.7). Внизу изображены относительные ошибки аппроксимации. Детали см. в тексте.

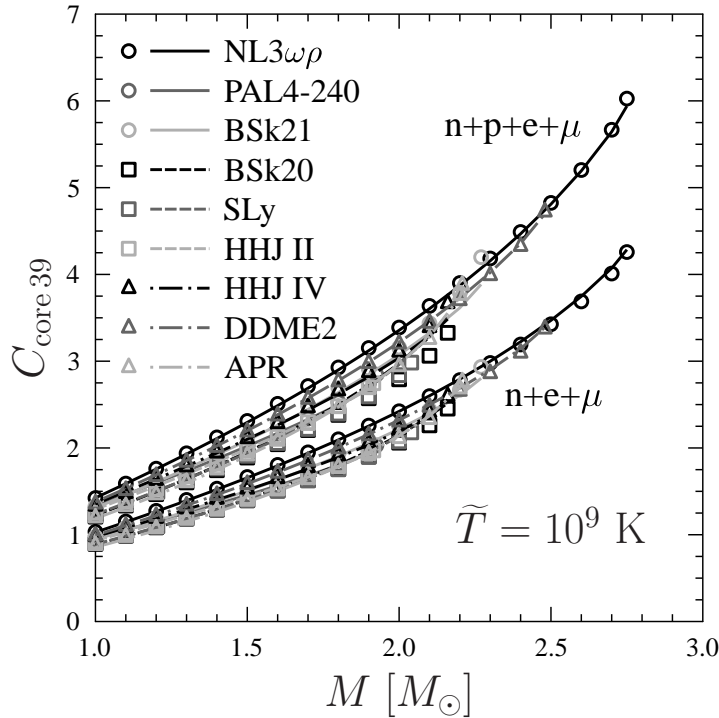


Рис. 1.7. Зависимость  $C_{\text{core}} - M$  для используемой выборки из девяти уравнений состояния при  $\tilde{T} = 10^9 \text{ K}$ ;  $C_{\text{core}39} = C_{\text{core}} / (10^{39} \text{ erg K}^{-1})$ . Обозначения те же, что и на рисунке 1.6. Набор кривых "n + p + e +  $\mu$ " = "tot" соответствует полностью несверхтекучему ядру звезды. Кривые "n + e +  $\mu$ " = "n $\ell$ " соответствуют ядру с полностью сверхтекучими протонами и нормальными нейтронами. Подробнее см. текст.

для определения среднеквадратичной ошибки с точностью до двух знаков), равно как и соответствующие погрешности аппроксимаций, приведены в таблице 1.4. На рисунках 1.5–1.7 аппроксимации сопоставлены с численными расчётами светимостей и теплоёмкостей. Заметим также, что аппроксимации отношения  $L_\nu^\infty/C$ , полученные ранее в [7, 22], согласуются с результатами данной главы, но являются менее полными.

Сделаем несколько замечаний касательно аппроксимаций  $L_\nu^\infty$ . Наиболее точно воспроизводится светимость  $L_{nn}^\infty$ ; среднеквадратичная ошибка оказывается в данном случае самой маленькой, т.к. величина  $Q_{nn}$  не зависит от фракции заряженных частиц. Наибольшими оказываются ошибки аппроксимации светимости за счёт модифицированного урка-процесса, т.к. величина  $Q_{\text{MU}}$  наиболее чувствительна к содержанию заряженных частиц из-за наличия множителя  $\Omega$ . Аппроксимация  $L_{\text{DU}}^\infty$  оказывается более точной, чем  $L_{\text{MU}}^\infty$ , из-за относительно простого вида зависимости  $Q_{\text{DU}}$  от  $n_e$ .

Важная роль заряженных компонент вещества чётко прослеживается на примере двух моделей уравнения состояния, BSk20 и ННJ IV. На рисунках 1.3–1.5 соответствующие кривые изображены чёрными штрихами (BSk20) и штрих-пунктиром (ННJ IV). Результаты численных расчётов светимости на рисунке 1.5 показаны чёрными квадратиками (BSk20) и треугольниками (ННJ IV). Согласно рисунку 1.3, эти уравнения состояния дают очень близкие значения максимальной массы нейтронной звезды, но звёзды из вещества с уравнением состояния BSk20 более компактны, т.е. имеют меньшие радиусы, чем звёзды той же массы, но с уравнением состояния ННJ IV. Грубо говоря, соотношения  $M - R$  для этих уравнений состояния отличаются сдвигом вдоль оси  $R$ . Это означает, что звёзды в модели BSk20 плотнее, чем в модели ННJ IV, и, следовательно, должны иметь более высокую светимость  $L_\nu^\infty$ . Это оказывается справедливым для  $L_{nn}^\infty$  (рисунок 1.5): квадратики (уравнение состояния BSk20) расположены выше треугольников (модель ННJ IV). Это свойство хорошо воспроизводится чёрными штриховыми и штрих-пунктирными линиями, изображающими аппроксимацию (1.26) для данных уравнений состояния. Иная ситуация складывается со светимостями за счёт модифицированного (MU) и прямого (DU) урка-процессов. Их излучательные способности чувствительны к соотношению  $n_p(n_b)$ . Согласно рисунку 1.4, значения  $n_p$  для уравнения состояния ННJ IV заметно выше, чем для BSk20. Противонаправленное влияние двух эффектов, более высокой компактности звёзд в модели BSk20 и более высокой фракции протонов в звёздах ННJ IV, приводит к их компенсации. Поэтому как DU-, так и MU-светимости для этих уравнений состояния оказываются достаточно близкими (соответственно, квадратики и треугольники на средней и правой панелях на рисунке 1.5 перекрываются). Поскольку аппроксимация (1.26) получена с использованием довольно грубого описания протонной, электронной и мюонной компонент, она не может в точности воспроизвести описанный эффект; подгонка даёт завышенные значения  $L_{\text{DU}}^\infty$  и  $L_{\text{MU}}^\infty$  в модели BSk20 и заниженные — в модели ННJ IV.

Другое проявление невозможности аккуратно учесть эффекты, связанные с заряженными фракциями, состоит в том, что MU- и DU-светимости для звёзд с уравнениями состояния BSk20 и SLy систематически завышаются в рамках аппроксимации (1.26), что связано с существенно меньшим содержанием заряженных частиц в этих моделях уравнения состояния относительно остальных.

Обсудим теперь аппроксимации теплоёмкости (рисунки 1.6 и 1.7). Вклад нейтронов (слева на рисунке 1.6) хорошо воспроизводится подгонкой (1.26). Она оказывается достаточно точной, чтобы различать крайне близкие соотношения  $C_n - M$  для различных уравнений состояния. Напротив, аппроксимации  $C_p$  и  $C_\ell$  практически не позволяют воспроизводить различия выбранных уравнений состояния. Минимизированные ошибки аппроксимации оказываются больше, чем для  $C_n$ : в 7 раз для  $C_p$  и в 12–15 раз для  $C_\ell$ . Причина тому — невозможность достаточно точно воспроизвести эффекты, определяемые зависимостями  $n_p(n_b)$  и  $n_e(n_b)$ , исключительно с помощью функций  $M$  и  $R$ . Как и в случае нейтринных светимо-

стей, численный расчёт  $C_p$  и  $C_\ell$  в моделях BSk20 и SLy приводит к систематически меньшим значениям, чем предсказывают аппроксимации. Тем не менее, поскольку  $C_n$  доминирует над остальными вкладами, аппроксимация (1.26) с высокой точностью воспроизводит  $C_{tot}$  и  $C_{n\ell}$  (рисунок 1.7). Разница между значениями  $a_1$  отражает тот факт, что исключение вклада протонов уменьшает  $C_{core}$  примерно на 25%, в согласии с результатами [38]. Отметим, что сумма аппроксимаций  $C_n + C_p + C_\ell$  имеет погрешность на 1–2% больше, чем аппроксимация  $C_{tot}$ , вычисленная по формуле (1.26) с параметрами из предпоследней строчки в таблице 1.4.

В заключение укажем несколько общих свойств полученных аппроксимаций. Во-первых, показатель степени  $\gamma$  [формула (1.24в) с подстановкой  $a_3$  и  $a_4$  из таблицы 1.4] варьируется в пределах от 2.3–2.5 для маломассивных звёзд до 1.7–1.9 для очень массивных. Это выглядит правдоподобным для рассмотренной выборки уравнений состояния. Во-вторых, погрешность аппроксимации увеличивается с ростом  $M$  (кроме точной подгонки нейтронной теплоёмкости), потому что чем выше плотность, тем сильнее различие между моделями уравнений состояния.

Использованная выборка моделей уравнений состояния широка, но, тем не менее, ограничена. Например, для всех моделей  $M_{DU} > 1.5 M_\odot$  (см. таблицу 1.3), что представляется разумным ограничением (см., например, [54] и ссылки там), но не может быть строго обосновано. Чтобы проверить “универсальность” наших аппроксимаций, мы исследовали, насколько хорошо они описывают модель уравнения состояния NL3 [39] ( $M_{DU} = 0.84 M_\odot$  и  $M_{max} = 2.77 M_\odot$ ). Значения параметров  $a_1 \dots a_5$  при этом брались из таблицы 1.4. В целом погрешность аппроксимации оказалась близкой к той, что получается для выборки, описанной в разделе 1.3.2. Например, максимальные относительные ошибки для  $nn$ -, MU- and DU-светимостей в модели NL3 оказываются 0.07, 0.39 и 0.22, в то время как для используемой выборки мы имеем 0.17, 0.42 и 0.29 (таблицы 1.3 и 1.4). Для теплоёмкостей  $n$ ,  $p$ ,  $\ell$ ,  $tot$ ,  $n\ell$  в случае NL3 получаем 0.09, 0.22, 0.47, 0.09 и 0.07 против 0.025, 0.17, 0.31, 0.075, 0.047 для выборки из таблицы 1.3.

### 1.3.4. Роль гравитационного красного смещения в недрах нейтронных звёзд

При вычислении  $L_\nu^\infty$  и  $C_{core}$  крайне важно учитывать гравитационное красное смещение локальной температуры вещества и излучательной способности в ядре звезды.

Например, на рисунке 1.8 показана излучательная способность  $Q = Q_{MU}(\rho)$  «стандартной нейтринной свечи» (т.е. за счёт модифицированного урка-процесса) в несверхтекучем изотермическом ядре нейтронной звезды. Рассмотрены три различных уравнения состояния; во всех случаях масса звезды  $M = 1.4 M_\odot$ . Для определённости выбрана температура  $10^9$  К. Группа чёрных линий рассчитана с использованием «правильной» температуры, т.е. постоянной по объёму ядра считалась  $\tilde{T} = 10^9$  К, а локальная температура менялась согласно закону  $T = \tilde{T} \exp[-\Phi(r)]$ . Локальная температура оказывается выше, чем сдвинутая по красному смещению. Группа серых линий рассчитана в предположении постоянства локальной температуры  $T = 10^9$  К по ядру, т.е. без учёта эффекта красного смещения. Излом  $Q_{MU}$  при низких  $\rho$  соответствует появлению мюонов и мюонного MU-процесса (например, [16]). Видно, что красное смещение температуры — эффект ОТО — приводит к увеличению излучательной способности на порядок и более. Его необходимо учитывать для правильного расчёта нейтринной светимости  $L_\nu^\infty$ . По мере приближения к центру звезды этот эффект становится сильнее (красное смещение к центру увеличивается). Таким образом, красное смещение сильно увеличивает интегральную нейтринную светимость  $L_\nu^\infty$  и вклад центральных областей ядра в  $L_\nu^\infty$ .

Чтобы продемонстрировать эти эффекты, мы вычислили интегралы (1.6) и (1.7), игнорируя все множители  $\exp \Phi$ . Технически это означает использование «ньютоновской» модели теплового равновесия,  $T = const$ . Рассчитанные таким образом величины далее будут имено-



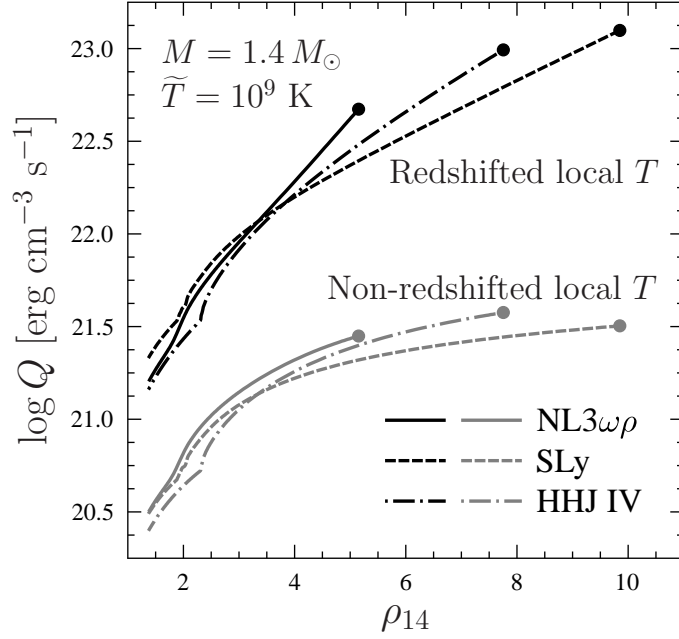


Рис. 1.8. Зависимость нейтринной излучательной способности  $Q = Q_{\text{MU}}$  (стандартная «нейтринная свеча») от плотности вещества ядра в нейтронной звезде с массой  $1.4 M_{\odot}$  для различных уравнений состояния. Ядро звезды считается изотермическим,  $\tilde{T} = 10^9$  К. Верхняя группа кривых (чёрные) рассчитана с использованием локальной температуры  $T = \tilde{T}e^{-\Phi}$ , сдвинутой по красному смещению. Нижние (серые) кривые вычислены с игнорированием красного смещения,  $T = \tilde{T}$ . Излом кривых при плотности  $\sim 2 \times 10^{14}$  г см<sup>-3</sup> соответствует появлению мюонов. Кружками отмечены  $Q$  и  $\rho$  в центре звезды. Масштаб по оси ординат логарифмический.

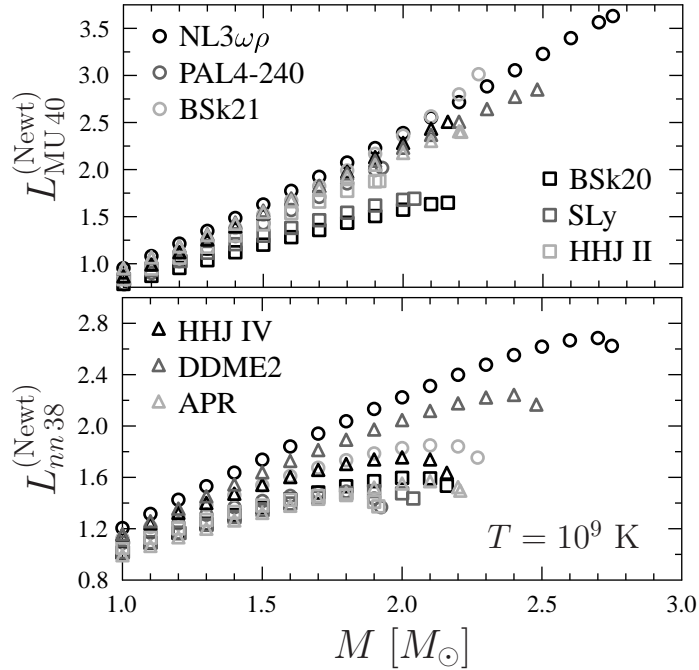


Рис. 1.9. Зависимость  $L_{\nu}^{(\text{Newt})}$  от массы звезды  $M$  для тормозного излучения нейтринных пар нейтронами (внизу, в единицах  $10^{38}$  эрг с<sup>-1</sup>) и MU-процесса (вверху, в единицах  $10^{40}$  эрг с<sup>-1</sup>) для девяти рассмотренных моделей уравнения состояния. Температура  $\tilde{T} = 10^9$  К.

ваться «ньютоновскими»,  $L_\nu^{(\text{Newt})}$  и  $C_{\text{core}}^{(\text{Newt})}$ . Истинные значения интегралов (1.6) и (1.7) будут именоваться «релятивистскими».

На рисунке 1.9 показаны «ньютоновские»  $nn$ - и МУ-светимости. При сравнении их с тем, что изображено слева и посередине на рисунке 1.5 («релятивистские»  $nn$ - и МУ-светимости), видно явное различие между зависимостями  $L_\nu^\infty$  и  $L_\nu^{(\text{Newt})}$  от массы звезды  $M$ . При увеличении  $M$  от  $1 M_\odot$  до  $\sim 3 M_\odot$ , «ньютоновские» светимости меняются всего в два–три раза, в то время как «релятивистские» величины увеличиваются на два порядка. Более того, зависимость  $L_{nn}^{(\text{Newt})}$  от массы становится немонотонной вблизи максимальной массы вследствие резкого уменьшения радиуса звезды. Этот эффект исчезает в рамках «релятивистского» расчёта  $nn$ -светимости, потому что множитель  $\exp(-6\Phi)$ , отвечающий за суммарный вклад всех красных смещений в подинтегральном выражении в формуле (1.6), становится большим ( $\sim 10 - 100$ ) для звёзд с большой массой. Другая особенность «ньютоновской» светимости  $L_{nn}^\infty$  — инверсный порядок точек, отвечающих различным уравнениям состояния при одном и том же значении  $M$ , по отношению к «релятивистской» светимости. Для  $L_{\text{МУ}}^{(\text{Newt})}$  этот порядок нарушается нерегулярным образом, поскольку на первый план выходит зависимость МУ-светимости от содержания заряженных частиц. В этом случае порядок точек, отвечающих одной и той же массе, более похож на порядок следования значений  $n_p$  на рисунке 1.4 при заданном  $n_b$ . Напротив, порядок «релятивистских» МУ-светимостей на рисунке 1.5 не соотносится с порядком кривых  $n_p - n_b$  на рисунке 1.4.

Заметим, что нейтронный вклад в  $C_{\text{core}}^{(\text{Newt})}$  и в  $L_{nn}^{(\text{Newt})}$  даётся почти одним и тем же интегралом, но во втором случае делается замена  $Q_{0nn}$  из формулы (1.11) на  $c_0$  из выражения (1.14). Поэтому график  $C_n^{(\text{Newt})}(M)$  имеет такой же вид, как и нижняя часть рисунка 1.9. Отличие от «релятивистской» теплоёмкости (слева на рисунке 1.6) оказывается не таким существенным, как для светимости, но кривая  $C_{\text{core}}(M)$ , вычисленная по точной формуле (1.7), имеет вогнутую форму, в то время как для «ньютоновских» теплоёмкостей графики зависимости от массы выпуклые.

Проведённый анализ показывает, что истинные, «релятивистские» светимости и теплоёмкости в значительной степени определяются гравитационным красным смещением внутри звезды. Оно как минимум так же важно, как и эффекты ядерной физики и физики фермижидкости, например, соотношение  $n_p - n_b$  и зависимость излучательной способности от концентраций различных частиц.

## 1.4. Нейтринная светимость коры нейтронной звезды

Можно поставить аналогичную задачу по отысканию аналитической формы нейтринной светимости коры звезды. В системе отсчёта удалённого наблюдателя эта светимость описывается выражением

$$L_{\text{cr}} = \int_{\text{crust}} Q \exp(2\Phi) dV. \quad (1.27)$$

Здесь  $Q$  — нейтринная излучательная способность вещества коры, зависящая от его плотности, состава и температуры,  $dV$  — элемент собственного объёма коры. Интегрирование ведётся по всему её объёму.

Как и раньше, будем считать, что звезда уже достигла состояния тепловой релаксации. Тогда её кора практически изотермична, и сдвинутая по красному смещению температура  $\tilde{T}$  постоянна по всему её объёму, кроме тонкого приповерхностного слоя — теплоизолирующей оболочки, чей вклад в  $L_{\text{cr}}$  пренебрежимо мал. В этом случае локальная температура коры определяется выражением  $T(r) = \tilde{T} \exp(-\Phi)$ . Так как кора тонкая (её толщина  $\sim 0.1R$ ) и содержит  $\sim 0.01$  полной массы звезды, её структура может быть рассчитана в рамках

релятивистского приближения Каулинга, практически независимо от модели уравнения состояния ядра звезды. Метрический коэффициент  $g_{00}$  в коре может быть представлен в виде  $g_{00} = 1 - r_g/r$ , где  $r_g = 2GM/c^2$  — шварцшильдовский радиус звезды. Градиент давления в коре приближённо равен [ср. с уравнением (1.2а)]

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho M}{r^2} \frac{1}{1 - r_g/r}. \quad (1.28)$$

Вместо переменной интегрирования  $r$  в (1.27) будем использовать новую переменную  $s$ , определённую согласно выражению

$$s(P) = \int_0^P \frac{dP}{\rho c^2}, \quad (1.29)$$

где  $P = P(r)$ . Тогда

$$L_{\text{cr}} = 8\pi r_g^3 \Gamma^5 \int_{s_b}^{s_{\text{cc}}} \frac{Q \exp[-3(s - s_b)]}{\{\Gamma^2 - \exp[-2(s - s_b)]\}^4} ds. \quad (1.30)$$

Здесь  $s_b$  соответствует дну теплоизолирующей оболочки ( $\rho = \rho_b = 10^{10}$  г см $^{-3}$ ), а  $s_{\text{cc}}$  — границе между корой и ядром ( $\rho_{\text{cc}} \approx 1.5 \times 10^{14}$  г см $^{-3}$ );  $\Gamma = 1/\sqrt{1 - r_g/R}$ .

Рассмотрим важный случай, когда основной вклад в  $L_{\text{cr}}$  вносит излучение нейтринных пар при столкновении вырожденных электронов с атомными ядрами. Излучательная способность за счёт этого процесса была исследована в работе [55] и аналитически аппроксимирована в [56]. Схематично её можно представить в виде  $Q \propto T^6 \Lambda(\rho, T)$ , где  $\Lambda$  — кулоновский логарифм (относительно медленная функция  $T$  и  $\rho$ ), а нормировочный множитель зависит только от  $\rho$ . Более того, кулоновский логарифм ведёт себя как плавная функция своих аргументов при существенно более высоких значениях плотности, которые как раз и дают основной вклад в  $L_{\text{cr}}$  (см., например, [55, 56]). При  $T \sim 10^7 - 10^8$  К имеем  $\Lambda \propto T^2$ , а при  $T \sim 10^9$  К кулоновский логарифм  $\Lambda \propto T$ . Однако температура коры нейтронной звезды, при которой процесс тормозного излучения нейтрино доминирует над другими, лежит в диапазоне  $3 \times 10^7 - 10^9$  К, так что приходится пользоваться сшивкой двух указанных асимптотик.

Можно также выделить два участка характерного поведения нейтринной светимости в зависимости от параметра  $\Gamma$ . При  $(\Gamma - 1) \sim 1$  в знаменателе подынтегрального выражения (1.30) можно пренебречь величиной  $(s - s_b) \sim c_s^2/c^2 \ll 1$  ( $c_s$  — скорость звука в коре). В этом случае вклад знаменателя выразится в пропорциональности  $L \propto (\Gamma^2 - 1)^{-4}$ . При  $(\Gamma - 1) \ll 1$  величиной  $s - s_b$  пренебречь нельзя. Теперь знаменатель под интегралом (1.30) оказывается резкой функцией в сравнении с числителем, чьим изменением при интегрировании можно пренебречь. В результате при таких  $\Gamma$  получим  $L \propto (\Gamma^2 - 1)^{-3}$ . Однако для нейтронной звезды  $\Gamma \sim 1.1 - 1.5$ , вследствие чего необходимо снова пользоваться сшивкой описанных асимптотик.

С учётом сказанного можно показать, что в диапазоне температур, масс и радиусов звезды, представляющих практический интерес, нейтринная светимость коры  $L_{\text{cr}}$  может быть аппроксимирована выражением

$$L_{\text{cr}} = 9.053 \times 10^{34} \text{ erg s}^{-1} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 \frac{\tilde{T}_9^6 \Gamma^{11}}{(\Gamma^2 - 1)^4} \frac{\phi(y)}{\psi(z)}, \quad (1.31)$$

где  $y = \tilde{T}_9 \Gamma / 1.0643$ ,  $z = \Gamma^2 - 1$ ,

$$\phi(y) = ay \frac{(y - 1) \exp(-py) + 1}{p + 1}, \quad a = 1.7, \quad p = 13.0; \quad (1.32a)$$

$$\psi(z) = \left( \frac{b}{z} - 1 \right) \exp(-qz) + 1, \quad b = 0.1, \quad q = 15.0. \quad (1.32b)$$

Данная аппроксимация получена для произвольного уравнения состояния коры, но при использовании модели сглаженного равновесного ядерного состава коры [1]. Подгоночные коэффициенты в выражении (1.31) для  $L_{\text{cr}}$  калибровались путём сравнения с численными расчётами светимости по формуле (1.30), проведёнными с использованием различных моделей уравнения состояния коры. Так, рассматривались модели уравнения состояния FPS и SLy [1] (с заменой оригинального ядерного состава на сглаженный). Использовался широкий диапазон масс  $1.0 M_{\odot} \leq M \leq 2.5 M_{\odot}$ , радиусов  $10 \leq R \leq 16$  км и температур  $3 \times 10^7 \leq \tilde{T} \leq 10^9$  К. Не смотря на то, что в отдельных случаях аппроксимированные значения отличаются от подгоняемых в несколько раз, качественный характер зависимости воспроизводится. Кроме того, мы рассчитали  $L_{\text{cr}}$  для модели нейтронной звезды с массой  $1.4 M_{\odot}$  и уравнением состояния BSk21 в ядре и сравнили с аппроксимацией (1.31) для  $L_{\text{cr}}$ . Совпадение также оказалось удовлетворительным. В дополнение к этому, было проверено, что нейтринная излучательная способность за счёт тормозного излучения нейтринных пар электронами при рассеянии на атомных ядрах в коре, состоящей из вещества с уравнениями состояния BSk20 или BSk21 с их оригинальным ядерным составом [43], практически совпадает с той, что получается при использовании модели сглаженного ядерного состава, как это сделано при получении аппроксимации (1.31).

Приведённый выше анализ показывает, что полученная аппроксимация практически универсальна. Она почти не зависит от уравнения состояния сверхплотной материи в ядре звезды. Более того, согласно проделанным вычислениям, основной вклад в  $L_{\text{cr}}$  дают области с плотностью  $10^{13} \text{ г см}^{-3} \lesssim \rho \leq \rho_{\text{cc}}$ . С точки зрения нейтринной светимости, в этом диапазоне плотностей модели аккреционной коры не отличаются [1, 56] от моделей коры, состоящей из равновесного вещества. Следовательно,  $L_{\text{cr}}$  слабо зависит от модели уравнения состояния вещества коры.

К сожалению, полученная аппроксимация представляет скорее академический, чем практический интерес. Когда кора и ядро находятся в состоянии теплового (квази)равновесия, нейтринная светимость ядра на несколько порядков превосходит светимость коры, и последней на практике можно пренебречь. Светимость коры может быть сопоставима со светимостью ядра на стадии тепловой релаксации, когда кора бывает заметно горячее. Однако в этой ситуации полученная аппроксимация может быть не применима.

## 1.5. Аналитическое описание остывания нейтронных звёзд

Теория остывания позволяет рассчитать кривые остывания [зависимости  $T_s^{\infty}(t)$  либо  $L_{\gamma}^{\infty}(t)$ ]. Далее рассчитанные кривые можно сравнивать с наблюдениями нейтронных звёзд. Известны простые аналитические формулы для  $T_s^{\infty}(t)$  на нейтринной и фотонной стадиях (см., например, [4, 20] и ссылки там). Они позволяют анализировать остывание нейтронных звёзд, которые либо находятся на нейтринной стадии (когда можно пренебречь  $L_{\gamma}^{\infty}$  по сравнению с  $L_{\nu}^{\infty}$ ), либо на фотонной стадии (когда, наоборот, учитывать надо только  $L_{\gamma}^{\infty}$ ), но не на переходе между этими стадиями, когда фотонная и нейтринная светимости сравнимы.

В данном разделе выведено аналитическое выражение  $T_s^{\infty}(t)$ , пригодное для описания нейтринной и фотонной стадий остывания, а также переходного этапа между ними. Мы основываемся на аналитических аппроксимациях для  $L_{\nu}^{\infty}$  и  $C$ , полученных в разделе 1.3.3.2 (они фактически универсальны относительно используемой модели уравнения состояния). Ниже будет получена формула, которая позволяет легко вычислять температуру звезды любого возраста  $t$  (после наступления тепловой релаксации недр), массы  $M$  и радиуса  $R$ . Впрочем, необходимо отметить, что оно требует упрощённого, не всегда правомерного описания теплоизолирующей оболочки.

### 1.5.1. Решение уравнения изотермического остывания

Как обсуждалось выше, для наиболее важных механизмов нейтринного охлаждения ядра звезды часто можно считать  $L_\nu^\infty \propto \tilde{T}^n$ , где  $n = 6$  или  $8$ . Теплоёмкость также в основном определяется ядром звезды, и во многих случаях  $C \propto \tilde{T}$ . Отношение  $L_\nu^\infty/C$ , определяющее остывание звезды на нейтринной стадии, можно записать в виде

$$\frac{L_\nu^\infty}{C} = \zeta q \tilde{T}_9^{n-1}, \quad (1.33)$$

где  $\zeta = (10^9 \text{ K})/(1 \text{ год}) \approx 31.69 \text{ K c}^{-1}$  и  $\tilde{T}_9 = \tilde{T}/(10^9 \text{ K})$ . Безразмерная функция нейтринного охлаждения  $q$  зависит только от массы звезды и выбранной модели уравнения состояния.

Для  $L_\gamma^\infty/C$  можно получить похожее выражение, но с использованием дополнительных предположений. Как известно (например, [4]), в ряде случаев соотношение  $T_s - T_b$  можно аппроксимировать степенной зависимостью:

$$T_{s6}^4 = a g_{14} T_{b9}^\alpha, \quad (1.34)$$

где  $g_{14}$  — ускорение свободного падения на поверхности нейтронной звезды в единицах  $10^{14} \text{ см c}^{-2}$ ,  $T_{s6} = T_s/(10^6 \text{ K})$  и  $T_{b9} = T_b/(10^9 \text{ K})$ . Пропорциональность  $T_s^4 \propto g$  физически обоснована [23]; коэффициенты  $a$  и  $\alpha$  можно извлечь, например, из аккуратных подгоночных формул для соотношений  $T_s - T_b$ , полученных в работах [24, 27] и [28]. Здесь мы рассматриваем только такие модели оболочки, для которых соотношение  $T_s - T_b$  похоже на приведённое в статье [23], где  $\alpha \approx 2$ . Комбинируя выражения (1.4) и (1.5), получим

$$\frac{L_\gamma^\infty}{C} = \zeta s \tilde{T}_9^{\alpha-1}, \quad (1.35)$$

где  $s$  с некоторой точностью можно считать константой; назовём её безразмерной функцией фотонного охлаждения. Соотношение (1.35) следует рассматривать как определение  $s$ .

С учётом сказанного, уравнение (1.8) можно переписать в виде

$$\frac{d\tilde{T}_9}{dt_{\text{yr}}} = -q\tilde{T}_9^{n-1} - s\tilde{T}_9^{\alpha-1}, \quad (1.36)$$

где  $t_{\text{yr}} = t/(1 \text{ год})$ . Можно дать его формальное решение:

$$t_{\text{yr}} - t_{0\text{yr}} = \int_{\tilde{T}_9}^{\tilde{T}_{09}} \frac{d\tilde{T}'_9}{q\tilde{T}'_9{}^{n-1} + s\tilde{T}'_9{}^{\alpha-1}}. \quad (1.37)$$

Здесь предположено, что температура  $\tilde{T}$  недр звезды в некоторый начальный момент  $t_0$  равна  $\tilde{T}_0$ . Безразмерный возраст  $t_{\text{yr}}$  можно представить в виде безразмерного интеграла

$$t_{\text{yr}} - t_{0\text{yr}} = \frac{1}{(n-2)q} \left(\frac{q}{s}\right)^k \int_{x_0}^x \frac{dy}{y^{1/k} + 1}, \quad x = \left(\frac{s}{q}\right)^k \tilde{T}_9^{2-n}, \quad (1.38)$$

где  $k = (n-2)/(n-\alpha)$  и  $x_0 = x|_{\tilde{T}_{09}}$ .

Остановимся на важном случае  $t \gg t_0$  и  $\tilde{T}_0^{n-2} \gg \tilde{T}^{n-2}$  (ему соответствуют все наблюдаемые нейтронные звёзды). При этом условии проявляется эффект «потери памяти» — начальные условия перестают сказываться на остывании (см., например, [7, 34]). Тогда, вводя функцию

$$I_\beta(x) = \int_0^x \frac{dy}{y^\beta + 1}, \quad (1.39)$$

мы получим из (1.38):

$$t_{\text{yr}} \left( \tilde{T}_9 \right) = \frac{1}{(n-2)q} \left( \frac{q}{s} \right)^k I_{1/k} \left( \frac{(s/q)^k}{\tilde{T}_9^{n-2}} \right). \quad (1.40)$$

В первую очередь рассмотрим частный случай  $\alpha = 2$ . Тогда в формуле (1.39) получим  $\beta = 1$ , сама функция принимает вид  $I_1(x) = \ln(1+x)$ , а остывание нейтронной звезды описывается законом

$$\tilde{T}_9(t_{\text{yr}}) = \left[ \frac{s/q}{\exp\{(n-2)st_{\text{yr}}\} - 1} \right]^{1/(n-2)}. \quad (1.41)$$

На нейтринной стадии выполняется условие  $st_{\text{yr}} \ll 1$ , что приводит к широко известному степенному закону остывания

$$\tilde{T}_9 = [(n-2)qt_{\text{yr}}]^{1/(n-2)} \quad (1.42)$$

для молодых нейтронных звёзд (например, [7]). На фотонной стадии остывания, когда  $st_{\text{yr}} \gg 1$ , соотношение (1.41) сводится к экспоненциальному закону  $\tilde{T}_9 = (s/q)^{1/(n-2)} \exp(-st_{\text{yr}})$  (см., например, обзор [4]). Однако авторы [4] не представили аналитической формулы, пригодной для описания перехода от нейтринного охлаждения к фотонному.

Многие реалистичные модели теплоизолирующей оболочки можно описать степенной зависимостью (1.34) с показателем, удовлетворяющим условию  $|\alpha - 2| \lesssim 0.2$ . Даже в случае быстрого остывания за счёт прямого урка-процесса (когда  $n = 6$ , см. таблицу 1.1), такие значения  $\alpha$  приводят к  $|\beta - 1| \lesssim 0.05$ . Следовательно, можно использовать приближённое выражение

$$I_\beta(x) = \int_0^x \frac{dy}{y^\beta + 1} \approx \int_0^x \frac{dy}{(y+1)^\beta} = \frac{(x+1)^{1-\beta} - 1}{1-\beta}. \quad (1.43)$$

Для указанных значений  $\beta$  точность данного приближения очень высока, и относительная ошибка не превосходит 3%. Совмещая соотношения (1.43) и (1.40), мы получим

$$\tilde{T}_9(t_{\text{yr}}) = \left[ \frac{(s/q)^k}{((\alpha-2)s^k q^\gamma t_{\text{yr}} + 1)^{-k/\gamma} - 1} \right]^{1/(n-2)}, \quad (1.44)$$

где  $\gamma = (2-\alpha)/(n-\alpha)$ . Данная формула позволяет вычислять температуру недр звезды (с учётом красного смещения) как на нейтринной, так и на фотонной стадии остывания. Необходимо лишь знать функции остывания  $q$  и  $s$  (см. раздел 1.5.2). Заметим, что соотношение (1.44) можно аналитически обратить, получив  $t_{\text{yr}}$  как функцию  $\tilde{T}_9$ .

Остановимся на некоторых свойствах полученной формулы. Во-первых, она воспроизводит формулу (1.41) в пределе  $\alpha \rightarrow 2$ . Во-вторых, при малом  $t$  (нейтринное охлаждение) она даёт верный степенной закон  $\tilde{T}(t)$  при любых  $\alpha$  и  $s$ , т.е. независимо от свойств оболочки звезды. В противоположном случае больших  $t$  (фотонное охлаждение) формула (1.44) принимает вид

$$\tilde{T}_9(t_{\text{yr}}) \approx \left( \frac{s}{q} \right)^{1/(n-\alpha)} [(\alpha-2)s^k q^\gamma t_{\text{yr}} + 1]^{1/(2-\alpha)}. \quad (1.45)$$

В пределе  $\alpha \rightarrow 2$  она даёт то же самое выражение, что и формула (1.41) на фотонной стадии. Отметим, что при  $\alpha < 2$  формулы (1.44) и (1.45) приводят к физически абсурдному результату —  $\tilde{T}$  обращается в нуль за конечное время. Однако этот недостаток нашей формулы не критичен, так как степенной закон (1.34) с показателем  $\alpha \sim 2$  хорошо описывает соотношение  $T_s - T_b$  лишь в диапазоне температур  $T_b \gtrsim 3 \times 10^6$  К [27]. На более поздних

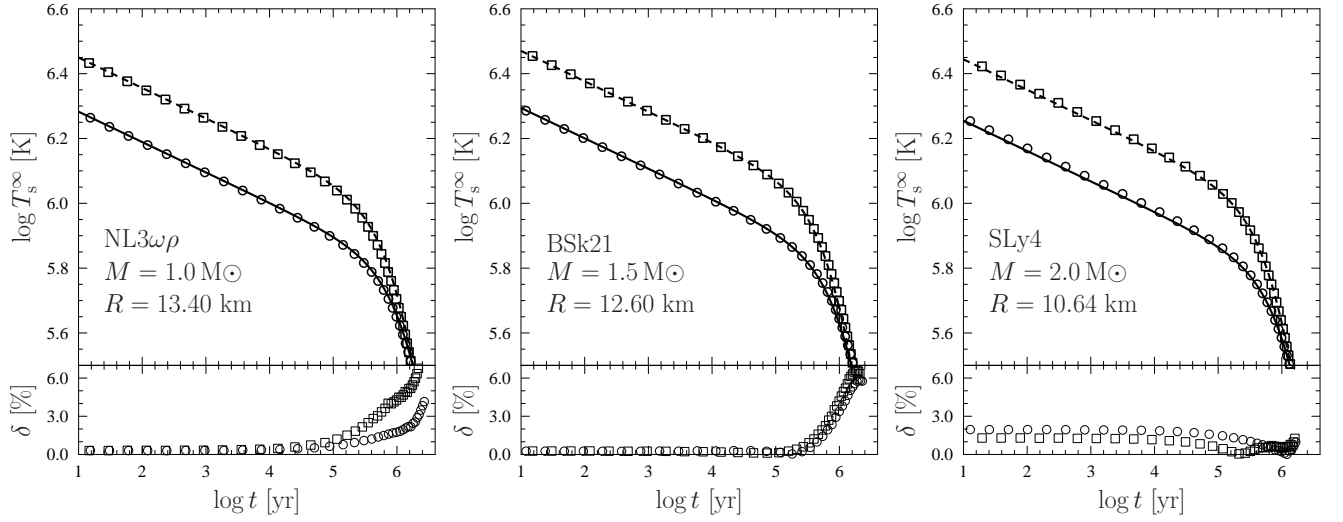


Рис. 1.10. Кривые остывания для трёх моделей нейтронных звёзд с железной теплоизолирующей оболочкой. Кружки и квадратики изображают численные решения уравнения (1.8), где основным процессом излучения нейтрино считается либо модифицированный урка-процесс (в отсутствие протонной сверхтекучести), либо тормозное излучение нейтринных пар при столкновениях нейтронов (в случае полностью сверхтекучих протонов). Сплошные и штриховые кривые — аналитическая аппроксимация (1.44) для тех же самых моделей. Нижняя часть графиков отображает значения относительной ошибки аппроксимации. Детали см. в тексте.

этапах остывания соотношение  $T_s - T_b$  претерпевает существенные изменения, но звезда при этом становится уже настолько холодной, что её тепловое излучение не может быть зарегистрировано существующими обсерваториями. Таким образом, формула (1.44) пригодна для исследования наблюдаемых остывающих нейтронных звёзд.

### 1.5.2. Сопоставление с численными расчётами

В целях тестирования полученного аналитического решения (1.44), мы рассмотрели численные решения уравнения остывания (1.8) для трёх моделей нейтронных звёзд с различными массами и уравнениями состояния. Во всех случаях использовалась модель железной теплоизолирующей оболочки с соотношением  $T_s - T_b$  из работы [24]. Результаты приведены на рисунке 1.10. Слева — то, что получилось для нейтронной звезды с массой  $1 M_\odot$  и уравнением состояния NL3 $\omega\rho$  [39], которое является примером модели релятивистского среднего поля. В середине — график для звезды с массой  $1.5 M_\odot$  и уравнением состояния BSk21 [43]. Наконец, справа изображены результаты для звезды с массой  $2.0 M_\odot$  и уравнением состояния SLy4 [40]. Два последних уравнения состояния принадлежат к семейству модифицированных функционалов Скирма. Выбранные модели звёзд имеют различную компактность и среднюю плотность, которые в основном и определяют  $L_\nu^\infty$  и  $C$ . Звезда с уравнением состояния NL3 $\omega\rho$  и массой  $1 M_\odot$  наименее компактна и на нейтринной стадии остывает медленнее всего, в то время как модель с уравнением состояния SLy4 и массой  $2 M_\odot$  компактнее остальных и остывает быстрее.

Для всех трёх рассмотренных моделей нейтронных звёзд прямой урка-процесс, быстрее всего охлаждающий звезду, запрещён. Для каждой звезды рассмотрены два варианта основного механизма нейтринного излучения. В первом случае мы пренебрегаем возможной сверхтекучестью нуклонов; тогда нейтринная светимость определяется модифицированным урка-процессом. Во втором случае мы предполагаем сильную протонную сверхтекучесть во всём ядре звезды, которая подавляет все нейтринные процессы с участием протонов, равно как и протонную парциальную теплоёмкость. Тогда нейтринное охлаждение главным образом происходит за счёт более слабого тормозного излучения нейтринных пар при столкно-

вении нейтронов; звезда при этом охлаждается медленнее, чем в несверхтекучем сценарии. Точные (численные) решения уравнения теплового баланса (1.8) для несверхтекучих звёзд показаны кружками, а для звёзд с сильной протонной сверхтекучестью — квадратиками. Соответствующие им приближённые аналитические решения (1.44) изображены сплошными (без сверхтекучести) и точечными (сверхтекучие протоны) линиями.

Чтобы построить аналитические кривые  $T_s^\infty(t)$ , необходимо найти коэффициенты  $a$  и  $\alpha$  в формулах (1.34) для рассматриваемой теплоизолирующей оболочки, и вычислить  $q$  и  $s$  в формулах (1.33) и (1.35). Оказывается, что точную подгонку соотношения  $T_s - T_b$ , вычисленного в работе [24] для железной оболочки, в наших целях можно заменить на выражение (1.34) со значениями  $a = 73$  и  $\alpha = 2.2$ . В диапазоне температур дна оболочки  $T_b = 10^7 - 10^9$  К это приближение ведёт к относительной среднеквадратичной ошибке  $\sim 3\%$ , с максимальным отклонением  $\sim 7\%$  при наименьших  $T_b$ . Подчеркнём, что такое упрощение годится только для вычисления зависимости  $\tilde{T}(t)$ . Его не рекомендуется использовать для расчёта кривой остывания  $T_s^\infty(t)$  при уже вычисленной эволюции температуры недр звезды, т.е. комбинируя соотношения (1.34) и (1.44). Вместо этого следует использовать более точные выражения для  $T_s - T_b$  из работ [24] или [28], и в них подставлять соотношение (1.44). Так можно избежать дополнительных ошибок. Чтобы найти  $q$  и  $s$ , мы воспользовались аппроксимациями для  $L_\nu^\infty$  и  $C$ , полученными в разделе 1.3.3. Вкупе с выражением (1.4) они позволяют рассматривать  $q$  и  $s$  как независимые функции  $M$  и  $R$ . Такой подход делает наши приближённые кривые остывания пригодными для широкого класса моделей уравнения состояния вещества в ядрах нейтронных звёзд (подробнее см. раздел 1.3.3).

Рисунок 1.10 демонстрирует прекрасное согласие между численными и приближёнными аналитическими кривыми остывания. Это дополнительно подтверждается графиками модулей относительных отклонений  $\delta$  между точными и приближёнными решениями  $T_s^\infty(t)$  (нижние части графиков на рисунке 1.10). Для нейтронных звёзд с массами  $1 M_\odot$  и  $1.5 M_\odot$  наша аппроксимация практически точно воспроизводит остывание на нейтринной стадии, и даёт ошибку  $\delta \lesssim 7\%$  на фотонной стадии. Причина растущей с возрастом звезды погрешности кроется в ухудшении точности простого соотношения  $T_s - T_b$  (1.34) при низких температурах. Для массивной звезды (справа на рисунке 1.10) ситуация обратная: аппроксимации  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$  из раздела 1.3.3 работают хуже всего при  $M \gtrsim 2 M_\odot$ . Однако в итоге получается относительно небольшая погрешность аналитической кривой остывания, на уровне  $\delta \sim (2 - 3)\%$ , как на нейтринной, так и на фотонной стадии — эффекты, связанные с неточностью описания нейтринной светимости и зависимости  $T_s - T_b$ , частично компенсируют друг друга.

## 1.6. Выводы к главе 1

Получены аналитические аппроксимации для нейтринной светимости и теплоёмкости нейтронных звёзд с нуклонным ядром (раздел 1.3.3). Рассмотрены вклады в светимость за счёт прямого урка-процесса (без учёта порога), модифицированного урка-процесса (стандартный процесс для несверхтекучих нейтронных звёзд с не очень большой массой) и тормозного излучения нейтринных пар при столкновениях нейтронов (является основным в случае сильной протонной сверхтекучести и нормальных нейтронов). Приведены аппроксимации парциальных теплоёмкостей нейтронов, протонов и лептонов, а также полной теплоёмкости звезды и теплоёмкости в случае, когда теплоёмкость протонов подавлена сверхтекучестью. Аппроксимации универсальным образом описывают модели нейтронных звёзд с различными уравнения состояния вещества в ядре. Они зависят только от массы, радиуса и температуры звезды. Это делает их удобными в практическом использовании: чтобы вычислить, например, теплоёмкость звезды с заданным радиусом и массой, не требуется проводить численного интегрирования выражения (1.7), не говоря о подборе модели уравнения состояния, позволяющей при заданной массе достичь требуемого радиуса. В ряде приложений это существенно



экономит вычислительные ресурсы.

С использованием полученных аппроксимаций нейтринной светимости и теплоёмкости построено приближённое аналитическое решение уравнения остывания (раздел 1.5.1). В предельных случаях нейтринной или фотонной стадии остывания это решение согласуется с имеющимися в литературе асимптотическими формулами. Однако, в дополнение к этому, оно корректно описывает переход между этими стадиями, что позволяет единым образом анализировать остывание нейтронных звёзд с возрастом  $10^2 - 10^6$  лет.

Использование полученных аппроксимаций существенно упрощает анализ остывания нейтронных звёзд с измеренной температурой и возрастом (см. следующую главу). Результаты данной главы опубликованы в статьях [29, 30] и представлены на конференциях «Физика А.СПб/2016» (ФТИ им. А.Ф. Иоффе), «Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра» (2016, ИКИ РАН), «Physics of Neutron Stars» (2017, Alferov University).

## Глава 2

# Модельно-независимый анализ остывания нейтронных звёзд

## 2.1. Наблюдения остывающих нейтронных звёзд со слабым магнитным полем

К моменту написания диссертации (конец 2019 года) было известно более 40 изолированных нейтронных звёзд с измеренным/оцененным возрастом  $t$  и наблюдаемым тепловым (в основном, рентгеновским) излучением поверхности, по которому можно определить эффективную температуру поверхности звезды  $T_s^\infty$  [19, 26]. Возраст таких звёзд редко превышает миллион лет. У самой молодой из них он составляет около 340 лет. Все они уже миновали стадию тепловой релаксации (см. раздел 1.2). Из них около половины обладает сильным магнитным полем  $\gtrsim 10^{14}$  Гс. При объяснении остывания сильно замагниченных звёзд важны внутренние источники нагрева, возникающие за счёт диссипации магнитного поля [5, 26]; кроме того, следует учитывать особенности влияния сверхсильного поля на свойства теплоизолирующей оболочки (см., например, [19]). Оставшаяся половина нейтронных звёзд с известной температурой  $T_s^\infty$  обладает не слишком сильным магнитным полем, при котором можно пренебречь внутренним нагревом. Остывание таких звёзд описывается уравнением (1.8) и проанализировано в настоящей главе. Данные наблюдений этих звёзд сведены на рисунок 2.1. Для пульсара B0833–45 (пульсар Вела) данные по температуре и возрасту взяты из статьи [57], для пульсара J0633+0632 — из работы [58]<sup>1</sup>, остальные данные взяты из таблицы 1 статьи [59]. Данная выборка звёзд неполна (ср., например, [19]), но представительна.

Сплошная кривая на рисунке 2.1 иллюстрирует «стандартный сценарий» [7] остывания нейтронной звезды с массой  $M = 1.4 M_\odot$ , радиусом  $R = 12$  км и железной теплоизолирующей оболочкой; ядро звезды состоит из несверхтекучих нуклонов, прямой урка-процесс запрещён. В этом случае основным механизмом нейтринного охлаждения является модифицированный урка-процесс, и закон остывания хорошо описывается аппроксимациями (1.26) и (1.44), с помощью которых сплошная кривая и построена. Видно, что по порядку величины стандартный сценарий согласуется с наблюдениями (это было понятно уже в 1980-х годах [60]), однако более аккуратный анализ требует модификаций этого сценария.

Как будет обсуждаться ниже, наиболее естественными источниками таких модификаций являются сверхтекучесть барионов в ядре звезды и различия в составе теплоизолирующей оболочки. Сверхтекучесть, как правило, уменьшает полную теплоёмкость звезды, а нейтринную светимость может как подавить, так и усилить. Наличие лёгких элементов (аккрецированного вещества) в оболочке увеличивает её теплопроводность, повышая температуру поверхности звезды при данной температуре недр. На данный момент этих эффектов оказывается достаточно, чтобы объяснить соответствие температуры и возраста всех нейтронных звёзд, изображённых на рисунке 2.1 (т.н. «парадигма минимального остывания» [61, 62]). Так, самые горячие нейтронные звёзды — такие, как объекты 5, 9 и, возможно, 3 на рисунке 2.1, — требуют существенного замедления стандартного остывания на нейтринной стадии. Это проиллюстрировано штриховой кривой: при её построении нейтринная светимость искусственно подавлена в 50 раз, теплоёмкость уменьшена на 25%, а теплоизолирующая оболочка звезды предположена не железной, а углеродной. Как видно, при сделанных предположениях

<sup>1</sup> В качестве центрального значения температуры PSR J0633+0632 выбрано среднее значение результатов подгонки его спектра моделями водородной атмосферы *ns123190* и *ns130190*, а ошибки подгонок объединены. Подробнее см. статью [58] и раздел 2.7.

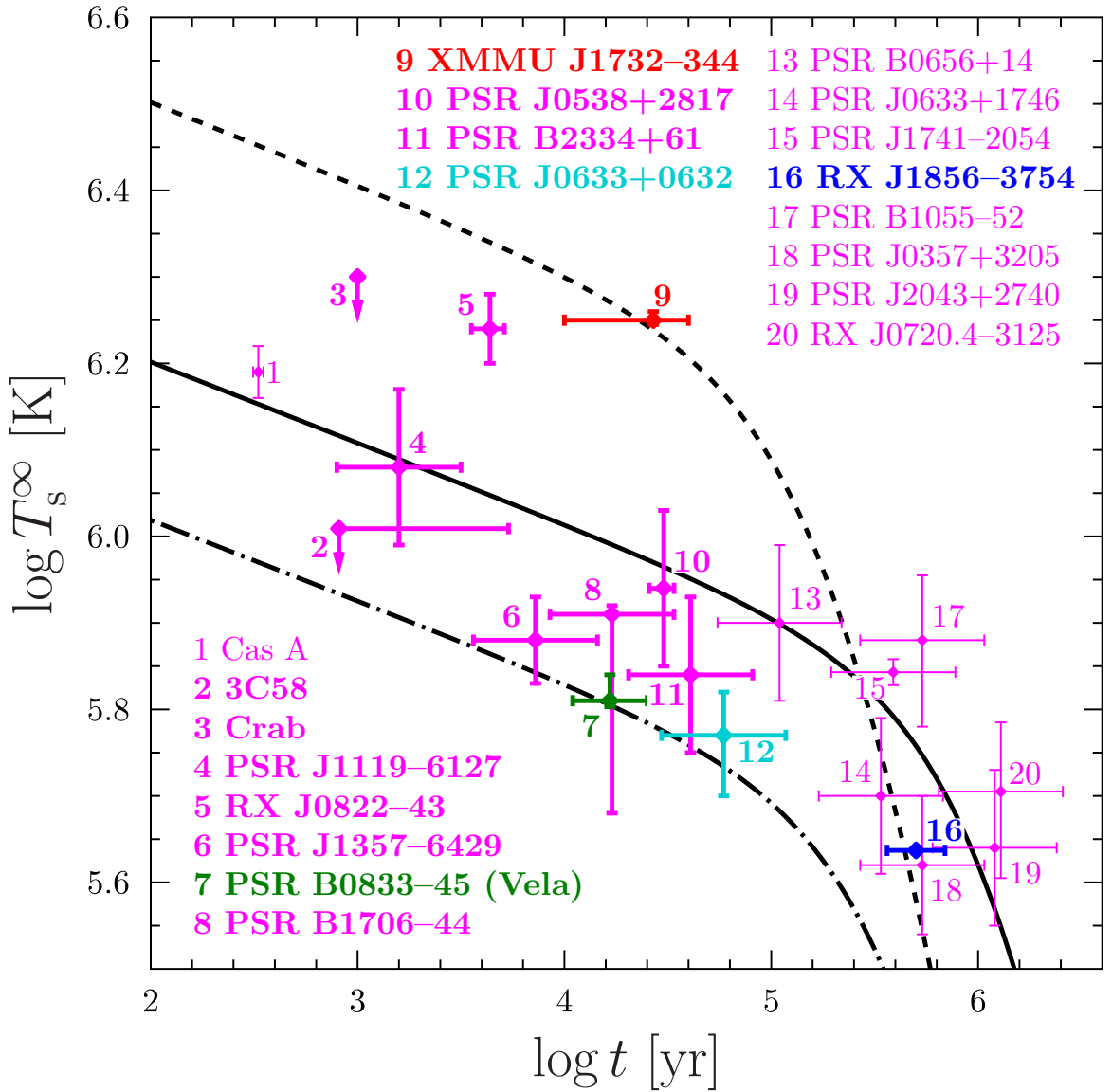


Рис. 2.1. Диаграмма температура-возраст для изолированных нейтронных звёзд с не очень сильным магнитным полем, для которых измерены/оценены  $T_s^\infty$  и  $t$ . Литература, из которой взяты данные, указана в тексте. Жирным выделены объекты, остывание которых проанализировано в настоящей главе. Цветом выделены те из них, которым посвящены отдельные разделы. Чёрными кривыми показаны различные сценарии остывания нейтронной звезды с массой  $M = 1.4 M_\odot$  и радиусом  $R = 12$  км. Сплошная кривая изображает стандартное остывание за счёт модифицированного урка-процесса для звезды с теплоизолирующей оболочкой из железа. Для штриховой кривой нейтринная светимость подавлена в 50 раз, теплоёмкость уменьшена на 25%, а теплоизолирующая оболочка состоит из углерода. Штрих-пунктирная кривая соответствует светимости, усиленной в 30 раз, теплоёмкости, подавленной в 3 раза, и железной оболочке.

удастся объяснить даже самую горячую звезду из приведённых на рисунке 2.1. Большинство же нейтронных звёзд, наоборот, требуют нейтринной светимости, усиленной в сравнении со стандартным остыванием. Например, при построении штрих-пунктирной кривой на рисунке 2.1 нейтринная светимость искусственно усилена в 30 раз, а теплоёмкость подавлена в 3 раза в сравнении со сплошной кривой (оболочка оставлена железной). Этого оказывается достаточно для объяснения таких холодных объектов, как 6, 7 и 12.

Особняком в этом наборе стоит молодая нейтронная звезда — центральный компактный объект в остатке сверхновой Кассиопея А (Cas A, номер 1 на рисунке 2.1). Она — единственная нейтронная звезда, остывание которой наблюдается в реальном времени: за последние 18 лет её наблюдаемая температура уменьшилась примерно на 5% [63]. Остывание всех остальных нейтронных звёзд, показанных на рисунке 2.1, столь медленно, что не заметно за время их изучения. Стандартный сценарий согласуется со средним за 18 лет наблюдаемым значением температуры Cas A, но предсказывает несколько меньшую скорость её остывания, чем следует из наблюдений. Объяснение такого особенного поведения этой звезды также находится в рамках парадигмы минимального остывания [21, 64]. Однако в данной диссертации этот вопрос не рассматривается.

В данной главе развит метод, предложенный в работе [7] для исследования остывающих нейтронных звёзд в рамках парадигмы минимального остывания. Модельная независимость метода заключается в использовании аппроксимаций для  $L_\nu^\infty$  и  $C$ , полученных в главе 1 (они универсальны относительно уравнения состояния, но в основном описывают несверхтекучие звёзды), и во введении безразмерных факторов остывания. Последние упрощённо описывают влияние сверхтекучести нуклонов в ядре звезды на нейтринную светимость и теплоёмкость, не требуя детализации модели профилей критических температур. В разделе 2.2 дан обзор известных теоретических свойств факторов остывания и введён новый фактор остывания, необходимый для анализа звёзд на фотонной стадии. В последующих разделах проведён модельно-независимый анализ остывания некоторых нейтронных звёзд, изображённых на рисунке 2.1. Раздел 2.3 написан на основе статьи [29], где рассмотрены объекты 2—8, 10 и 11. Их объединяют два обстоятельства: все они, по-видимому, находятся на нейтринной стадии остывания, и нет никаких наблюдательных ограничений на состав их оболочек. На их примере продемонстрирован основной принцип метода модельно-независимого анализа остывания, который используется в этой главе. Объект 1 (Cas A) таким методом рассматривать нельзя, а объект 9 (ХММУ J1732–344) имеет, по-видимому, углеродную теплоизолирующую оболочку [35] и детально изучен в разделе 2.5, результаты которого опубликованы в статье [22]. Анализ пульсара Вела (объект 7), имеющему один из самых высоких темпов остывания среди звёзд на нейтринной стадии, посвящён раздел 2.4, материалы которого опубликованы в [57, 65]. Про нейтронную звезду RX J1856–3754 (объект 16) можно аргументированно утверждать, что её оболочка железная [30, 66], — а, значит, её можно исследовать с помощью аналитического закона остывания (1.44). Это сделано в разделе 2.6, результаты которого опубликованы в статье [30]. Наконец, в разделе 2.7 представлен схематичный анализ остывания объекта 12 (PSR J0633+0632), опубликованный в работе [58].

## 2.2. Остывание сверхтекучих нейтронных звёзд. Факторы остывания

Из трёх параметров, управляющих остыванием нейтронной звезды, — теплоёмкости  $C$ , а также светимостей  $L_\nu^\infty$  и  $L_\gamma^\infty$ , — влиянию сверхтекучести подвержены первые два. Сначала рассмотрим, как это сказывается на нейтринной стадии остывания.

### 2.2.1. Нейтринная стадия. Фактор $f_\ell$

Когда фотонной светимостью в уравнении остывания (1.8) можно пренебречь, оно принимает простой вид

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} = -\ell, \quad \ell = \frac{L_\nu^\infty}{C}. \quad (2.1)$$

Величина  $\ell$  называется функцией нейтринного остывания нейтронной звезды. При стандартном сценарии остывания можно считать  $L_\nu^\infty = L_{\text{MU}}^\infty(\tilde{T})$  и  $C = C_{\text{tot}}(\tilde{T})$  и применять аппроксимации из раздела 1.3.3. Полезно ввести безразмерную функцию стандартного нейтринного охлаждения  $q_{\text{SC}}$  [см. формулу (1.33); SC = «standard candle»], связанную со стандартной функцией нейтринного остывания  $\ell_{\text{SC}} = L_{\text{MU}}^\infty/C_{\text{tot}}$  соотношением

$$\ell_{\text{SC}} = \zeta q_{\text{SC}} \tilde{T}_9^7. \quad (2.2)$$

При заданной модели нейтронной звезды величина  $q_{\text{SC}}$  зависит только от её массы и уравнения состояния, а с учётом аппроксимаций (1.26) она представима как функция массы и радиуса звезды.

Разумеется, настоящая нейтронная звезда с данными массой и уравнением состояния будет иметь функцию остывания  $\ell$ , отличную от  $\ell_{\text{SC}}$ . Далее, если не оговорено особо, мы будем придерживаться парадигмы минимального остывания [61, 62], согласно которой ядро нейтронной звезды состоит только из нуклонов, электронов и мюонов (именно такой случай рассмотрен в главе 1), а прямой урка-процесс запрещён. Тогда наиболее вероятным источником различий между  $\ell$  и  $\ell_{\text{SC}}$  является сверхтекучесть нейтронов и протонов в ядре звезды. Впрочем, не следует забывать, что аппроксимации (1.26) основаны на излучательной способности  $Q_{\text{MU}}$  модифицированного урка-процесса, вычисленной Фриманом и Максвеллом [49] в 1979 г. На данный момент известно (см., например, обзор [67] и статью [68]), что учёт многочастичных эффектов может существенно изменить значение  $Q_{\text{MU}}$  как в меньшую, так и в большую сторону. Это может приводить к отклонениям функции остывания от стандартной независимо от сверхтекучести нуклонов в ядре.

Следуя методу, разработанному в статьях [7, 22, 33, 35], для нейтронной звезды с данной массой и уравнением состояния можно ввести безразмерный фактор нейтринного остывания

$$f_\ell = \frac{\ell}{\ell_{\text{SC}}}. \quad (2.3)$$

Он показывает, насколько скорость остывания звезды отличается от стандартной. Величина  $f_\ell$  является фундаментальным параметром сверхплотной материи нейтронных звёзд. Для стандартной нейтринной свечи  $f_\ell = 1$ . Замедленное остывание,  $f_\ell < 1$ , соответствует нормальным нейтронам<sup>2</sup> и сверхтекучим протонам в ядре звезды. В такой ситуации подавляются все процессы с участием протонов (в первую очередь, прямой урка-процесс), и основным механизмом остывания становится тормозное излучение нейтринных пар при столкновениях нейтронов. Ускоренное остывание,  $f_\ell > 1$ , соответствует триплетной нейтронной сверхтекучести в ядре звезды, сопровождающейся мощным излучением нейтрино при образовании куперовских пар [69, 70] (или же если в ядре есть область, где протекает неподавленный урка-процесс, усиленный многочастичными эффектами [68]). Фактор остывания может отклоняться от единицы на несколько порядков, как в меньшую, так и в большую сторону.

<sup>2</sup> Исключением является ситуация, когда в звезде лишь недавно начался переход нейтронов в сверхтекучее состояние. Тогда темп остывания резко увеличивается за счёт появления нейтринного излучения при куперовском спаривании, и в течение нескольких десятков лет происходит перестройка остывания из режима  $f_\ell \leq 1$  в режим  $f_\ell > 1$ . Именно этим объясняется наблюдаемое в реальном времени остывание нейтронной звезды в остатке сверхновой Cas A [21, 64]. Подробно такая перестройка темпа остывания исследована в [34]. В частности, получается, что в недрах Cas A уже значительная часть нейтронов перешла в сверхтекучее состояние, хотя на рис. 2.1 она лежит выше стандартной кривой остывания.

Часто считается (см., например, [7, 30, 35]), что фактор  $f_\ell$  постоянен в течение основного времени тепловой эволюции нейтронной звезды. Такое допущение оправдано, если температура ядра не находится в малой окрестности максимума профиля  $T_{cn}(\rho)$  или  $T_{cp}(\rho)$ . В противном случае будет происходить перестройка режима остывания с резким изменением  $f_\ell$  (см., например, [34]). В случае, когда остывание замедлено относительно стандартного, постоянство фактора остывания аргументируется тем, что  $L_\nu^\infty$  складывается из двух компонент с одинаковой температурной зависимостью  $\propto \tilde{T}^8$  (см. главу 1) — светимости  $L_{nn}^\infty$ , которая в данном случае не испытывает подавления, и доли светимости  $L_{\text{МУ}}^\infty$ , не подавленной протонной сверхтекучестью (считается, что вдали от максимума  $T_{cp}$  эта доля меняется медленно). Изменение парциальной теплоёмкости протонов за счёт перехода в сверхтекучее состояние (не более 30% от  $C_{tot}$ ) не играет существенной роли. Зафиксированное при этом значение  $f_\ell < 1$  имеет смысл степени подавления модифицированного урка-процесса протонной сверхтекучестью, «усреднённой» по всему времени остывания звезды. Если фактор  $f_\ell$  близок к единице, доля протонов в ядре данной звезды, перешедших в сверхтекучее состояние, невелика. Если же  $f_\ell \ll 1$ , то протоны в основной своей массе сверхтекучие, причём локальная температура вещества почти во всём ядре в несколько раз ниже критической температуры протонов. Однако пытаться установить количественную связь между фактором остывания и какой-либо характеристикой сверхтекучей фракции протонов при этом трудно.

Сказанное выше позволяет оценить минимально возможное значение  $f_\ell$ :

$$f_\ell > f_{\ell n} = \frac{q_{nn}}{q_{\text{SC}}} \gtrsim 0.01, \quad \text{где} \quad q_{nn} = \frac{L_{nn}^\infty / C_{nl}}{\zeta \tilde{T}_9^7} \quad (2.4)$$

— безразмерная функция остывания звезды с нормальными нейтронами и полностью сверхтекучими протонами. С помощью аппроксимаций (1.26) она так же, как и функция  $q_{\text{SC}}$ , представима в виде функции массы и радиуса нейтронной звезды. При этом, если фактор остывания близок к своему нижнему пределу, практичным оказывается ввести ещё один фактор остывания согласно формуле

$$q = f_{\ell p} q_{\text{SC}} + q_{nn}, \quad (2.5)$$

В этом случае  $f_{\ell p} = f_\ell - f_{\ell n}$ . Определённый таким образом фактор  $f_{\ell p}$  лучше, чем  $f_\ell$ , описывает неполноту подавления стандартного нейтринного излучения протонной сверхтекучестью. Конкретные характеристики такого подавления для данной модели сверхтекучести определяется профилем критической температуры  $T_{cp}(\rho)$  в ядре звезды. Однако, поскольку общим свойством профилей  $T_{cp}(\rho)$  является их куполообразность (при достаточно высоких  $\rho$  протонная сверхтекучесть должна пропадать), в ядре звезды с высокой вероятностью возникнет область с неполностью подавленным модифицированным урка-процессом. Это обеспечит существование положительной нижней границы  $f_{\ell p}$  для горячих нейтронных звёзд, таких, как ХММУ J1732. Подробнее см. раздел 2.5.

Следует отметить, что введение  $f_{\ell p}$  вместо  $f_\ell$  оправдано только для очень медленно охлаждающихся звёзд ( $f_\ell \ll 1$ ). Для остальных остывающих нейтронных звёзд  $f_\ell \gg f_{\ell n}$ ; поэтому разницей между  $f_{\ell p}$  и  $f_\ell$  можно пренебречь.

В случае ускоренного остывания постоянство  $f_\ell$  основано на том, что, по прошествии некоторого времени после начала перехода нейтронов в триплетное сверхтекучее состояние, нейтринная светимость за счёт куперовского спаривания нейтронов начинает хорошо описываться законом  $\propto \tilde{T}^8$  [61]. Хотя по мере развития нейтронной сверхтекучести теплоёмкость звезды существенно подавляется (её нижний предел  $C_\ell$  в 10 – 15 раз меньше  $C_{tot}$ ), функцию остывания можно на качественном уровне считать пропорциональной  $\tilde{T}^7$  и в этом случае. Количественная связь значений  $f_\ell > 1$  с характеристиками сверхтекучести нейтронов в литературе практически не исследовалась, хотя она лучше обусловлена, чем связь  $f_\ell < 1$  и

протонной сверхтекучести. Если же предполагать, что ускоренное остывание создаётся модифицированным урка-процессом с учётом эффектов среды, то закон  $\ell \propto \tilde{T}^7$ , а вместе с ним и  $f_\ell = \text{const}$ , получается автоматически.

Для анализа остывания холодных нейтронных звёзд (пульсар Вела, PSR J0633+0632 и т.п.) интерес представляет верхняя граница фактора остывания  $f_{\ell\text{max}}$ . К сожалению, его теоретическое значение подвержено большой неопределённости: в зависимости от подхода, оно колеблется от  $\sim 10$  до  $\sim 1000$ .

Самые маленькие значения  $f_{\ell\text{max}}$  реализуются, если считать, что  $f_\ell > 1$  создаётся только излучением нейтрино при триплетном куперовском спаривании, и вдобавок учесть поправку Л.Б. Леинсона [71] к излучательной способности этого процесса. Поправка Леинсона в 5 раз подавляет мощность такого процесса в сравнении с каноническим расчётом [16]. На самом деле эта поправка — лишь оценка того, насколько многочастичные эффекты могут изменить излучательную способность этого процесса. Истинное значение этой поправки может оказаться практически любым числом между нулём и единицей (или даже превзойти её). Современное состояние данного вопроса освещено в обзоре [67] (см. также статью [21]). В литературе широко распространён подход из работы [25], где поправка берётся равной 0.78. В этом случае максимальный фактор остывания лежит в диапазоне  $f_{\ell\text{max}} \sim 30 - 100$  [7] [конкретное значение зависит от формы профиля  $T_{cn}(\rho)$ ].

Если же считать, что остывание ускоряется за счёт влияния многочастичных эффектов на модифицированный урка-процесс [68, 72], который оказался не подавлен в какой-то значимой доле объёма звезды, то  $f_{\ell\text{max}}$  возрастает до значений 300 – 1000. Однако тут необходимо сделать оговорку. Влияние среды на этот процесс сводится к двум эффектам: перенормировке пропагатора виртуального нуклона и перенормировке сильного взаимодействия между нуклонами. Как показано в [68], влияние первого эффекта на светимость  $L_{\text{MU}}^\infty$  носит универсальный характер и позволяет достичь  $f_\ell \sim 10$ . Второй эффект в самом экстремальном случае может приводить к  $f_{\ell\text{max}} \sim 300 - 1000$  [72], но расчёт такого усиления неоднозначен и содержит большое количество неопределённостей (см., например, [67]).

В данном исследовании при анализе остывания конкретных нейтронных звёзд в качестве базового использовано условие  $0.01 < f_\ell < 100$ . Для некоторых звёзд также рассмотрены альтернативные варианты ограничений на  $f_\ell$ ; это оговаривается особо.

### 2.2.2. Фотонная стадия. Фактор $f_C$

После того, как звезда пройдёт нейтринную стадию остывания, в уравнении (1.8) необходимо учитывать оба слагаемых в правой части. Соответственно, теперь скорость остывания недр звезды определяется двумя отношениями,  $L_\nu^\infty/C$  и  $L_\gamma^\infty/C$ . Влияние сверхтекучести на первое из них рассмотрено в предыдущем разделе, где показано, что изменениям в основном подвержена светимость  $L_\nu^\infty$  (хотя для правильной оценки  $f_{\ell\text{max}}$  пренебрегать отклонением теплоёмкости от  $C_{\text{tot}}$  нельзя). Во втором отношении, наоборот, эффект сверхтекучести проявляется только в изменении теплоёмкости в знаменателе. Напомним, что фотонная светимость  $L_\gamma^\infty$  как функция температуры вычисляется с помощью заданной модели теплоизолирующей оболочки (см. раздел 1.2) и не зависит от состояния барионов в ядре звезды.

Качественное влияние протонной и нейтронной сверхтекучести на теплоёмкость единицы объёма ядра  $c_{\text{core}}$  одинаково. Когда локальная температура  $T$  становится меньше локальной критической температуры для данного сорта нуклонов  $T_c$ , теплоёмкость испытывает скачок, увеличиваясь в 2.19 раз, если сверхтекучесть триплетная, и в 2.43 раза, если сверхтекучесть синглетная. Затем, по мере уменьшения  $T$ , теплоёмкость уменьшается. При  $T \approx 0.5T_c$  она возвращается на уровень несверхтекучего состояния, а при  $T \lesssim 0.2T_c$  оказывается подавлена до пренебрежимо малых значений [4, 73]. И  $T_c$ , и  $T$  меняются по мере погружения в ядро звезды. Поэтому, когда температура  $\tilde{T}$  опускается достаточно низко, чтобы в ядре

появилась сверхтекучесть, в каких-то его областях теплоёмкость будет усилена, в каких-то подавлена. В конечном счёте, после появления сверхтекучести интегральная теплоёмкость  $C$  сначала немного вырастет, а потом начнёт уменьшаться. Для заданной модели звезды её можно ограничить сверху значением  $(1.1 - 1.5)C_{tot}$  (численный коэффициент модельно зависим) и снизу величиной  $C_\ell \sim (0.06 - 0.1)C_{tot}$  (см. таблицу 1.2 и рисунок 1.6), поскольку парциальная теплоёмкость лептонов от состояния нуклонов в ядре звезды не зависит. Впрочем, в виду куполообразности профилей  $T_{cn}(\rho)$  и  $T_{cp}(\rho)$ , с большой долей вероятности во всех нейтронных звёздах на рисунке 2.1 есть область, где теплоёмкость нуклонов не подавлена до конца. Соответственно, нижний предел их теплоёмкости разумно выбрать больше значения  $C_\ell$ . В данной диссертации использовано ограничение  $C > (0.1 - 0.2)C_{tot}$ .

По аналогии с фактором нейтринного остывания  $f_\ell$  можно ввести фактор фотонного остывания (фактически — фактор изменения теплоёмкости)

$$f_C = \frac{C}{C_{SC}}, \quad (2.6)$$

где  $C_{SC} = C_{tot}$ . Ранее в литературе он не вводился, так как он не сказывается на нейтринной стадии остывания, исследовавшейся наиболее подробно. Однако, чтобы рассматривать обе стадии (и нейтринную, и фотонную), нужно вводить оба фактора  $f_\ell$  и  $f_C$ . Далее при анализе остывания нейтронных звёзд фактор  $f_C$  будет полагаться постоянным по мере тепловой эволюции. В таком случае он имеет смысл усреднённого фактора изменения теплоёмкости за всё время остывания звезды. Разумеется, такой подход плох при малых возрастах нейтронных звёзд, когда скорость изменения  $f_C$  велика. Но такие звёзды находятся на нейтринной стадии остывания, для которой важен только фактор  $f_\ell$ . Если же нейтронная звезда уже вышла на фотонную стадию, и фактор  $f_C$  необходимо учитывать при построении кривой её охлаждения, то его изменение будет медленным, а усреднённое за время жизни звезды значение позволит корректно судить о состоянии нуклонов в её ядре. Так,  $f_C < 0.7$  означает, что как минимум часть нейтронов находится в состоянии развитой сверхтекучести, потому что таких значений  $f_C$  невозможно достичь, не подавив теплоёмкость нейтронов.

Любопытно отметить, что на фотонной стадии остывания важны значения обоих факторов  $f_\ell$  и  $f_C$ . Это, в частности, видно из анализа выражения (1.45) для аналитической кривой остывания в пределе больших возрастов звезды. В формулу (1.45) одновременно входят обе функции охлаждения  $q$  и  $s$ , которые можно записать в виде  $q = f_\ell q_{SC}$  и  $s = s_{SC}/f_C$ , где  $s_{SC}$  — безразмерная функция фотонного охлаждения (1.35) для стандартного сценария остывания. Таким образом, кривая охлаждения нейтронной звезды на фотонной стадии зависит от обоих факторов остывания, причём влиянием ни одного из них нельзя пренебречь.

### 2.2.3. Диаграмма $f_\ell - f_C$

Подводя итог разделам 2.2.1 и 2.2.2, можно сказать, что каждый сценарий остывания [или же кривая остывания  $T_s^\infty(t)$ ] нейтронной звезды с фиксированной массой, уравнением состояния и составом теплоизолирующей оболочки параметризуется двумя числами  $f_\ell$  и  $f_C$ . Удобно рассмотреть плоскость  $f_\ell - f_C$ , каждая точка которой соответствует одному сценарию остывания (рисунок 2.2). Например, сплошная кривая на рисунке 2.1, изображающая стандартный сценарий остывания, соответствует  $f_C = f_\ell = 1$  (сплошной кружок на диаграмме 2.2). Штриховая кривая, показывающая замедленный сценарий, построена для подавленной в 50 раз нейтринной светимости и уменьшенной на 25% теплоёмкости, что соответствует  $f_C = 0.75$  и  $f_\ell = (1/50)/0.75 \approx 0.027$  (пустой кружок на рисунке 2.2). Для штрих-пунктирной кривой (ускоренное остывание) светимость  $L_\nu^\infty$  усилена в 30 раз, а теплоёмкость подавлена в 3 раза, что соответствует  $f_C \approx 0.33$  и  $f_\ell = 90$  (кружок с точкой внутри на рисунке 2.2). Факторы остывания несут существенную информацию о состоянии вещества в ядре звезды, что тоже удобно демонстрировать на диаграмме  $f_\ell - f_C$ .



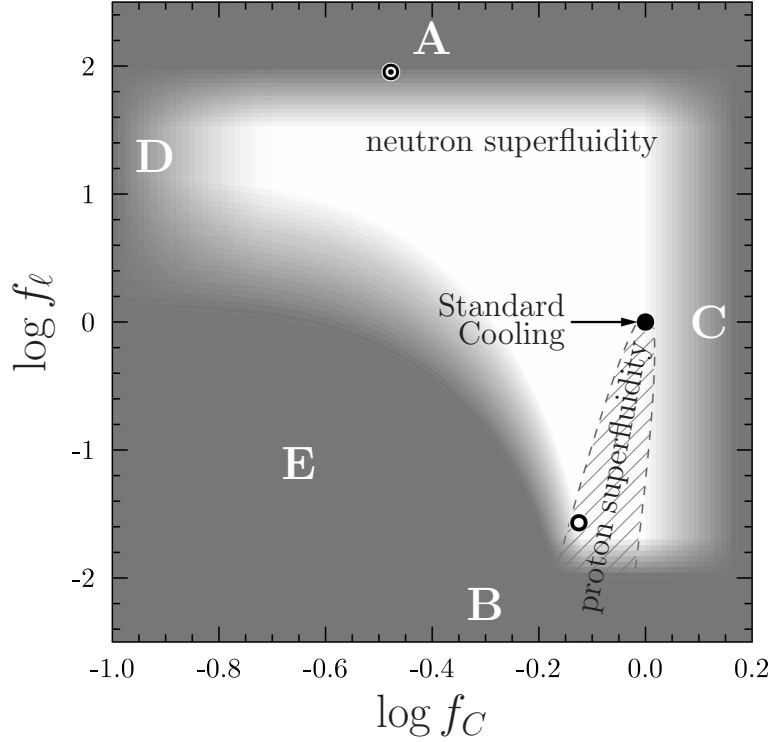


Рис. 2.2. Принципиальный вид диаграммы  $f_l - f_C$  для остывающих нейтронных звёзд. Сплошной кружок соответствует стандартному сценарию остывания,  $f_C = f_l = 1$  (сплошная кривая на рисунке 2.1). Пустой кружок — пример замедленного сценария остывания,  $f_C = 0.75$  и  $f_l \approx 0.027$  (штриховая кривая на рисунке 2.1). Кружок с точкой внутри — пример ускоренного сценария остывания,  $f_C \approx 0.33$  и  $f_l = 90$  (штрих-пунктирная кривая на рисунке 2.1). Заштрихованная область схематически показывает множество точек  $(f_C, f_l)$ , которые соответствуют сценариям остывания с нормальными нейтронами и (частично) сверхтекучими протонами. Остальное пространство соответствует сценариям с нейтронной сверхтекучестью. Серые тонированные области А — Е запрещены по различным теоретическим соображениям (подробнее см. текст).

Для простоты будем полагать, что отклонение от стандартного остывания вызывается только сверхтекучестью нуклонов в ядре звезды, пренебрегая возможностью усиления модифицированного урка-процесса за счёт многочастичных эффектов. В этом случае (см. раздел 2.2.1) фактор  $f_l$  ограничен сверху значениями 30 – 100 и снизу значениями 0.01 – 0.02. На рисунке 2.2 эти ограничения показаны, соответственно, тонированными областями А и В. Аналогично, в разделе 2.2.2 показано, что фактор остывания  $f_C$  ограничен сверху значениями 1.1 – 1.5 (область С) и снизу величинами 0.1 – 0.2 (область D). Неопределённость положения запрещённых диапазонов факторов остывания показана размытостью границ тонированных областей.

Существует ещё одно ограничение на допустимые сценарии остывания на диаграмме  $f_l - f_C$ . Значения  $f_C \lesssim 0.7$  достигаются лишь при наличии области со сверхтекучими нейтронами в ядре звезды (см. раздел 2.2.2). Но нейтронная сверхтекучесть, которая в ядре триплетная, приводит к усилению  $L_\nu^\infty$  за счёт излучения нейтрино при куперовском спаривании нейтронов, то есть к  $f_l > 1$ . То есть, сценарии остывания, в которых  $f_C$  и  $f_l$  одновременно малы, не реализуемы. Только когда все нейтроны уже находятся при температуре существенно меньше критической, интенсивность излучения нейтрино при куперовском спаривании падает, и  $f_l$  становится меньше единицы одновременно с малым  $f_C$  — но такая ситуация маловероятна в нейтронных звёздах на рисунке 2.1. Поэтому нижний левый угол диаграммы  $f_l - f_C$  можно считать запрещённым, что схематично показано серой областью Е. Количественные характеристики такого ограничения на  $f_l$  и  $f_C$  сильно модельно зависимы

и в литературе не исследовались. Его неопределённость иллюстрируется размытостью края области Е.

Узкая заштрихованная область схематично показывает множество точек  $(f_C, f_\ell)$ , которые можно достичь с помощью одной лишь протонной сверхтекучести. Пустой кружок, соответствующий штриховой кривой остывания на рисунке 2.1, как раз попадает в эту область. Она качественно соответствует тому, что сказано про влияние сверхтекучести протонов на остывание в разделах 2.2.1 и 2.2.2: темп нейтринного охлаждения сильно подавляется, а теплоёмкость сначала слегка увеличивается, а потом падает, в экстремальном случае достигая значений  $(0.7-0.75)C_{SC}$ . Остальные же точки, разрешённые на диаграмме  $f_\ell - f_C$ , достигаются только при наличии сверхтекучести нейтронов в ядре звезды. К таким точкам относится сценарий, отмеченный кружком с точкой внутри и отвечающий штрих-пунктирной кривой остывания на рисунке 2.1. Сверхтекучесть протонов при этом может быть произвольной степени — как развитая с почти полным подавлением  $L_{MU}^\infty$  и  $C_p$ , так и слабая, без существенного изменения этих величин. Однако большинство теоретических моделей профилей  $T_{cp}(\rho)$  и  $T_{cn}(\rho)$  предсказывают, что максимум первого из них в несколько раз больше максимума второго. Поэтому при наличии нейтронной сверхтекучести можно ожидать, что как минимум часть протонов в ядре звезды тоже сверхтекучая.

Для нейтронных звёзд с измеренной температурой и возрастом можно находить области допустимых сценариев остывания на диаграмме  $f_\ell - f_C$  и с их помощью делать выводы о состоянии вещества в их недрах. При этом возникает ряд трудностей. Во-первых, необходимо помнить, что  $f_\ell > 1$  может создаваться как сверхтекучими нейтронами, так и усиленным за счёт эффектов среды модифицированным урка-процессом. Во-вторых, для большинства нейтронных звёзд на рисунке 2.1 неизвестны масса, радиус и, самое главное, состав теплоизолирующей оболочки. Это ведёт к большому разбросу вычисленных значений факторов остывания. В-третьих, температуры и возрасты нейтронных звёзд, как правило, измеряются с большой погрешностью, что ведёт к неинформативно широким областям возможных сценариев остывания на диаграмме  $f_\ell - f_C$ . Тем не менее, в последующих разделах этой главы показано, что для ряда нейтронных звёзд факторы остывания можно оценить достаточно точно, чтобы получить информацию о сверхтекучести и даже уравнении состояния в этих звёздах.

### 2.3. Звёзды на нейтринной стадии остывания

Рассмотрим девять изолированных нейтронных звёзд среднего возраста, подробная информация о которых приведена в таблице 2.1. Это PSR J1119–6127 (здесь и далее J1119), RX J0822–4300 (пульсар в остатке сверхновой Pup A), PSR J1357–6429 (J1357), PSR B0833–45 (пульсар в остатке сверхновой в созвездии Парусов = пульсар Вела), PSR B1706–44 (B1706), PSR J0538+2817 (J0538), PSR B2334+61 (B2334), PSR B0531+21 (пульсар в Крабовидной туманности) and PSR J0205+6449 (пульсар в туманности 3C 58).

Для каждой из этих звёзд выполнены измерения (или оценки) возраста  $t$  и эффективной наблюдаемой температуры поверхности  $T_s^\infty$ . Эти данные приведены в таблице 2.1 вместе со ссылками на статьи, откуда эти данные были взяты. Отметим, что для температуры пульсара в Крабовидной туманности и в туманности 3C 58 даны лишь верхние пределы. Поверхностные температуры этих звёзд получены из анализа наблюдаемых спектров их теплового излучения. При этом использовалась либо модель излучения абсолютно чёрного тела, либо модель водородной атмосферы нейтронной звезды (с магнитным полем или без него). Для анализа остывания этих звёзд необходимо задать определённые значения массы  $M$  и радиуса  $R$ . Выбранные нами значения также приведены в таблице 2.1. Наконец, магнитные поля этих звёзд оценивались в основном по измерениям торможения их вращения. Значения поверхностного дипольного магнитного поля на экваторе звезды  $B$  взяты из каталога

Таблица 2.1. Значения параметров девяти изолированных нейтронных звёзд на нейтринной стадии остывания, использованные в данной диссертации. Подробнее см. текст.

Название	$t$ [ $10^3$ лет]	$T_s^\infty$ [ $10^6$ K]	$M$ [ $M_\odot$ ]	$R$ [км]	$B$ [ $10^{12}$ Гс]	Ссылки
PSR J0205+6449 (в туманности 3C 58)	0.82 – 5.4	< 1.02	1.4	12	3.6	[74, 75]
PSR B0531+21 (в Крабовидной туманности)	1.0	< 2.0	1.4	12.14	3.8	[33, 76]
PSR J1119–6127	0.8 – 3.2	1.02 – 1.48	1.4	10	41	[77]
RX J0822–4300 (в остатке Pup A)	3.6 – 5.2	1.6 – 1.9	1.4	10	0.033	[78–80]
PSR J1357–6429	3.65 – 14.6	0.68 – 0.86	1.4	10	7.8	[81]
PSR B0833–45 (Вела)	11 – 25	0.65 – 0.71	1.4	10	3.4	[82]
PSR B1706–44	8.5 – 34	0.48 – 0.83	1.4	12	3.1	[83]
PSR J0538+2817	26 – 34	0.71 – 1.07	1.4	10.5	0.7	[84]
PSR B2334+61	20.5 – 82	0.55 – 0.84	1.4	10	9.9	[77]

пульсаров ATNF<sup>3</sup> [17].

Разумно предположить, что все эти нейтронные звёзды находятся на нейтринной стадии остывания, а их недра изотермичны. Тогда соответствующий им фактор  $f_\ell$  можно найти с помощью степенного закона остывания (1.42), полагая в этой формуле  $q = f_\ell q_{\text{SC}}(M, R)$  и вычисляя температуру недр  $\tilde{T}$  по известной температуре  $T_s^\infty$ :

$$f_\ell = \frac{\left[ \tilde{T}_9(T_s^\infty; M, R, \Delta M_{\text{acc}}, B) \right]^6}{6q_{\text{SC}}(M, R)t_{\text{yr}}}. \quad (2.7)$$

В этой формуле подчёркнуто, что для определения  $\tilde{T}$  по данной температуре  $T_s^\infty$  нужно использовать соотношение  $T_s - T_b$  (см. раздел 1.2), параметрами которого являются масса лёгких элементов  $\Delta M_{\text{acc}}$  (водорода, гелия, углерода) и магнитное поле  $B$  в теплоизолирующей оболочке звезды [24], а также масса и радиус самой звезды. Вещество, состоящее из более лёгких элементов, имеет более высокую теплопроводность (лучше пропускает тепло), и это необходимо учитывать. Для учёта влияния магнитного поля вблизи поверхности нейтронной звезды было использовано соотношение  $T_s - T_b$  из работы [27] для нейтронных звёзд с дипольным магнитным полем в оболочке. В этом случае при фиксированной температуре недр температура поверхности пространственно неоднородна. Величина  $T_s^\infty$  в такой ситуации имеет смысл усреднённой температуры поверхности, определяющей полную фотонную светимость звезды.

Фактор  $f_C$  не влияет на остывание нейтронных звёзд на нейтринной стадии. Для них допустимые области на диаграмме  $f_\ell - f_C$  выглядят как горизонтальные полосы. При этом положение этих полос зависит от выбранных значений  $\Delta M_{\text{acc}}$  и  $B$ . Поэтому анализ остывания звёзд из таблицы 2.1 проведён с помощью графиков зависимости  $f_\ell(\Delta M_{\text{acc}})$ , а не по диаграммам  $f_\ell - f_C$ . Такие графики представлены<sup>4</sup> на рисунке 2.3 для всех нейтронных

<sup>3</sup> [www.atnf.csiro.au/people/pulsar/psrcat/](http://www.atnf.csiro.au/people/pulsar/psrcat/)

<sup>4</sup> Диссертант благодарен Д.Г. Яковлеву за предоставленную программу расчёта зависимо-

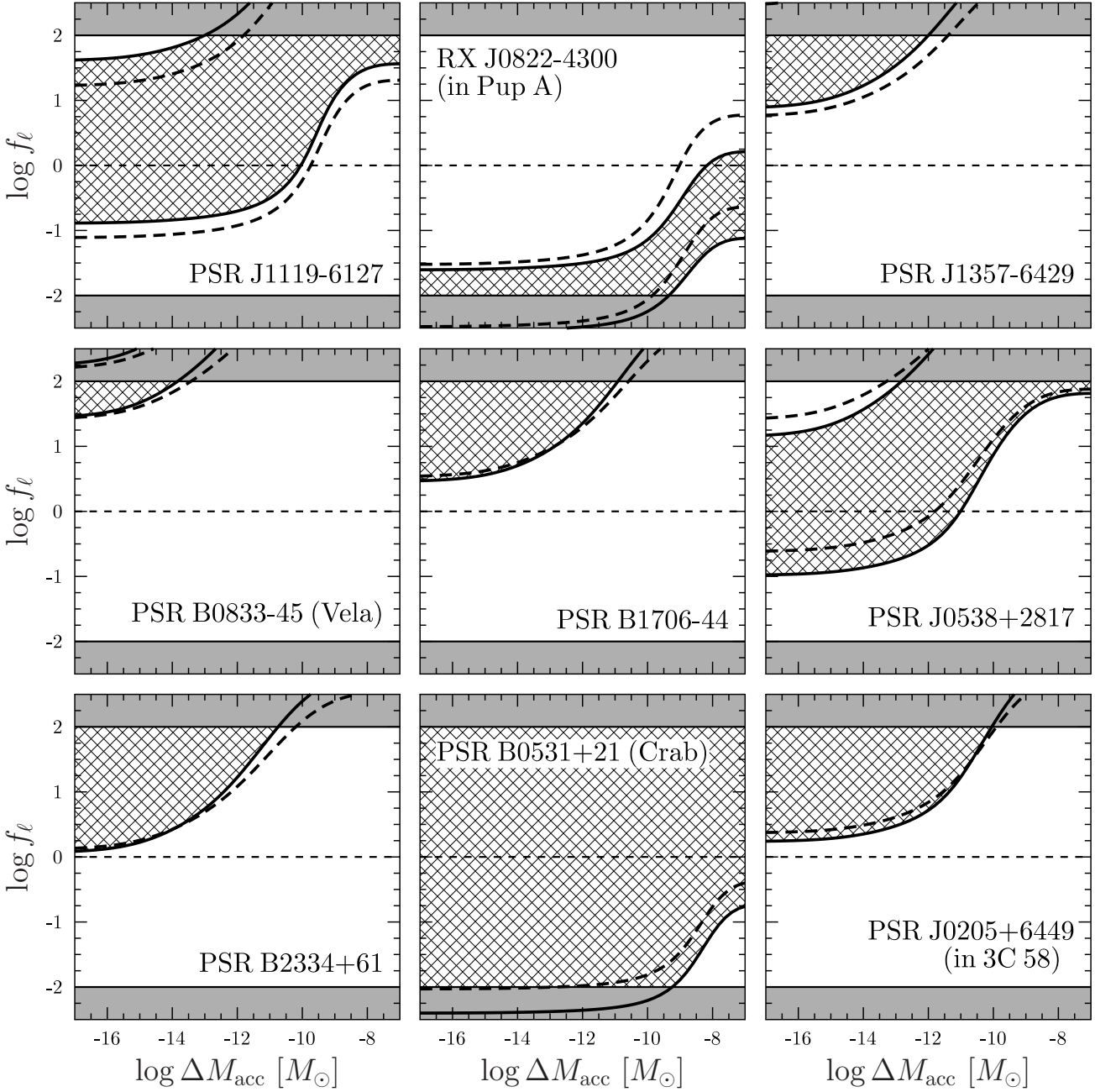


Рис. 2.3. Фактор нейтринного охлаждения  $f_\ell$  в зависимости от массы  $\Delta M_{\text{acc}}$  аккрецированного вещества для девяти изолированных нейтронных звёзд на нейтринной стадии охлаждения (таблица 2.1). Тонированные серым области соответствуют слишком низким ( $f_\ell < 0.01$ ) и слишком высоким ( $f_\ell > 100$ ) темпам остывания, которые нереалистичны по теоретическим соображениям. Тонкие горизонтальные штриховые прямые обозначают стандартный сценарий остывания  $f_\ell = 1$ . Заштрихованные области (ограниченные в основном жирной сплошной кривой) изображают теоретически допустимые значения  $f_\ell$  и  $\Delta M_{\text{acc}}$ , рассчитанные с учётом поверхностных магнитных полей. Жирные штриховые линии — то же, но без учёта влияния магнитных полей. Подробнее см. текст.

звёзд из таблицы 2.1. Каждый график соответствует одной из них и изображает допустимые значения  $f_\ell$  в зависимости от массы  $\Delta M_{\text{acc}}$ , которая, вообще говоря, неизвестна. Тонкие горизонтальные штриховые линии соответствуют стандартной нейтринной свече ( $\log f_\ell = 0$ ). Тонированные серым области  $f_\ell \lesssim 0.01$  и  $f_\ell \gtrsim 100$  следует исключить из рассмотрения по теоретическим соображениям как нереалистичные (см. раздел 2.2.1). Области  $\Delta M_{\text{acc}} \gtrsim 10^{-7} M_\odot$  также нефизичны [24]: масса аккрецированных лёгких элементов в оболочке  $\Delta M_{\text{acc}}$  не может быть слишком большой (иначе лёгкие ядра на дне оболочки будут превращаться в более тяжёлые за счёт электронных захватов и пикноядерных реакций). Значения  $\Delta M_{\text{acc}} \lesssim 10^{-17} M_\odot$  не показаны на рисунке 2.3, потому что при столь малых  $\Delta M_{\text{acc}}$  свойства оболочки перестают зависеть от количества аккрецированного вещества.

При построении графиков на рисунке 2.3 значения  $M$ ,  $R$ ,  $T_s^\infty$ ,  $t$  и  $B$  брались из таблицы 2.1. Заштрихованные области внутри допустимого диапазона  $0.01 \leq f_\ell \leq 100$  в основном ограничены двумя жирными сплошными линиями, рассчитанными с учётом влияния магнитного поля. Верхняя линия соответствует верхним пределам  $T_s^\infty$  и  $t$  из таблицы 2.1, нижняя — нижним пределам  $T_s^\infty$  и  $t$ . В случае, когда верхняя жирная кривая проходит существенно выше порога реалистичных значений  $f_\ell$ , она не изображается, и заштрихованная (допустимая) область оказывается ограничена сверху значением  $f_\ell = 100$ . Жирные штриховые линии изображают то же, что и сплошные жирные кривые, но без учёта магнитных полей. Как видно, влияние  $B$  немонотонно зависит от силы поля, и не очень велико само по себе. Эти выводы совпадают со сделанными в статье [27]. Согласно данному там объяснению, немонотонная зависимость свойств оболочки от магнитного поля возникает благодаря конкурирующему влиянию классических и квантовых явлений, определяющих вклад поля в свойства теплопроводности оболочки нейтронной звезды.

Проанализируем содержание графиков на рисунке 2.3. Во-первых, масса лёгких элементов  $\Delta M_{\text{acc}}$  в приповерхностном слое звезды крайне важна для определения  $f_\ell$  [33]. Чем она выше, тем более высокие  $f_\ell$  требуются для объяснения тех же самых  $T_s^\infty$  и  $t$ . В зависимости от (вообще говоря, неизвестной)  $\Delta M_{\text{acc}}$  одна и та же звезда может быть более ( $f_\ell > 1$ ) или менее ( $f_\ell < 1$ ) мощным источником нейтринного излучения, чем стандартная свеча, что приводит к неоднозначности выводов о сверхтекучести её недр.

Среди девяти рассмотренных звёзд пульсар в Крабовидной туманности оказывается наименее информативным с точки зрения такого анализа. Он молодой, и тепловое излучение его поверхности невозможно обнаружить на фоне мощного нетеплового излучения; поэтому для него указан только верхний предел  $T_s^\infty$  [33]. Сплошная и штриховая кривые соответствуют этому пределу. Результаты анализа свидетельствуют, что фактически этот пульсар может содержать произвольное количество аккрецированного вещества в оболочке, за исключением случая, когда фактор его охлаждения мал,  $f_l \lesssim 0.1$ , и высокое содержание лёгких элементов,  $\Delta M_{\text{acc}} \gtrsim 10^{-10} M_\odot$ , оказывается недопустимым. Эти выводы находятся в согласии с результатами работы [33].

Для пяти нейтронных звёзд (J1357, Вела, B1706, B2334, в туманности 3C 58) получается  $f_\ell > 1$ , что означает наличие триплетной нейтронной сверхтекучести в их ядрах (см. раздел 2.2.1). Кроме того, для всех этих звёзд недопустимы высокие значения  $\Delta M_{\text{acc}}$  (иначе они не смогли бы иметь столь низкую температуру поверхности). Эти ограничения наиболее ярко выражены для пульсара Вела. Он настолько холодный, что его фактор остывания должен быть близок к своему верхнему теоретическому пределу, а содержание лёгких элементов в его оболочке должно быть низким. К аналогичным выводам пришли авторы работы [85].

Оставшиеся три звезды (J1119, в остатке Руп А, J0538), в зависимости от  $\Delta M_{\text{acc}}$  могут иметь либо  $f_\ell < 1$  (что можно достичь с помощью синглетной протонной сверхтекучести при нормальных нейтронах), либо  $f_\ell > 1$  (что говорит о триплетной нейтронной сверхтекучести).

Микрофизика недр (уравнение состояния, зависимости  $T_{cn}(\rho)$  и  $T_{cp}(\rho)$ , зависимость свойств стей  $f_\ell(\Delta M_{\text{acc}})$ .

теплоизолирующей оболочки от аккрецированной массы  $\Delta M_{\text{acc}}$ ) должна быть одинакова для всех нейтронных звёзд. Но они могут иметь различные массы, радиусы,  $\Delta M_{\text{acc}}$  и магнитное поле. Меняя  $M$ , мы можем менять толщины сверхтекучих слоёв нейтронов и протонов, и, как следствие, регулировать  $L_\nu^\infty(\tilde{T})$ ,  $C_{\text{core}}(\tilde{T})$  и  $f_\ell$ . Меняя  $\Delta M_{\text{acc}}$  и  $B$ , мы модифицируем  $\tilde{T}$  при заданной температуре  $T_s^\infty$ , что также влияет на  $f_\ell$ . Таким образом, не следует ожидать схожих значений  $\Delta M_{\text{acc}}$  и  $f_\ell$  для всех нейтронных звёзд. Изучая диаграммы  $\Delta M_{\text{acc}} - f_\ell$ , можно исследовать статистические распределения параметров нейтронных звёзд, важных для описания их остывания. Тем не менее, следует отметить, что, согласно рисунку 2.3, все рассматриваемые здесь нейтронные звёзды могут иметь фактор остывания в диапазоне  $1 \lesssim f_i \lesssim 100$ . В этом случае их нейтринное излучение оказывается мощнее, чем если бы оно определялось модифицированным урка-процессом (стандартная свеча), и согласуется с предположением о триплетной нейтронной сверхтекучести в их ядрах. Как следствие, нет необходимости привлекать прямой урка-процесс для объяснения остывания отобранных девяти звёзд, что находится в согласии с использованной парадигмой минимального остывания. Важным достоинством нашего анализа является независимость от модели (нуклонного) уравнения состояния ядра, что позволяет единым образом рассматривать различные нейтронные звёзды с различными  $T_s^\infty$ .

Если предположить, что прямой урка-процесс всё-таки может идти в некоторой области ядер рассмотренных звёзд, результаты проведённого нами анализа станут гораздо менее информативны. Кроме того, результаты изменятся, если допустить наличие в ядрах этих звёзд гиперонов или экзотических фаз вещества.

## 2.4. Темп нейтринного охлаждения пульсара Вела

Данный раздел основан на работе [57], где проведён повторный анализ наблюдений рентгеновского излучения пульсара Вела и определены эффективная температура  $T_s^\infty$  его поверхности (с учётом гравитационного красного смещения в системе отсчёта удалённого наблюдателя), масса  $M$ , радиус  $R$ , а также, с помощью теории остывания нейтронных звёзд, темп нейтринного охлаждения этого пульсара.

Вела — знаменитый пульсар среднего возраста, наблюдающийся в самых разных диапазонах длин волн. Его рентгеновское излучение зарегистрировано многими космическими обсерваториями (главным образом, это *Chandra* и *XMM-Newton*). Здесь мы принимаем его характеристический возраст равным  $t \sim 11$  тыс. лет, хотя он определяется неоднозначно из-за частых глитчей (например, в статье Лайна [86] заявлен возраст  $t \sim 25$  тыс. лет). Истинный возраст этой звезды трудно оценить из-за неправильной формы соответствующего остатка сверхновой [87]. Магнитное поле на экваторе Велы оценено как  $B_{\text{surf}} \approx 3.38 \times 10^{12}$  Гс [17]<sup>5</sup>, а расстояние до этого пульсара составляет  $d = 287_{-17}^{+19}$  пс [88]. Ранее в литературе приводились оценки его поверхностной температуры  $T_s^\infty \approx 0.7$  МК (использовалась модель водородной атмосферы *nsa* [89] для тепловой компоненты, степенной закон для нетепловой компоненты, масса и радиус предполагались равными  $M = 1.4 M_\odot$  и  $R = 10$  км [82, 90, 91]).

Определяя  $T_s^\infty$  из наблюдений и используя теорию остывания, можно ограничить наиболее важные параметры нейтронной звезды, в том числе фундаментальные свойства сверхплотной материи её недр. Как видно из рисунка 2.1, пульсар Вела — один из самых быстро остывающих, и его исследование в этом ключе особенно важно. Сценарий остывания, изображённый штрих-пунктирной кривой (фактически соответствует  $f_\ell = 90$  при железной теплоизолирующей оболочке), удовлетворяет наблюдаемым характеристикам Велы, однако существенно уменьшить  $f_\ell$  уже нельзя. Об этом же свидетельствуют результаты раздела 2.3 и, в частности, рисунок 2.3: для Велы необходимо  $f_\ell \gtrsim 30$  и  $\Delta M_{\text{acc}} \lesssim 10^{-14} M_\odot$ .

<sup>5</sup> <http://www.atnf.csiro.au/people/pulsar/psrcat/>

Исследование остывания Велы можно углубить с использованием более детальных результатов анализа его рентгеновского спектра. В частности, с использованием существующих теоретических ограничений на свойства сверхплотной материи (например, ограничений на  $f_{\ell}$ ) можно наложить дополнительные ограничения на наблюдаемые характеристики этой звезды (например,  $M$  и  $R$ ). Подобный метод использования теории остывания был впервые применён в статье [35] при анализе нейтронной звезды XMMU J1732–344. Далее описано, что он даёт для пульсара Вела.

### 2.4.1. Спектральный анализ пульсара Вела

До 2018 года в литературе приводились лишь результаты анализа теплового спектра Велы, выполненного при фиксированных  $M = 1.4 M_{\odot}$  и  $R = 10$  км [82, 90, 91]. Именно результаты этих работ использованы в разделе 2.3. В данном разделе тепловой анализ построен на результатах спектрального анализа излучения Велы [57] с варьируемыми  $M$  и  $R$ . Рентгеновские наблюдения пульсара Вела проводились многократно, но авторы [57] ограничились тремя наборами данных, полученными космической обсерваторией *Chandra* (ObsID 127 и 1852 в моде HRC-S/LETG и ObsID 131 в моде ACIS-S/HETG/CC). Детали обработки этих спектров<sup>6</sup> также можно найти в [57]. Здесь мы лишь упомянем необходимые для дальнейшего изложения моменты.

В процессе анализа данных тепловая компонента излучения аппроксимировалась моделью магнитной водородной атмосферы нейтронной звезды *nsmx 1230* [92] с полем  $2 \times 10^{12}$  Гс; жёсткая нетепловая компонента фитировалась степенной зависимостью, а межзвёздное поглощение описывалось моделью *tbabs* [93]. Такая модель имеет шесть параметров: фактор красного смещения  $1 + z = [1 - 2GM/(Rc^2)]^{-1/2}$ , локальная температура поверхности  $T_s = T_s^{\infty}(1 + z)$ , нормировочный множитель  $N = R^2/d^2$ , показатель степени  $\Gamma$  и нормировка  $\mathcal{N}_{\Gamma}$  для нетепловой компоненты, а также эквивалентная лучевая концентрация водорода  $n_H$  на луче зрения. Спектр Велы подгонялся для набора пар фиксированных значений  $z$  и  $N$ , соответствующих диапазону значений масс  $1 \leq M \leq 3 M_{\odot}$  и радиусов  $9 \leq R \leq 16$  км при заданном расстоянии до пульсара  $d = 290$  пк. Параметры  $T_s$ ,  $\Gamma$ ,  $\mathcal{N}_{\Gamma}$  и  $n_H$  считались свободными. Качество подгонки определялось критерием  $\chi^2$ .

На рисунке 2.4а цветом показаны значения  $T_s^{\infty}$ , соответствующие наилучшей подгонке при заданных  $M$  и  $R$ ; минимизированный  $\chi^2$  также зависит  $M$  и  $R$ . Абсолютный минимум  $\chi^2$ , т.е. точка наилучшей подгонки (крест на рисунке 2.4) соответствует  $M = 2.4_{-1.4}^{+0.1} M_{\odot}$  и  $R = 10.8_{-1.3}^{+3.7}$  км на уровне  $1\sigma$ .<sup>7</sup> Контуры доверительных областей для  $M$  и  $R$  изображены на рисунке 2.4 чёрными линиями. Доверительная область для температуры на всей плоскости  $(M, R)$  (внутренность толстого штрихового контура на рисунке 2.4а) составляет  $T_s^{\infty} = 0.66_{-0.01}^{+0.04}$  МК на уровне  $1\sigma$ .

На рисунке 2.4b контуры доверительных областей  $M - R$  для пульсара Вела приведены в сравнении с набором кривых  $M - R$  для ряда реалистичных моделей уравнения состояния вещества недр нейтронных звёзд — тех же самых, что использованы в главе 1. Некоторые уравнения из этого набора (PAL4-240, SLy, NHJ II и APR) плохо согласуются с ограничениями, накладываемыми на массу и радиус Велы 90%-ой доверительной областью. Другие, напротив, предполагают множество способов согласования с результатами обработки наблюдений этого пульсара. Он может быть звездой малой массы с большим радиусом  $\sim 13$  км. Или же Вела может быть массивной ( $M > 1.5 M_{\odot}$ ) звездой с радиусом  $\sim 11 - 12$  км, что является типичной ситуацией для других нейтронных звёзд с массой и радиусом, ограниченными из анализа рентгеновского спектра атмосферы [94, 95]. Даже может статься, что

<sup>6</sup> Автор благодарен Д.А. Зюзину, взявшему на себя тяжёлый труд проведения спектрального анализа.

<sup>7</sup> Верхний предел для массы и нижний предел для радиуса получены исходя из ограничения по принципу причинности; см. область, тонированную серым цветом на рисунке 2.4.

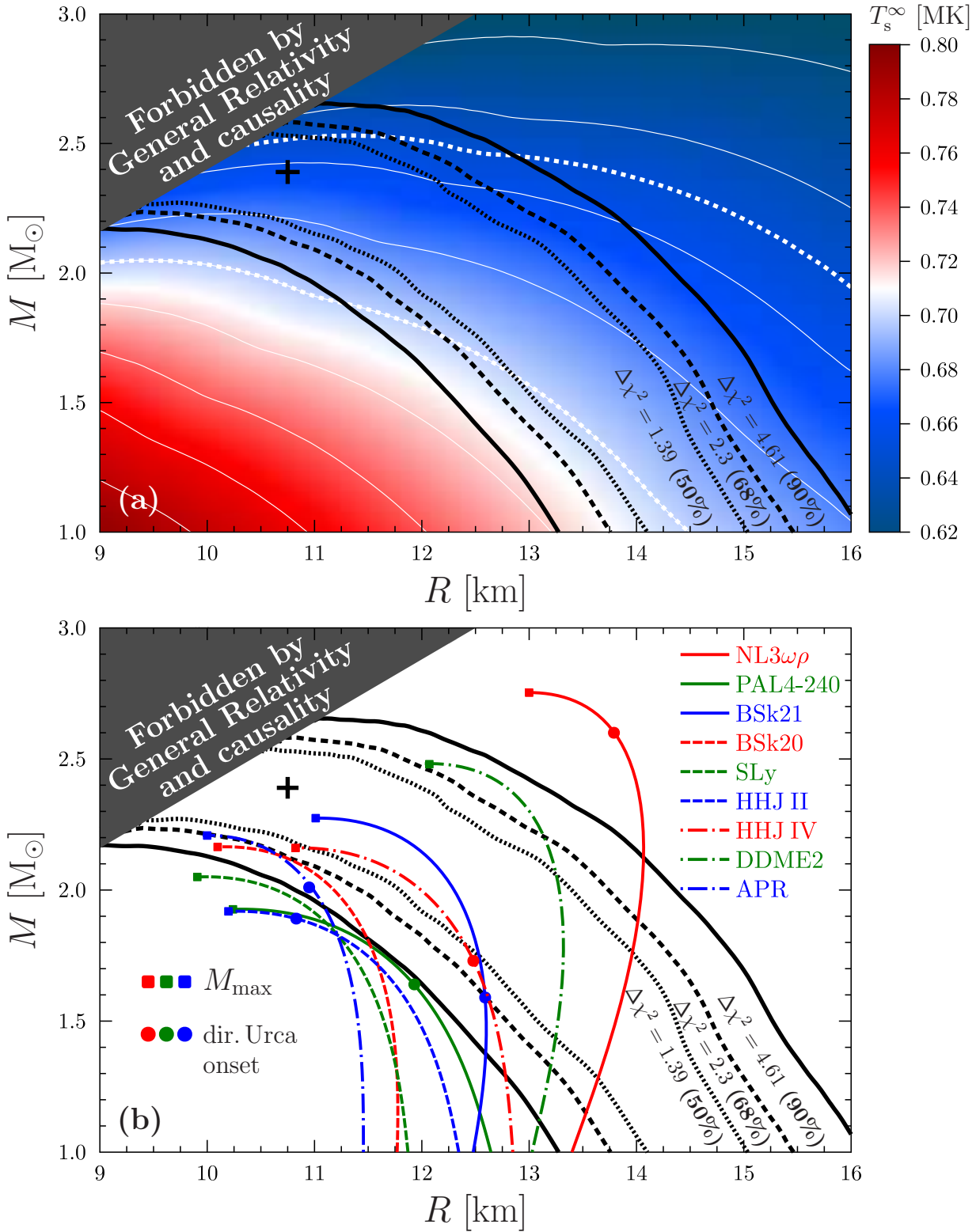


Рис. 2.4. (а) Чёрные контуры изображают доверительные интервалы для массы и радиуса пульсара Вела, полученные из анализа его рентгеновского спектра. Крестом отмечена точка наилучшей подгонки (детали см. в тексте). Цветом изображена карта температуры поверхности  $T_s^\infty$  в системе отсчёта наблюдателя как функция возможных значений  $M$  и  $R$ . Тонкие белые линии соответствуют постоянным значениям  $T_s^\infty = 0.62, 0.64, \dots, 0.78$  МК. Толстыми белыми штрихами изображена доверительная область  $T_s^\infty$  на уровне  $1\sigma$ . (б) Доверительные области для массы и радиуса Велы (те же, что и на верхнем рисунке) в сравнении с соотношениями  $M - R$  для нескольких моделей уравнения состояния недр нейтронных звёзд (подробнее см. текст). Для каждого уравнения состояния квадратики обозначают звезду с максимально возможной массой, а кружки — звезду, центральная плотность которой совпадает с порогом открытия прямого урка-процесса.



Вела — очень массивная звезда с большим радиусом. Такие звёзды часто предсказываются теоретическими моделями релятивистского среднего поля (см., например, [39]).

#### 2.4.2. Остывание пульсара Вела

Интерпретируем наблюдения пульсара Вела с помощью теории остывания нейтронных звёзд. Снова вычислим  $f_\ell$  по формуле (2.7), но теперь сделаем это для всего ансамбля точек  $(M, R)$ , использованного в разделе 2.4.1 для анализа теплового спектра этого пульсара. При этом  $T_s^\infty$  следует также рассматривать как функцию  $M$  и  $R$  (именно она показана цветом на рисунке 2.4а). Строго говоря, в каждой точке  $(M, R)$  температура  $T_s^\infty$  имеет погрешность, так как определяется из подгонки наблюдаемого спектра. Однако относительная величина этой погрешности редко превосходит 1%, и порождаемая ей неопределённость  $f_\ell$  пренебрежимо мала.

При заданных параметрах теплоизолирующей оболочки описанный метод даст зависимость  $f_\ell(M, R)$ , характеризующую пульсар Вела. Для неаккреционной оболочки ( $\Delta M_{\text{acc}} = 10^{-17} M_\odot$ ) с магнитным полем  $B_{\text{surf}} = 3.38 \times 10^{12}$  Гс такая зависимость показана цветом на рисунке 2.5. Фактор  $f_\ell$  значительно меняется внутри контуров доверительных областей для  $M$  и  $R$  пульсара Вела (рисунок 2.4). Если пульсар обладает высокой компактностью (большая масса, малый радиус), для объяснения его остывания достаточно  $f_\ell \sim 5 - 10$ . Если же Вела имеет низкую компактность (большой радиус, невысокая масса), то его фактор остывания достигает значений  $\sim 50 - 70$ . В этот момент становится крайне важным максимальное значение фактора остывания  $f_{\ell\text{max}}$ , допустимое с теоретической точки зрения (см. раздел 2.2.1). Если  $f_{\ell\text{max}} \sim 100$ , как предполагается в разделе 2.3, то все возможные значения массы и радиуса Велы, показанные на рисунке 2.5, удовлетворяют ограничению  $f_\ell(M, R) \leq f_{\ell\text{max}}$ . Если же предположить  $f_{\ell\text{max}} \sim 30$ , то большинство точек внутри доверительных интервалов на графике 2.5 перестает удовлетворять условию  $f_\ell \leq f_{\ell\text{max}}$ .

Получается, что при определённых значениях  $f_{\ell\text{max}}$  теория остывания может быть использована как инструмент для наложения дополнительных ограничений на массу и радиус остывающих нейтронных звёзд. В случае пульсара Вела предположение  $f_{\ell\text{max}} = 30$  приводит к строгим ограничениям на его массу и радиус,  $M \gtrsim 1.9 M_\odot$  и  $R \lesssim 12.5$  км. К сожалению, истинное значение  $f_{\ell\text{max}}$  на данный момент известно плохо (см. раздел 2.2.1), и такое предположение нельзя считать надёжным.

Условия, поставленные на массу и радиус за счёт мажорирования фактора остывания для неаккреционной модели оболочки звезды, являются наименее строгими. Присутствие аккреционной материи в теплоизолирующей оболочке нейтронной звезды увеличивает  $f_\ell$ , что при фиксированном уровне  $f_{\ell\text{max}}$  означает запрещение ещё большей области масс и радиусов, чем в случае неаккреционной оболочки. Это проиллюстрировано на рисунке 2.6, где изображена карта  $f_\ell(M, R)$  для умеренно аккреционной теплоизолирующей оболочки,  $\Delta M_{\text{acc}} = 10^{-12} M_\odot$ . Такая оболочка приводит к  $f_\ell > 150$  во всём показанном диапазоне масс и радиусов. Соответственно, такое значение  $\Delta M_{\text{acc}}$  вообще невозможно для Велы, если считать, что отклонение  $f_\ell$  от единицы вызвано только сверхтекучестью нуклонов в ядре звезды. Подобные рассуждения позволяют поставить верхний предел на  $\Delta M_{\text{acc}}$  в оболочке Велы — это сделано в предыдущем параграфе. Впрочем, если допустить, что  $f_{\ell\text{max}}$  может достигать значений  $\sim 300 - 1000$  за счёт многочастичных эффектов в сверхплотной материи ядра звезды, то на рисунке 2.6 появляются разрешённые области масс и радиусов.

Подведём итог нашему анализу остывания пульсара Вела. Как и предсказывал предварительный анализ в разделе 2.3, его остывание ускорено, а содержание аккрецированной материи в теплоизолирующей оболочке не может быть слишком большим. Детальный учёт результатов спектрального анализа в совокупности с модельно-независимыми аппроксимациями из главы 1 позволил построить карты  $f_\ell(M, R)$  для этой нейтронной звезды (если,

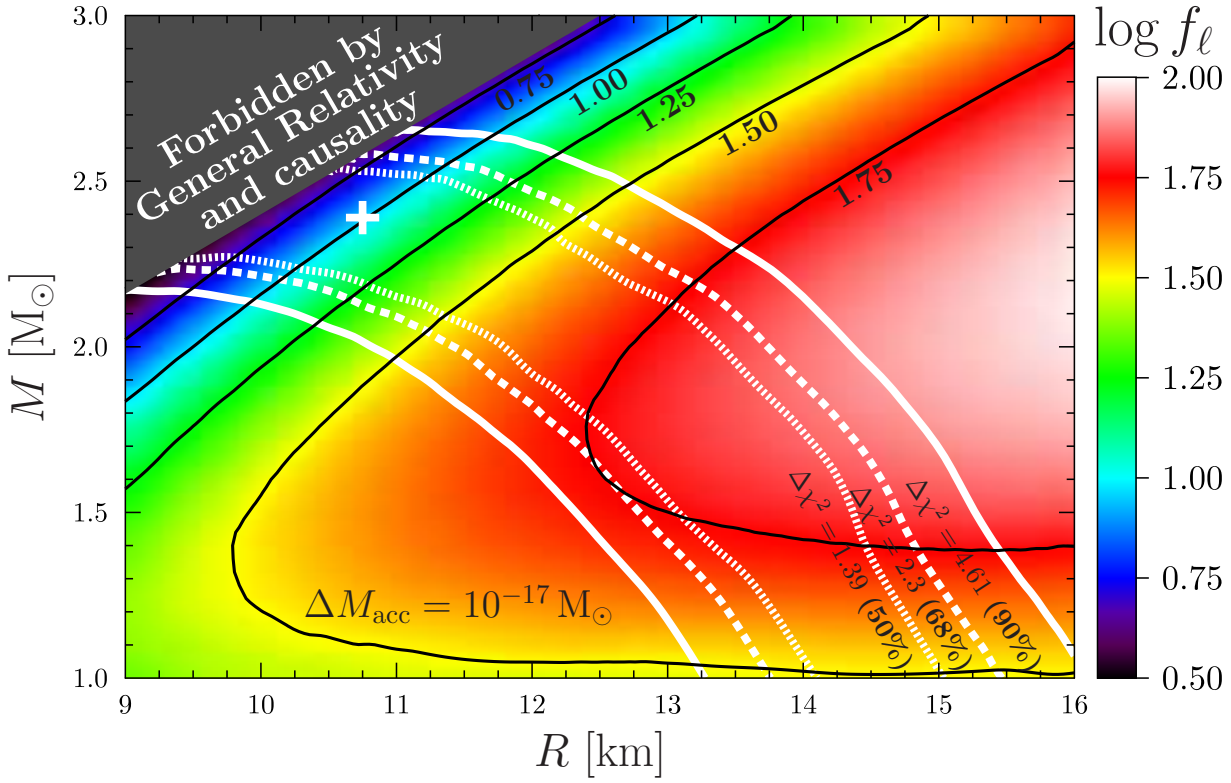


Рис. 2.5. Фактор нейтринного охлаждения  $f_\ell$  для пульсара Вела как функция его массы и радиуса для полностью железной теплоизолирующей оболочки. Чёрные контуры — уровни постоянного  $f_\ell$ , соответствующие значения  $\log f_\ell$  указаны на графике. Белые контуры — доверительные области для  $M$  и  $R$ , те же, что и на рисунке 2.4.

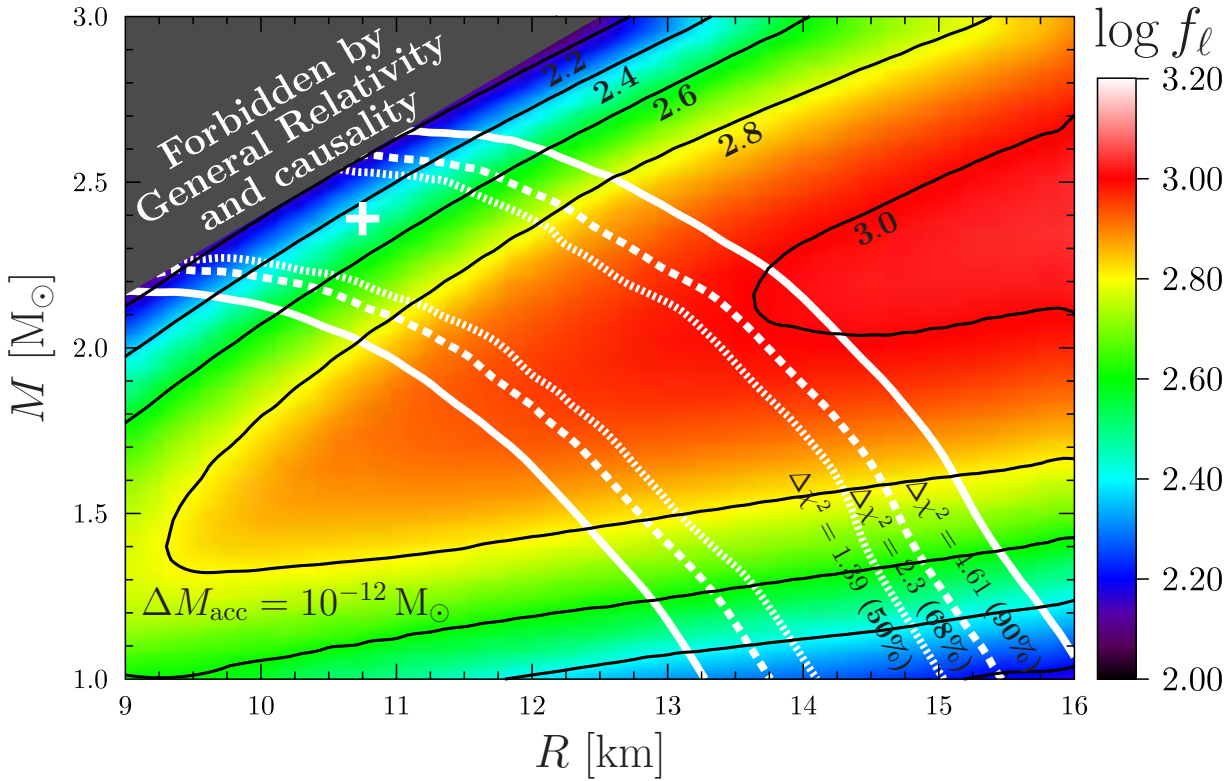


Рис. 2.6. То же, что и на рисунке 2.5, но для умеренно аккреционной оболочки,  $\Delta M_{\text{acc}} = 10^{-12} M_\odot$ .

конечно, зафиксировать модель теплоизолирующей оболочки). Применение к таким картам теоретического условия  $f_\ell < f_{\ell\max}$  даёт принципиальную возможность накладывать дополнительные ограничения на массу и радиус этого пульсара. К сожалению, неопределённость значения  $f_{\ell\max}$  не позволяет сделать это надёжно.

## 2.5. Анализ остывания ХММУ J1732–344

Нейтронная звезда ХММУ J173203.3–34418 (далее ХММУ J1732) является типичным представителем класса центральных компактных объектов (ЦКО) — относительно молодых остывающих нейтронных звёзд в остатках сверхновых. Они обладают достаточно слабыми магнитными полями ( $\lesssim 10^{10} - 10^{12}$  Гс) и являются источниками достаточно мощного теплового излучения в мягком рентгеновском диапазоне. Источник ХММУ J1732, кроме всего перечисленного, обладает особенностью: спектральный анализ его излучения даёт физически адекватные результаты только при использовании модели углеродной атмосферы нейтронной звезды [35]. Это накладывает ограничение на свойства теплоизолирующей оболочки ХММУ J1732, которую, соответственно, можно считать состоящей только из двух слоёв, углеродного и железного [7, 28]. Температура поверхности ХММУ J1732 в результате такого анализа получается равной  $T_s^\infty = 1.78_{-0.02}^{+0.04} \times 10^6$  К, что делает эту звезду одной из самых горячих остывающих нейтронных звёзд (см. рисунок 2.1). Соответственно, её остывание должно быть медленным. С точки зрения теории, такое остывание может быть объяснено [35] с помощью сочетания двух обстоятельств: сильного подавления нейтринного излучения из ядра и наличия массивной углеродной теплоизолирующей оболочки.

Как следует из обсуждения в разделе 2.2.1, сильное подавление темпа остывания на нейтринной стадии ( $f_\ell \ll 1$ ) возможно только при отсутствии триплетной сверхтекучести нейтронов и при наличии сильной синглетной сверхтекучести протонов. В ядре такой звезды не происходит излучения нейтрино при образовании триплетных куперовских пар нейтронов, подавлен модифицированный урка-процесс, — словом, ни один из механизмов ускоренного или хотя бы стандартного остывания не работает. Неподавленным оказывается только тормозное излучение нейтринных пар при  $nn$ -столкновениях. Оно в 50 – 100 раз слабее модифицированного урка-процесса. Однако, как показано авторами [22, 35], при возрасте ХММУ J1732  $\sim 27$  тыс. лет (консервативная оценка 10 – 40 тыс. лет, подробнее см. [22] и ссылки там) такое ослабление темпа остывания само по себе оказывается недостаточным для объяснения наблюдаемых свойств этого ЦКО.

Вторым мощным регулятором поверхностной температуры ХММУ J1732 является количество углерода (точнее, аккрецированной материи, содержащей лёгкие элементы [24]) в теплоизолирующей оболочке. Теплопроводность углеродной оболочки выше, чем у неаккреционной железной, что приводит к более высокой поверхностной температуре при одной и той же температуре недр. Однако даже максимально возможное количество углерода в оболочке ( $\sim 10^{-8} M_\odot$  [7, 28]) не в состоянии поднять температуру поверхности стандартно остывающей звезды так, чтобы объяснить наблюдения ХММУ J1732. Только совместное использование обоих регуляторов остывания — сверхтекучести протонов в ядре звезды и углеродности оболочки, — позволяет при возрасте 10 – 40 тыс. лет достичь температуры поверхности нейтронной звезды, совпадающей с результатами наблюдений ХММУ J1732. При этом, как будет показано ниже, оба регулятора должны работать на пределе своих возможностей.

Стоит отметить также, что сценарий замедленного остывания с сильной протонной сверхтекучестью в ядре возможен даже в случае, когда прямой урка-процесс формально разрешён в некоторой области ядра ХММУ J1732 в рамках данной модели уравнения состояния: сверхтекучесть подавит все процессы с участием протонов, и остывания этой звезды всё равно будет замедленным (похожие ситуации описаны, например, в [20]).

В статье [35] наблюдения ХММУ J1732 были интерпретированы с применением углеродных моделей атмосфер нейтронных звёзд. В широком диапазоне возможных масс и радиусов звезды наблюдаемый спектр ХММУ J1732 был подогнан такими моделями, в результате чего эффективная температура поверхности  $T_s^\infty$  и критерий качества подгонки  $\chi^2$  были определены для каждой пары значений  $M$  и  $R$ . На рисунке 2.7 представлены контуры доверительных областей на плоскости  $M - R$  на уровнях значимости 50, 68 и 90% (чёрная точечная, штриховая и сплошная линии, соответственно) в предположении, что расстояние до ХММУ J1732 составляет  $d = 3.2$  кпк. Знаком «+» отмечена точка наилучшей подгонки, соответствующая  $M = 1.53 M_\odot$ ,  $R = 12.4$  км и  $T_s^\infty = 1.78$  МК. Доверительные контуры ограничивают область вероятных значений масс и радиусов ХММУ J1732 при заданном расстоянии до него.

Воспользуемся тем же методом анализа остывания ХММУ J1732, что был применён к пульсару Вела в разделе 2.4.2. Будем считать, что звезда ХММУ J1732 ещё не покинула нейтринную стадию остывания, и применим к ней формулу (1.42). При этом функцию остывания  $q$  возьмём в виде (2.5), потому что она содержит фактор  $f_{\ell p}$ , более подходящий для исследования медленно остывающих звёзд, чем фактор  $f_\ell$ . Тогда для  $f_{\ell p}$  можно записать формулу, аналогичную выражению (2.7):

$$f_{\ell p} = \frac{[\tilde{T}_9(T_s^\infty; M, R, \rho_C)]^6}{6q_{SC}(M, R)t_{yr}} - \frac{q_{nn}(M, R)}{q_{SC}(M, R)}. \quad (2.8)$$

Здесь  $T_s^\infty$  считается функцией массы и радиуса, полученной при подгонке теплового спектра ХММУ J1732 моделью углеродной атмосферы, а соотношение  $T_s - T_b$  соответствует модели теплоизолирующей оболочки, состоящей только из углеродного и железного слоёв. Такая модель была рассчитана А.Ю. Потехиным [7]. Считалось, что оболочка простирается до плотности  $\rho_b = 10^{10}$  г см<sup>-3</sup> и имеет внешний углеродный слой (при плотностях  $\rho < \rho_C$ ) и внутренний железный (при плотностях  $\rho_C < \rho < \rho_b$ ). Параметрами такой модели теплоизолирующей оболочки являются  $M$ ,  $R$  и плотность  $\rho_C$ , а магнитное поле считается пренебрежимо малым (правдоподобное приближение для ЦКО, в частности, для ХММУ J1732). Таким образом, остывание ХММУ J1732 определяется четырьмя параметрами:  $M$ ,  $R$ ,  $f_{\ell p}$  и  $\rho_C$ . Плотность  $\rho_C$  более удобна в данном исследовании, чем полная масса углеродного слоя  $\Delta M_C$ , использованная в [35]. Связь между  $\Delta M_C$  и  $\rho_C$  описана, например, в приложении А статьи [22].

Функции  $q_{SC}(M, R)$  и  $q_{nn}(M, R)$  связаны с величинами  $L_{MU}^\infty$ ,  $L_{nn}^\infty$ ,  $C_{tot}$  и  $C_{nl}$  [см. формулы (2.2) и (2.4)], которые аппроксимированы в разделе 1.3.3. Однако работа [22] по исследованию остывания ХММУ J1732, на которой основан данный раздел, была написана диссертантом раньше, чем статья [29], на которой основан раздел 1.3.3. В статье [22] диссертантом были предложены несколько иные аппроксимации непосредственно для величин  $q_{MU}$  и  $q_{nn}$  (также универсальные относительно модели уравнения состояния). Приведённые ниже результаты взяты из статьи [22] и получены с помощью аппроксимаций, представленных там. Результат теплового анализа не претерпит качественных изменений, если воспользоваться подгонками из раздела 1.3.3.

На рисунке 2.7 цветом показаны карты  $f_{\ell p}(M, R)$  для ХММУ J1732 при заданных значениях  $\rho_C = 10^{10}$ ,  $3 \times 10^9$  и  $10^9$  г см<sup>-3</sup>. При данных массе и радиусе фактор остывания требуется тем меньше, чем меньшим полагается содержание углерода в оболочке звезды. Если же задаться фиксированным значением  $f_{\ell p}$ , то при уменьшении  $\rho_C$  для объяснения остывания ХММУ J1732 требуются большие массы и радиусы.

Как указано в разделе 2.2.1, область теоретически допустимых значений фактора  $f_{\ell p}$  имеет, по-видимому, ненулевую нижнюю границу. Она определяется профилем критической температуры протонной сверхтекучести  $T_{cp}(\rho)$  в ядре звезды. Предельного значения  $f_{\ell p} = 0$  можно достичь только с помощью очень сильной сверхтекучести с критической температурой  $T_{cp} \gtrsim 5 \times 10^9$  К во всём объёме ядра. Обзор существующих моделей профилей  $T_{cp}(\rho)$

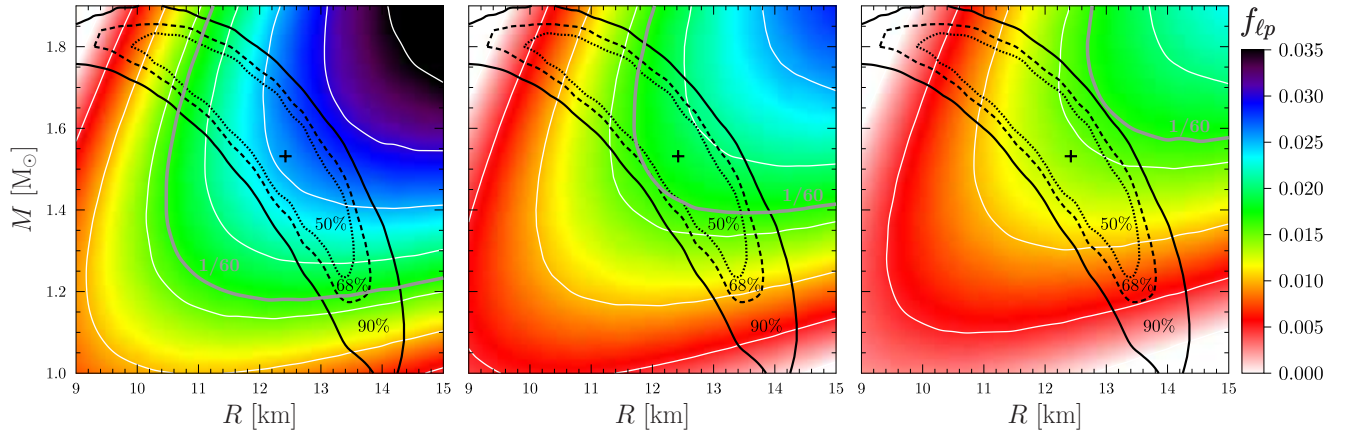


Рис. 2.7. Решения задачи остывания XMMU J1732 на плоскости  $M - R$ . Значения функции  $f_{lp}(M, R)$  показаны цветом. Белые контуры соответствуют фиксированным значениям  $f_{lp}=0.005, 0.010, \dots, 0.035$  фактора подавления нейтринного охлаждения протонной сверхтекучестью для моделей теплоизолирующей оболочки, содержащей углерод вплоть до плотностей  $\rho_C = 10^{10}$  (слева),  $3 \times 10^9$  (в центре) и  $10^9$  г см $^{-3}$  (справа). Область справа серой кривой соответствует условию  $f_{lp} \geq 1/60$ . Чёрные контуры обозначают границы доверительных областей масс и радиусов XMMU J1732, полученных в [22] на уровнях значимости 50, 68 и 90% при подгонке наблюдаемого спектра моделью углеродной атмосферы нейтронной звезды. Знаком «+» отмечена точка наилучшей подгонки. Подробнее см. текст.

показывает, что такое требование нереалистично, особенно в центральных областях ядра с наиболее плотным веществом. При достаточно высокой плотности притяжение между протонами превратится в отталкивание, что приведёт к разрушению протонной сверхтекучести, увеличению нейтринной светимости и слишком быстрому (в сравнении с наблюдениями) остыванию XMMU J1732. Таким образом, малые  $f_{lp} \rightarrow 0$  нереалистичны, особенно в массивных нейтронных звёздах.

Реалистичная нижняя граница значений  $f_{lp}$  должна определяться посредством тщательного анализа существующих в литературе профилей  $T_{cp}(\rho)$ , вычисленных в рамках различных моделей ядерных взаимодействий, применённых к различным моделям вещества нейтронных звёзд. Такое исследование не в ходит в задачу данной работы. В иллюстративном порядке предположим  $f_{lp} \gtrsim 1/60$ . Как видно из рисунка 2.7, это условие приводит к существенным ограничениям на массу и радиус XMMU J1732. В частности, для полностью углеродной теплоизолирующей оболочки (левый график) мы получим  $R > 10.5$  км и  $M > 1.2 M_\odot$ . Для чуть меньшего количества углерода в звезде ( $\rho_C = 3 \times 10^9$  г см $^{-3}$ , средний график) имеем  $R > 12$  км и  $M > 1.37 M_\odot$ . Для ещё меньшего количества углерода ( $\rho_C = 10^9$  г см $^{-3}$ , правый график) допустимые значения  $M$  и  $R$  становятся слишком высокими, плохо согласующимися с доверительными областями масс и радиусов, полученных из спектрального анализа. Следовательно, для объяснения теплового состояния XMMU J1732 предпочтительными являются оболочки с  $\rho_C \gtrsim 10^9$  г см $^{-3}$  (этот вывод находится в согласии с результатами работы [35]).

Добавим, что, согласно многим численным расчётам и теоретическому анализу наблюдений (см., к примеру, [54, 96] и ссылки там), прямой урка-процесс, по-видимому, открывается в недрах наиболее массивных нейтронных звёзд. Если он не подавлен протонной сверхтекучестью, то такие звёзды не могут быть горячими, как XMMU J1732. Исходя из этих соображений можно ожидать, что XMMU J1732 имеет не очень большую массу (скажем,  $M \lesssim 1.6 M_\odot$ ). Соответственно, возможно дальнейшее уменьшение области  $M - R$ , разрешённой с точки зрения теории остывания за счёт исключения высоких масс. Однако такое дополнительное ограничение требует более детального исследования. Как правило, моделирование остывания показывает, что очень массивные нейтронные звёзды имеют низкие температуры. В принци-

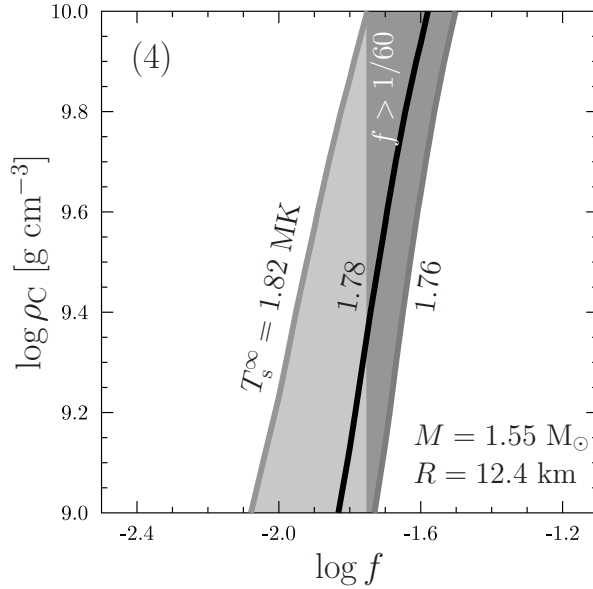


Рис. 2.8. Решения обратной задачи остывания на плоскости  $f_{lp} - \rho_C$  для звезды с массой  $M = 1.53 M_\odot$ , радиусом  $R = 12.4$  км и измеренной температурой поверхности  $T_s^\infty = 1.78_{-0.02}^{+0.04}$  МК. Центральная жирная чёрная линия соответствует температуре наилучшей подгонки  $T_s^\infty = 1.78$  МК, в то время как две другие линии построены для  $T_s^\infty = 1.76$  и  $T_s^\infty = 1.82$  МК. Формально допустимая область  $f_{lp}$  и  $\rho_C$  тонирована, причём более реалистичная её часть, удовлетворяющая условию  $f_{lp} \geq 1/60$ , сделана темнее. Подробнее см. текст.

пе, прямой урка-процесс может быть подавлен нуклонной сверхтекучестью, но её наличие в центральных областях массивных звёзд противоречит ряду теоретических расчётов (см. выше). Однако ХММУ J1732 может быть умеренно массивной звездой, в которой прямой урка-процесс формально разрешён, но сильно подавлен сверхтекучестью.

Рисунок 2.8 иллюстрирует чувствительность определения темпа нейтринного охлаждения (фактически, параметра  $f_{lp}$ ) к погрешности определения  $T_s^\infty$  звезды. С этой целью была выбрана модель нейтронной звезды, удовлетворяющая оптимальной подгонке ( $M = 1.53 M_\odot$ ,  $R = 12.4$  км; отмечено знаком «+» на рисунке 2.7), и считалось, что её температура лежит в интервале  $T_s^\infty = 1.78_{-0.02}^{+0.04}$  МК. Чёрная линия в центре описывает формальное множество решений задачи остывания на плоскости  $f_{lp} - \rho_C$  для центрального значения температуры. Другими словами, это множество таких  $f_{lp}$  и  $\rho_C$ , что остывание звезды с этими параметрами приведёт к  $T_s^\infty = 1.78$  МК при возрасте  $t = 27$  тыс. лет. Все они формально допустимы в наших моделях остывания. Две серые линии — аналогичные решения для  $T_s^\infty = 1.76$  и  $1.82$  МК. Соответственно, если считать, что температура может принимать любые значения между  $1.76$  и  $1.82$  МК, то областью возможных решений задачи остывания будет всё пространство на рисунке 2.8 между серыми кривыми (тонирована). Как видно, узкий интервал значений  $T_s^\infty$  соответствует довольно широкому диапазону  $f_{lp}$  и  $\rho_C$ . Если, однако, предположить, что  $f_{lp} \geq 1/60$  (так же, как это сделано при обсуждении рисунка 2.7), то допустимая область  $f_{lp} - \rho_C$  окажется существенно более узкой (тёмно-серая область на рисунке 2.8).

Скомбинируем ограничения на массу и радиус ХММУ J1732, полученные из спектрального анализа наблюдений и из теории остывания (соответственно, чёрные контуры и серая кривая на рисунке 2.7). Пример такой комбинации дан на рисунке 2.9, где закрашена область, одновременно удовлетворяющая теории остывания и наблюдательному 68%-ому контуру. Для определённости считаем, что углерод в оболочке распространён до плотности  $\rho_C = 3 \times 10^9$  г см $^{-3}$ , как на среднем графике на рисунке 2.7 (чёрная кривая на рисунке 2.9 — то же самое, что серая кривая на рисунке 2.7). Также на рисунке 2.9 показаны кривые  $M - R$  для ряда моделей уравнений состояния (тот же набор, что и в главе 1). Подчеркнём, что тео-

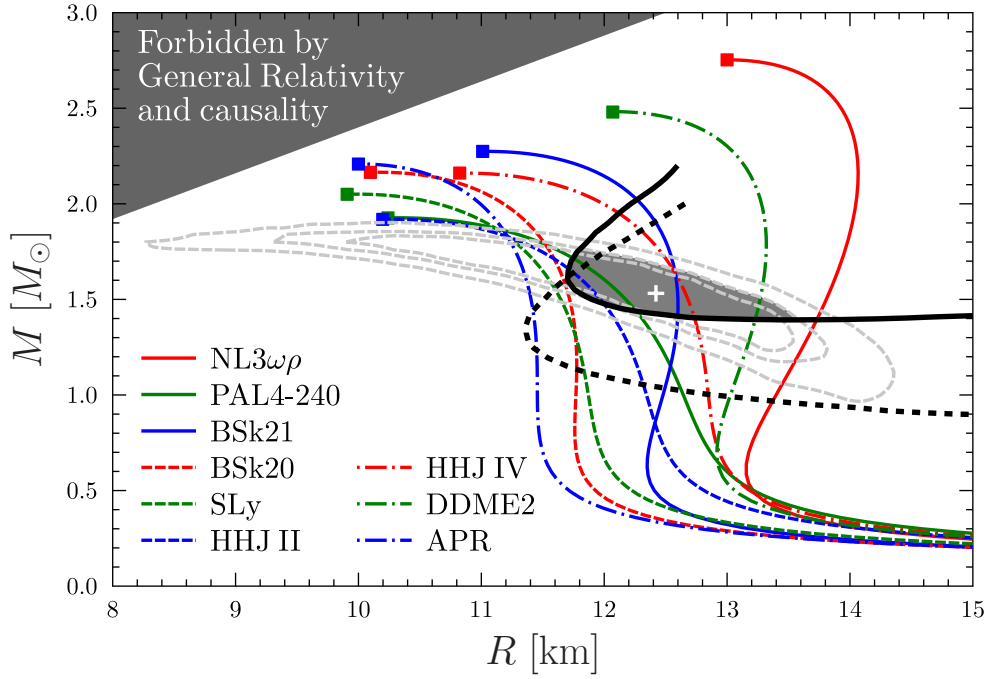


Рис. 2.9. Ограничения на массу и радиус XMMU J1732. Сплошная чёрная кривая — линия  $f_\ell(M, R) = 1/60$  при  $\rho_C = 3 \times 10^9 \text{ г см}^{-3}$ . Контурь доверительных областей для вероятностей 50%, 68% и 90% изображены согласно [35]. Пересечение теоретически допустимого диапазона масс и радиусов XMMU J1732 с 68%-ой доверительной областью тонировано серым. Чёрная штриховая линия — теоретическое ограничение на массу и радиус XMMU J1732 согласно [35]. Девять цветных кривых — соотношения  $M - R$  для различных моделей уравнения состояния в ядре звезды. Тёмно-серая область в верхнем левом углу запрещена ОТО и условием причинности (см., например, [1]). Подробности см. в тексте.

рия остывания значительно уменьшает бананообразную область возможных масс и радиусов XMMU J1732, допускаемую наблюдениями. Теория остывания отсекает части наблюдательных контуров с высокими и низкими массами, в полном согласии с качественными теоретическими рассуждениями. Заметим, что значения  $M$  и  $R$ , соответствующие оптимальной подгонке спектра (знак «+» на рисунках 2.7 и 2.9), оказываются вблизи центра закрашенной области.

Приведённый здесь анализ, очевидно, нельзя назвать строгим, так как использованы фиксированные значения  $\rho_C = 3 \times 10^9 \text{ г см}^{-3}$  и жёстко заданное минимальное значение  $f_{\ell p} = 1/60$ , взятое в известной степени произвольно. Мы могли бы слегка увеличить  $\rho_C$  (до его максимального значения  $\rho_C = 10^{10} \text{ г см}^{-3}$ ), что расширило бы область  $M$  и  $R$ , допускаемую условием  $f_{\ell p} \geq 1/60$  (как на левом графике на рисунке 2.7). Однако такой предельный случай теплоизолирующей оболочки, полностью состоящей из углерода, кажется нереалистичным, поскольку при таких плотностях начинается пикноядерное горение углерода (особенно если в углеродном веществе есть примесь более тяжёлых элементов; см., например, [97]). С другой стороны, если сделать значение  $\rho_C$  слегка ниже  $3 \times 10^9 \text{ г см}^{-3}$ , то область  $M - R$ , разрешённая условием  $f_{\ell p} \geq 1/60$ , сдвинется в сторону слишком больших  $M$  и  $R$  (вне доверительных областей, полученных из спектрального анализа, где, кроме того, существование исключительно горячей звезды XMMU J1732 находится в противоречии с вероятным включением прямого урка-процесса). В принципе, мы могли бы выбрать пороговое значение  $f_{\ell p}$  ниже чем  $1/60$ . Это увеличило бы диапазон  $M - R$ , разрешённый теорией остывания, но слишком низкие  $f_{\ell p}$  кажутся нереалистичными (как объяснено выше). В конечном счёте, даже если не ограничивать себя конкретными значениями  $\rho_C$  и порога  $f_{\ell p}$ , возможность варьировать эти величины так, чтобы не войти в противоречие с наблюдениями и здравым смыслом, невелика.

Необходимо добавить, что сам метод работы с результатами спектрального анализа, использованный в разделах 2.4 и 2.5, значительно устарел. Современные методы обработки спектров на основе симуляций Монте-Карло по схеме марковских цепей (см., например, [95, 98, 99] и приведённые там ссылки) позволяют получать достоверные области непосредственно в многомерных пространствах интересующих нас величин (в данном случае это  $M$ ,  $R$ ,  $\rho_C$  и  $f_{lp}$ ), а условие  $f_{lp} \geq 1/60$  (или  $f_\ell < f_{\ell\max}$  для пульсара Вела) использовать в качестве априорного распределения этого параметра. Закрашенная область на рисунке 2.9 фактически является проекцией такой многомерной достоверной области на плоскость  $M - R$ .

В заключение отметим, что в авторах статьи [35] был проведён аналогичный анализ остывания ХММУ J1732, где по-другому описывалось подавление темпа остывания за счёт протонной сверхтекучести. А именно, использовался параметр  $f_\ell$  вместо  $f_{lp}$ . В качестве порогового реалистичного значения выбиралось  $f_\ell = 1/40$ ; результирующее ограничение, полученное в [35], изображено на рисунке 2.9 чёрной штриховой кривой, а представленный здесь результат — чёрной сплошной. Как видно, полученное в рамках настоящего исследования ограничение является значительно более жёстким в области малых масс. Однако если решить задачу остывания с ограничением  $f_\ell \geq 1/40$ , но с использованием формализма из этой работы при  $\rho_C = 3 \times 10^9 \text{ г см}^{-3}$ , то граница области допустимых  $M$  и  $R$  будет несколько отличаться, хотя качественно ситуация не поменяется. Происхождение этого отличия двояко. Во-первых, чёрная штриховая кривая, взятая из статьи [35], рассчитана при фиксированной массовой доле углерода в звезде  $\Delta M_C/M$ , в то время как в представленном исследовании фиксирована граница углеродного слоя  $\rho_C$ . Во-вторых, используемые здесь подгоночные выражения для  $q_{SC}$  отличаются от тех, что применены в статье [35] (последние менее точны).

## 2.6. Возможные сценарии остывания RX J1856–3754

Объект RX J1856.5–3754 (далее RX J1856) был идентифицирован как изолированная нейтронная звезда Уолтером, Уолком и Нойхаузером [100] в 1996 году. Это одна из самых ярких близких к нам нейтронных звёзд, от которой наблюдается тепловое излучение. Она принадлежит к группе звёзд, именуемой «Великолепной Семёркой» [101]. В 2007 году Хо и др. [102] успешно интерпретировали спектр RX J1856 с помощью модели тонкой магнитной водородной атмосферы на твёрдой железной поверхности с температурой  $T_s^\infty = (4.34 \pm 0.03) \times 10^5 \text{ К}$  (см. также [94]). Уолтер и др. [103] уточнили расстояние, измеренное по параллаксу, до RX J1856 ( $123_{-15}^{+11}$  пк на уровне  $1\sigma$ ), что позволило ограничить массу и радиус этой нейтронной звезды,  $M = 1.48_{-0.19}^{+0.16} M_\odot$ ,  $R = 12.1_{-1.6}^{+1.3}$  км [94, 102]. Возраст RX J1856 точно не известен. В данном разделе приняты значения  $\log t_{\text{yr}} = 5.5 - 5.7$ , использованные в статье [5]<sup>8</sup>. На рисунке 2.10 показано, как выглядят наблюдаемые характеристики RX J1856 на плоскости  $T_s^\infty - t$ .

Апеллируя к описанной интерпретации спектра RX J1856 (конденсированная железная поверхность под тонкой водородной атмосферой), будем считать теплоизолирующую оболочку этой звезды полностью железной. Тогда соотношение  $T_s - T_b$  описывается формулами из статьи [24]. Следовательно, при анализе остывания RX J1856 мы можем использовать простое аналитическое решение (1.44) с коэффициентами  $a = 73$  и  $\alpha = 2.2$ , как описано в разделе 1.5.2.

На рисунке 2.10 показаны три варианта кривых остывания, полученных с помощью формулы (1.44), где  $q = f_\ell q_{SC}$  и  $s = s_{SC}/f_C$ ; значения факторов  $f_\ell$  и  $f_C$  указаны рядом с кривыми, а функции нейтринного и фотонного охлаждения для стандартного остывания  $q_{SC}$  и  $s_{SC}$  рассчитаны с помощью аппроксимаций (1.26) для  $M = 1.48 M_\odot$  и  $R = 12.1$  км.

<sup>8</sup> На рисунке 2.1 для этого источника использован диапазон  $\log t_{\text{yr}} = 5.56 - 5.84$ .



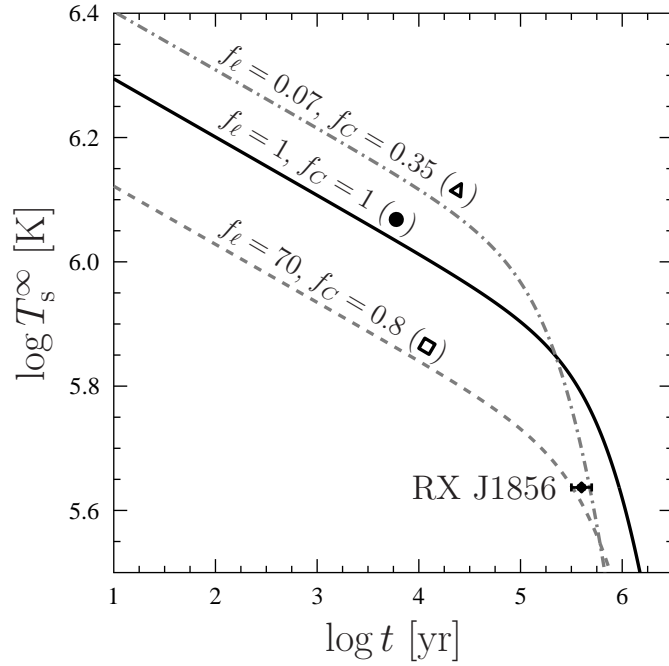


Рис. 2.10. Кривые остывания в сравнении с наблюдаемыми значениями температуры и возраста нейтронной звезды RX J1856 (ромбик с крестом ошибок), полученные в предположении  $M = 1.48 M_{\odot}$  и  $R = 12.1$  км [94] с использованием аналитической аппроксимации (1.44). Каждой кривой соответствуют значения факторов остывания, указанные на графике. Стандартный сценарий остывания (сплошная линия) предсказывает слишком высокую температуру RX J1856. Серая штриховая и штрих-пунктирная кривые изображают возможные сценарии остывания сверхтекучей звезды, согласующиеся с наблюдениями. Символы в скобках соответствуют обозначениям различных сценариев остывания на рисунке 2.11. Подробнее см. текст.

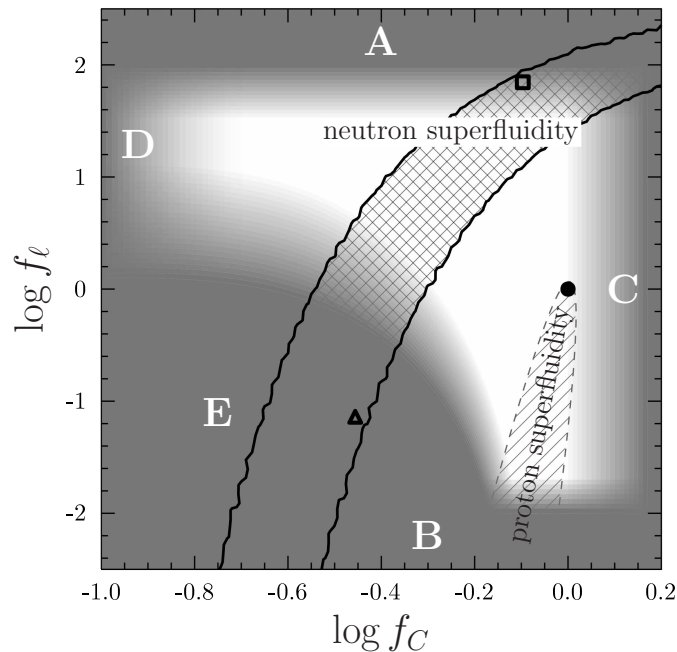


Рис. 2.11. Возможные значения факторов остывания  $f_l$  и  $f_c$  для звезды RX J1856. Область между двумя чёрными кривыми соответствует условию попадания в бокс ошибок для наблюдаемых  $T_s^{\infty}$  и  $t$ . Двойной штриховкой отмечена часть этой области, находящаяся в диапазоне реалистичных сценариев остывания. Кружок соответствует стандартному сценарию остывания (сплошная кривая на рисунке 2.10). Квадратик изображает ускоренный сценарий остывания с  $f_l = 70$  и  $f_c = 0.8$  (серые штрихи на рисунке 2.10), треугольник — замедленный сценарий с  $f_l = 0.07$  и  $f_c = 0.35$  (серая штрих-пунктирная линия на рисунке 2.10). Остальные обозначения те же, что и на рисунке 2.2

Сплошная линия соответствует стандартному сценарию остывания,  $f_\ell = f_C = 1$ . Таким же образом построены сплошные кривые на рисунке 1.10, отличие лишь в значениях  $M$  и  $R$ . Как следует из рисунка 2.10, наблюдения RX J1856 свидетельствуют, что остывание этой звезды отклоняется от стандартного. Штриховой и штрих-пунктирной кривыми на рисунке 2.10 изображены сценарии ускоренного ( $f_\ell = 70$ ,  $f_C = 0.8$ ) и замедленного ( $f_\ell = 0.07$ ,  $f_C = 0.35$ ) остывания, которые воспроизводят температуру RX J1856 при соответствующем возрасте. В первом случае звезда быстрее остывает на нейтринной стадии за счёт мощного процесса излучения нейтрино при триплетном куперовском спаривании нейтронов, но её теплоёмкость мало отличается от теплоёмкости нормальной звезды. Переход на фотонную стадию при этом происходит более плавно, чем в стандартном сценарии. Это первый способ провести кривую остывания через бокс ошибок для RX J1856 на плоскости  $T_s^\infty - t$ . Во втором случае нейтринная светимость подавлена, но и теплоёмкость существенно ниже стандартной. Из-за малого запаса тепла RX J1856 заканчивает нейтринную стадию остывания быстрее, чем в стандартном сценарии, и далее быстрее остывает на фотонной стадии. Кривая  $T_s^\infty(t)$  при этом направляется в бокс ошибок для RX J1856.

На диаграмме  $f_\ell - f_C$  (рисунок 2.11; подробнее см. раздел 2.2.3) стандартному остыванию соответствует сплошной кружок, ускоренному и замедленному — квадратик и треугольник. Не все сочетания параметров  $f_\ell$  и  $f_C$ , позволяющие объяснить наблюдения RX J1856, соответствуют реалистичным сценариям остывания. Так, пример с замедленным остыванием (штрих-пунктирная кривая на рисунке 2.10, треугольник на рисунке 2.11) попадает в область E, запрещённую по теоретическим соображениям.

Как выглядит вся область плоскости  $f_\ell - f_C$ , подходящая для описания RX J1856? Чтобы ответить на этот вопрос, мы выбрали сетку значений  $f_\ell$  и  $f_C$  в диапазоне  $\log f_\ell$  от  $-2.5$  до  $2.5$  и  $\log f_C$  от  $-1.0$  до  $0.2$ . Для каждой точки  $(f_\ell, f_C)$  на этой сетке было проверено, проходит ли соответствующая ей кривая остывания через бокс ошибок для RX J1856. Границы множества точек, удовлетворяющих этому условию, изображены на рисунке 2.11 чёрными кривыми. Каждая точка в этой области является формальным решением задачи остывания RX J1856 (т.е. формально удовлетворяет данным наблюдений). Как и ожидалось, и треугольник, и квадратик лежат в этой области, но в противоположных её концах.

Интересно отметить, что контуры этой области почти не изменятся, если использовать предел фотонного остывания (1.45) вместо общего решения (1.44). Это свидетельствует, что звезда RX J1856 уже миновала нейтринную стадию остывания.

Не все формальные решения задачи остывания RX J1856 являются реалистичными сценариями остывания этой звезды. Как объяснено в разделе 2.2.3, сценарии остывания в затемнённых областях диаграммы  $f_\ell - f_C$  разумно считать нереалистичными. Следовательно, физически адекватными решениями следует считать незатемнённую часть полосы между двумя чёрными линиями, с центром в районе  $\log f_\ell \approx 1$  и  $\log f_C \approx -0.25$ . Эта область по-прежнему слишком протяжённая, чтобы существенно ограничить  $f_\ell$  и  $f_C$ . Но большинство попадающих в неё сценариев остывания являются ускоренными, что соответствует наличию в ядре звезды RX J1856 триплетной нейтронной сверхтекучести. Обратим внимание, что область реалистичных решений не захватывает однократно заштрихованную область, соответствующая модели RX J1856 без сверхтекучих нейтронов в ядре. По-видимому, в ядре RX J1856 оба типа нуклонов являются (частично) сверхтекучими.

После определения семейства реалистичных значений  $f_\ell$  и  $f_C$  можно попытаться подобрать реалистичные физические модели нейтронной и протонной сверхтекучести [профили  $T_{cn}(\rho)$  и  $T_{cp}(\rho)$ ], которые приводят к таким факторам остывания. Эта сложная задача выходит за рамки данной диссертации. Можно ожидать, что её решения покажут наличие сильной протонной сверхтекучести в значительной части ядра звезды, и умеренной сверхтекучести нейтронов, чей профиль  $T_{cn}(\rho)$  схож с теми, что предсказывает анализ остывания нейтронной звезды в остатке сверхновой Cas A [21, 34, 64].

## 2.7. Возможные сценарии остывания PSR J0633+0632

Радиотихий пульсар J0633+0632 (далее J0633) был впервые обнаружен космической обсерваторией *Fermi* [104] как гамма-источник и с тех пор неоднократно исследовался. Период его пульсаций составляет 297.4 мс, характеристический возраст  $t_c = 59.2$  тыс. лет, магнитное поле на поверхности (у экватора) оценивается величиной  $B_{\text{surf}} = 4.9 \times 10^{12}$  Гс [105]. Он также неоднократно наблюдался в рентгеновском диапазоне (см., например, [58] и ссылки там), и в его излучении была обнаружена тепловая компонента. Определение температуры его поверхности затруднено наличием мощной нетепловой компоненты в рентгеновском спектре. Кроме того, неизвестно расстояние до пульсара — но оно оценивается косвенными методами [58, 98]. В работе [58] проведён спектральный анализ последних наблюдений J0633 космической обсерваторией *XMM-Newton*. Выяснено, что тепловой спектр этого пульсара одинаково хорошо описывается существенно различными способами [58] — моделью излучения чёрного тела и моделями атмосфер нейтронных звёзд. Первый способ подгонки спектра соответствует предположению, что излучение J0633 исходит от двух полярных шапок, суммарная площадь поверхности которых существенно меньше всей поверхности звезды; температура горячей излучающей области не несёт информации о тепловом состоянии недр. При втором способе подгонки сделано предположение, что излучение исходит от всей поверхности звезды, а соответствие получаемой температуры и возраста J0633 подлежит анализу в рамках теории остывания нейтронных звёзд. Именно такое предположение делается далее в этом разделе.

Будем использовать результаты подгонки спектра J0633 моделями *nsmx* [92] водородной атмосферы нейтронной звезды с дипольным магнитным полем, ось которого ортогональна лучу зрения. Например, модель *nsmx123190* с магнитным полем на полюсе  $B_{\text{pole}} = 1.82 \times 10^{12}$  Гс даёт оценку температуры  $T_s^\infty = 5.9_{-0.8}^{+0.6} \times 10^5$  К; использование модели *nsmx130190* с  $B_{\text{pole}} = 10^{13}$  Гс приводит к  $T_s^\infty = 6.2_{-0.6}^{+0.6} \times 10^5$  К (90%-ые доверительные интервалы). Оба эти значения магнитного поля могут подойти для описания J0633, поскольку оценка по пульсарному торможению  $B_{\text{surf}} = B_{\text{pole}}/2 \sim 4.9 \times 10^{12}$  Гс может отклоняться от истинного значения в несколько раз в любую сторону (см., например, [106]). Следует отметить, что доступный спектр J0633 существенно хуже качеством, чем имеющиеся спектры XMMU J1732, Велу или RX J1856. Поэтому дать информативную оценку массы в ходе спектрального анализа J0633 пока не представляется возможным. Гравитационное красное смещение для этой звезды предполагалось фиксированным и равным  $z_g = \sqrt{1 - x_g} - 1 = 0.21$ , что соответствует реалистичной модели нейтронной звезды с  $M = 1.4 M_\odot$  и  $R = 13$  км.

Характеристический возраст  $t_c = 59.2$  тыс. лет также является лишь грубой оценкой; будем считать, что его погрешность составляет  $\pm 0.3$  в логарифмическом масштабе.

Рисунок 2.12, взятый из статьи [58], отчасти повторяет рисунок 2.1: на нём изображён тот же ансамбль остывающих нейтронных звёзд, но цветом выделен только пульсар J0633 (кроме того, все данные по остальным звёздам, включая Велу, взяты из таблицы 1 статьи [59]). Верхний синий крест ошибок соответствует температуре J0633, полученной с помощью модели *nsmx130190*, нижний — с помощью модели *nsmx123190*. Как видно, J0633 оказывается весьма холодным, хотя и не исключительным среди других остывающих нейтронных звёзд схожего возраста.

Возраст J0633 достаточно велик, и вклад фотонного охлаждения в его остывание может быть существенным. Для теплового анализа таких звёзд, в принципе, подходит аналитический метод, разработанный в разделе 1.5.1. Однако он опирается на упрощённое описание теплоизолирующей оболочки [формула (1.34)], которое пригодно лишь для нескольких частных составов оболочки. Никаких наблюдательных свидетельств в пользу какой-либо аккреционности оболочки J0633 нет. Поэтому при анализе этого пульсара необходимо пользоваться общей моделью аккреционной оболочки из статьи [27] с магнитным полем  $B_{\text{pole}} = 9.8 \times 10^{12}$  Гс и рассматривать различные значения массы лёгких элементов  $\Delta M_{\text{acc}}$ , в ней содержащихся.

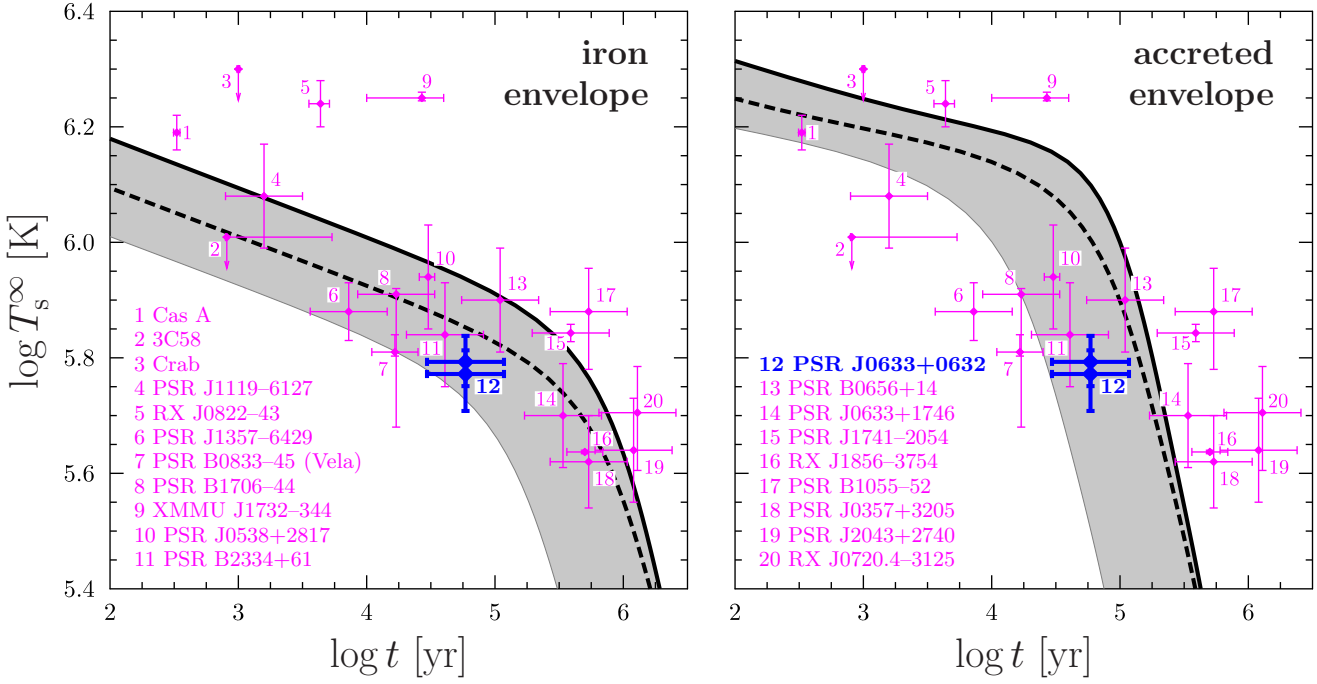


Рис. 2.12. Источник J0633 в сравнении с другими остывающими нейтронными звёздами (ср. рис. 2.1) и теоретическими сценариями остывания нейтронных звёзд с железной (*слева*) и аккреционной (*справа*) теплоизолирующей оболочкой. Синие кресты ошибок — результаты подгонки спектра J0633 моделями *nsmx123190* и *nsmx130190*. Жирными чёрными кривыми изображено остывание по стандартному сценарию (сплошные кривые), а также по сценарию с нейтринной светимостью, увеличенной в 10 раз (штрихи). Серая тонировка схематически показывает область, которую нейтронные звёзды со сверхтекучим ядром могут занять под кривой стандартного сценария. Рисунок взят из статьи [58] с любезного разрешения авторов. Подробнее см. текст.

Аналитическое описание остывания таких нейтронных звёзд на данный момент не разработано. В связи с этим, модельно-независимый анализ остывания J0633 был проведён диссертантом по ещё более упрощённой схеме, чем это делалось для других звёзд в предыдущих разделах. Положение источника на диаграмме  $T_s^\infty - t$  сравнивалось с несколькими вариантами кривых остывания, численно рассчитанных на основании уравнения (1.8). Светимость  $L_\nu$  и теплоёмкость  $C$  были рассчитаны с помощью аппроксимаций (1.26) для нейтронной звезды с массой  $M = 1.4 M_\odot$  и радиусом  $R = 13$  км.

Стандартный сценарий остывания [7] изображён сплошными чёрными линиями на обеих частях рисунка 2.12. Левый график соответствует железной теплоизолирующей оболочке,  $\Delta M_{\text{acc}} = 10^{-17} M_\odot$ , а правый построен для полностью аккреционной оболочки,  $\Delta M_{\text{acc}} = 10^{-7} M_\odot$ . Однако, как описано в разделе 2.2, есть множество причин, по которым остывание нейтронной звезды может отклоняться от стандартного. Например, многочастичные эффекты в сверхплотном веществе могут усилить мощность модифицированного урка-процесса. В первую очередь это происходит за счёт перенормировки пропагатора виртуального нуклона [68], что в конечном счёте может усилить интегральную нейтринную светимость до 10 раз. Это показано на рисунке 2.12 штриховыми чёрными кривыми (в терминах факторов остывания они соответствуют сценарию с  $f_\ell = 10$  и  $f_C = 1$ ). Есть и другие важные эффекты среды (см. раздел 2.2.1), но их мы здесь не рассматриваем.

Другой возможный источник разнообразия сценариев остывания — нуклонная сверхтекучесть различных типов в ядрах нейтронных звёзд. Широко распространённая парадигма минимального остывания рассматривает сверхтекучесть как основную причину отклонения остывания от стандартного сценария. В случае J0633 нас интересуют отклонения в сторону меньших температур, чего можно достичь усилением нейтринной светимости (за счёт излу-

чения нейтринных пар при триплетном куперовском спаривании нейтронов) и подавления теплоёмкости (сверхтекучестью любого типа). Согласно рассуждениям в разделе 2.2, сверхтекучесть нуклонов позволяет достичь  $f_\ell \lesssim 30 - 100$  и  $f_C \gtrsim 0.1 - 0.2$ . Далее мы считаем, что на диаграмме  $T_s^\infty - t$  область, занимаемая нейтронными звёздами ниже стандартной кривой в рамках парадигмы минимального остывания, ограничена снизу кривой  $T_s^\infty(t)$ , построенной для  $f_\ell = 100$  и  $f_C = 0.2$ . На рисунке 2.12 эта область закрашена серым цветом.

Конечно, парадигма минимального остывания также предполагает наличие сценариев с темпом остывания  $L_\nu/C$  меньшим, чем в стандартном случае. Соответствующие кривые остывания на рисунке 2.12 будут располагаться выше сплошной чёрной кривой. К пульсару J0633 такие сценарии не относятся, и здесь мы их рассматривать не будем.

Как видно, результаты подгонки спектра J0633 согласуются с самыми разными сценариями остывания, как для аккрецированной, так и для железной теплоизолирующей оболочки звезды. В зависимости от состава оболочки, J0633 может находиться либо на нейтринной стадии охлаждения (с железной оболочкой и значением  $f_\ell$ , существенно превосходящим единицу за счёт нейтронной сверхтекучести либо эффектов среды), либо на фотонной стадии (с аккрециронной оболочкой и теплоёмкостью, существенно подавленной нейтронной сверхтекучестью).

Напоследок необходимо сделать несколько замечаний. Во-первых, напомним, что оценка магнитного поля по пульсарному торможению может отклоняться от истинного значения поля в несколько раз (см., например, [106]). Как следует из сказанного выше, изменение магнитного поля в таких пределах не приводит к существенному изменению температуры J0633, получаемому при подгонке спектра (в частности, положения J0633 на рисунке 2.12, соответствующие моделям атмосфер с отличающимися в 5 раз полями, согласуются друг с другом в пределах крестов ошибок). Было проверено, насколько подобное изменение магнитного поля будет влиять на остывание J0633. Эффект также оказался незначительным. Во-вторых, в ходе анализа остывания не рассматривалась возможность протекания в ядре звезды прямого урка-процесса (т.н. сценарий быстрого остывания; см., например, [20]), равно как игнорировалась возможность наличия гиперонов в ядре звезды. В принципе, при железной теплоизолирующей оболочке температуру и возраст J0633 можно интерпретировать с помощью остывания таких звёзд, но это требует тонкой настройки параметров модели звезды (см., например, [107, 108]). Изучение таких сценариев выходит за рамки данного раздела. Наконец, недостаточно интерпретировать остывание данной нейтронной звезды: истинной целью теории остывания является одновременное объяснение всего наблюдаемого ансамбля нейтронных звёзд на рисунке 2.12 с помощью единой микрофизической модели сверхплотного вещества, — но эта гораздо более сложная задача также выходит за рамки данной диссертации.

## 2.8. Выводы к главе 2

В данной главе наглядно продемонстрированы возможности модельно-независимого метода теплового анализа остывающих нейтронных звёзд. Модельная независимость заключается в том, что для применения данного метода не требуется задавать модель уравнения состояния недр нейтронных звёзд (благодаря результатам главы 1), а модель сверхтекучести барионов в ядре описывается введением одного или двух безразмерных параметров — факторов остывания. Связь этих параметров с реальными характеристиками профилей критических температур  $T_{cp}(\rho)$  и  $T_{cn}(\rho)$  нетривиальна и на данный момент исследована мало. Однако современный уровень знаний о профилях  $T_{cp}$  и  $T_{cn}$  в ядре звезды позволяет наложить на факторы остывания ряд количественных ограничений. Показано, что даже этих условий хватает, чтобы с помощью теории остывания ограничить макроскопические параметры — количество аккрецированного вещества в оболочке и даже массу  $M$  и радиус  $R$ , —

некоторых известных остывающих нейтронных звёзд. Кроме того, метод позволяет делать качественные выводы о сверхтекучести нуклонов в ядрах этих звёзд.

Раздел 2.1 содержит вводные замечания и описание наблюдательной базы теории остывания нейтронных звёзд со слабым магнитным полем (представительная выборка остывающих звёзд показана на диаграмме  $T_s^\infty - t$ , рисунок 2.1). В разделе 2.2 собраны ограничения, которые современная теория сверхтекучести в ядре звезды позволяет наложить на факторы остывания. В разделе 2.2.1 проведено подробное обсуждение фактора нейтринного остывания  $f_\ell$ , используемого для анализа звёзд на стадии нейтринного охлаждения. В разделе 2.2.2 введён фактор фотонного остывания  $f_C$  (он же — фактор влияния сверхтекучести на теплоёмкость звезды) и описаны ограничения, которым он должен подчиняться. Аргументировано, что эти факторы можно считать постоянными во времени при анализе остывания большинства звёзд, показанных на рисунке 2.1. В этом случае каждый сценарий остывания можно однозначно охарактеризовать парой чисел  $(f_C, f_\ell)$ . В разделе 2.2.3 показано, как с помощью диаграммы  $f_\ell - f_C$  графически анализировать степень сверхтекучести нуклонов в ядре нейтронной звезды, если значения факторов остывания этой звезды определены из наблюдений.

Метод модельно-независимого анализа остывания применён к двенадцати нейтронным звёздам (выделены жирным на рисунке 2.1). Сначала исследованы звёзды на нейтринной стадии остывания. В разделе 2.3 проведено простое исследование девяти таких звёзд. Несмотря на простоту, оно позволяет наложить ограничения на массу  $\Delta M_{\text{acc}}$  аккрецированного вещества в оболочке некоторых из них. Подробное исследование остывания, с учётом результатов детального спектрального анализа теплового рентгеновского излучения, проведено для пульсара Вела (одна из самых холодных звёзд на нейтринной стадии остывания; раздел 2.4) и нейтронной звезды ХММУ J1732 (самая горячая из звёзд со слабым магнитным полем; раздел 2.5). На примере этих двух объектов показано, как можно использовать теорию остывания для наложения ограничений на массу и радиус нейтронных звёзд. Для этого необходимо знать теоретические пределы количества аккрецированного вещества в оболочке звезды и значений факторов остывания. Неопределённость последних составляет главную сложность данного метода. В случае ХММУ J1732 использован нижний теоретический предел фактора остывания  $f_{\ell p}$  (аналог фактора  $f_\ell$ , см. раздел 2.2.1), известный достаточно хорошо, чтобы значимо ограничить массу и радиус этой звезды. Аналогичный анализ пульсара Вела затруднён необходимостью использования верхнего предела  $f_\ell$ , обладающего большой неопределённостью. Имеющаяся информация о максимальном значении  $f_\ell$  позволяет ограничить  $\Delta M_{\text{acc}}$  в оболочке Велы — но это можно сделать и с помощью простой схемы анализа остывания (см. раздел 2.3), не прибегая к усложнённому анализу в разделе 2.4. Наложение надёжных ограничений на массу и радиус пульсара Вела требует уточнения верхней границы  $f_\ell$ .

Затем исследовано остывание более старых нейтронных звёзд. В разделе 2.6 проведён анализ остывания звезды RX J1856, находящейся на стадии фотонного охлаждения. Построение области допустимых значений факторов остывания этой звезды на диаграмме  $f_\ell - f_C$  позволило сделать вывод о наличии нейтронной сверхтекучести в ядре этой звезды и достаточно высокой скорости её остывания на прошедшей нейтринной стадии. В разделе 2.7 представлен упрощённый анализ новейших наблюдательных данных по остыванию пульсара J0633 [58], который, в зависимости от массы лёгких элементов в его теплоизолирующей оболочке, может находиться как на нейтринной, так и на фотонной стадии остывания.

Результаты, представленные в главе 2, были опубликованы в статьях [22, 29, 30, 57, 58, 65] и представлены на конференциях «ФизикА.СПб/2015,2016» (ФТИ им. А.Ф. Иоффе), «Фундаментальные и прикладные космические исследования — 2015» (ИКИ РАН), «Physics of Neutron Stars — 2017» (Alferov University), «Modern Physics of Compact Stars & Relativistic Gravity — 2017» (Yerevan State University), «Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра — 2016, 2017» (ИКИ РАН).

## Глава 3

## Процессы в нейтронных звёздах с магнитным полем

## 3.1. Введение. Магнитные поля в недрах нейтронных звёзд

Главы 1 и 2 посвящены исследованию остывания нейтронных звёзд со слабым магнитным полем, не влияющим на скорость их охлаждения. Вместе с тем, к моменту написания диссертации (конец 2019 года) известно около 20 нейтронных звёзд с возрастом  $\lesssim 10^6$  лет, чьё поле оценивается величинами  $10^{14} - 10^{15}$  Гс (см., например, [19]). Запас энергии магнитного поля в них сопоставим с запасом тепла. Если характерное время распада поля в этих звёздах сопоставимо с характерным временем их остывания, то необходимо решать задачу согласованной магнитной и тепловой эволюции. При этом остывание нейтронных звёзд может замедляться выделением тепла при распаде поля.

Эволюция магнитного поля в нейтронных звёздах представляет собой сложную проблему, на данный момент далёкую от окончательного решения. До сих пор большинство исследований было посвящено эволюции магнитного поля в коре нейтронных звёзд (например, см. [5, 109–115]). Эволюция поля в ядре звезды исследовалась не столь активно (см., например, [116–119]). Отчасти это связано с тем, что последнее явление более сложное (даже требуемые микрофизические свойства материи ядра звезды известны не до конца), отчасти — с широко распространённым мнением (см., впрочем, [117, 120]), что эволюция магнитного поля в коре происходит на более коротких временных масштабах, чем в ядре.

В работе [8] был предложен следующий самосогласованный метод анализа эволюции магнитного поля в ядрах нейтронных звёзд. Рассмотрим звезду с некоторой известной конфигурацией магнитного поля  $\mathbf{B}(t_0)$  в начальный момент времени  $t = t_0$ . Каким будет поле в следующий момент времени  $t = t_0 + \delta t$ ? Ответ на этот вопрос даёт закон Фарадея,  $\mathbf{B}(t_0 + \delta t) = \mathbf{B}(t_0) - c \delta t \operatorname{rot} \mathbf{E}(t_0)$ , так что проблема сводится к поиску самосогласованного электрического поля  $\mathbf{E}$  в момент  $t = t_0$ . Последнее, в свою очередь, зависит от возмущений химических потенциалов и скоростей частиц под действием магнитного поля. В статье [8] дано общее описание метода самосогласованного расчёта всех этих величин. Кроме того, было обнаружено, что многие предыдущие работы (например, [118, 119, 121–127]) использовали не полностью обоснованные предположения, ставящие под сомнение результаты расчётов.

Первая часть данной главы основана на работах [128, 129]. В них самосогласованный метод применён к несверхтекучей и несверхпроводящей звезде, ядро которой состоит из нейтронов, протонов и электронов, чтобы продемонстрировать, как можно вычислить все необходимые «ингредиенты» для расчёта эволюции магнитного поля со временем. Несмотря на упрощённость, такая модель может адекватно описывать горячие магнитары со сверхсильным магнитным полем, в ядрах которых сверхтекучесть нуклонов подавлена (частично или даже полностью) [130, 131]. Главное преимущество этой модели — относительно простые и прозрачные вычисления, недостаток — неучёт сверхтекучести и, как следствие, неприменимость к холодным нейтронным звёздам с относительно слабыми полями.

Основной результат разделов 3.2 — 3.4 данной главы заключается в демонстрации того, что диффузионные скорости потоков частиц (вызванные магнитным полем) оказываются, как правило, много меньше, чем скорость всей жидкости как целого. Этот результат важен, т.к. требует введения нового, сравнительно малого характерного масштаба времени в задачу об эволюции магнитного поля в нейтронных звёздах. Кроме того, данный результат противоречит общепринятому мнению, что при наличии магнитного поля вещество в нейтронных звёздах с хорошей точностью можно считать неподвижным<sup>1</sup> (см, напри-

<sup>1</sup> Естественно, за вычетом твердотельного вращения.

мер, [118, 119, 121, 122, 127]).

Влияние магнитного поля существенно не только в ядре, но и в коре звезды. В разделе 3.5 рассчитана электронная сдвиговая вязкость за счёт кулоновского рассеяния вырожденных электронов на ядрах атомов в коре нейтронной звезды с магнитным полем (результаты опубликованы в статье [132]). Расчёт основан на сдвиговой вязкости, вычисленной в статье [133] с учётом газообразного, жидкого или твёрдого состояния атомных ядер в коре, процессов многофононного рассеяния и конечных размеров атомных ядер, но в отсутствие магнитного поля. Вязкость в замагниченном веществе описывается пятью коэффициентами сдвиговой вязкости. Представлен их расчёт и проанализирована зависимость коэффициентов вязкости от магнитного поля и других параметров вещества коры. Коротко обсуждены возможные приложения полученных результатов.

## 3.2. Квазистационарная магнитная гидродинамика ядра нейтронной звезды

Сформулируем и коротко обсудим уравнения магнитной гидродинамики (МГД) для несверхтекучей и несверхпроводящей материи ядра нейтронной звезды. Уравнение состояния вещества считаем релятивистским, но эффектами ОТО для простоты будем пренебрегать. Кроме того, в уравнении движения вещества пренебрежём силами, связанными с градиентом локальной температуры, и влиянием температуры на уравнение состояния. С учётом этих упрощений, система уравнений МГД может быть записана в виде (например, [8, 121, 134])

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \operatorname{div}(n_a \mathbf{u}_a) = \Delta \Gamma_a, \quad (3.1a)$$

$$n_a \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_a \nabla) \right] \left( \frac{\mu_a}{c^2} \mathbf{u}_a \right) = -n_a \nabla \mu_a + e_a n_a \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_a}{c} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\mu_a n_a}{c^2} \nabla \phi - \sum_{b \neq a} J_{ab} (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b), \quad (3.1b)$$

$$\Delta \phi = \frac{4\pi G}{c^2} (P + \varepsilon), \quad (3.1b)$$

$$\sum_a e_a n_a = 0, \quad (3.1g)$$

$$\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \sum_a e_a n_a \mathbf{u}_a = \mathbf{j}, \quad (3.1d)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (3.1e)$$

Уравнения (3.1a) и (3.1b) должны выполняться для частиц каждого сорта « $a$ » в отдельности. Здесь  $e_a$ ,  $n_a$ ,  $\mu_a$  и  $\mathbf{u}_a$  — электрический заряд, концентрация, химический потенциал и дрейфовая скорость частиц сорта  $a$ ;  $\Delta \Gamma_a$  — скорость образования частиц сорта  $a$  за счёт неравновесных процессов взаимного превращения частиц;  $J_{ab} = J_{ba}$  — коэффициент в выражении для силы трения  $-J_{ab}(\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b)$  между частицами сортов, он связан с эффективным временем релаксации за счёт трения между частицами сортов  $a$  и  $b$   $\tau_{ab}$  [134],  $J_{ab} = n_a \mu_a / (\tau_{ab} c^2)$ . Далее,  $\phi$  — ньютоновский гравитационный потенциал,  $\varepsilon = \rho c^2$  — плотность энергии, пропорциональная плотности гравитационной массы;  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — плотность электрического тока и векторы электрического и магнитного полей. Остальные обозначения уже введены в предыдущих главах.

Не все термодинамические величины, присутствующие в уравнениях (3.1.) являются независимыми. С учётом сильной вырожденности вещества в ядре нейтронной звезды, взаи-



мосьязи между ними выглядят так:

$$P + \varepsilon = \sum_a n_a \mu_a, \quad (3.2a)$$

$$dP = \sum_a n_a d\mu_a. \quad (3.2b)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь малые возмущения среды. Невозмущённые состояния относятся к звезде без магнитного поля с ядром, состоящим из нейтронов ( $n$ ), протонов ( $p$ ) и электронов ( $e$ ) в полном гидростатическом и термодинамическом равновесии. Соответственно, в невозмущённой звезде  $\mathbf{u}_a = 0$  и  $\Delta\Gamma_a = 0$  для  $a = n, p, e$ , в то время как другие величины (например, концентрации  $n_a$ ) зависят только от координаты  $r$  (использованы сферические координаты  $r, \theta$  и  $\varphi$ ).

Рассмотрим теперь малое возмущение в звезде, при котором возникают токи, генерирующие её магнитное поле. Следуя стандартному подходу [121] (также см. [8, 118, 119, 126, 127]), мы предположим, что звезда находится в квазистационарном равновесии и стабильна по отношению к спонтанным перестройкам магнитного поля. Это позволяет пренебречь производными по времени в уравнениях неразрывности (3.1a) и Эйлера (3.1б), как это подробно описано ниже. Генерируемое магнитное поле вызывает малые отклонения  $\delta n_a, \delta \mu_a, \delta \mathbf{E}$  и  $\delta \phi$  величин  $n_a, \mu_a, \mathbf{E}$  и  $\phi$  от их невозмущённых значений  $n_{a0}, \mu_{a0}, \mathbf{E}_0$  и  $\phi_0$ . Это запускает два механизма диссипации: неравновесные реакции [описываются скоростями реакций  $\Delta\Gamma_a$  в уравнении (3.1a)] и диффузию с малыми, но отличными от нуля скоростями различных компонент среды  $\mathbf{u}_a$  [описываются силами трения  $-J_{ab}(\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b)$  в уравнении (3.1б)]. Для *пре*-вещества ядер нейтронных звёзд единственные неравновесные реакции, создающие  $\Delta\Gamma_a$ , — это прямой и модифицированный урка-процессы. Соответствующие величины  $\Delta\Gamma_n = -\Delta\Gamma_e = -\Delta\Gamma_p \equiv \Delta\Gamma$  рассчитаны в статье [135], где показано, что величина  $\Delta\Gamma$  может быть представлена как функция температуры  $T$  и рассогласованности химических потенциалов  $\Delta\mu \equiv \mu_e + \mu_p - \mu_n = \delta\mu_e + \delta\mu_p - \delta\mu_n$ .<sup>2</sup> Выражения для скоростей этих реакций, как и для коэффициентов трения  $J_{ab}$ , представлены в статье [8]; в данной работе используются те же самые выражения. Коэффициент трения между электронами и нейтронами много меньше двух других коэффициентов трения,  $J_{np}, J_{ep} \gg J_{en}$ , и им можно пренебречь. Далее  $J_{np}, J_{ep}$  и  $\Delta\Gamma$  рассматриваются как заданные функции невозмущённых концентраций  $n_a$  и температуры  $T$ .

Запишем теперь уравнения (3.1) для возмущённой звезды. Рассмотрим, к примеру, уравнение движения (3.1б) частиц сорта  $a$ :

$$n_a \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_a \nabla) \right] \left( \frac{\mu_a}{c^2} \mathbf{u}_a \right) = \delta n_a \left( -\nabla \mu_a + e_a \mathbf{E} - \frac{\mu_a}{c^2} \nabla \phi \right) - \frac{n_a}{c^2} (\delta \mu_a \nabla \phi + \mu_a \nabla \delta \phi) - n_a \nabla \delta \mu_a + e_a n_a \left( \delta \mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_a}{c} \times \mathbf{B} \right) - \sum_{b \neq a} J_{ab} (\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b). \quad (3.3)$$

Здесь и далее мы для упрощения записи считаем, что  $n_a, \mu_a, \mathbf{E}$  и  $\phi$  относятся к невозмущённым величинам (т.е. опускаем индекс «0»). Заметим, что даже в полном равновесии  $\mathbf{E} \neq 0$ , поскольку самосогласованное электрическое поле необходимо для поддержания квазинейтральности плазмы,  $n_e = n_p$  [см. формулу (3.1г)]. Первый член в правой части уравнения (3.3) исчезает, т.к.  $-\nabla \mu_a + e_a \mathbf{E} - \mu_a \nabla \phi / c^2 = 0$  для равновесной звезды. Уравнение (3.3) [и остальные уравнения в системе (3.1)] подлежат дальнейшему упрощению с использованием следующих приближений (подробно рассмотрены в [8, 118, 121]):

<sup>2</sup> Последнее равенство обусловлено тем, что при бета-равновесии  $\mu_{e0} + \mu_{p0} - \mu_{n0} = 0$  (см, например, [1]).

(i) Мы пренебрегаем возмущением гравитационного потенциала  $\delta\phi$  (приближение Каулинга [136]) и, более того, членом  $n_a\delta\mu_a\nabla\phi/c^2$ , так как он должен быть много меньше, чем  $n_a\nabla\delta\mu_a$  в ньютоновской звезде, для которой и записано уравнение (3.3).<sup>3</sup> Поэтому в правой части уравнения (3.3) останутся только три последние члена.

(ii) Мы используем приближение квазистационарности, то есть пренебрегаем производными по времени в уравнениях (3.1а) и (3.1б). Справедливость такого приближения можно обосновать следующим образом. В рассматриваемой задаче магнитное поле  $\mathbf{B}$  является единственным источником возмущений, выводящим систему из состояния гидростатического равновесия. Пусть  $\tau_B$  и  $L_B$  обозначают характерный временной и пространственный масштабы эволюции  $\mathbf{B}$ . Тогда в уравнениях (3.1) и (3.3) справедливы оценки  $\partial/\partial t \sim 1/\tau_B$ ,  $\nabla \sim \text{div} \sim \text{rot} \sim 1/L_B$  и  $u_a \sim L_B/\tau_B$ . Соответственно, левая часть уравнения (3.3) оценивается как

$$n_a \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u_a \nabla) \right] \left( \frac{\mu_a}{c^2} u_a \right) \sim n_a \frac{\mu_a u_a}{c^2 \tau_B} \sim n_a \frac{\mu_a L_B u_a}{L_B c \tau_B} \sim n_a \frac{\mu_a u_a^2}{L_B c^2}. \quad (3.4)$$

В свою очередь, члены в правой части уравнения (3.3) имеют порядок  $n_a \mu_a B^2 / (8\pi P L_B)$  [8]. Значит, членами в левой части этого уравнения можно пренебречь, поскольку в условиях нейтронных звёзд  $(u_a^2/c^2)(8\pi P)/B^2 \ll 1$ . Аналогичные оценки можно произвести для уравнения (3.1а), где производной по времени также можно пренебречь благодаря условию  $B^2/(8\pi P) \ll 1$  [8, 121].

(iii) Считаем, что звезда (с учётом возмущений) обладает осевой симметрией, т.е. поле  $\mathbf{B}$  и все возмущения зависят только от координат  $r$  и  $\theta$ .

С использованием указанных приближений система уравнений, описывающих квазистационарную эволюцию магнитного поля, принимает вид (см. также [8])

$$\text{div}(n_n \mathbf{u}_n) = -\text{div}(n_e \mathbf{u}_p) = -\text{div}(n_e \mathbf{u}_e) = \Delta\Gamma, \quad (3.5a)$$

$$n_n \nabla \delta\mu_n + J_{np}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_p) = 0, \quad (3.5b)$$

$$n_e \nabla \delta\mu_e + J_{ep}(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_p) = -en_e \left( \delta\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_e}{c} \times \mathbf{B} \right), \quad (3.5b)$$

$$n_n \nabla \delta\mu_n + n_e \nabla (\delta\mu_p + \delta\mu_e) = \mathbf{f}_A, \quad (3.5г)$$

$$\mathbf{j} = en_e(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_e), \quad (3.5д)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \text{rot} \delta\mathbf{E}. \quad (3.5e)$$

где  $e = e_p$  — элементарный заряд, а  $\mathbf{f}_A$  — плотность силы Ампера:

$$\mathbf{f}_A = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]. \quad (3.6)$$

В уравнениях Эйлера (3.5б) — (3.5г) соотношение, описывающее движения протонов, заменено на условие полного баланса сил (3.5г) (оно получено путём суммирования уравнений Эйлера по всем сортам частиц). Отметим, что выполнение уравнения (3.5г) означает, что по мере эволюции звезда проходит непрерывную последовательность равновесных состояний; в этом и заключается суть квазистационарного приближения. В уравнениях (3.5) уже учтено условие квазинейтральности (3.1г) посредством подстановки  $n_p$  вместо  $n_e$ . Невозмущённое электрическое поле является потенциальным и в уравнении (3.5е) не присутствует.

Теперь нам нужно найти скорости  $\mathbf{u}_a$  частиц различных сортов из уравнений (3.5), исходя из заданной конфигурации магнитного поля в ядре. В ходе вычисления будут найдены возмущение электрического поля  $\delta\mathbf{E}$  и скорость изменения магнитного поля  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  [см. формулу (3.5е)] в данный момент времени. Это открывает возможность проследить квазистационарную эволюцию  $\mathbf{B}$ , просто итерируя по времени вычисление правой части уравнения (3.5е).

<sup>3</sup> В принципе, этот член легко учесть в последующих выкладках. На полученные результаты он не повлияет.

### 3.3. Решение уравнений квазистационарной магнитогидродинамики

В первую очередь введём скорость общего потока барионов  $\mathbf{U}_b$  и диффузионные скорости  $\mathbf{w}_a$  согласно выражениям

$$\mathbf{U}_b \equiv \frac{n_n}{n_b} \mathbf{u}_n + \frac{n_p}{n_b} \mathbf{u}_p = \frac{n_n}{n_b} \mathbf{u}_n + \frac{n_e}{n_b} \mathbf{u}_p, \quad \mathbf{w}_a \equiv \mathbf{u}_a - \mathbf{U}_b, \quad (3.7)$$

где  $n_b \equiv n_n + n_p = n_n + n_e$  — концентрация барионов. Затем введём электрическое поле  $\delta \mathbf{E}_{\text{com}}$  в системе отсчёта, локально сопутствующей барионному потоку:

$$\delta \mathbf{E}_{\text{com}} = \delta \mathbf{E} + \frac{\mathbf{U}_b}{c} \times \mathbf{B}. \quad (3.8)$$

Предположим, что мгновенная (осесимметричная) конфигурация магнитного поля внутри ядра звезды задана, т.е. мы знаем функцию  $\mathbf{B}(r, \theta)$  в некоторый момент времени (но зависимость  $\mathbf{B}$  от времени неизвестна). С учётом уравнения (3.1д) и формулы (3.6) это означает, что векторы  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{f}_A$  также заданы в пространстве ядра. Для дальнейших вычислений удобно переписать закон Фарадея в терминах величин  $\delta \mathbf{E}_{\text{com}}$  и  $\mathbf{U}_b$ . Подставляя выражение (3.8) в (3.5е), получим

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \delta \mathbf{E}_{\text{com}} + \operatorname{rot} (\mathbf{U}_b \times \mathbf{B}). \quad (3.9)$$

Поэтому, чтобы отслеживать эволюцию магнитного поля, необходимо определить сопутствующее электрическое поле и скорость тока барионов. Отметим, что вместо  $\mathbf{U}_b$  также используют (см., например, [8, 128]) скорость движения центра масс единицы объёма вещества  $\mathbf{U} = \sum_a \mu_a n_a \mathbf{u}_a / (P + \varepsilon)$ . Такой подход эквивалентен принятому в данном изложении, так как  $\mathbf{U}_b = \mathbf{U} + \mathbf{j} \mu_e / [e(P + \varepsilon)]$ .

#### 3.3.1. Вычисление диффузионных скоростей и электрического поля

Предположим на время, что возмущения химических потенциалов  $\delta \mu_a$  известны. Тогда легко находятся векторы  $\mathbf{w}_a$  (то есть скорость каждой компоненты среды  $a$  в системе отсчёта, сопутствующей общему потоку барионов). Используя уравнения (3.5б), (3.5д) и формулу (3.7), получаем

$$J_{np} (\mathbf{w}_n - \mathbf{w}_p) = -n_n \nabla \delta \mu_n, \quad (3.10a)$$

$$en_e (\mathbf{w}_p - \mathbf{w}_e) = \mathbf{j}, \quad (3.10б)$$

$$n_n \mathbf{w}_n + n_e \mathbf{w}_p = 0. \quad (3.10в)$$

Решением этой системы будет

$$\mathbf{w}_n = -\frac{n_e n_n}{n_b J_{np}} \nabla \delta \mu_n, \quad (3.11a)$$

$$\mathbf{w}_p = \frac{n_n^2}{n_b J_{np}} \nabla \delta \mu_n, \quad (3.11б)$$

$$\mathbf{w}_e = \frac{n_n^2}{n_b J_{np}} \nabla \delta \mu_n - \frac{\mathbf{j}}{en_e}. \quad (3.11в)$$

Формулы (3.5в), (3.8) и (3.11в) дают

$$\delta \mathbf{E}_{\text{com}} = -\frac{\nabla \delta \mu_e}{e} + \frac{J_{ep}}{e^2 n_e^2} \mathbf{j} - \frac{n_n^2}{cn_b J_{np}} \nabla \delta \mu_n \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{f}_A}{en_e}. \quad (3.12)$$

Фактически, для исследования эволюции магнитного поля нам нужна величина  $\text{rot } \delta \mathbf{E}_{\text{com}}$ , а не само значение  $\delta \mathbf{E}_{\text{com}}$  [см. уравнение (3.9)]. Это, в частности, означает, что член  $\nabla \delta \mu_e / e$  в формуле (3.12) можно опустить.

Отметим, что выражения (3.11) и (3.12) можно также получить, используя тензор диффузии из статьи [134], но такой метод более трудоёмок. Использование тензора диффузии приводит к обобщённому закону Ома [137], эквивалентному формулам (3.11) и (3.12).

### 3.3.2. Вычисление полоидальной компоненты скорости тока барионов

Во-первых, заметим, что, согласно формулам (3.5а) и (3.7), скорость барионного тока — соленоидальный вектор:

$$\text{div} (n_b \mathbf{U}_b) = 0. \quad (3.13)$$

С учётом осевой симметрии системы, полоидальная компонента барионной скорости представима в виде

$$n_b \mathbf{U}_b^{(p)} = \text{rot} [\Upsilon(r, \theta) \nabla \varphi] = \nabla \Upsilon \times \nabla \varphi, \quad (3.14)$$

где  $\nabla \varphi = \mathbf{e}_\varphi / (r \sin \theta)$ , верхний индекс «(p)» обозначает полоидальную компоненту векторного поля, а  $\Upsilon$  является произвольной функцией переменных  $r$  и  $\theta$ . Такое представление широко используется для полоидальных магнитных полей (см., например, [138], а также параграф 3.3.5). Затем, подставляя выражения (3.7) и (3.14) в уравнение (3.5а) для протонов, получаем

$$\text{div} (n_e \mathbf{u}_p) = \text{div} \left( \frac{n_e}{n_b} \nabla \Upsilon \times \nabla \varphi \right) + \text{div} (n_e \mathbf{w}_p) = \nabla \left( \frac{n_e}{n_b} \right) \cdot (\nabla \Upsilon \times \nabla \varphi) + \text{div} (n_e \mathbf{w}_p) = -\Delta \Gamma. \quad (3.15)$$

Используя выражение (3.11б), приходим к уравнению

$$\left[ \nabla \varphi \times \nabla \left( \frac{n_e}{n_b} \right) \right] \cdot \nabla \Upsilon = -\text{div} \left( \frac{n_e n_n^2}{n_b J_{np}} \nabla \delta \mu_n \right) - \Delta \Gamma. \quad (3.16)$$

Поскольку  $\partial n_a / \partial \theta = \partial n_a / \partial \varphi = 0$ , это уравнение примет вид

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \theta} = n_b r^2 V(r, \theta) \sin \theta, \quad (3.17)$$

где

$$V = \frac{n_b}{n'_b n_e - n'_e n_b} \left[ \text{div} \left( \frac{n_e n_n^2}{n_b J_{np}} \nabla \delta \mu_n \right) + \Delta \Gamma \right]. \quad (3.18)$$

Здесь штрих (') обозначает полную производную по радиусу,  $d/dr$ . Решение уравнения (3.17) выглядит как

$$\Upsilon(r, \theta) = n_b r^2 \int_0^\theta V(r, \tilde{\theta}) \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} + \xi(r), \quad (3.19)$$

где  $\xi(r)$  — произвольная функция. Подставив это решение в формулу (3.14), мы получим выражение для скорости потока барионов  $\mathbf{U}_b$ . Оно будет содержать неизвестное слагаемое  $\xi'(r)/(r \sin \theta)$ . Однако барионная скорость должна быть конечной на оси симметрии, т.е. при  $\theta = 0$ , откуда мы получаем условие  $\xi'(r) \equiv 0$ . Тогда окончательное выражение для  $\mathbf{U}_b^{(p)} = (U_{br}, U_{b\theta}, 0)$  принимает вид

$$U_{br} = V, \quad U_{b\theta} = -\frac{1}{n_b r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( n_b r^2 \int_0^\theta V \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} \right). \quad (3.20)$$

Заметим, что если следовать методу, предложенному в статье [8], то для скорости  $\mathbf{U}$  получатся аналогичные выражения. Преобразуя  $\mathbf{U}$  в  $\mathbf{U}_b$  (см. конец введения к данному разделу), мы снова получим выражение (3.20), как и должно быть.

Итак, теперь у нас есть явные выражения (3.18) и (3.20) для полоидальной скорости барионов  $\mathbf{U}_b^{(p)}$ . Однако они зависят от пока что неизвестных возмущений химических потенциалов частиц  $\delta\mu_a$ . Теперь наша задача — найти эти возмущения по заданному осесимметричному магнитному полю.

### 3.3.3. Возмущения химических потенциалов

Рассмотрим уравнение (3.5г). Вводя переменную  $\Delta\mu = \delta\mu_p + \delta\mu_e - \delta\mu_n$ , мы можем переписать его в виде

$$n_b \nabla \delta\mu_n + n_e \nabla \Delta\mu = \mathbf{f}_A. \quad (3.21)$$

Решение этого уравнения получено в [8]. Здесь мы рассмотрим осесимметричный случай в *npe*-ядре. Аксиальная симметрия означает, что  $\varphi$ -компонента силы Ампера должна исчезать,  $f_{A\varphi} = 0$ . Далее, поскольку  $\partial n_a / \partial \theta = 0$ , из уравнения (3.21) получается

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (n_b \delta\mu_n + n_e \Delta\mu) = r f_{A\theta}, \quad (3.22a)$$

$$n'_b \delta\mu_n + n'_e \Delta\mu = \frac{\partial}{\partial r} (n_b \delta\mu_n + n_e \Delta\mu) - f_{Ar}. \quad (3.22b)$$

Интегрируя (3.22a) по  $\theta$  и подставляя результат в (3.22b), получаем

$$n_b \delta\mu_n + n_e \Delta\mu = r \int_0^\theta f_{A\theta} d\tilde{\theta} + \zeta(r), \quad (3.23a)$$

$$n'_b \delta\mu_n + n'_e \Delta\mu = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \int_0^\theta f_{A\theta} d\tilde{\theta} \right) - f_{Ar} + \zeta'(r), \quad (3.23b)$$

где  $\zeta(r)$  — произвольная функция радиальной координаты. Далее удобно использовать оператор  $\hat{\mathbf{P}}_l$ , извлекающий  $l$ -ую компоненту разложения произвольной функции  $\psi$  по полиномам Лежандра  $P_l(\cos \theta)$ :

$$\hat{\mathbf{P}}_l \psi \equiv \frac{2l+1}{2} \int_0^\pi \psi P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (3.24)$$

Для компонент с  $l \geq 1$  имеем

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_l \delta\mu_n \\ \hat{\mathbf{P}}_l \Delta\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n'_e & n'_b \\ n_e & n_b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \left[ r \hat{\mathbf{P}}_l \int_0^\theta f_{A\theta} d\tilde{\theta} \right]' - \hat{\mathbf{P}}_l f_{Ar} \\ r \hat{\mathbf{P}}_l \int_0^\theta f_{A\theta} d\tilde{\theta} \end{pmatrix}, \quad l \geq 1. \quad (3.25)$$

Заметим, что при  $l \geq 1$  выражения  $\hat{\mathbf{P}}_l \delta\mu_n$  и  $\hat{\mathbf{P}}_l \Delta\mu$  не зависят от температуры ядра  $T$  и полностью определяются конфигурацией магнитного поля,  $\mathbf{B}(r, \theta)$ . Напротив, нулевые лежандровские компоненты  $\hat{\mathbf{P}}_0 \delta\mu_n$  и  $\hat{\mathbf{P}}_0 \Delta\mu$  не могут быть определены таким путём, поскольку они зависят от произвольной (неизвестной) функции  $\zeta(r)$  в формуле (3.23). Эта функция может быть найдена из условия  $U_{b\theta} = 0$  на оси симметрии при любом  $r$  [8], т.е.

$$U_{b\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad \text{и} \quad \theta = \pi. \quad (3.26)$$

Раскладывая функцию  $V(r, \theta)$  по полиномам Лежандра,  $V = \sum_{l=0}^{\infty} (\hat{\mathbf{P}}_l V) P_l(\cos \theta)$  и используя формулы (3.18) и (3.20), мы получим

$$U_{b\theta} = -\frac{1 - \cos \theta}{rn_b \sin \theta} \left( n_b r^2 \hat{\mathbf{P}}_0 V \right)' + \frac{1}{rn_b} \sum_{l=1}^{\infty} \left( n_b r^2 \hat{\mathbf{P}}_l V \right)' \frac{P_l^1(\cos \theta)}{l(l+1)}, \quad (3.27)$$

где  $P_l^1(\cos \theta)$  — присоединённый полином Лежандра. Так как  $V$  и  $V'$  должны быть конечными в любой точке ядра, условие (3.26) автоматически выполняется при  $\theta = 0$ . Однако при  $\theta = \pi$  оно приводит к требованию

$$\left( n_b r^2 \hat{\mathbf{P}}_0 V \right)' = 0 \iff n_b r^2 \hat{\mathbf{P}}_0 V = C, \quad (3.28)$$

где  $C$  — произвольная константа. Вычисляя это выражение при  $r = 0$  и снова используя конечность  $V$ , мы получаем  $C = 0$ . Следовательно,  $\hat{\mathbf{P}}_0 V = 0$  при любом  $r$ . Отметим, что к этому же результату можно было прийти, рассматривая закон сохранения числа барионов (3.13) в интегральной форме. Учтывая, что  $U_{br} = V$  [см. формулу (3.20)], это условие можно переписать в виде  $\hat{\mathbf{P}}_0 U_{br} = 0$ . Легко показать, что аналогичное условие накладывается на скорость  $\mathbf{U}$ , введённую в начале этого раздела:

$$\hat{\mathbf{P}}_0 U_{br} = 0, \quad \hat{\mathbf{P}}_0 U_r = 0. \quad (3.29)$$

Глядя на определение (3.18) функции  $V$ , можно увидеть, что правая часть в условии  $\hat{\mathbf{P}}_0 V = 0$  зависит и от  $\hat{\mathbf{P}}_0 \delta \mu_n$ , и от  $\hat{\mathbf{P}}_0 \Delta \mu$ . Поэтому для получения замкнутой системы для  $\hat{\mathbf{P}}_0 \delta \mu_n$  и  $\hat{\mathbf{P}}_0 \Delta \mu$  необходимо ещё одно уравнение. В качестве такового можно использовать нулевую лежандровскую компоненту уравнения (3.21). В результате мы получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными,  $\hat{\mathbf{P}}_0 \delta \mu_n$  и  $\hat{\mathbf{P}}_0 \Delta \mu$ , имеющую вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{n_e n_n^2}{n_b J_{np}} \left( \hat{\mathbf{P}}_0 \delta \mu_n \right)' \right] + \hat{\mathbf{P}}_0 \Delta \Gamma(\Delta \mu) = 0, \quad (3.30a)$$

$$n_b \left( \hat{\mathbf{P}}_0 \delta \mu_n \right)' + n_e \left( \hat{\mathbf{P}}_0 \Delta \mu \right)' = \hat{\mathbf{P}}_0 f_{Ar}. \quad (3.30b)$$

Здесь учтено, что  $\partial n_a / \partial \theta = 0$  и  $\partial J_{np} / \partial \theta = 0$ . Уравнение (3.30б) является простым дифференциальным уравнением 1-го порядка, в то время как уравнение (3.30а) имеет второй порядок, содержит переменные коэффициенты и, вообще говоря, нелинейную зависимость  $\Delta \Gamma$  от  $\Delta \mu$ . В общем случае эта система может быть решена численно. Но, в первую очередь, её необходимо дополнить граничными условиями, которые мы обсудим в следующем параграфе.

### 3.3.4. Граничные условия для возмущений химических потенциалов

Система уравнений (3.30) требует трёх граничных условий. Два из них должны быть заданы в центре звезды:

$$\left( \hat{\mathbf{P}}_0 \delta \mu_n \right)' \Big|_{r \rightarrow 0} = 0, \quad \hat{\mathbf{P}}_0 \delta \mu_n \Big|_{r \rightarrow 0} = C_1. \quad (3.31)$$

Первое из этих условий следует из требования регулярности величины  $\hat{\mathbf{P}}_0 \Delta \Gamma$  при  $r \rightarrow 0$  [см. уравнение (3.30а)]. По причине осевой симметрии рассматриваемой задачи, мы также имеем  $\hat{\mathbf{P}}_l f_{Ar} \Big|_{r \rightarrow 0} = 0$ . Поэтому, с учётом уравнения (3.30б), первое условие эквивалентно  $\left( \hat{\mathbf{P}}_0 \Delta \mu \right)' \Big|_{r \rightarrow 0} = 0$ . Второе условие определяет значение возмущённого химического потенциала нейтронов в центре звезды.<sup>4</sup> Константа  $C_1$  задаёт полное число барионов (или же центральную плотность) в возмущённой звезде. В принципе, если изучать именно эволюцию

<sup>4</sup> В самом деле, из уравнения (3.25) следует, что  $\hat{\mathbf{P}}_l \delta \mu_n \Big|_{r \rightarrow 0} = 0$  при  $l \geq 1$ , а, значит,  $\hat{\mathbf{P}}_0 \delta \mu_n \Big|_{r \rightarrow 0} = \delta \mu_n \Big|_{r \rightarrow 0}$ .

магнитного поля со временем, то необходимо так подбирать  $C_1$  на каждом временном шаге, чтобы полное число барионов сохранялось. Однако здесь мы рассматриваем нейтронную звезду лишь в некоторое заданное мгновение её жизни. Для такой цели достаточно положить, к примеру,  $C_1 = 0$ .

Чтобы задать третье (и последнее) граничное условие, необходимо сшить решение системы (3.30) с решением аналогичной системы уравнений в коре звезды [8]. Решение последних уравнений выходит за рамки данной работы. Вместо этого мы используем упрощённый метод, указанный в работе [8]. Он позволяет записать приближённое выражение для третьего граничного условия. Предположим, что приближение квазистационарности применимо не только в ядре, но и в коре нейтронной звезды. Тогда, используя интегральную форму уравнения непрерывности (3.5а) для, например, нейтронов, мы получим

$$\int_{\text{core}} \Delta\Gamma \, dV + \int_{\text{crust}} \Delta\Gamma_{n \text{ crust}} \, dV = 0, \quad (3.32)$$

где  $\Delta\Gamma_{n \text{ crust}}$  представляет темп генерации свободных нейтронов в коре. Чтобы строго рассчитать эту величину, нужно сформулировать и решить систему уравнений квазистационарной эволюции в коре. Однако этого можно избежать, предполагая, что реакции с участием нейтронов в коре гораздо менее эффективны, чем в ядре, так что вторым слагаемым в уравнении (3.32) можно пренебречь. Тогда третье граничное условие примет вид

$$\int_0^{R_{\text{core}}} \left( \hat{\mathbf{P}}_0 \Delta\Gamma \right) r^2 \, dr = 0, \quad (3.33a)$$

где  $R_{\text{core}}$  — радиус ядра. При выводе этой формулы мы разложили  $\Delta\Gamma$  по полиномам Лежандра и проинтегрировали получившееся выражение по  $\theta$ . Теперь, интегрируя уравнение (3.30а) по  $r$  и используя формулу (3.33а), мы можем представить последнюю в дифференциальной форме:

$$\left( \hat{\mathbf{P}}_0 \delta\mu_n \right)' \Big|_{R_{\text{core}}} = 0. \quad (3.33б)$$

Формулы (3.31) и (3.33б) составляют полный набор граничных условий для системы (3.30).

Уравнения (3.30) могут быть решены аналитически в двух предельных случаях. Перед тем как приступить к их обсуждению, введём коэффициент  $\lambda = \Delta\Gamma/\Delta\mu$ . Согласно статьям [135] и [16],  $\lambda$  не зависит от  $\Delta\mu$  при условии  $\Delta\mu \ll \pi k_B T$ . Как следует из анализа системы уравнений (3.30), её решение контролируется единственным безразмерным параметром  $\varkappa = n_e^2 n_n^2 / (n_b^2 J_{np} L_B^2 \lambda)$ . Температурная зависимость коэффициента трения имеет вид  $J_{np} \propto \tilde{T}^2$  [139], в то время как  $\lambda \propto \tilde{T}^6$  для модифицированного урка-процесса [ $\tilde{T}$  — температура недр звезды, сдвинутая по гравитационному красному смещению, определена формулой (1.3)]. Соответственно,  $\varkappa \propto \tilde{T}^{-8}$ .

Когда температура  $\tilde{T}$  достаточно мала, т.е.  $\varkappa \gg 1$ , вторым слагаемым в уравнении (3.30а) можно пренебречь. Применяя граничное условие (3.31), мы приходим к решению  $\hat{\mathbf{P}}_0 \delta\mu_n = 0$ . Тогда, используя уравнение (3.30б) и условие (3.33а), мы находим  $\hat{\mathbf{P}}_0 \Delta\Gamma$ .

В противоположном пределе высоких  $\tilde{T}$ , т.е.  $\varkappa \ll 1$ , первый член в уравнении (3.30а) пренебрежимо мал в сравнении со вторым, а, значит,  $\hat{\mathbf{P}}_0 \Delta\Gamma = 0$ . При высоких температурах  $\Delta\mu \ll \pi k_B T$ , так что условие  $\hat{\mathbf{P}}_0 \Delta\Gamma = 0$  эквивалентно утверждению  $\hat{\mathbf{P}}_0 \Delta\mu = 0$ . Тогда решение для  $\hat{\mathbf{P}}_0 \delta\mu_n$  находится путём интегрирования уравнения (3.30б). Заметим, однако, что выражение для  $\hat{\mathbf{P}}_0 \delta\mu_n$ , полученное таким образом, несовместно с граничным условием (3.33б). Точное решение уравнений (3.30) приводит к несколько иной зависимости  $\hat{\mathbf{P}}_0 \delta\mu_n$  от  $r$  в малой окрестности границы коры и ядра. Эта зависимость согласуется с условием (3.33б); подробнее см. раздел 3.4.2.

В этом параграфе мы сформулировали схему процедуры, позволяющую найти все ландауэвские компоненты величин  $\delta\mu_n$  и  $\Delta\mu$ . Найденные величины должны быть подставлены в формулу (3.12) для определения  $\delta\mathbf{E}_{\text{com}}$ , и в выражения (3.18) и (3.20) для вычисления  $U_{br}$  и  $U_{b\theta}$ . Последняя величина, которую нам остаётся найти, — это тороидальная компонента барионной скорости  $U_{b\varphi}$ .

### 3.3.5. Тороидальная компонента скорости потока барионов и эволюция магнитного поля в ядре звезды

Метод расчёта тороидальной компоненты  $U_b$  был схематично описан в разделе ПС 2 статьи [8]. В данном разделе он развит в применении к осесимметричной *пре*-звезде. При использовании этого метода крайне продуктивным оказывается хорошо известное представление осесимметричного магнитного поля через функции полоидального потока поля и полоидального электрического тока (см., например, [138]).

Представим магнитное поле в виде суммы его полоидальной «(p)» и тороидальной «(t)» компонент,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(p)} + \mathbf{B}^{(t)}$ . При наличии осевой симметрии можно ввести скалярные функции  $\Psi(r, \theta)$  и  $I(r, \theta)$  таким образом, что (см., например, [138]; ср. параграф 3.3.2)

$$\mathbf{B}^{(p)} = \nabla\Psi \times \nabla\varphi = \text{rot}(\Psi\nabla\varphi), \quad \mathbf{B}^{(t)} = I\nabla\varphi, \quad (3.34)$$

где  $\Psi(r, \theta)$  — функция полоидального потока магнитного поля. Название связано с тем, что величина  $2\pi\Psi(r, \theta)$  является магнитным потоком, проходящим через полярную шапку с радиальной координатой контура  $r$  и углом раствора  $\theta$ . Кривые  $\Psi = \text{const}$  являются силовыми линиями полоидального магнитного поля. Векторный потенциал для  $\mathbf{B}^{(p)}$  имеет вид  $\Psi\nabla\varphi$ . В свою очередь,  $I(r, \theta)$  называется функцией полоидального электрического тока, поскольку  $cI(r, \theta)/2$  есть электрический ток, проходящий через описанную выше полярную шапку. Осесимметричное магнитное поле полностью определяется заданием функций  $\Psi(r, \theta)$  и  $I(r, \theta)$ .

В рассуждениях, приведённых в предыдущих разделах, мы апеллировали только к полоидальной части уравнения баланса сил (3.21). Для тороидальной же части мы получим (детали см. в приложении А)

$$\mathbf{f}_A^{(t)} = -\frac{(\nabla\varphi)^2}{4\pi}\nabla\Psi \times \nabla I = 0 \quad \Longrightarrow \quad I = I(\Psi, t), \quad (3.35)$$

т.е.  $I$  зависит от координат  $r$  и  $\theta$  только опосредованно через функцию  $\Psi(r, \theta, t)$  [138].<sup>5</sup> Это, в частности, приводит к тождествам

$$\nabla I(r, \theta, t) = I'_\Psi(\Psi, t)\nabla\Psi(r, \theta, t), \quad (3.36a)$$

$$\frac{\partial I(r, \theta, t)}{\partial t} = I'_\Psi(\Psi, t)\frac{\partial\Psi(r, \theta, t)}{\partial t} + I'_t(\Psi, t), \quad (3.36b)$$

где  $I'_\Psi(\Psi, t)$  обозначает частную производную от  $I(\Psi, t)$  по  $\Psi$  при постоянном  $t$ , а  $I'_t(\Psi, t)$  — частную производную от  $I(\Psi, t)$  по  $t$  при постоянном  $\Psi$ . Аналогично функции  $I(\Psi, t)$ , обе производные  $I'_\Psi(\Psi, t)$  и  $I'_t(\Psi, t)$  зависят от пространственных координат  $r$  и  $\theta$  только через свой первый аргумент, функцию  $\Psi(r, \theta)$ . Это важное свойство, которое будет использовано далее, эквивалентно требованию, чтобы не только сила  $\mathbf{f}_A^{(t)}$ , но также и её производная  $\partial\mathbf{f}_A^{(t)}/\partial t$  равнялась нулю в осесимметричной квазистационарной звезде [8].

<sup>5</sup> Как следствие, если магнитное поле бессиповое в тороидальном направлении, его полоидальная и тороидальная компоненты жёстко взаимосвязаны: вектор  $\mathbf{B}^{(t)}$  постоянен на силовых линиях полоидального поля.



В качестве первого шага на пути к вычислению  $\mathbf{U}_b^{(t)}$  разложим уравнение (3.9) на полоидальную и тороидальную составляющие:

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{(p)}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \delta \mathbf{E}_{\text{com}}^{(t)} + \operatorname{rot} \left( \mathbf{U}_b^{(p)} \times \mathbf{B}^{(p)} \right), \quad (3.37a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{(t)}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \delta \mathbf{E}_{\text{com}}^{(p)} + \operatorname{rot} \left( \mathbf{U}_b^{(p)} \times \mathbf{B}^{(t)} \right) + \operatorname{rot} \left( \mathbf{U}_b^{(t)} \times \mathbf{B}^{(p)} \right). \quad (3.37b)$$

Уравнение (3.37a) содержит величины  $\delta \mathbf{E}_{\text{com}}$  и  $\mathbf{U}_b^{(p)}$ , которые уже рассчитаны [см. формулы (3.12) и (3.18), дополненные выражениями для  $\delta \mu_n$  и  $\Delta \mu$  из параграфов 3.3.3 и 3.3.4]. В терминах потоковой функции  $\Psi$  это уравнение можно переписать как

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \left( \mathbf{U}_b^{(p)} + \frac{n_n^2}{n_b J_{np}} \nabla \delta \mu_n \right) \cdot \nabla \Psi + \frac{c^2 J_{ep}}{4\pi e^2 n_e^2} \Delta^* \Psi, \quad (3.38)$$

где  $\Delta^*$  обозначает оператор Грэда-Шафранова (подробнее см. приложение А). Первое слагаемое в скобках описывает адвекцию силовых линий магнитного поля движениями среды; оно также включает в себя диссипацию магнитного поля за счёт неравновесных бета-процессов. Второе слагаемое описывает эволюцию за счёт амбиполярной диффузии. Наконец, последний член в уравнении (3.38) ответственен за омическую диссипацию. Вообще говоря, уравнение (3.38) аналогично формуле (7) из статьи [140], где эта формула выписана для анализа эволюции магнитного поля в коре нейтронной звезды. Отличия заключаются лишь в том, что вместо  $\mathbf{U}_b^{(p)}$  в формуле (7) фигурирует полоидальная компонента скорости электронов, а член, пропорциональный  $\nabla \delta \mu_n$ , отсутствует. Если поле заморожено в плазму ядра, т.е.  $\delta \mathbf{E}_{\text{com}} = 0$ , то в уравнении (3.38) остаётся только член  $-\mathbf{U}_b^{(p)} \cdot \nabla \Psi$ . Тогда формула (3.38) превращается в выражение, аналогичное использованному в статье [117] для моделирования выталкивания магнитного потока из сверхпроводящего ядра нейтронной звезды.

Теперь рассмотрим уравнение (3.37b) для тороидального магнитного поля. С помощью равенств (3.34) и (3.36b) его можно переписать в виде

$$\left( I'_\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial t} + I'_t \right) \nabla \varphi = \operatorname{rot} \left( -c \delta \mathbf{E}_{\text{com}}^{(p)} + I \mathbf{U}_b^{(p)} \times \nabla \varphi + \mathbf{U}_b^{(t)} \times \mathbf{B}^{(p)} \right). \quad (3.39)$$

После некоторых преобразований (см. приложение Б), формула (3.39) принимает вид

$$(\nabla \varphi)^2 I'_t = F(r, \theta) + \mathbf{B}^{(p)} \cdot \nabla \left( G(r, \theta) + \nabla \varphi \cdot \mathbf{U}_b^{(t)} \right), \quad (3.40)$$

где

$$F = (\nabla \varphi)^2 \nabla \Psi \cdot \nabla \left( \frac{c^2 J_{ep}}{4\pi e^2 n_e^2} I'_\Psi \right) - I \operatorname{div} \left[ (\nabla \varphi)^2 \left( \frac{n_n^2}{n_b J_{np}} \nabla \delta \mu_n + \mathbf{U}_b^{(p)} \right) \right], \quad (3.41a)$$

$$G = \frac{c(\nabla \varphi)^2}{4\pi e n_e} (\Delta^* \Psi + I'_\Psi I). \quad (3.41b)$$

Его можно ещё раз переписать в виде

$$\mathbf{B}^{(p)} \cdot \nabla \left( \frac{U_{b\varphi}}{r \sin \theta} \right) = S(r, \theta), \quad (3.42)$$

или как

$$B^{(p)} \frac{\partial}{\partial \chi_\Psi} \left( \frac{U_{b\varphi}}{r \sin \theta} \right) = S(r, \theta), \quad (3.43)$$

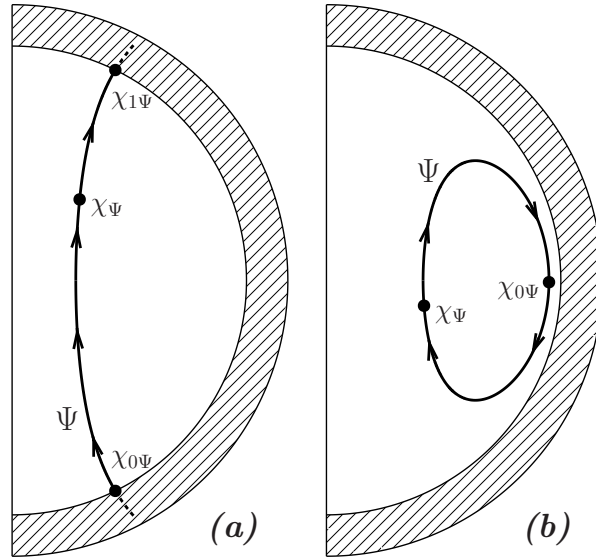


Рис. 3.1. Меридиональные разрезы нейтронной звезды. Прямые вертикальные линии изображают ось симметрии звезды. Штрихованные области соответствуют коре нейтронной звезды, белые — ядру. Силовые линии полоидального магнитного поля изображены толстыми сплошными кривыми (лежат на поверхности постоянного значения  $\Psi$ ). Направление поля показано стрелками и совпадает с направлением интегрирования в формулах (3.45), (3.46) и (3.47). (a) Силовая линия с данным значением  $\Psi$  не замыкается в ядре. Начальная точка  $\chi_{0\Psi}$  совпадает с местом вхождения силовой линии в ядро. Точка, где линия покидает ядро, обозначена  $\chi_{1\Psi}$ . (b) Силовая линия с данным значением  $\Psi$  замкнута в ядре. Начало интегрирования  $\chi_{0\Psi}$  определено как ближайшая точка силовой линии к коре.

где  $\chi_\Psi$  обозначает одну из т.н. потоковых координат — длину вдоль полоидальной силовой линии  $\Psi(r, \theta) = \text{const}$  [138] (причём полоидальное магнитное поле  $\mathbf{B}^{(p)}$  направлено вдоль этих линий), а правая часть имеет вид

$$S(r, \theta) = (\nabla\varphi)^2 I_t' - F(r, \theta) - \mathbf{B}^{(p)} \cdot \nabla G(r, \theta). \quad (3.44)$$

Здесь мы использовали тождество  $\nabla\varphi \cdot \mathbf{U}_b^{(t)} = U_{b\varphi}/(r \sin\theta)$ . Уравнение (3.43) может быть легко проинтегрировано с результатом

$$U_{b\varphi} = r \sin\theta \left( -G|_{\chi_{0\Psi}}^{\chi_\Psi} - \int_{\chi_{0\Psi}}^{\chi_\Psi} \frac{F}{B^{(p)}} d\chi + I_t'(\Psi, t) \int_{\chi_{0\Psi}}^{\chi_\Psi} \frac{(\nabla\varphi)^2}{B^{(p)}} d\chi + \Omega_0(\Psi, t) \right), \quad (3.45)$$

где  $\Omega_0(\Psi, t) = U_\varphi/(r \sin\theta)|_{\chi_{0\Psi}}$  описывает граничное условие в точке  $\chi_{0\Psi}$ . Интегрирование в формуле (3.45) выполняется от начальной точки  $\chi_{0\Psi}$  на силовой линии с заданным значением  $\Psi$  до некоторой конечной точки  $\chi_\Psi$  на этой же линии. Заметим, что для получения выражения (3.45) мы воспользовались тем, что функция  $I_t'(\Psi, t)$  постоянна на полоидальной силовой линии, и поэтому может быть вынесена из-под знака соответствующего интеграла [см. третий член в скобках в формуле (3.45)]. В отличие от функций  $I(\Psi, t)$  и  $I_\Psi'(\Psi, t)$ , чья зависимость от координат  $r$  и  $\theta$  полностью задана мгновенной конфигурацией магнитного поля, функция  $I_t'(\Psi, t)$  нам, вообще говоря, не известна (зависит от  $\partial\mathbf{B}/\partial t$ ). Поэтому в общем случае величина  $U_{b\varphi}$  определена на каждой силовой линии с точностью до двух «констант»,  $I_t'(\Psi, t)$  и  $\Omega_0(\Psi, t)$ . Однако величина  $I_t'(\Psi, t)$  может быть определена из граничных условий, как показано далее.

Для каждой силовой линии существуют две возможности. Первая заключается в том, что линия не замкнута в ядре (рисунок 3.1a) и дважды пересекает границу коры и ядра. В данной задаче нам не важно, где происходит замыкание этой силовой линии — в коре

звезды или в магнитосфере.<sup>6</sup> Пусть  $\chi_{0\Psi}$  соответствует точке, где силовая линия входит в ядро из коры, а  $\chi_{1\Psi}$  обозначает точку, где силовая линия покидает ядро. При  $\chi = \chi_{1\Psi}$  нужно задать какое-либо граничное условие, аналогичное заданному при  $\chi = \chi_{0\Psi}$ , а именно,  $U_{b\varphi}/(r \sin \theta)|_{\chi_{1\Psi}} = \Omega_1(\Psi, t)$ . Тогда для  $I'_t(\Psi, t)$  мы получаем [см. формулу (3.45)]

$$I'_t(\Psi, t) = \left( \int_{\chi_{0\Psi}}^{\chi_{1\Psi}} \frac{(\nabla\varphi)^2}{B^{(p)}} d\chi \right)^{-1} \left( \Omega_1(\Psi, t) - \Omega_0(\Psi, t) + G|_{\chi_{0\Psi}}^{\chi_{1\Psi}} + \int_{\chi_{0\Psi}}^{\chi_{1\Psi}} \frac{F}{B^{(p)}} d\chi \right). \quad (3.46a)$$

Вторая возможность реализуется, если рассматриваемая силовая линия замкнута в ядре (рисунок 3.1b). Интегрируя выражение (3.45) по замкнутому контуру силовой линии, как показано на рисунке 3.1b, мы получаем

$$I'_t(\Psi, t) = \left( \oint_{\Psi} \frac{(\nabla\varphi)^2}{B^{(p)}} d\chi \right)^{-1} \oint_{\Psi} \frac{F}{B^{(p)}} d\chi. \quad (3.46b)$$

Заметим, что «граничная» функция  $\Omega_0(\Psi, t)$  никак не связана с физическими условиями в коре звезды в случае, если силовая линия замыкается в ядре. Область ядра, где силовые линии замкнуты, оказывается магнитно развязанной с остальной частью звезды. Этот вывод аналогичен результату работы [142], хотя приведённые там рассуждения в пользу данного результата отличны от наших.

Также обратим внимание на случай экваториальной симметрии задачи. Тогда  $\Omega_1(\Psi, t) = \Omega_0(\Psi, t)$  и  $G|_{\chi_{1\Psi}} = G|_{\chi_{0\Psi}}$ . Следовательно,  $I'_t(\Psi, t)$  не зависит от «граничных» функций  $\Omega_0(\Psi, t)$  и  $\Omega_1(\Psi, t)$  (ср. формулу 3.46a),

$$I'_t(\Psi, t) = \left( \int_{\chi_{0\Psi}}^{\chi_{1\Psi}} \frac{(\nabla\varphi)^2}{B^{(p)}} d\chi \right)^{-1} \int_{\chi_{0\Psi}}^{\chi_{1\Psi}} \frac{F}{B^{(p)}} d\chi. \quad (3.47)$$

Итак, у нас есть рецепт расчёта функции  $I'_t(\Psi, t)$  в уравнении (3.45). Следовательно, мы можем рассчитать  $U_{b\varphi}$  для заданной конфигурации магнитного поля.

### 3.3.6. Сводка результатов раздела 3.3

Для расчёта движений жидкости в ядре нейтронной звезды, вызванных магнитным полем, следует:

- (i) определить  $\Delta\mu$  и  $\delta\mu_n$  с помощью формулы (3.25) и уравнений (3.30) с граничными условиями (3.31) и (3.33);
- (ii) рассчитать  $\mathbf{U}_b^{(p)}$  по формулам (3.18) и (3.20), и  $\mathbf{U}_b^{(t)}$  по формулам (3.45) и (3.46);
- (iii) если нужны скорости движения компонент среды  $\mathbf{u}_a$ , необходимо сперва рассчитать диффузионные скорости  $\mathbf{w}_a$  по формулам (3.11), а затем использовать тождество  $\mathbf{u}_a = \mathbf{U}_b + \mathbf{w}_a$ .

Более того, решая уравнения (3.38) и (3.46) мы находим величины  $\partial\Psi/\partial t$  и  $I'_t(\Psi, t)$ , которые открывают возможность определить производные  $\partial\mathbf{B}/\partial t$  для произвольно заданного поля  $\mathbf{B}$ , а, значит, полностью самосогласованно моделировать эволюцию магнитного поля во времени.

<sup>6</sup> В магнитосфере вблизи поверхности нейтронной звезды плотность электрического тока пренебрежимо мала (см., например, [141]). Значит, токовую функцию  $I$  можно считать равной нулю вне звезды. Поскольку условие (3.35) должно быть выполнено и в ядре, и в коре, и в ближней магнитосфере, то  $I = 0$  на всей протяжённости тех силовых линий, которые не замыкаются внутри звезды. Это замечание позволяет значительно упростить формулы (3.45) и (3.46).

### 3.4. Квазистационарные потоки в ядре: численные результаты

Общий формализм, разработанный в предыдущем разделе, позволяет рассчитывать скорости различных компонент в *пре*-ядре нейтронной звезды. В этом разделе представлен пример подобного расчёта для двух простых моделей полоидального магнитного поля и проведён анализ полученных решений. Результаты опубликованы в статье [129],

Использована та же микрофизическая модель звезды, что и в статье [8]. А именно, рассмотрена нейтронная звезда с массой  $M = 1.4 M_\odot$  и уравнением состояния ННЖ с *пре*-составом ядра [143]. Радиус такой звезды составляет  $R = 12.2$  км, радиус её ядра —  $R_{\text{core}} = 11.2$  км. Для расчёта невозмущённых величин как функций координаты  $r$  [например, концентрации частиц  $n_a(r)$  сорта  $a$ ] были решены уравнения Толмана-Оппенгеймера-Волкова [9, 10] [см. раздел 1.1, формулы (1.2)]. В этом есть некоторая несогласованность с предложенным методом, поскольку указанные уравнения учитывают влияние эффектов ОТО на гидростатику звезды, в то время как возмущения всех величин описываются ньютоновской динамикой. Но такой подход позволяет использовать реалистичный радиус  $R$  и профили  $n_a(r)$  и т.п., в то же время сохраняя простоту рассмотрения явлений, связанных с магнитным полем. Ожидается, что полный учёт эффектов ОТО не внесёт качественных изменений в наши результаты.

Коэффициенты трения  $J_{ep}$  и  $J_{np}$  рассчитывались с помощью эффективных времён релаксации, вычисленных в работах [139, 144]; эффективные массы нуклонов считаются равными  $m_n^* = 0.7m_n$ ,  $m_p^* = 0.7m_p$ :

$$J_{ep} \approx 2.0 \times 10^{28} T_8^2 \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{5/3} \left( \frac{n_e}{n_0} \right)^{4/3} \frac{\Gamma}{\text{см}^3 \text{с}}, \quad (3.48)$$

$$J_{np} \approx 1.25 \times 10^{31} T_8^2 \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \left( \frac{n_p}{n_0} \right) \frac{\Gamma}{\text{см}^3 \text{с}}, \quad (3.49)$$

Скорость реакций  $\Delta\Gamma$  за счёт модифицированного урка-процесса взята в виде, представленном в обзоре [16]<sup>7</sup> (более мощный прямой урка-процесс запрещён в звезде рассматриваемой конфигурации). Все указанные величины зависят от локальной температуры среды  $T$ , которая связана со сдвинутой по красному смещению температурой звезды  $\tilde{T}$  формулой (1.3). Так же, как и в главах 1 и 2, ядра нейтронных звёзд считались изотермическими,  $\tilde{T} = \text{const}(r, \theta, \varphi)$ .

#### 3.4.1. «Минимальная» модель магнитного поля

Следуя работам [118, 145], мы использовали простейшие аналитические модели функции полоидального потока,

$$\Psi(r, \theta) = B_{\text{max}} R^2 f \left( \frac{r}{R} \right) \sin^2 \theta, \quad (3.50)$$

где  $B_{\text{max}}$  — максимальное значение магнитного поля внутри звезды, а  $f(x)$  — аналитическая функция, определённая ниже. В осесимметричном случае поле в малой окрестности центра звезды должно быть почти однородным и параллельным оси симметрии. Поэтому при  $x = r/R \ll 1$  должно быть  $f \sim x^{2n}$ , где  $n \geq 1$  (случай  $n = 0$  запрещён требованием регулярности поля при  $x \rightarrow 0$ ). Как и в статье [145], предположено, что функция  $f$  внутри звезды может быть описана формулой  $f = \sum_{n \geq 1} f_{2n} x^{2n}$ , и должна гладко сшиваться с вакуумным полем магнитного диполя ( $f \propto 1/x$ ) снаружи звезды. Одним из решений такой задачи является [118]

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{5}x^4 + \frac{3}{14}x^6. \quad (3.51)$$

<sup>7</sup> Отметим, что интеграл по углам в расчёте модифицированного урка-процесса в обзоре [16] должен быть скорректирован согласно статье [37].

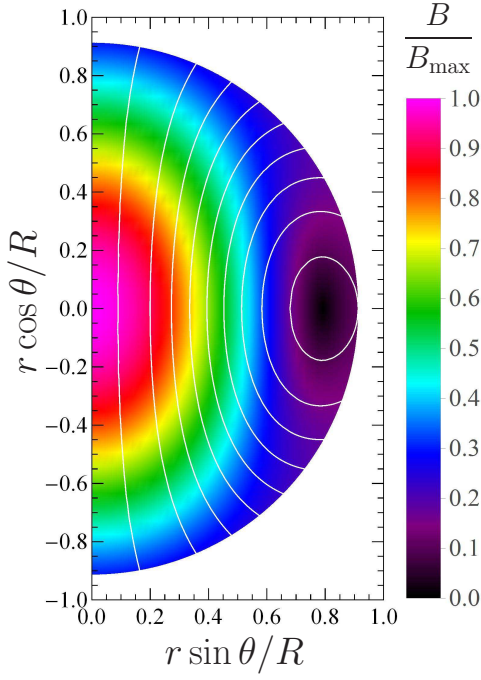


Рис. 3.2. Меридиональный разрез ядра нейтронной звезды с «минимальной» конфигурацией магнитного поля, рассмотренной в тексте. Силовые линии поля показаны белыми кривыми. Цветовой шкалой изображена величина поля  $B = |\mathbf{B}|$ .

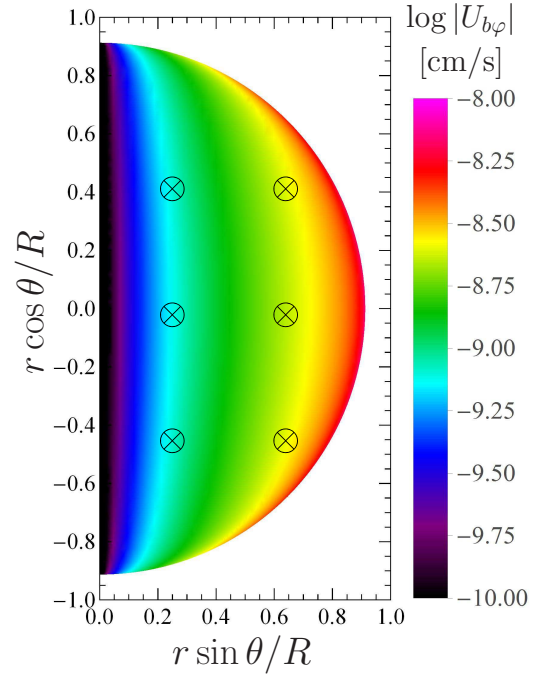


Рис. 3.3. Тороидальная компонента барионной скорости  $U_{b\varphi}$  для минимального магнитного поля. Цветом обозначен модуль  $U_{b\varphi}$  в логарифмическом масштабе (в см/с). Кресты в кружках обозначают направление  $U_{b\varphi}$  (от читателя; ср. с рисунком 3.9с).

Это самое простое решение для  $f(x)$  в области  $x \in [0, 1]$ , удовлетворяющее требованиям

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=1} = -f(1) \quad \text{и} \quad \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=1} = 2f(1). \quad (3.52)$$

Первое из этих условий необходимо для того, чтобы нормальная компонента поля вблизи поверхности была непрерывной, второе гарантирует отсутствие поверхностных токов (подробнее см., например, статью [118]). Выражение (3.51) отличается от предложенного в формуле (30) статьи [118] множителем  $35/4$ , возникающим из-за отличия используемых нормировок. Магнитное поле  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(p)}$ , соответствующее  $f(x)$  в формуле (3.51), показано на рисунке 3.2. Далее такая модель будет называться «минимальной», так как она — простейшая среди всех моделей, удовлетворяющих условиям (3.52) и требованию регулярности в центре звезды.

Теперь обратимся к тороидальной (азимутальной) составляющей скорости барионного потока  $U_{b\varphi}$ . Любопытно, что в случае чисто полоидального магнитного поля (когда токковая функция  $I = 0$ ) величина  $U_{b\varphi}$  вычисляется крайне просто. Согласно формулам (3.41) и (A.2), при  $I = 0$  мы имеем  $F = 0$  и  $G = -j_\varphi / (en_e r \sin \theta)$ . Производная  $I'_t(\Psi, t)$  также исчезает благодаря экваториальной симметрии выбранной модели поля [см. уравнение (3.47)]. Значит, скорость  $U_{b\varphi}$  может быть найдена при известном граничном условии  $\Omega_0(\Psi, t)$  [см. формулу (3.45)]. В общем случае функция  $\Omega_0(\Psi, t)$  может быть определена лишь из совместного рассмотрения уравнений эволюции магнитного поля в ядре и коре звезды. Здесь мы не претендуем на решение подобной задачи и вместо этого для иллюстрации предполагаем, что  $\Omega_0(\Psi) = -G|_{\chi_0\Psi}$ . Тогда

$$U_{b\varphi} = \frac{j_\varphi}{en_e} = -\frac{c}{4\pi en_e r \sin \theta} \Delta^* \Psi. \quad (3.53)$$

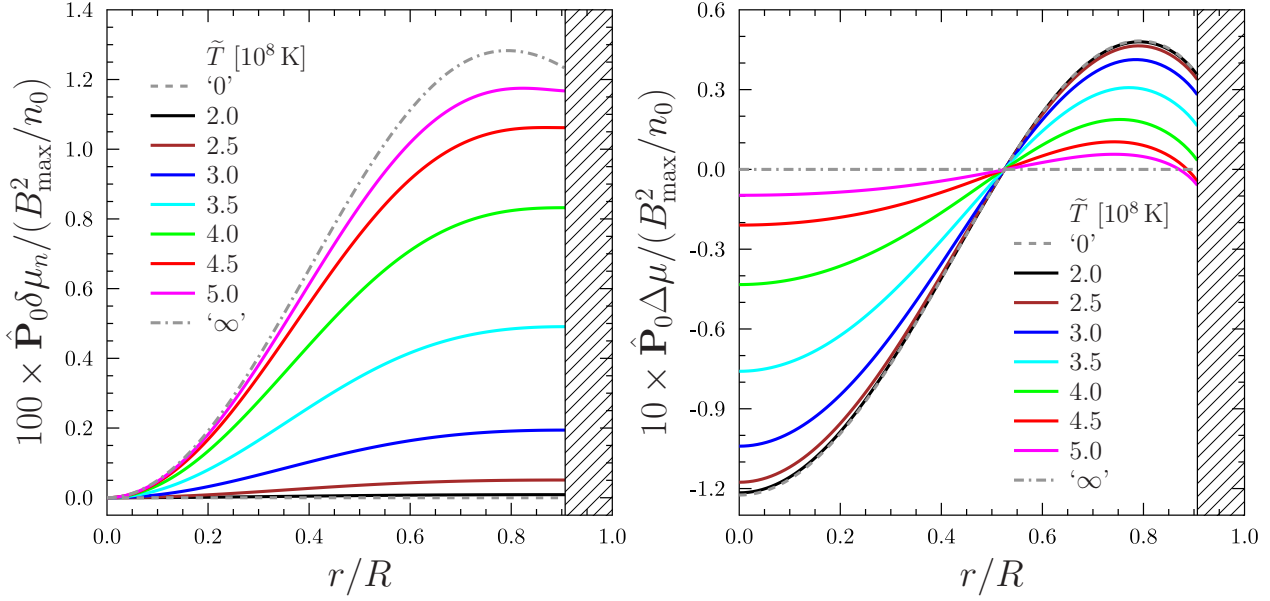


Рис. 3.4. Радиальные профили нулевых лежандровских компонент масштабированных возмущений химических потенциалов  $100 \times \delta\mu_n / (B_{\max}^2 / n_0)$  и  $10 \times \Delta\mu / (B_{\max}^2 / n_0)$  в рамках минимальной модели магнитного поля в ядре (см. раздел 3.4.1). Цветные кривые — численные решения уравнений (3.30) с граничными условиями (3.31) и (3.33б) для набора температур  $\tilde{T}$ , указанного на рисунке. Штриховые линии (практически совпадают с чёрными сплошными) — низкотемпературный предел; штрихпунктирные кривые — высокотемпературный предел. Косая штриховка обозначает область коры нейтронной звезды, где наше рассмотрение неприменимо.

Этот результат изображён на рисунке 3.3. Отметим, что такая скорость  $U_{b\varphi}$  не зависит явно от температуры нейтронной звезды и пропорциональна  $B_{\max}$ . При таком выборе граничных условий выражения (3.11в) и (3.53) свидетельствуют, что величина  $U_{b\varphi}$  связана с  $\varphi$ -компонентой диффузионной скорости электронов  $w_e$  формулой

$$U_{b\varphi} = -w_{e\varphi}. \quad (3.54)$$

### 3.4.2. Возмущения химических потенциалов

Теперь в рамках метода, предложенного в разделах 3.3.3 и 3.3.4, рассчитаем возмущения химических потенциалов  $\delta\mu_n$  и  $\Delta\mu$ .

Цветные линии на рисунке 3.4 изображают решения уравнений (3.30) для величин  $\hat{P}_0 \delta\mu_n$  и  $\hat{P}_0 \Delta\mu$  с граничными условиями (3.31) и (3.33б). Рассмотрен набор различных температур  $\tilde{T}$  (см. рисунок). Для не очень сильного магнитного поля отклонение от химического равновесия достаточно мало,  $\Delta\mu \ll \pi k_B T$ , чтобы неравновесные реакции протекали в линейном режиме [8]: в этом случае их скорости  $\Delta\Gamma$  можно представить в упрощённом виде  $\Delta\Gamma = \lambda \Delta\mu$ . В таком режиме систему дифференциальных уравнений (3.30) можно считать линейной. Тогда  $\hat{P}_0 \delta\mu_n$  и  $\hat{P}_0 \Delta\mu$  оказываются пропорциональны  $B_{\max}^2$ , потому что  $\hat{P}_0 f_{Ar} \propto B_{\max}^2$ . Значит, безразмерные комбинации  $100 \times \hat{P}_0 \delta\mu_n / (B_{\max}^2 / n_0)$  и  $10 \times \hat{P}_0 \Delta\mu / (B_{\max}^2 / n_0)$ , показанные на рисунке 3.4, не зависят от  $B_{\max}^2$  (здесь, как и в предыдущих главах,  $n_0 = 0.16 \text{ фм}^{-3}$  — стандартная концентрация ядерной материи).

Штриховые и штрихпунктирные линии изображают, соответственно, низкотемпературный и высокотемпературный пределы величин  $\hat{P}_0 \delta\mu_n$  и  $\hat{P}_0 \Delta\mu$  (детали см. в разделе 3.3.4). Видно, что температура  $\tilde{T} = 2 \times 10^8 \text{ К}$  является достаточно низкой, чтобы имитировать низкотемпературный предел (чёрные сплошные кривые на рис. 3.4 практически совпадают со штриховыми). При  $\tilde{T} \sim 3.5 \times 10^8 \text{ К}$  решение уравнений (3.30) существенно отличается

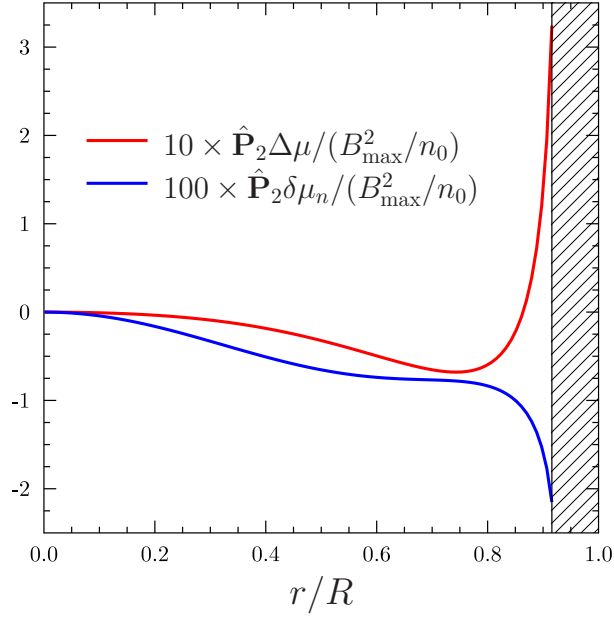


Рис. 3.5. То же, что и на рисунке 3.4, но для вторых лежандровских компонент величин  $\delta\mu_n$  и  $\Delta\mu$ .

от обоих предельных случаев. Самая высокая температура  $\tilde{T}$ , для которой была численно решена система (3.30), составляет  $5 \times 10^8$  К. При такой температуре решение близко к высокотемпературному пределу, но всё ещё заметно отличается от него. При более высоких  $\tilde{T}$  уравнение (3.30а) становится плохо обусловленным, и численное решение системы (3.30) затруднено.

Угловая зависимость потоковой функции (3.50) включает два полинома Лежандра,  $P_0(\cos\theta)$  и  $P_2(\cos\theta)$ . В линейном режиме это справедливо и для возмущений химических потенциалов. На рисунке 3.5 показаны безразмерные комбинации  $100 \times \hat{P}_2 \delta\mu_n / (B_{\max}^2 / n_0)$  и  $10 \times \hat{P}_2 \Delta\mu / (B_{\max}^2 / n_0)$  в зависимости от координаты  $r$ . Согласно формуле (3.25), эти комбинации не зависят от  $B_{\max}^2$  и полностью определяются магнитным полем.<sup>8</sup> Как правило,  $\hat{P}_2$ -компоненты сопоставимы с  $\hat{P}_0$ -компонентами в основном объёме ядра. Однако имеется резкое (но конечное) увеличение  $\hat{P}_2 \delta\mu_n$  и  $\hat{P}_2 \Delta\mu$  вблизи границы коры и ядра. Причина такого поведения кроется в значительном смягчении уравнения состояния при  $n_b \lesssim n_0$ , что приводит к большим по модулю производным  $n'_b$  и  $n'_e$  вблизи дна коры. Как показано в приложении В, этот эффект должен наблюдаться для всех реалистичных моделей уравнения состояния.

При достаточно больших значениях магнитного поля отклонение от химического равновесия оказывается настолько большим, что  $\Delta\mu \gtrsim \pi k_B T$ , т.е. реакции протекают в нелинейном режиме, когда  $\Delta\Gamma$  является нелинейной (полиномиальной) функцией  $\Delta\mu$  [135]. На основании рисунков 3.4 и 3.5 можно дать следующую оценку характерной величины отклонения от бета-равновесия:  $\Delta\mu \sim (0.03 - 0.1) \times B_{\max}^2 / n_0$ . Соответственно, характерное значение  $B_{\max}^*$ , при котором урка-процессы в ядре перейдут в нелинейный режим, оценивается как

$$B_{\max}^* \sim (0.8 - 1.5) \times 10^{16} \sqrt{\frac{T}{10^8 \text{ К}}} \text{ Гс.} \quad (3.55)$$

Отметим, что в эту формулу входит локальная температура вещества ядра  $T$ , которая несколько больше  $\tilde{T}$ . В наиболее глубоких областях ядра  $T$  может превосходить  $\tilde{T}$  в полтора раза. Тогда для типичной температуры магнитара [127],  $\tilde{T} \sim 2 \times 10^8$  К, следует ожидать  $B_{\max}^* > 10^{16}$  Гс. Столь сильное магнитное поле в принципе может достигаться в недрах

<sup>8</sup> На основании формулы (3.25) можно сделать следующую оценку:  $\hat{P}_l \delta\mu_n / \hat{P}_l \Delta\mu \sim n_e / n_b \sim 0.1$  при  $l \geq 1$ . Она с хорошей точностью выполняется для  $\hat{P}_2$ -компонент на рисунке 3.5.

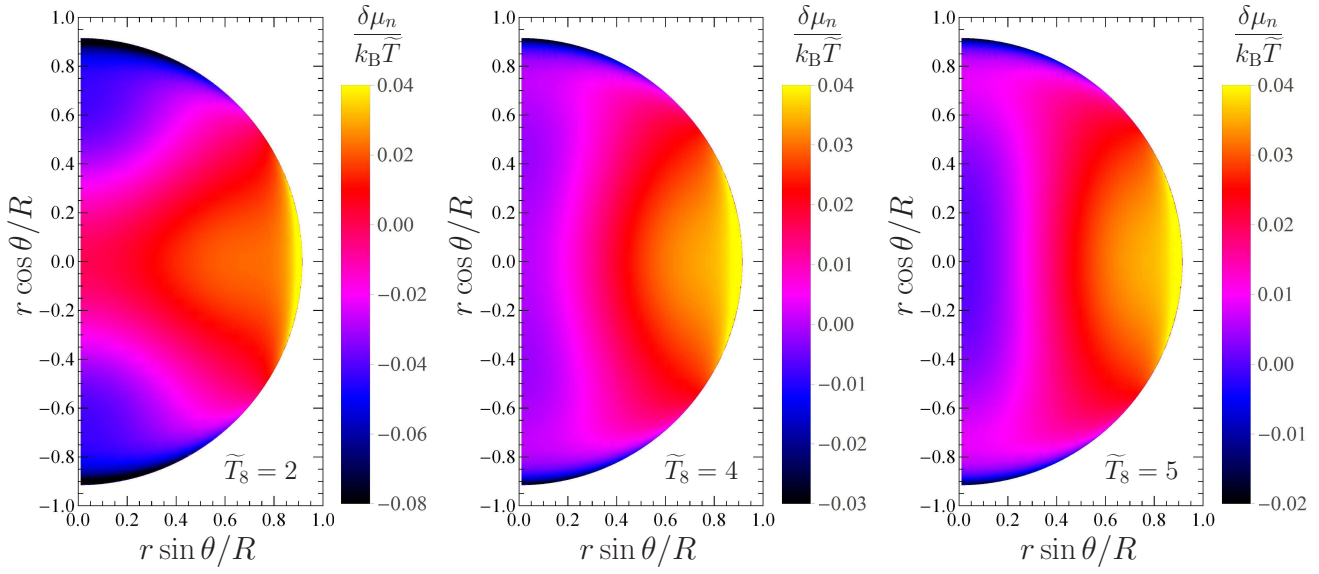


Рис. 3.6. Безразмерное отношение  $\delta\mu_n/(k_B\tilde{T})$  в нейтронной звезде с «минимальной» моделью магнитного поля,  $B_{\max} = 5 \times 10^{15}$  Гс. Левый, средний и правый графики построены, соответственно, для  $\tilde{T} = 2 \times 10^8$  К,  $4 \times 10^8$  К и  $5 \times 10^8$  К.

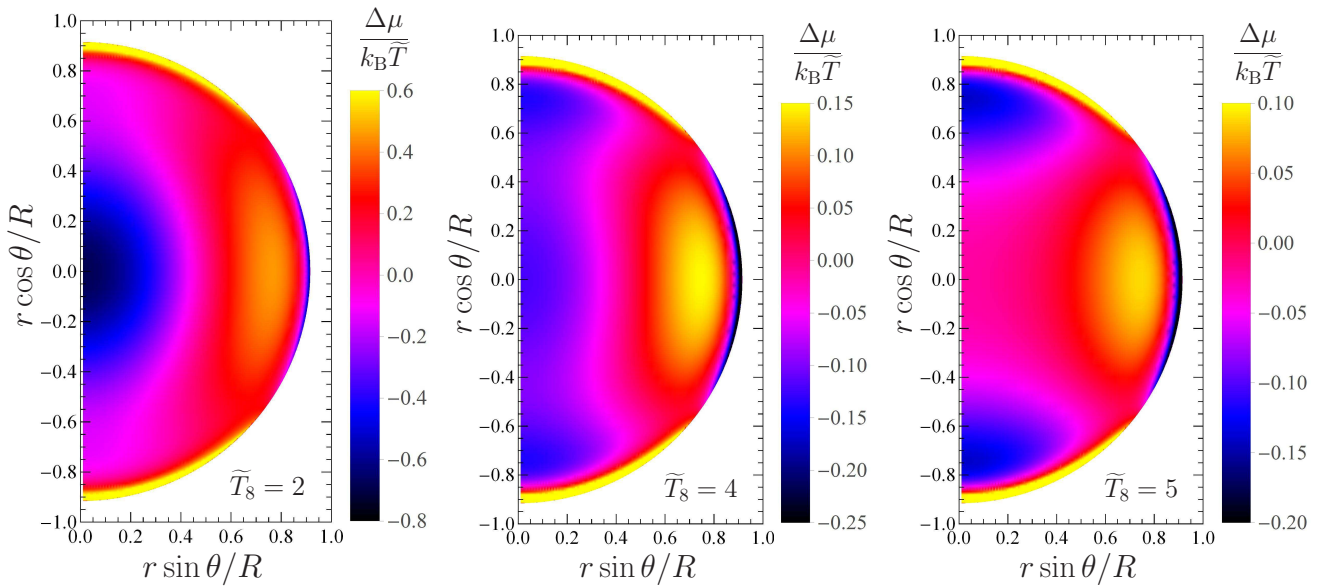


Рис. 3.7. То же, что и на рисунке 3.6, но для безразмерного отношения  $\Delta\mu/(k_B\tilde{T})$ , характеризующего отклонение от химического равновесия в ядре, вызванное магнитным полем.



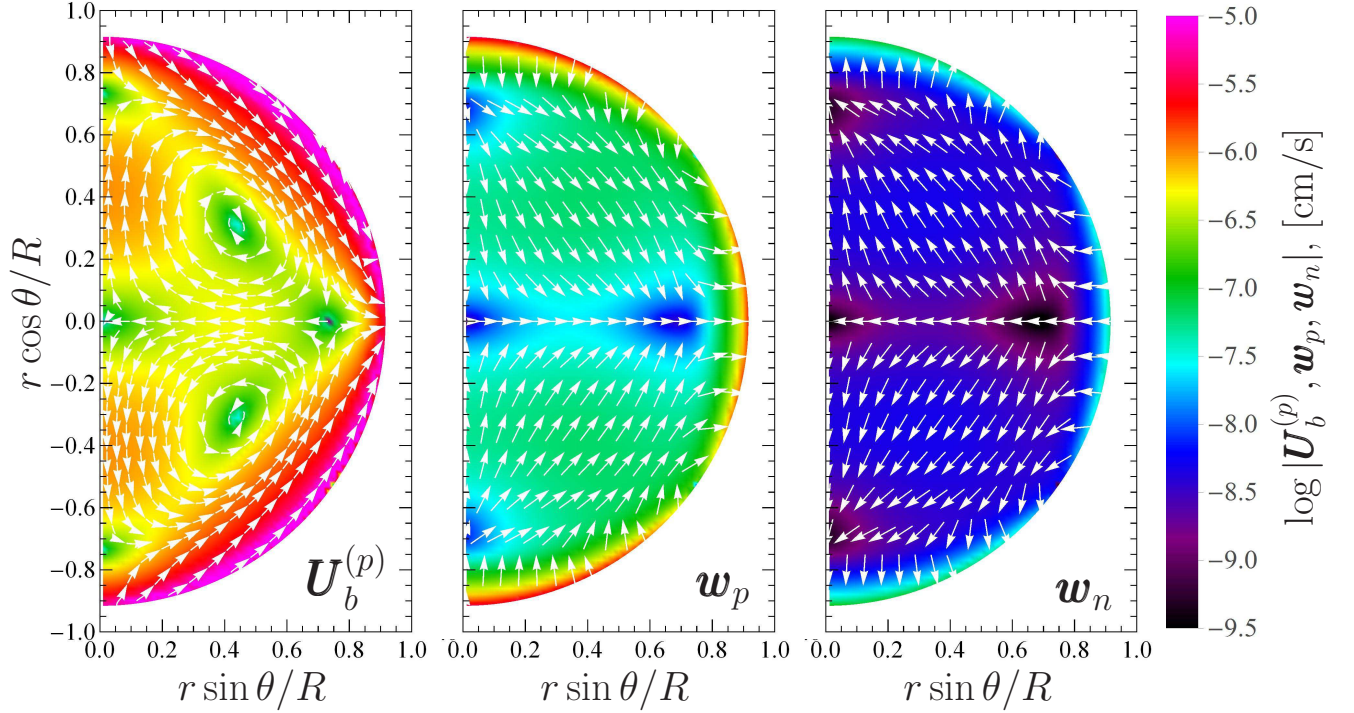


Рис. 3.8. Цветом показаны (в логарифмическом масштабе) полоидальная компонента скорости потока барионов  $U_b^{(p)}$  (слева), а также диффузионные скорости протонов  $w_p$  (посередине) и нейтронов  $w_n$  (справа) для «минимальной» модели магнитного поля с  $B_{\max} = 5 \times 10^{15}$  Гс и  $\tilde{T} = 2 \times 10^8$  К. Стрелками показаны направления скоростей.

магнитаров, но в дальнейшем мы предпочитаем избегать нелинейности  $\Delta\Gamma$ , ограничившись рассмотрением  $B_{\max} = 5 \times 10^{15}$  Гс.

Наши вычисления проиллюстрированы рисунками 3.6 и 3.7, где изображены распределения безразмерных отношений  $\delta\mu_n/(k_B\tilde{T})$  и  $\Delta\mu/(k_B\tilde{T})$  на меридиональном срезе звезды. Из рисунка 3.6 видно, что вторая лежандровская компонента  $\delta\mu_n$  доминирует над нулевой при  $\tilde{T} = 2 \times 10^8$  К, а при  $\tilde{T} = 4 \times 10^8$  К и  $5 \times 10^8$  К они сравнимы, причём есть тенденция к увеличению роли  $\hat{P}_0$ -компоненты с ростом  $\tilde{T}$ . Ситуация с отклонением от бета-равновесия  $\Delta\mu$  обратная (рисунок 3.7). При  $\tilde{T} = 2 \times 10^8$  К нулевая лежандровская компонента  $\hat{P}_0\Delta\mu$  слабо доминирует над  $\hat{P}_2\Delta\mu$ , но при  $\tilde{T} = 4 \times 10^8$  К их влияние сравнивается, а при  $\tilde{T} = 5 \times 10^8$  К вторая компонента доминирует над нулевой.

### 3.4.3. Полоидальные потоки жидкости в «минимальной» модели магнитного поля

Далее рассмотрена нейтронная звезда с температурой  $\tilde{T} = 2 \times 10^8$  К и полем  $B_{\max} = 5 \times 10^{15}$  Гс. Выбранная температура  $\tilde{T}$  позволяет использовать низкотемпературное приближение,  $\varkappa \gg 1$ , как объяснено в разделе 3.4.2 (определение  $\varkappa$  см. в конце параграфа 3.3.4). Тогда можно считать, что  $\hat{P}_0\mu_n = 0$ . В дополнение к этому, условие  $\varkappa \gg 1$  вместе с оценкой  $\hat{P}_l\delta\mu_n/\hat{P}_l\Delta\mu \sim 0.1$  (см. сноску 8) позволяет пренебречь величиной  $\Delta\Gamma$  в выражении (3.18). Это значительно упрощает расчёт полоидальной скорости барионов  $U_b^{(p)}$ , а также диффузионных скоростей  $w_p$  и  $w_n$ .

На рисунке 3.8 изображены три величины. Заметим, что для чисто полоидального поля  $\mathbf{B}$  полоидальные проекции  $w_p$  и  $w_e$  совпадают, и при этом  $w_{e\varphi} = -U_{b\varphi}$  [см. формулу (3.54)]. Интересно, что полоидальная компонента  $U_b^{(p)}$ , генерируемая магнитным полем, оказывается весьма большой,  $U_b^{(p)} \sim (0.3 - 1) \times 10^{-6}$  см/с, и резко возрастает при приближении к границе

коры и ядра. Она также оказывается много больше, чем характерные значения диффузионных скоростей и  $U_{b\varphi}$  (см. рисунок 3.3).<sup>9</sup> Характерное значение  $U_b^{(p)}$  для данной модели магнитного поля оценивается как

$$U_b^{(p)} \sim (10 - 30) w_p. \quad (3.56)$$

В свою очередь, протонная и нейтронная диффузионные скорости связаны соотношением  $\mathbf{w}_p = -(n_n/n_e)\mathbf{w}_n$  [см. формулы (3.11)], согласно которому  $w_p \sim 10w_n$ . Заметим, что иерархия (3.56) остаётся справедливой в широком диапазоне температур [достаточно низких, чтобы пренебречь  $\Delta\Gamma$  в формуле (3.18)] и магнитных полей, так как все три скорости  $U_b^{(p)}$ ,  $\mathbf{w}_p$  и  $\mathbf{w}_n$  зависят от  $\tilde{T}$  и  $B_{\max}$  как  $\propto B_{\max}^2/\tilde{T}$ . По-видимому, причина, по которой  $U_b^{(p)}$  многократно превосходит  $\mathbf{w}_p$  и  $\mathbf{w}_n$ , кроется в следующем. Выразим, например,  $\theta$ -компоненту вектора барионной скорости  $U_{b\theta}$  через  $\mathbf{w}_p$ . Комбинируя выражения (3.11б), (3.18) и (3.20), можно записать

$$U_{b\theta} = \frac{1}{n_b r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{x_e'} \int_0^\theta \operatorname{div}(n_e \mathbf{w}_p) \sin\tilde{\theta} \, d\tilde{\theta} \right), \quad (3.57)$$

где  $x_e \equiv n_e/n_b$ . Наивная оценка этого выражения, предполагающая  $d/dr \sim 1/R$ , приводит к результату  $U_{b\theta} \sim w_p$ , но является некорректной. Обратим внимание на то, что  $\mathbf{w}_p$  зависит от различных производных от  $n_b$  и  $n_e$  по радиальной координате, равно как и от производных от функции  $f(r/R)$ , определяющей модель магнитного поля [см. формулы (3.11б) и (3.25)], — точнее, от  $n_b'$ ,  $n_e'$ ,  $n_b''$ ,  $n_e''$ ,  $f$ ,  $f''$  и  $f'''$ . Соответственно, в выражение (3.57) для  $U_{b\theta}$  входят производные вплоть до четвёртого порядка от  $n_b$  и  $n_e$  и пятого от  $f$ . Эти производные могут быть настолько большими, что оценка  $n_b''''(r) \sim n_b''(r)/R^2$  перестаёт работать. Во внешних слоях ядра, близких к границе с корой, справедливой оказывается другая оценка,  $n_b''''(r) \gg n_b''(r)/R^2$ ; в центральных областях это свойство, в общем и целом, сохраняется. Объяснение того, почему так происходит, см. в приложении В. Зависимость  $U_{b\theta}$  от пятой производной  $f$  свидетельствует, что барионная скорость обладает высокой чувствительностью к конфигурации магнитного поля внутри звезды. Здесь следует отметить, что модель (3.50), используемая при построении рисунка 3.8, является одной из самых «гладких» (поле имеет максимум в центре звезды и монотонно спадает в направлении коры, см. рисунок 3.2). Можно ожидать (подтверждается проверкой на ряде иных моделей поля), что для менее гладких моделей характерное значение барионной скорости будет только выше. Таким образом, приведённое выше рассуждение свидетельствует, что  $U_b$  будет значительно превосходить диффузионные скорости для широкого класса моделей магнитного поля в ядре нейтронной звезды, за вычетом, быть может, каких-то специальных конфигураций, в которых члены с высокими производными компенсируют друг друга.

Поскольку  $U_b$  доминирует над диффузионными скоростями, все компоненты среды движутся почти как единая жидкость,  $\mathbf{u}_a = \mathbf{U}_b + \mathbf{w}_a \approx \mathbf{U}_b$ . С помощью выражения (3.11б) легко оценить различные слагаемые в правой части формулы (3.12) и убедиться, что основной вклад в  $\delta\mathbf{E}_{\text{com}}$  вносит третье слагаемое, так что  $\delta E_{\text{com}} \sim (w_p/c)B \sim 0.05|(\mathbf{U}_b^{(p)}/c) \times \mathbf{B}|$ . Соответственно, силовые линии магнитного поля с хорошей точностью можно считать «вмороженными» в *пре*-плазму ядра [см. уравнение (3.9)],

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \approx \operatorname{rot}(\mathbf{U}_b \times \mathbf{B}). \quad (3.58)$$

<sup>9</sup> Отметим, однако, что свойство  $U_b^{(p)} \gg U_{b\varphi}$  является прямым следствием полоидальности выбранной модели магнитного поля. Для более реалистичной смешанной полоидально-тороидальной конфигурации  $U_b^{(p)}$  будет того же порядка, что и  $U_{b\varphi}$ , а простое соотношение (3.54) перестанет выполняться.

Интересным свойством решения, представленного на рисунке 3.8, является наличие неисчезающих потоков нейтронов и протонов через границу коры и ядра. Эти потоки не нарушают сохранения числа нуклонов в ядре и не противоречат известной физике недр нейтронных звёзд. Согласованное описание этих потоков в коре является сложной задачей, выходящей за рамки данного исследования. Однако кажется странным, что они с необходимостью возникают в наших расчётах, и что у нас не достаточно степеней свободы (для заданной конфигурации поля), чтобы обнулить эти потоки, например, подобрав соответствующее граничное условие на дне коры.<sup>10</sup> Внимательный читатель может задаться вопросом, что вообще играет роль «краевых условий» на границе коры и ядра? Мы считаем, что таковую функцию несёт само магнитное поле с заданной геометрией. Совместно с предположением квазистационарности, оно обеспечивает систему всей необходимой информацией о потоках частиц, в том числе через границу ядра. В порядке косвенного подтверждения, в следующем параграфе сконструирована модель магнитного поля, исключаяющая поток барионов между корой и ядром звезды.

#### 3.4.4. Модель магнитного поля без потока барионов между корой и ядром

Отсутствие обмена барионами между корой и ядром гарантируется условием  $u_{nr}|_{R_{\text{core}}} = u_{pr}|_{R_{\text{core}}} = 0$ . Его можно переформулировать в терминах  $\mathbf{U}_b$ ,  $\mathbf{w}_p$  и  $\mathbf{w}_n$  в следующем виде:  $U_{br}|_{R_{\text{core}}} = 0$  и  $w_{pr}|_{R_{\text{core}}} = w_{nr}|_{R_{\text{core}}} = 0$ . С помощью формул (3.11а) и (3.11б), последнее условие переписывается так:

$$\left(\hat{\mathbf{P}}_l \delta \mu_n\right)' \Big|_{R_{\text{core}}} = 0, \quad l \geq 0. \quad (3.59)$$

Заметим, что равенство (3.59) для  $l = 0$  выполняется автоматически вследствие граничного условия (3.33б). С учётом формулы (3.20) для  $\mathbf{U}_b^{(p)}$ , требование  $U_{br}|_{R_{\text{core}}} = 0$  эквивалентно требованию  $\hat{\mathbf{P}}_l V|_{R_{\text{core}}} = 0$  для любого  $l \geq 0$  (для  $l = 0$  это, опять-таки, автоматически верно, как объяснено в разделе 3.3.3). В низкотемпературном пределе, который мы сейчас рассмотрим, можно пренебречь  $\Delta\Gamma$  в формуле (3.18) для  $V$ . Тогда условие  $\hat{\mathbf{P}}_l V|_{R_{\text{core}}} = 0$  представляется в виде

$$\left[\left(\hat{\mathbf{P}}_l \delta \mu_n\right)'' - \frac{l(l+1)}{r^2} \hat{\mathbf{P}}_l \delta \mu_n\right] \Big|_{R_{\text{core}}} = 0, \quad l \geq 1, \quad (3.60)$$

где мы воспользовались формулой (3.59). Подставляя выражение (3.25) для  $\delta \mu_n$  в равенства (3.59) и (3.60), мы получим два условия на плотность силы Ампера  $\mathbf{f}_A$ . С помощью формулы (А.4) эти условия переписываются в терминах функций полоидального потока  $\Psi$  и полоидального тока  $I$ .

В случае чисто полоидального поля с простой угловой зависимостью (3.50) потоковой функции  $\Psi$  условия (3.59) и (3.60) имеют нетривиальный вид только для лежандровской компоненты с  $l = 2$ . Так что для функции  $f(x)$  есть два новых условия и три старых, а именно (3.52) и условие нормировки. Простейшее (полученное численно) решение, удовлетворяющее всем пяти условиям, имеет вид

$$f = 0.5x^2 - 1.557x^4 + 2.113x^6 - 1.358x^8 + 0.338x^{10}. \quad (3.61)$$

На рисунке 3.9а эта функция сравнивается с  $f(x)$  для минимальной модели поля [см. формулу (3.51)]. Модели внешне похожи, что подтверждается рисунком 3.9б, где изображена

<sup>10</sup> Строго говоря, у нас есть одно скалярное условие (3.33б) на границе коры и ядра, которое, однако, автоматически удовлетворено в обсуждаемом здесь низкотемпературном пределе.

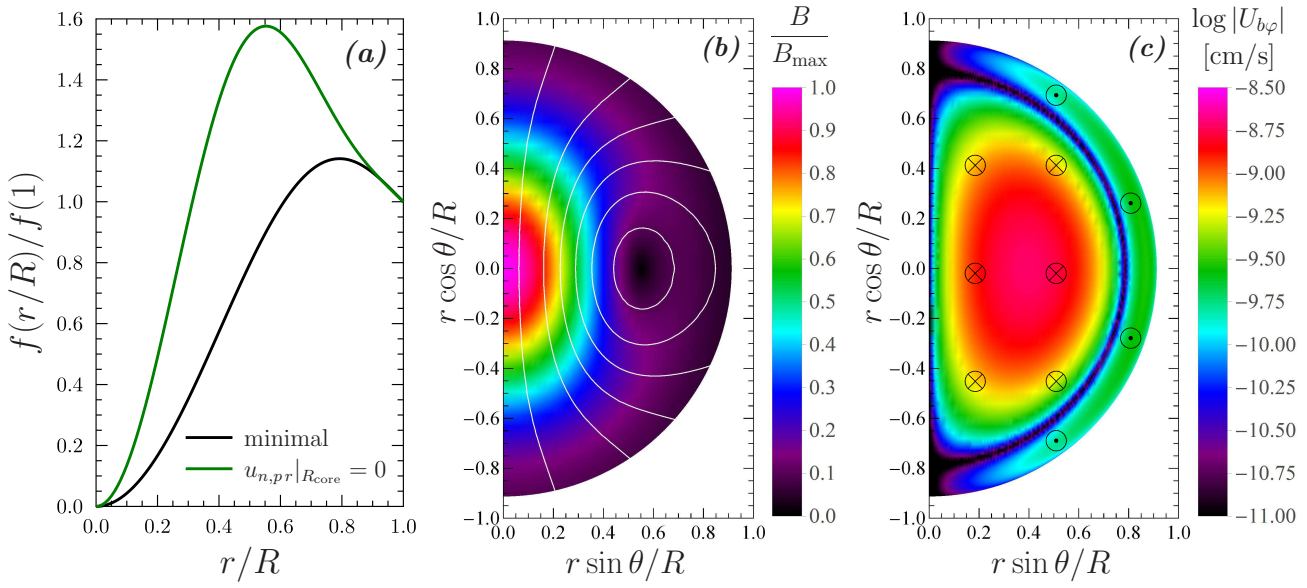


Рис. 3.9. (a) Сравнение безразмерных функций  $f$  для моделей магнитного поля из разделов 3.4.1 (чёрная кривая) и 3.4.4 (зелёная кривая). (b) Модель магнитного поля из раздела 3.4.4 (ср. с рисунком 3.2). (c) Торoidalная компонента барионной скорости для модели поля из раздела 3.4.4 (ср. с рисунком 3.3). Кружки с крестами и точками обозначают соответственно направление скорости от читателя и к читателю.

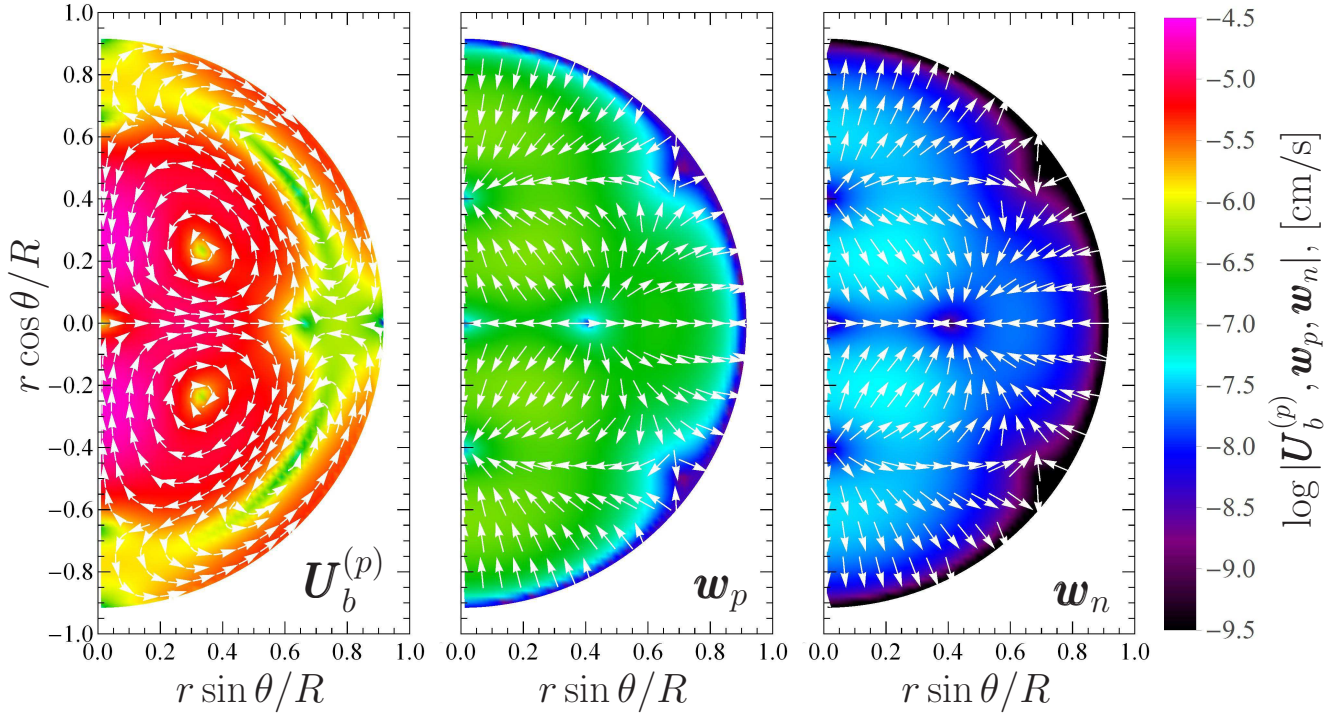


Рис. 3.10. То же, что и на рисунке 3.8, но для модели магнитного поля из раздела 3.4.4.

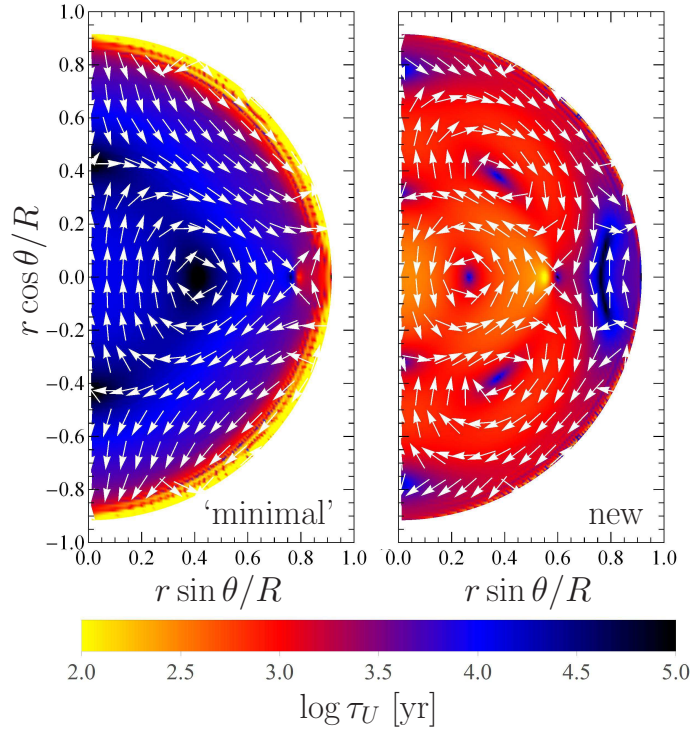


Рис. 3.11. Слева: логарифм характерного времени  $\tau_U$  (в годах) для минимальной модели магнитного поля из раздела 3.4.1. Справа: то же самое, но для модели поля с запрещёнными потоками барионов через границу коры и ядра, см. раздел 3.4.4. Стрелками указано направление вектора изменения магнитного поля  $\partial \mathbf{B} / \partial t$ , рассчитанного согласно уравнению (3.58). При построении графиков считалось, что  $B_{\max} = 5 \times 10^{15}$  Гс и  $\tilde{T} = 2 \times 10^8$  К.

конфигурация магнитного поля для новой модели. Она похожа на изображённую на рисунке 3.2. Разница лишь в том, что теперь  $\mathbf{B}$  более «прижато» к центру ядра. Главное отличие касается тороидальной компоненты барионной скорости (рисунок 3.9с), которая имеет более сложную топологию в сравнении со скоростью  $U_{b\varphi}$  для минимальной модели (рисунок 3.3).

На рисунке 3.10 показана скорость тока барионов и диффузионные скорости  $w_p$  и  $w_n$  для новой модели магнитного поля. Видно, что в таком поле радиальные проекции скоростей в самом деле подавлены на границе коры и ядра. Однако компонента  $U_{b\theta}$  вблизи  $r = R_{\text{core}}$  не исчезает. Структура потоков существенно отличается от той, что изображена на рисунке 3.8 для минимальной модели поля. Так, на рисунке 3.10 (слева) имеются четыре вихря вместо двух, как в минимальной модели. Средние величины скоростей в новой модели оказываются примерно на порядок выше, чем для минимальной. Однако соотношение подобия (3.56) по-прежнему справедливо.

### 3.4.5. Характерное время эволюции поля

Если конфигурация магнитного поля такова, что вещество в ядре звезды движется практически как единая жидкость (т.е.  $U_b \gg w_a$ ), то поле  $\mathbf{B}$  (приблизённо) заморожено в *пре*-плазму, и его силовые линии увлекаются её потоком [см. уравнение (3.58)]. Это приводит к появлению нового характерного масштаба времени эволюции магнитного поля, определяемого увлекающей скоростью  $U_b$ ,  $\tau_U = B / |\text{rot}(\mathbf{U}_b \times \mathbf{B})|$ . Этот масштаб изображён на рисунке 3.11 для двух моделей поля, использованных в разделе 3.4. При построении графиков 3.11 использованы значения  $B_{\max} = 5 \times 10^{15}$  Гс и  $\tilde{T} = 2 \times 10^8$  К, но результат может быть легко масштабирован для произвольных  $B_{\max}$  и  $\tilde{T}$ , так как  $\tau_U \propto \tilde{T}^2 / B_{\max}^2$  при  $\tilde{T} \lesssim 3 \times 10^8$  К. Видно, что для «минимальной» модели эволюции поля (слева)  $\tau_U \sim 10^4$  лет в основном объёме ядра, но становится гораздо меньше,  $\lesssim 10^2$  лет, в окрестности коры. Поведение  $\tau_U$  для модели с

подавленными потоками нуклонов через границу ядра и коры (справа) иное:  $\tau_U \sim 10^3$  лет в подавляющем объёме ядра, и темп эволюции во внешних слоях не растёт. Оценочная формула, обобщающая эти результаты на произвольные значения поля и температуры, имеет вид

$$\tau_U \sim (1 - 10) \text{ Мург} \left[ \frac{\tilde{T}/(10^8 \text{ К})}{B/(10^{14} \text{ Гс})} \right]^2. \quad (3.62)$$

Здесь  $B$  — характерное значение магнитного поля в ядре звезды (например,  $B_{\text{max}}$ ).

Возможно, что реальное  $\tau$  для эволюции магнитного поля в нейтронной звезде будет ближе к наименьшему значению  $\tau_U$ , т.е.  $\tau \sim 10^2$  лет для «минимальной» модели из раздела 3.4.1, и  $\tau \sim 10^3$  лет для модели поля из раздела 3.4.4. Отметим, что  $\tau_U$  можно сделать ещё меньше, выбрав менее гладкую модель поля. В обоих случаях  $\tau$  заметно меньше характерного возраста магнитаров  $\sim 10^4$  лет [18]. Это наблюдение свидетельствует в пользу предположения, что высокая активность магнитаров в течение их жизни связаны с перестройкой магнитного поля в их ядрах [146–148].

Следует помнить, что описанные выше свойства детально проверялись только для нескольких частных моделей поля. В разделе 3.4.3 обосновано, что основной результат — большая скорость тока барионов  $U_b$ , превосходящая диффузионные скорости  $w_a$ , — присущ широкому классу моделей поля [см. рассуждения после формулы (3.57)]. Однако нельзя исключать, что в ходе эволюции нейтронной звезды магнитное поле придёт к специфичной конфигурации, для которой скорость  $U_b$  окажется сравнима с диффузионными скоростями. В этом случае приведённые выше рассуждения потребуют пересмотра.

## 3.5. Сдвиговая вязкость в коре нейтронной звезды с магнитным полем

### 3.5.1. Роль сдвиговой вязкости коры в физике нейтронных звёзд

Сдвиговая вязкость играет важную роль в различных явлениях, происходящих в нейтронных звёздах. Она ответственна за диссипацию гидродинамических движений в недрах этих звёзд, например, за релаксацию дифференциального вращения к твердотельному, а также за затухание различных волн и колебаний. В частности, она может подавлять неустойчивости, связанные с излучением гравитационных волн (например, нестабильность г-мод колебаний нейтронных звёзд [6, 149]), — изучение таких процессов важно для планирующихся гравитационно-волновых экспериментов повышенной чувствительности.

Сдвиговая вязкость исследовалась в различных слоях нейтронных звёзд, и в коре, и в ядре, но (в основном) без учёта магнитного поля, которое вблизи поверхности достигает значений от  $\sim 10^8$  до  $\sim 10^{15}$  Гс (см., например, [18]), а в недрах может быть ещё выше. Насколько нам известно, единственным расчётом сдвиговой вязкости в магнитном поле в литературе, связанной с компактными звёздами, является работа Хэнселя и Йержека [150], посвящённая кварковым звёздам.

Здесь рассмотрена электронная сдвиговая вязкость в коре нейтронной звезды с магнитным полем. В веществе коры электроны являются основным переносчиком импульса [69]; основной механизм релаксации электронов — кулоновское рассеяние электронов на атомных ядрах. Электроны в основном объёме коры образуют сильно вырожденный ультрарелятивистский почти идеальный газ. В отсутствие магнитного поля сдвиговая вязкость была рассчитана Флоуэрсом и Ито [69] и уточнялась в последующих работах [133, 151, 152].

Приведённое здесь исследование основывается на расчёте [133] электронной сдвиговой вязкости в коре нейтронной звезды, пренебрегающем магнитным полем. Наличие поля приводит к анизотропии транспортных явлений, что хорошо изучено применительно к электро- и

теплопроводности [26]. Здесь мы исследуем влияние магнитного поля на сдвиговую вязкость.

### 3.5.2. Формализм

Функция распределения электронов берётся в виде

$$f(\mathbf{p}) = f_0(\epsilon) + \delta f(\mathbf{p}), \quad (3.63)$$

где  $\epsilon$  и  $\mathbf{p}$  обозначают, соответственно, энергию электрона (с учётом собственной массы) и его импульс;  $f_0(\epsilon)$  — равновесное распределение Ферми-Дирака, а  $\delta f(\mathbf{p})$  — его неравновесное возмущение.

Расчёт  $\delta f(\mathbf{p})$  основывается на линеаризованном уравнении Больцмана с использованием приближения времени релаксации для интеграла столкновений. В магнитном поле  $\mathbf{B}$  оно может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial \mu}\right) \left(v_\alpha p_\beta \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{1}{3} v_\alpha p_\alpha \operatorname{div} \mathbf{V}\right) = -\frac{\delta f}{\tau} + \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{p}}, \quad (3.64)$$

где  $\mu$  — химический потенциал электронов,  $\mathbf{v}$  — их скорость, а вектор  $\mathbf{V}$  обозначает скорость движения элементарного объёма всей среды как целого (предполагается малой и нерелятивистской). В дальнейшем будет полезным ввести тензор

$$V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\right). \quad (3.65)$$

Далее,  $e = |e|$  — элементарный заряд, а  $\tau = \tau(\epsilon)$  — эффективное время релаксации электронов. Уравнение (3.64) аналогично тому, что записывается для нерелятивистской невырожденной плазмы [153] с точностью до замены  $f_0/(k_B T) \rightarrow \partial f_0/\partial \mu$ . Поскольку в данном случае речь идёт о сильно вырожденных электронах, достаточно считать  $\epsilon = \mu$  для всех функций  $\epsilon$ , которые медленно меняются в пределах тепловой ширины ферми-распределения,  $|\epsilon - \mu| \lesssim k_B T$ . Вдобавок, можно пользоваться подстановкой  $\partial f_0/\partial \mu \rightarrow \delta(\mu - \epsilon)$ . Аналогичное уравнение было выписано и решено для вырожденной ультрарелятивистской кварковой плазмы [150]. Элементарный анализ показывает, что его можно применять для вырожденных электронов произвольной степени релятивизма. Таким образом, использование результатов [150] существенно упрощает вычисления, необходимые в данной задаче.

Тензор вязких натяжений в системе отсчёта среды имеет вид

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} v_\alpha p_\beta \delta f(\mathbf{p}). \quad (3.66)$$

Как показано в книге [153], при наличии магнитного поля он представляется в виде  $\sigma_{\alpha\beta} = \sum_{i=0}^4 \eta_i g_{i\alpha\beta}$ , где  $\eta_0, \dots, \eta_4$  обозначают пять коэффициентов сдвиговой вязкости, а структурные тензоры  $g_{i\alpha\beta}$  имеют вид

$$\begin{aligned} g_{0\alpha\beta} &= (3b_\alpha b_\beta - \delta_{\alpha\beta}) \left(V_{\gamma\delta} b_\gamma b_\delta - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{V}\right), \\ g_{1\alpha\beta} &= 2V_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} - 2V_{\alpha\gamma} b_\beta b_\gamma - 2b_\alpha V_{\beta\gamma} b_\gamma + \\ &\quad + \delta_{\alpha\beta} V_{\gamma\delta} b_\gamma b_\delta + b_\alpha b_\beta \operatorname{div} \mathbf{V} + b_\alpha b_\beta V_{\gamma\delta} b_\gamma b_\delta, \\ g_{2\alpha\beta} &= 2(V_{\alpha\gamma} b_\beta b_\gamma + b_\alpha V_{\beta\gamma} b_\gamma - 2b_\alpha b_\beta V_{\gamma\delta} b_\gamma b_\delta), \\ g_{3\alpha\beta} &= -V_{\alpha\gamma} b_\beta b_\gamma - b_{\alpha\gamma} V_{\beta\gamma} + b_{\alpha\gamma} b_\beta V_{\gamma\delta} b_\delta + b_\alpha b_{\beta\gamma} V_{\gamma\delta} b_\delta, \\ g_{4\alpha\beta} &= -2(b_{\alpha\gamma} b_\beta V_{\gamma\delta} b_\delta + b_\alpha b_{\beta\gamma} V_{\gamma\delta} b_\delta). \end{aligned} \quad (3.67)$$

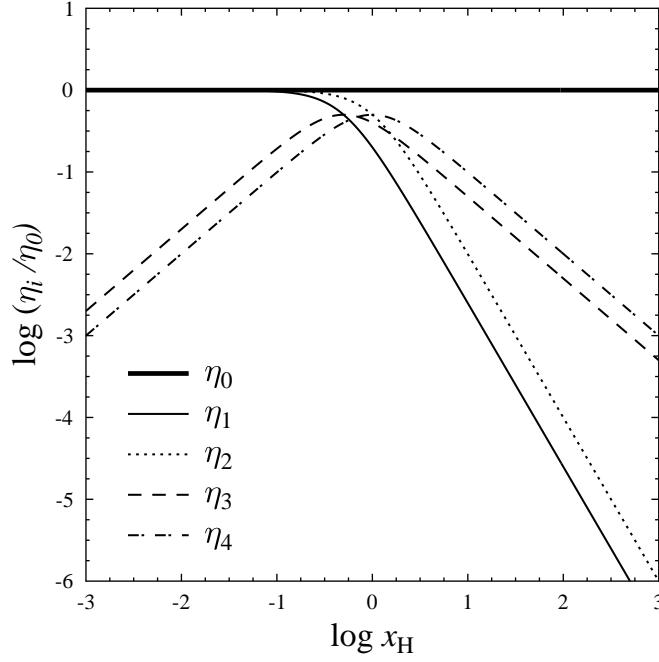


Рис. 3.12. Коэффициенты электронной сдвиговой вязкости  $\eta_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) в единицах вязкости без магнитного поля  $\eta_0$  как функции параметра Холла  $x_H = \omega\tau$ .

Здесь  $\mathbf{b}$  обозначает единичный вектор, сонаправленный с  $\mathbf{B}$ , а  $b_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b_\gamma$ , где  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  — тензор Леви-Чивиты.

Адаптируя результаты [150] к вырожденным электронам произвольной степени релятивизма, мы получаем

$$\eta_0 = \frac{c^2 p_F^5 \tau}{15\pi^2 \hbar^3 \mu}, \quad \eta_1 = \eta_0 \frac{1}{1 + 4x_H^2}, \quad \eta_2 = \eta_0 \frac{1}{1 + x_H^2}, \quad \eta_3 = \eta_0 \frac{2x_H}{1 + 4x_H^2}, \quad \eta_4 = \eta_0 \frac{x_H}{1 + x_H^2}. \quad (3.68)$$

Здесь  $p_F$  — импульс Ферми электронов,  $x_H = \omega\tau$  — безразмерный параметр Холла (параметр замагниченности электронов), и  $\omega = eBc/\epsilon = eBc/\mu$  — гирочастота частота электронов. В ультрарелятивистском пределе ( $\mu \approx p_F c$ ) эти выражения совпадают с полученными в [150]<sup>11</sup>.

Отметим, что след такого тензора натяжений  $\sigma_{\alpha\alpha} = 0$ , а поведение  $\sigma_{\alpha\beta}$  при перестановке индексов  $\alpha$  и  $\beta$  с одновременной заменой  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$  соответствует принципу симметрии кинетических коэффициентов Онзагера [153].

Вязкий (столкновительный) темп диссипации [эрг см<sup>-3</sup>с<sup>-1</sup>] в потоке с поперечным градиентом скорости даётся формулой  $T\dot{s}_{\text{coll}} = \sigma_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}$ , где  $\dot{s}_{\text{coll}}$  — скорость изменения энтропии единицы объёма среды за счёт столкновений. В нашем случае

$$\begin{aligned} T\dot{s}_{\text{coll}} = & 3\eta_0 \left( V_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta - \frac{1}{3} \text{div} \mathbf{V} \right)^2 \\ & + \eta_1 \left[ 2V_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} - (\text{div} \mathbf{V})^2 - 4V_{\alpha\beta} V_{\alpha\gamma} b_\beta b_\gamma + 2V_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta \text{div} \mathbf{V} + (V_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta)^2 \right] \\ & + 4\eta_2 \left[ V_{\alpha\beta} V_{\alpha\gamma} b_\beta b_\gamma - (V_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta)^2 \right]. \quad (3.69) \end{aligned}$$

Физический смысл коэффициентов вязкости  $\eta_0 - \eta_4$  связан с «ориентацией» тензоров  $g_0 - g_4$  по отношению к «магнитному» тензору  $b_\alpha b_\beta$ . А именно:  $g_{i\alpha\beta} b_\beta = b_\alpha g_{i\alpha\beta} = 0$  для  $i = 1$  и 3,  $g_{i\alpha\beta} b_\alpha b_\beta = 0$  для  $i = 2$  и 4, но

$$g_{0\alpha\beta} b_\alpha b_\beta = 2V_{\alpha\beta} b_\alpha b_\beta - \frac{2}{3} \text{div} \mathbf{V} \neq 0. \quad (3.70)$$

<sup>11</sup> Заметим, что коэффициент  $\eta_2$  в [150] содержит опечатку — лишний множитель 4 в знаменателе.



Соответственно, в определённом смысле можно говорить, что тензор  $g_0$  «параллелен» тензору  $b_\alpha b_\beta$  (имеет ненулевую проекцию на него),  $g_2$  и  $g_4$  «поперечны» тензору  $b_\alpha b_\beta$ , а тензоры  $g_1$  и  $g_3$  «полностью поперечны»  $b_\alpha b_\beta$ . Поскольку  $g_3$  и  $g_4$  включают  $b_{\alpha\beta}$ , они являются псевдотензорами и описывают холловский (бездиссипативный) перенос импульса.

Следовательно, по аналогии с широко распространённой классификацией электро- и теплопроводностей в плазме с магнитным полем, можно назвать  $\eta_0$  продольной вязкостью (по отношению к  $\mathbf{B}$ ),  $\eta_1$  — полностью поперечной вязкостью,  $\eta_2$  — обыкновенной поперечной вязкостью,  $\eta_3$  — полностью холловской вязкостью, а  $\eta_4$  — обыкновенной холловской вязкостью.

Легко заметить, что  $\eta_1(x_H) = \eta_2(2x_H)$  и  $\eta_3(x_H) = \eta_4(2x_H)$ . Природа такой взаимосвязи проясняется, если записать систему уравнений для  $\eta_0, \dots, \eta_4$  в локальной системе отсчёта с осью  $z$ , сонаправленной с вектором  $\mathbf{B}$ . Тогда эти уравнения разбиваются на три подгруппы. Первая позволяет найти вязкость  $\eta_0$ , которая определяется величиной  $V_{zz}$ . «Движущая сила»  $V_{zz}$  направлена вдоль  $\mathbf{B}$  и не связана с силой Лоренца, действующей на электроны. Соответственно,  $\eta_0$  формально не зависит от  $B$ . Вторая подсистема уравнений определяет  $\eta_2$  и  $\eta_4$  для которых «движущей силой» являются  $V_{xz}$  и  $V_{yz}$  (эти компоненты тензора  $V_{\alpha\beta}$  проявляют себя как в параллельном, так и в перпендикулярном к  $\mathbf{B}$  направлению, интерферируя с вращением электронов вокруг силовых линий поля с частотой  $\omega$ ). Решение этой подсистемы даёт обыкновенные поперечную и холловскую вязкости. Наконец, третья подсистема определяет вязкости  $\eta_1$  и  $\eta_3$ , для которых «движущей силой» являются  $V_{xx}$ ,  $V_{xy}$  и  $V_{yy}$ . Они полностью перпендикулярны  $\mathbf{B}$  и двукратно интерферируют с вращением электронов вокруг силовых линий поля. Из этой подсистемы получаются полностью поперечная и холловская вязкости. Обратим внимание, что коэффициенты  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  всегда неотрицательны. Они определяют вязкую диссипацию (3.69) движений среды. Напротив, холловские вязкости  $\eta_3$  и  $\eta_4$  могут быть любого знака (зависит от знака заряда переносчиков импульса), и они не вносят вклад вязкую диссипацию (3.69).

На рисунке 3.12 изображена зависимость (3.68) всех пяти вязкостей от холловского параметра  $x_H \propto B$ . В слабом поле  $B$ , т.е. при  $x_H \ll 1$ , газ электронов ненамагничен (частота их столкновений с ядрами атомов  $1/\tau$  много выше гирочастоты  $\omega$ ). В этом пределе  $\eta_1$  и  $\eta_2$  стремятся к  $\eta_0$ , а холловские вязкости малы и ведут себя как  $\eta_3 \approx 2x_H\eta_0$  и  $\eta_4 \approx x_H\eta_0$ . Тензор вязких натяжений  $\sigma_{\alpha\beta}$  принимает вид, хорошо известный в физике немагнитной плазмы [153]. Если электроны умеренно замагничены,  $x_H \sim 1$ , все пять вязкостей имеют схожий порядок величины. При высоких значениях  $B$ , когда  $x_H \gg 1$ , электроны сильно замагничены. Тогда  $\eta_1 \approx \eta_0/(2x_H)^2$ ,  $\eta_2 \approx \eta_0/x_H^2$ ,  $\eta_3 \approx \eta_0/(2x_H)$  и  $\eta_4 \approx \eta_0/x_H$ . В таком режиме электроны быстро вращаются вокруг силовых линий поля, редко рассеиваясь на ядрах атомов при движении перпендикулярно вектору  $\mathbf{B}$ .

### 3.5.3. Вязкость в коре нейтронной звезды

Чтобы проиллюстрировать наш расчёт сдвиговой вязкости, будем пользоваться стандартной моделью коры, допускающей существование единственного типа ядер при каждой данной плотности  $\rho$ . В основном мы будем пользоваться моделью холодной равновесной коры с уравнением состояния BSk21, представленного в виде аналитических аппроксимаций в статье [43].

Использовано эффективное время релаксации электронов из статьи [133], которое определяет вязкость без магнитного поля, совпадающую с продольной вязкостью  $\eta_0$ . Рассчитанное там время релаксации пригодно для рассмотрения плазмы атомных ядер, находящихся в газообразном, жидком и кристаллическом состояниях. Учтены: плазменное экранирование электрон-ядерного взаимодействия, многофононные процессы в кристалле (в приближении гармонической решётки) и конечные размеры атомных ядер. Если  $B = 0$ , наши результа-

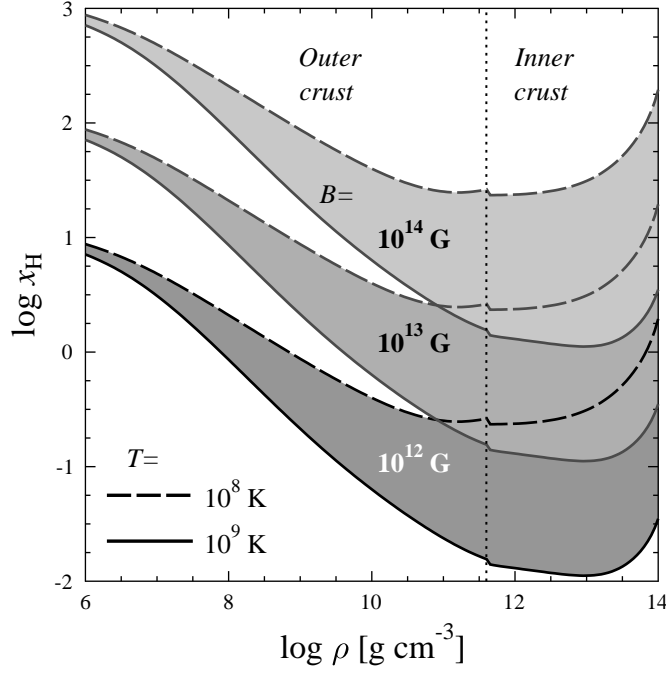


Рис. 3.13. Холловский параметр  $x_H$  в зависимости от плотности вещества  $\rho$  коры нейтронной звезды для трёх значений магнитного поля,  $B = 10^{12}$ ,  $10^{13}$  и  $10^{14}$  Гс и двух значений температуры,  $T = 10^8$  и  $10^9$  К. Если зафиксировать  $B$  и уменьшать температуру от  $10^9$  до  $10^8$  К, кривая  $x_H(\rho)$  поднимается от соответствующей сплошной линии к соответствующей штриховой. Вертикальная точечная линия отмечает точку появления свободных нейтронов в коре. Подробнее см. текст.

ты верны в той же степени, что и расчёты в работе [133]. В сильном магнитном поле наши вычисления имеют более ограниченную применимость (см. ниже).

Эффективное время релаксации электронов можно представить в виде [133],

$$\tau = \frac{p_F^2 v_F}{12\pi Z^2 e^4 n_i \Lambda}, \quad (3.71)$$

где  $n_i$  — концентрация атомных ядер, а  $\Lambda$  — эффективный кулоновский логарифм для рассеяния электронов на ядрах. Он был аппроксимирован аналитическими функциями в статье [133] с использованием метода эффективного потенциала взаимодействия электронов и ядер. Выражение для эффективного потенциала взято из статьи [154], посвящённой электронной проводимости. Такая аппроксимация справедлива для широкого класса сферических ядер, которые могут возникать в коре нейтронной звезды.

На рисунке 3.13 показана зависимость холловского параметра электронов  $x_H$  от плотности в BSk21-коре нейтронной звезды. Небольшие скачки ядерного состава по мере роста  $\rho$  сглажены по методу, описанному в [1, 43]. Единственный оставленный скачок происходит в точке появления свободных нейтронов  $\rho_{ND} \approx 4.3 \times 10^{11}$  г см $^{-3}$ , отмеченной вертикальной точечной линией. Она разбивает кору звезды на внешнюю и внутреннюю. Внутренняя кора исчезает (переходит в жидкое ядро) при  $\rho \approx 1.4 \times 10^{14}$  г см $^{-3}$ , практически сразу после максимальной плотности, отображённой на рисунке 3.13.

Параметр Холла  $x_H$  удобно использовать как меру воздействия магнитного поля на электронную сдвиговую вязкость. На рисунке 3.13 он показан для трёх значений поля:  $B = 10^{12}$ ,  $10^{13}$  и  $10^{14}$  Гс. Поля  $B \sim 10^{12} - 10^{13}$  Гс характерны для обычных пульсаров, в то время как более высокие  $B$  типичны для магнитаров. Сплошные и штриховые линии соответствуют температурам  $T = 10^9$  и  $10^8$  К, характерным для обычных молодых изолированных (остывающих) нейтронных звёзд и магнитаров. Если поле  $B$  зафиксировано, а температура падает от  $10^9$  к  $10^8$  К, эффективное время релаксации растёт, и кривая  $x_H(\rho)$  перемещается вверх

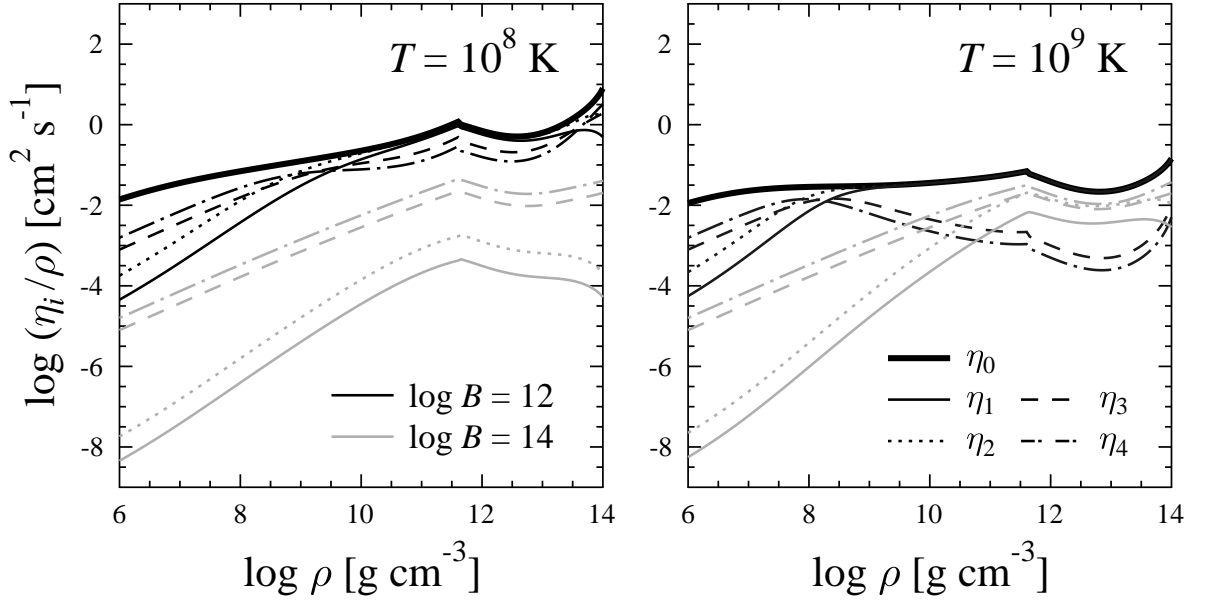


Рис. 3.14. Кинематические электронные сдвиговые вязкости  $\eta_i/\rho$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) как функции плотности  $\rho$  для магнитных полей  $B = 10^{12}$  и  $10^{14}$  Гс при температурах  $T = 10^8$  К (слева) и  $10^9$  К (справа). Подробности см. в тексте.

от сплошной линии к штриховой, означая увеличение степени замагниченности электронов. При наиминимальной плотности, изображённой на рисунке 3.13,  $\rho = 10^6$  г см $^{-3}$ , эффективное время релаксации практически не зависит от температуры, и сплошная и штриховая линии сходятся друг к другу. Уменьшение степени замагниченности электронов с ростом  $\rho$  при данном  $B$  во внешней коре происходит в основном из-за уменьшения гирочастоты  $\omega$  вследствие роста  $\mu$ . Как видно, при  $B = 10^{12}$  Гс электроны остаются слабо замагниченными (в рассматриваемом диапазоне  $T$ ) во всём объёме коры, кроме самых внешних слоёв. При  $B = 10^{13}$  Гс, электроны становятся сильно замагниченными, но только при  $\rho \lesssim 10^{10}$  г см $^{-3}$ , в то время как во внутренней коре они замагничены умеренно либо слабо (в зависимости от температуры). Если  $B = 10^{14}$  Гс, электроны во внешней коре сильно замагничены почти при любых условиях, во внутренней — только при  $T \lesssim 10^8$  К. Как и ожидалось, магнитное поле наиболее сильно замагничивает электроны в наименее плотных областях коры.

На рисунке 3.14 изображена зависимость всех пяти вязкостей  $\eta_0, \dots, \eta_4$  от плотности по всей глубине коры (линии различных типов и цвета). Они рассчитаны для той же модели коры, что использовалась при построении рисунка 3.13. Поведение продольной вязкости главным образом имеет универсальный вид  $\eta_0 \propto \rho$ , поэтому графики построены для так называемых кинематических вязкостей  $\eta_i/\rho$ . Левая часть рисунка 3.14 соответствует  $T = 10^8$  К, правая —  $T = 10^9$  К. Толстая сплошная линия соответствует  $\eta_0/\rho$  (одновременно продольная вязкость и вязкость в пределе  $B \rightarrow 0$ ). Более тонкими чёрными линиями изображены  $\eta_1, \dots, \eta_4$  для  $B = 10^{12}$  Гс, серыми — для  $B = 10^{14}$  Гс. Поведение вязкостей легко объясняется с помощью рисунков 3.12 и 3.13. При  $B = 10^{14}$  Гс замагниченность электронов в основном объёме коры велика, и самыми маленькими оказываются поперечные коэффициенты  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . При  $B = 10^{12}$  Гс замагниченность слабее, и самыми маленькими оказываются холловские вязкости  $\eta_3$  и  $\eta_4$ .

До сих пор мы ограничивались рассмотрением коры с одним уравнением состояния BSk21. Кроме того, были изучены модели коры с уравнениями состояния BSk20 и BSk19 (с использованием аналитических аппроксимаций из статьи [43]), и модель сглаженного состава коры [1]. Результаты оказались практически такими же, как и для модели BSk21.

Как упоминалось выше, наш подход к вычислению поперечных и холловских вязкостей

$\eta_1, \dots, \eta_4$  ограничен применимостью приближения времени релаксации для интеграла столкновений в уравнении Больцмана. Это приближение справедливо [155], пока характерная величина переданной энергии в столкновениях электронов с ядрами много меньше тепловой ширины ферми-распределения электронов  $\sim k_B T$ . Если это так, то между тепло- и электропроводностью выполняется соотношение Видемана-Франца. Это можно использовать как критерий применимости приближения времени релаксации. Мы воспользовались расчётом тепло- и электропроводностей из работ [51, 154] и численно проверили справедливость соотношения Видемана-Франца. При  $T \gtrsim 10^9$  К оно с хорошей точностью удовлетворяется во всём объёме коры, что подтверждает правильность приближения времени релаксации при таких температурах. При  $T \sim 3 \times 10^8$  К соотношение Видемана-Франца справедливо в диапазоне плотностей  $\rho \lesssim 10^{13}$  г см $^{-3}$ , но при более высоких  $\rho$  оно справедливо лишь с точностью до множителя  $\sim 3$ . При  $T \sim 10^8$  К оно хорошо работает для  $\rho \lesssim 10^{12}$  г см $^{-3}$ , а при более высоких плотностях отклонение от него достигает  $\sim 10$  раз. Следовательно, наши расчёты вязкости строго справедливы при не очень высоких плотностях и не очень низких температурах. В противном случае их следует рассматривать как оценочные. Существует возможность улучшить применимость нашего расчёта, произведя надлежащее рассмотрение неупругих столкновений электронов, но такая задача выходит за рамки этой работы.

Есть и другие явления, которые могут быть важны при расчёте вязкости, но мы ими пренебрегли. К примеру, при температурах  $T \lesssim T_B = \hbar\omega_{Bi}/k_B$  ( $\omega_{Bi}$  обозначает циклотронную частоту ядер атомов) частоты фононов, ответственных за электронный перенос в кулоновских кристаллах атомных ядер, а вместе с ними и эффективное время релаксации  $\tau$ , будут подвержены влиянию магнитного поля. Как видно, например, из рисунка 3 статьи [56],  $T_B$  много меньше  $T$  в условиях, которые обсуждаются в данной работе, так что этот эффект роли не играет.

Стоит отметить, что при  $T \lesssim 3 \times 10^7$  К, наряду с электрон-ядерным рассеянием, становится существенным дополнительный механизм рассеяния электронов на заряженных примесях. Он тщательно исследовался применительно к тепло- и электропроводностям (см., к примеру, [154]) и обсуждался в применении к сдвиговой электронной вязкости в отсутствие магнитного поля [133]. Учёт примесей легко добавить в имеющийся формализм расчёта вязкости путём введения полного времени релаксации  $\tau$ , которое даётся формулой  $\tau^{-1} = \tau_{ei}^{-1} + \tau_{e-imp}^{-1}$ , где  $\tau_{ei}$  описывает рассеяния электронов на атомных ядрах (оно и использовалось выше), а  $\tau_{e-imp}$  относится к рассеянию на примесях [133]. Однако в этой работе примеси мы не рассматриваем.

Кроме того, в вязкость ещё даёт вклад электрон-электронное рассеяние. В отсутствие магнитного поля этот вклад исследовался в статье [152]. Её результат свидетельствовал, что этот вклад не слишком важен. Насколько нам известно, вклад электрон-электронных столкновений в сдвиговую вязкость коры нейтронной звезды в магнитном поле до сих пор в литературе не исследовался.

В дополнение к сказанному выше, следует помнить об иных источниках сдвиговой вязкости в оболочках нейтронных звёзд. В частности, основной вклад в неё в приповерхностных слоях (в районе  $\rho \lesssim 10^4$  г см $^{-3}$ ) вносят ионы (атомные ядра), а не электроны. Вязкость для невырожденной слабо неидеальной плазмы электронов и ионов в магнитном поле была рассчитана в [156] с аналогичным результатом получения пяти ионных вязкостей. Однако физические условия во внешних слоях нейтронных звёзд более сложны, так как ионы в них могут быть частично ионизованными и образовывать сильно неидеальную кулоновскую плазму. Влияние сильного кулоновского взаимодействия ионов на соответствующую сдвиговую вязкость при  $B = 0$  изучалось (например, в [157, 158]), но в целом задача решена не была. Во внутренней коре нейтронной звезды некоторую роль в формировании сдвиговой вязкости могут играть свободные нейтроны, которые взаимодействуют с атомными ядрами и находятся в сверхтекучем состоянии. Более того, в дополнение к сдвиговой вязкости, плотная материя

обладает объёмной вязкостью, связанной с наличием электрослабых неупругих процессов рассеяния и демонстрирующей совершенно иные физические свойства (аналогично объёмной вязкости в ядрах нейтронных звёзд [159]). Все эти задачи практически не обсуждались в литературе и составляют открытую область кинетики нейтронных звёзд.

### 3.6. Выводы к главе 3

#### 3.6.1. Квазистационарные течения в ядре звезды с магнитным полем

В разделах 3.2 — 3.4 рассмотрено несверхтекучее и несверхпроводящее ядро нейтронной звезды, состоящее из нейтронов, протонов и электронов, с осесимметричным магнитным полем. Такая модель звезды полезна для описания горячих магнитаров с очень сильным магнитным полем; тогда сверхтекучесть нуклонов в ядре подавлена, частично или полностью [130, 131]. С помощью самосогласованного метода, предложенного в статье [8], рассчитаны квазистационарные течения вещества в ядре, вызванные магнитным полем. Основное достоинство использованного метода состоит в отсутствии предположения о малости или равенстве нулю гидродинамической скорости нейтронов (в противоположность общепринятой точке зрения, например, [118, 121, 122, 160, 161]). Вместо этого предлагается рецепт последовательного расчёта скоростей всех компонент среды. Основными результатами разделов 3.2 — 3.4 являются расчёт потоков, вызванных присутствием магнитного поля в ядре звезды, для частиц каждого сорта и качественное исследование влияния этих потоков на эволюцию поля.

В разделе 3.2 уравнения магнитной гидродинамики (МГД) для нормального *пре*-вещества ядра звезды записаны в квазистационарном приближении (на основании статьи [8]). Как показано авторами [8], движения вещества удобно разложить на два типа составляющих — общий поток барионов со скоростью  $\mathbf{U}_b$  и диффузионные потоки частиц каждого сорта со скоростями  $\mathbf{w}_a$ ,  $a = n, p, e$ . В разделе 3.3 с помощью метода, разработанного в [8], получены явные выражения для этих величин, а также выписаны уравнения эволюции функций полоидального магнитного потока  $\Psi$  и полоидального электрического тока  $I$ , которые удобны для описания осесимметричного магнитного поля. В разделе 3.4 полученные формулы применены для расчёта возмущений химических потенциалов и потоков частиц всех сортов в типичной нейтронной звезде ( $M = 1.4 M_\odot$ , уравнение состояния ННЖ [143]) с двумя простыми моделями полоидального магнитного поля в ядре. Раздел 3.4.5 посвящён качественному анализу эволюции магнитного поля за счёт увлечения магнитного поля потоком вещества в ядре звезды.

У полученной картины потоков в замагниченном ядре звезды есть несколько интересных свойств, которые, как обосновано в разделе 3.4.3, должны быть справедливы для широкого класса моделей магнитных полей. Первое и самое главное — показано, что нейтроны, протоны и электроны в ядре движутся практически как единое целое, т.е. диффузионные скорости  $\mathbf{w}_a$  ( $a = n, p, e$ ) гораздо меньше скорости общего потока барионов  $\mathbf{U}_b$ . Этот результат противоречит обычно принимаемому утверждению, что нейтроны (или вообще жидкость ядра как целое) в нейтронной звезде с хорошей точностью неподвижны (например, [118, 119, 121, 122, 127]). Для двух моделей магнитного поля было показано (раздел 3.4), что для заряженных частиц  $w_{p,e} \sim 0.05U_b$ , в то время как для нейтронов  $w_n \sim 0.005U_b$ . Важно, что в этих выражениях численные коэффициенты перед  $U_b$  чувствительны к структуре магнитного поля и могут быть заметно меньше для менее «гладких» моделей поля (см. раздел 3.4.3).

Второе важное свойство полученной картины потоков заключается в том, что, за исключением специальных случаев, скорость  $\mathbf{U}_b$  оказывается весьма высока и возрастает во внешних слоях ядра. Например,  $U_b \sim (0.3 - 1) \times 10^{-6}$  см/с для модели магнитного поля с

$B_{\max} = 5 \times 10^{15}$  Гс и температурой  $\tilde{T} = 2 \times 10^8$  К. С другой стороны, скорости частиц различных сортов  $u_a$  и скорость барионного потока  $U_b$  в ядре звезды одинаково масштабируются при изменении  $B_{\max}$  и  $\tilde{T}$  в низко- и высокотемпературных режимах (например, в условиях низкотемпературного режима,  $\tilde{T} \lesssim 3 \times 10^8$  К, справедливо  $u_a \propto B_{\max}^2 / \tilde{T}^2$ ; см. раздел 3.4.2). Поэтому, если для каких-то частных значений  $B_{\max}$  и  $\tilde{T}$  барионная скорость  $U_b$  много больше диффузионных скоростей  $w_a$ , то такая ситуация будет сохраняться при других значениях магнитного поля и температуры.

Ещё одно интересное свойство полученной картины течений в ядре звезды состоит в том, что некоторые конфигурации магнитного поля могут приводить к наличию потоков нейтронов и протонов через границу коры и ядра. В частности, простейшая модель поля, распространённая в литературе (см., например, [118, 145]), этим требованиям не удовлетворяет. Хотя существование таких потоков вполне допустимо, построен пример модели поля, для которого подобный обмен нуклонами между корой и ядром отсутствует (раздел 3.4.4).

Результаты разделов 3.2 — 3.4 этой главы являются важным шагом на пути к самосогласованному моделированию магнито-тепловой эволюции нейтронных звёзд с полем, проникающим в ядро звезды. Они опубликованы в статьях [128, 129] и представлены в докладах на конференциях «Физика.СПб/2017» (ФТИ им. А.Ф. Иоффе), «PHAROS WG2 meeting – Superfluids and superconductors in neutron stars: from laboratory to astrophysical observations» (2018, Астрономический центр им. Н. Коперника, Варшава) и на конкурсе научных работ молодых учёных ФТИ им. А.Ф. Иоффе (2018).

### 3.6.2. Сдвиговая вязкость в коре с магнитным полем

В разделе 3.5 рассчитана электронная сдвиговая вязкость за счёт столкновений электронов с атомными ядрами в коре нейтронной звезды с магнитным полем. Вычисления проведены для сильно вырожденных электронов, как релятивистских, так и нерелятивистских. Интеграл столкновений в уравнении Больцмана брался в приближении времени релаксации, но использованное эффективное время релаксации  $\tau$  рассчитано [133] на основании более глубокого подхода. Сдвиговая вязкость в присутствии магнитного поля описывается пятью коэффициентами вязкости  $\eta_0 - \eta_4$ . В использованном приближении  $\eta_0$  не зависит от  $B$  и имеет смысл вязкости вдоль направления вектора  $\mathbf{B}$ . Остальные коэффициенты, поперечные ( $\eta_1$  и  $\eta_2$ ) и холловские ( $\eta_3$  и  $\eta_4$ ) вязкости, имеют нетривиальную зависимость от  $B$ . Все эти вязкости представлены в форме, удобной для расчётов с использованием любой реалистичной модели коры нейтронной звезды. Применимость полученных результатов ограничена условиями применимости приближения времени релаксации.

Зависимость сдвиговых вязкостей от  $B$  определяется параметром замагниченности электронов  $x_H$  (параметром Холла). Исследовано, как меняется этот параметр в зависимости от силы магнитного поля, а также плотности и температуры вещества коры. Как и предполагалось, замагниченность электронов в коре при данном поле увеличивается с уменьшением  $\rho$  и  $T$  (рисунок 3.13). В частности, намагнитить электронный газ во внешней коре гораздо легче, чем во внутренней. При  $T \sim 10^9$  К электроны во внутренней коре остаются слабо либо умеренно замагниченными даже в магнитных полях  $B \sim 10^{14}$  Гс.

Сдвиговая вязкость важна при моделировании многих явлений в нейтронных звёздах, в частности, релаксации дифференциального вращения к твердотельному или волн и колебаний в недрах звёзд, включая подавление неустойчивостей по отношению к излучению гравитационных волн. Полученные здесь результаты полезны для исследования влияния анизотропии сдвиговой вязкости в замагниченном веществе на характеристики этих явлений. Кроме того, полученные результаты также можно применять к вырожденным ядрам белых карликов.

Результаты раздела 3.5 опубликованы в статье [132].

## Глава 4

## Объёмная вязкость гиперонных ядер нейтронных звёзд

Широко известно, что  $g$ -моды колебаний вращающихся нейтронных звёзд могут быть неустойчивы по отношению к излучению гравитационных волн. Крайне маловероятно наблюдать нейтронную звезду со значениями параметров в окне неустойчивости — области, где такая неустойчивость не подавлена. Однако в рамках модели нуклонного состава звёздных ядер очень многие наблюдаемые звёзды оказываются как раз в окне неустойчивости  $g$ -мод. Одно из возможных решений этой проблемы — предположить наличие гиперонов в ядре звезды. При наличии гиперонов открывается набор мощных безлептонных неравновесных слабых процессов, увеличивающих объёмную вязкость и подавляющих неустойчивость  $g$ -мод. Существующие в литературе расчёты окон неустойчивости для гиперонных звёзд, как правило, используют скорости реакций, рассчитанные для  $\Sigma^- \Lambda$ -гиперонного состава с помощью контактной модели слабого взаимодействия за счёт прямого обмена  $W$ -бозоном. В отличие от этих расчётов, здесь использованы модели уравнений состояния, в которых  $\Lambda$ - и  $\Xi^-$ -гипероны возникают в первую очередь (а  $\Sigma^-$ -гипероны могут возникнуть при более высоких плотностях), и рассмотрен канал взаимодействия за счёт обмена мезонами — он более эффективен для безлептонных слабых процессов. С его помощью рассчитана объёмная вязкость для несверхтекучего  $pre\mu\Xi^-$ -вещества. Рассмотрен полный набор неравновесных процессов в такой среде, ответственный за генерацию объёмной вязкости; некоторые из этих реакций впервые использованы в контексте нейтронных звёзд. Рассчитанные скорости реакций и объёмные вязкости аппроксимированы простыми аналитическими формулами, удобными для практического применения. Полученные результаты использованы для расчёта окон неустойчивости быстровращающихся нейтронных звёзд.

## 4.1. Введение

Как известно, существует два типа коэффициентов вязкости в сплошной среде. Сдвиговая вязкость  $\eta$  возникает при сдвиговых деформациях среды за счёт обычных столкновений частиц. Объёмная вязкость  $\zeta$  возникает из-за неравновесных реакций при деформациях сжатия-растяжения [162].

Обе вязкости оказываются важными в самых разнообразных исследованиях нейтронных звёзд [163]. В частности, они ответственны за подавление неустойчивости колебаний звёзд [6], в которых возбуждены моды Россби (или просто  $g$ -моды). Это подкласс инерционных мод колебаний, для которых возвращающей силой является сила Кориолиса во вращающейся звезде. Оказывается, что  $g$ -моды неустойчивы по отношению к излучению гравитационных волн вследствие неустойчивости Чандрасекара-Фридмана-Шутца [164, 165]. Она может быть подавлена сдвиговой и объёмной вязкостями при, соответственно, достаточно низких и высоких температурах. Область на плоскости  $\nu - T$  ( $\nu$  — частота вращения,  $T$  — характерная температура недр звезды), в которой неустойчивость подавить не удаётся, называется окном неустойчивости  $g$ -мод. Считается, что наблюдать нейтронную звезду, частота вращения и температура которой попадают в окно неустойчивости, крайне маловероятно (обоснование см. в обзорах [6, 166]).

Однако обнаруживается парадокс [6]: многие наблюдаемые нейтронные звёзды в составе маломассивных рентгеновских двойных систем (LMXB) попадают в окно неустойчивости, рассчитанное для звёзд с нуклонным ( $pre\mu$ ) составом ядра. А именно, их характерные температуры слишком высоки, чтобы подавить неустойчивость за счёт  $\eta$ , и слишком низки, чтобы сделать это за счёт  $\zeta$ . В литературе предлагается много вариантов разрешения этого парадокса, как правило, сводящихся к введению дополнительного механизма диссипации (подробнее

см. обзор [6]). Здесь мы остановимся на возможности изменить объёмную вязкость  $\zeta$  путём введения гиперонов в состав ядра.

В нуклонном ядре вязкость  $\zeta$  в основном обусловлена модифицированным урка-процессом, хотя в наиболее массивных звёздах может протекать и прямой урка-процесс (см. таблицу 1.1). Скорости этих неравновесных процессов пропорциональны<sup>1</sup>  $T^6\Delta\mu$  и  $T^4\Delta\mu$ , соответственно [16, 167, 168] (как и в предыдущей главе,  $\Delta\mu$  описывает отклонение от химического равновесия за счёт движений среды). Это означает, что при низких температурах эти процессы подавлены фактором  $\sim (k_B T/\mu)^{4-6}$  ( $\mu$  — характерное значение химического потенциала барионов). Расчёты показывают, что объёмная вязкость за счёт этих процессов может подавлять неустойчивость  $\gamma$ -мод только при  $T \sim 10^9 - 10^{10}$  К. Для сравнения, нейтронные звёзды в составе LMXB имеют характерное значение температуры недр  $T \sim (0.3 - 1) \times 10^8$  К, то есть объёмная вязкость в них слишком мала для стабилизации  $\gamma$ -мод. Подавление скорости реакций за счёт сверхтекучести нуклонов лишь ухудшает ситуацию [167, 168].

Однако существует множество моделей уравнения состояния ядра нейтронных звёзд, предсказывающих наличие гиперонов в глубинных слоях ядра [1, 169]. Среди таких моделей наибольшей популярностью пользуются модели релятивистского среднего поля (англ. «relativistic mean field» = RMF) из-за их относительной простоты [170]. Наличие в среде гиперонов резко изменяет объёмную вязкость. При низких температурах основной вклад в неё дают т.н. слабые безлептонные процессы, например:  $\Sigma^- + p \leftrightarrow n + n$  или  $\Lambda + p \leftrightarrow n + p$ . Скорость протекания таких процессов  $\propto T^2\Delta\mu$ , и при  $T < 10^9$  К она оказывается много больше скоростей урка-процессов. В литературе рассмотрено много примеров вычисления скоростей слабых безлептонных процессов и соответствующей им объёмной вязкости [171–175] как в нормальной, так и в сверхтекучей материи. Существующие вычисления окон неустойчивости для гиперонных звёзд [171, 174] свидетельствуют, что гиперонное усиление вязкости  $\zeta$  в общем и целом не способно решить проблему  $\gamma$ -мод (кроме, быть может, звёзд с массой  $\sim 2 M_\odot$ , в центре которых могут быть области с несверхтекучими протонами и  $\Sigma^-$ -гиперонами; в противном случае все процессы, рассмотренные в [171, 174], подавляются). В современных обзорах [6, 169] утверждается, что гиперонная объёмная вязкость не способна закрыть окно неустойчивости в области температур и частот вращения, в которую попадают наблюдаемые звёзды в LMXB.

Тем не менее, предыдущие вычисления окон неустойчивости нейтронных звёзд с гиперонными ядрами требуют пересмотра. Во-первых, в них, как правило, используется  $\Sigma^- \Lambda$ -гиперонный состав ядра. Различные современные модели уравнений состояния [107, 108, 176], в частности, откалиброванные по данным наиболее современных (на 2018 год) экспериментов с гиперонными ядрами атомов [177, 178], предсказывают, что  $\Lambda$  и  $\Xi^-$ , вероятно, являются первыми гиперонами, возникающими в ядрах нейтронных звёзд по мере увеличения плотности ( $\Sigma^-$ -гипероны либо появляются при более высоких плотностях, либо не появляются вообще). Во-вторых, в статьях [171, 174] использованы скорости слабых безлептонных процессов, рассчитанные на основе контактного взаимодействия барионных токов (фактически, прямого обмена тяжёлым  $W$ -бозоном). В то же время, хорошо известно (см., например, обзор [179]), что наиболее эффективным каналом взаимодействия для слабого неупругого столкновения гиперона с другим барионом является обмен мезоном — например, пионом  $\pi$ ,  $\rho$ -мезоном и т.д. Однако такой канал был использован для расчёта объёмной вязкости гиперонных ядер нейтронных звёзд лишь однажды, в 2004 году в статье ван Далена и Диперинка [173]. Насколько нам известно, результаты их работы не применялись для расчёта окон неустойчивости  $\gamma$ -мод.

В данной главе заново рассчитана объёмная вязкость в несверхтекучих гиперонных ядрах нейтронных звёзд (результаты изложены в статьях [180, 181]). Используются уравнения состояния (раздел 4.2), в которых  $\Lambda$  и  $\Xi^-$ -гипероны возникают первыми ( $\Sigma^-$ -гипероны также

<sup>1</sup> При рассмотрении затухания  $\gamma$ -мод можно считать, что вызываемое ими отклонение от бета-равновесия  $\Delta\mu \ll \pi k_B T$ , и рассматривать неравновесные процессы в линейном режиме.



Таблица 4.1. Параметры ключевых моделей нейтронных звёзд (НЗ) для использованных моделей уравнений состояния (одна строка — одна модель):  $n_b$  — концентрация барионов в центре,  $\rho$  — плотность в центре,  $M$  — масса звезды,  $R$  — её радиус.

		$n_b$ [фм <sup>-3</sup> ]	$\rho$ [10 <sup>14</sup> г см <sup>-3</sup> ]	$M$ [ $M_\odot$ ]	$R$ [км]
GM1A	типичная НЗ	0.332	5.92	1.40	13.72
	появление $\Lambda$	0.348	6.25	1.48	13.71
	появление $\Xi^-$	0.408	7.49	1.67	13.64
	макс. масса	0.926	20.10	1.992	11.94
	появление $\Xi^0$	0.988	21.85	—	—
TM1C	типичная НЗ	0.315	5.63	1.40	14.31
	появление $\Lambda$	0.347	6.28	1.55	14.23
	появление $\Xi^-$	0.463	8.76	1.85	13.87
	макс. масса	0.852	18.42	2.054	12.48
	появление $\Xi^0$	0.936	20.76	—	—
NL3 $\omega\rho$	типичная НЗ	0.293	5.16	1.40	13.73
	появление $\Lambda$	0.352	6.39	1.95	14.03
	появление $\Xi^-$	0.474	9.29	2.50	13.86
	появление $\Sigma^-$	0.500	9.97	2.56	13.77
	макс. масса	0.699	16.04	2.707	12.94
FSU2H	появление $\Lambda$	0.328	5.82	1.38	13.30
	типичная НЗ	0.331	5.87	1.40	13.31
	появление $\Xi^-$	0.421	7.73	1.69	13.35
	появление $\Sigma^-$	0.592	11.52	1.91	12.95
	макс. масса	0.901	19.32	1.993	11.98

представлены в некоторых моделях, но они появляются при более высоких плотностях; для простоты мы ограничились процессами в веществе, содержащем только  $\Lambda$  и  $\Xi^-$ -гипероны). Аналогично статье [175], рассчитаны соотношения между  $\zeta$  и скоростями реакций слабых безлептонных процессов для произвольного уравнения состояния (раздел 4.3). Затем, с использованием модели одномезонного обмена для слабого неупругого взаимодействия барионов, рассчитаны скорости реакций для всех таких процессов, протекающих в  $pre\mu\Lambda\Xi^-$ -материи и ответственных за объёмную вязкость (раздел 4.4). Предложены простые аналитические аппроксимации для скоростей реакций и объёмной вязкости. Результаты вычислений применены для расчёта окон неустойчивости  $\gamma$ -мод в нейтронных звёздах с гиперонами (раздел 4.5). Предоставлены свидетельства того, что решение парадокса  $\gamma$ -мод с помощью учёта гиперонов более реалистично, чем считалось ранее.

## 4.2. Модели уравнения состояния

В данной главе использованы четыре уравнения состояния вещества ядра нейтронной звезды, относящиеся к классу моделей релятивистского среднего поля: GM1A и TM1C из работы [176], NL3 $\omega\rho$  из статьи [182] и FSU2H из [178]. Две последние модели откалиброваны по современным данным экспериментальной ядерной физики (в т.ч. физики атомных гиперядер), как это сделано в статье [177]; первые две модели более устаревшие. В модели FSU2H потенциал  $\Sigma^-$ -гиперонов в симметричной ядерной материи считается равным 40 МэВ, с тем

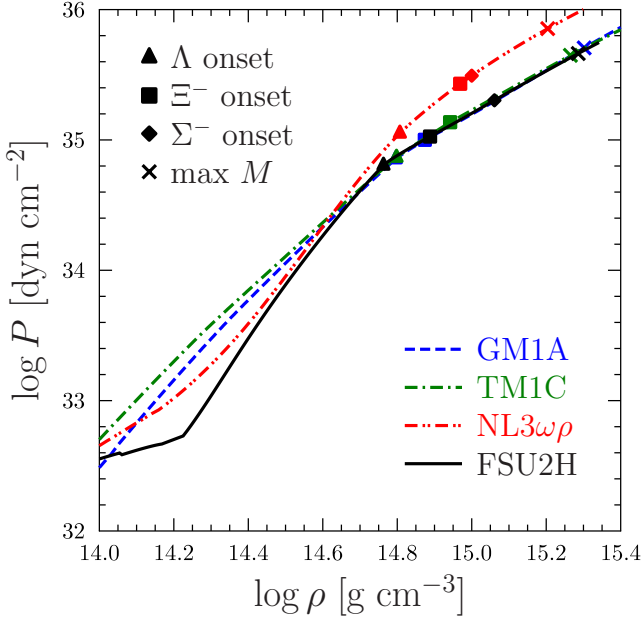


Рис. 4.1. Зависимость давления от плотности для использованных уравнения состояния. Символами отмечены точки появления различных типов гиперонов и состояние вещества в центре максимально массивной нейтронной звезды.

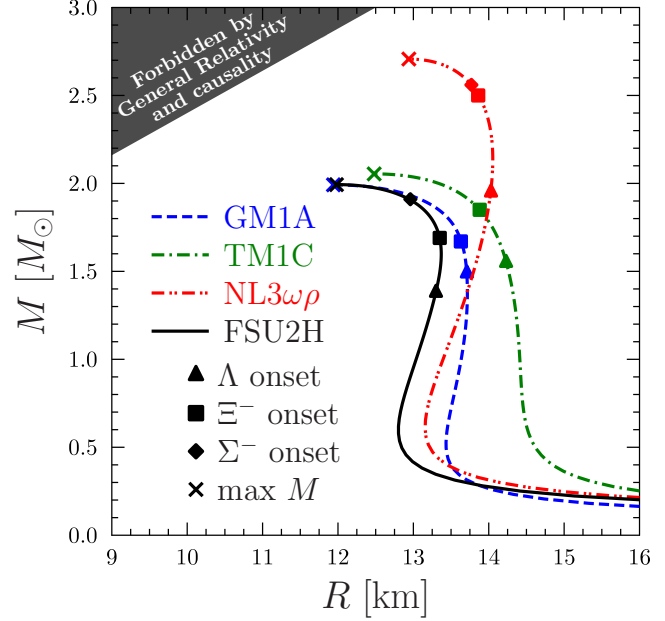


Рис. 4.2. Соотношения масса — радиус для использованных уравнений состояния. Символами отмечены нейтронные звёзды, в центре которых достигается плотность появления того или иного типа гиперонов, а также максимально массивные нейтронные звёзды.

чтобы гипероны этого типа возникали в нейтронных звёздах достаточно большой массы,  $M > 1.9 M_{\odot}$  (см. также обсуждение в статье [178]). В каждом из четырёх случаев уравнение состояния коры согласовано с уравнением состояния ядра (аналогично тому, как это сделано в [39, 178]).

Основные астрофизические параметры для четырёх уравнений состояния приведены в таблице 4.1. На рисунке 4.1 показаны зависимости давления  $P$  от плотности  $\rho$ , а на рисунке 4.2 — соответствующие соотношения между массами нейтронных звёзд  $M$  и их радиусами  $R$ , получающиеся посредством решения уравнений Толмана-Оппенгеймера-Волкова (1.2). Как видно, в использованных моделях  $\Lambda$ -гиперон появляется первым,  $\Xi^-$  вторым, а остальные гипероны возникают лишь при весьма высоких плотностях и больших массах звёзд. Это позволяет нам сузить набор реакций, рассмотрение которых необходимо для расчёта объёмной вязкости. А именно, в рамках данного набора из четырёх уравнений состояния мы ограничились свойствами  $pre\mu\Lambda\Xi^-$ -состава ядра до масс  $M \leq 1.9 M_{\odot}$ .

Все рассмотренные модели в пределах погрешностей измерений согласуются с существованием самых массивных нейтронных звёзд с точно измеренными массами: PSR J1614 – 2230 [46, 183], PSR J0348 + 0432 [47] и (в пределах  $2\sigma$ -интервала) PSR J0740 + 6620 [184]. Среди рассмотренных моделей  $NL3\omega\rho$  даёт самую большую максимальную массу,  $\sim 2.707 M_{\odot}$ , в сравнении с  $\sim 2 M_{\odot}$  для трёх остальных. Среди данных уравнений состояния FSU2H даёт наименьшее значение радиуса  $\sim 13$  км для нейтронных звёзд с «канонической» массой  $1.4 M_{\odot}$ . В данной модели гипероны уже появляются в звёздах с массой  $\geq 1.38 M_{\odot}$ .

На рисунке 4.3 показано, что рассмотренные уравнения состояния предсказывают заметно различный состав ядра, и поэтому можно ожидать, что объёмная вязкость для этих моделей окажется существенно различной.

Согласно методу, описанному в [176], были рассчитаны<sup>2</sup> эффективные массы Ландау

<sup>2</sup> Диссертант благодарен М.Е. Гусакову, взявшему на себя труд по расчёту эффективных масс и параметров Ландау для этих уравнений состояния.

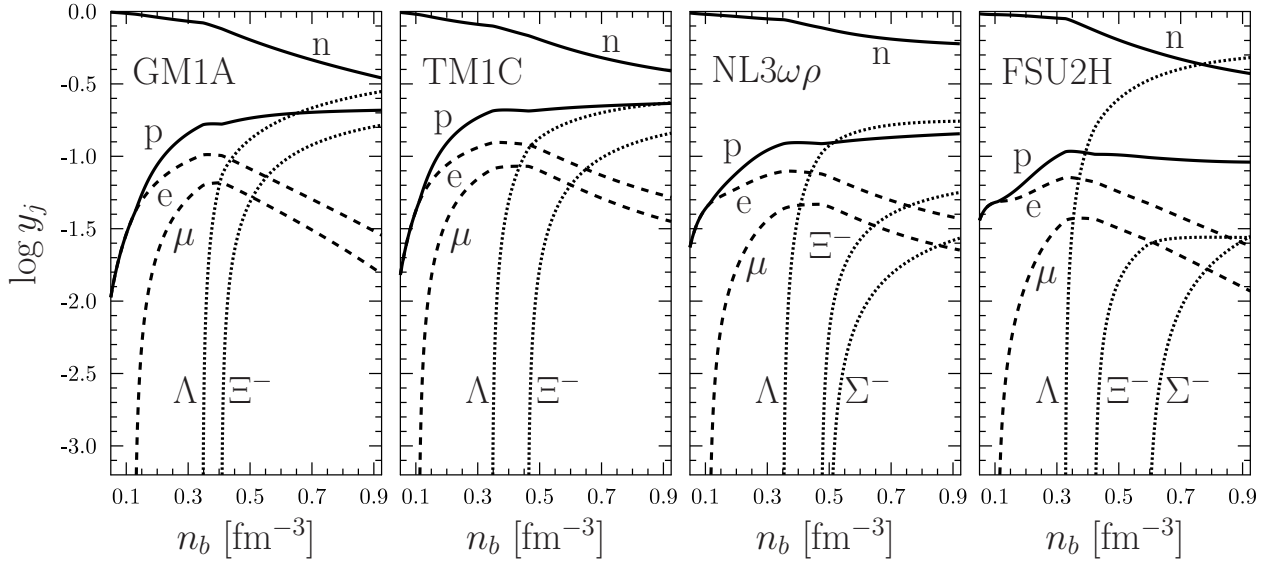


Рис. 4.3. Относительные доли  $y_j = n_j/n_b$  частиц различных сортов  $j = n, p, e, \mu, \Lambda, \Xi^-, \Sigma^-$ , появляющихся в нейтронных звёздах с уравнениями состояния, которые использованы в данной работе.

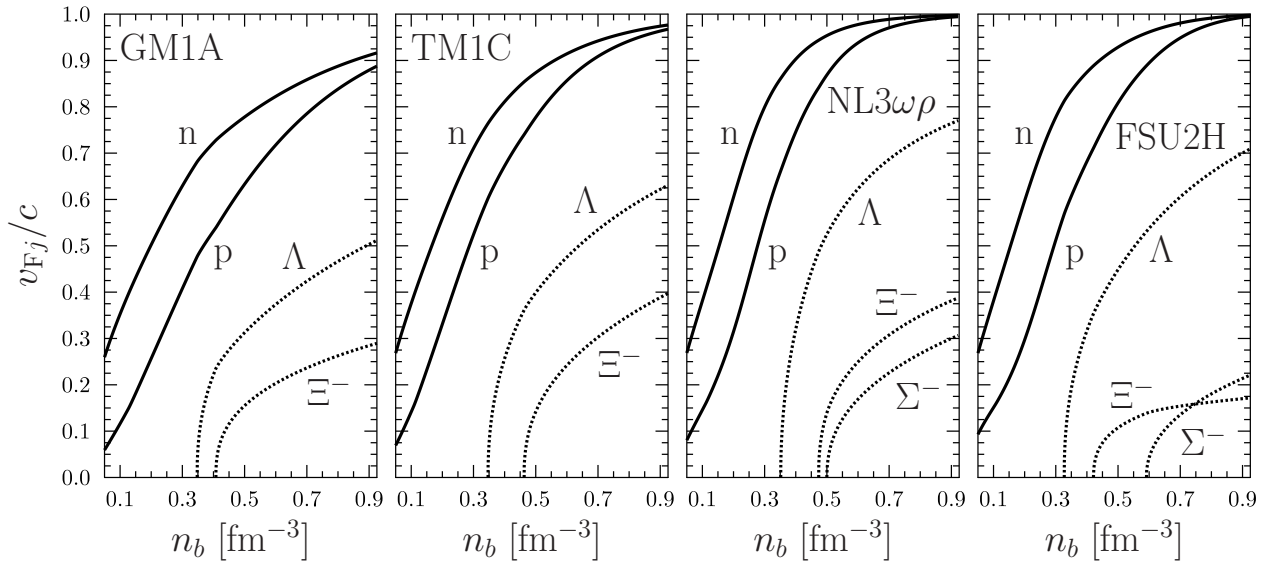


Рис. 4.4. Ферми-скорости барионов (в единицах скорости света) сортов  $j = n, p, \Lambda, \Xi^-, \Sigma^-$ , рассчитанные в рамках использованных уравнений состояния.

$m_{Lj}^*$  и параметры Ландау  $F_0^{jk}$  и  $F_1^{jk}$  ( $j$  и  $k$  обозначают сорта частиц в ядре звезды). Величины  $m_{Lj}^*$  и  $F_0^{jk}$  требуются для вычисления объёмной вязкости. Подчеркнём, что для всех рассмотренных моделей ферми-скорости барионов  $v_{Fj} = p_{Fj}/m_{Lj}^*$  в широком диапазоне плотностей оказываются близки к скорости света (рисунок 4.4). Иными словами, барионы, особенно нуклоны, оказываются релятивистскими даже при плотностях, характерных для недр умеренно массивных нейтронных звёзд,  $M \sim 1.5 - 1.9 M_\odot$ . Поэтому при расчёте скоростей реакций необходимо учитывать релятивистские эффекты, как это сделано в [171, 173, 174], в противоположность нерелятивистскому подходу, применённому, например, в [172].

### 4.3. Объёмная вязкость в несверхтекучем веществе и скорости слабых процессов

Объёмная вязкость возникает за счёт неравновесных процессов (реакций) взаимного превращения частиц разных сортов друг в друга. В случае нуклонного *прем*-вещества основными реакциями являются неравновесные урка-процессы [167, 168]. При наличии гиперонов главным источником объёмной вязкости становятся безлептонные слабые процессы (см., например, [171, 172]): они оказываются гораздо более интенсивными при температурах, характерных для недр нейтронных звёзд. Таких процессов много. Если  $\Lambda$ -гиперон является единственной странной частицей в среде, то этими реакциями будут

$$n + p \leftrightarrow \Lambda + p, \quad (4.1a)$$

$$n + n \leftrightarrow \Lambda + n, \quad (4.1b)$$

$$n + \Lambda \leftrightarrow \Lambda + \Lambda. \quad (4.1c)$$

При появлении  $\Xi^-$ -гиперона добавляются ещё два процесса,

$$n + \Xi^- \leftrightarrow \Lambda + \Xi^-, \quad (4.1d)$$

$$\Lambda + n \leftrightarrow \Xi^- + p. \quad (4.1e)$$

При добавлении других гиперонов в среду количество таких процессов становится ещё больше.

Неравновесные скорости этих процессов  $\Delta\Gamma_\alpha$ ,  $\alpha = (a), (b), (c), (d), (e)$  [буквенное обозначение процесса соответствует формулам (4.1)], зависят от параметра отклонения от химического равновесия  $\Delta\mu_\alpha$ , где, к примеру,  $\Delta\mu_{(a)} = \mu_n - \mu_\Lambda$ ,  $\Delta\mu_{(e)} = \mu_\Lambda + \mu_n - \mu_{\Xi^-} - \mu_p$  и т.п. В линейном режиме,  $\Delta\mu_\alpha \ll \pi k_B T$ , скорости реакций могут быть записаны в виде

$$\Delta\Gamma_\alpha = \lambda_\alpha \Delta\mu_\alpha. \quad (4.2)$$

В дальнейшем величину  $\lambda_\alpha$  мы будем называть скоростью реакции (процесса)  $\alpha$  наравне с величиной  $\Delta\Gamma_\alpha$  (хотя эти величины и имеют разную размерность).

Также в ядре нейтронной звезды протекают процессы, идущие исключительно за счёт сильного взаимодействия частиц (сильные реакции). При исследовании колебаний нейтронных звёзд можно считать, что вещество в ядре находится в равновесии относительно сильных реакций.

В *прем* $\Lambda$ -веществе нет сильных неупругих процессов с участием гиперонов. При добавлении  $\Xi^-$  единственным сильным процессом будет

$$\Xi^- + p \leftrightarrow \Lambda + \Lambda. \quad (4.3a)$$

Если в среде также присутствует  $\Sigma^-$ , появится сильный процесс

$$\Sigma^- + p \leftrightarrow \Lambda + n. \quad (4.3b)$$

При добавлении  $\Xi^0$  включится сильный процесс

$$\Xi^0 + n \leftrightarrow \Lambda + \Lambda. \quad (4.3c)$$

Линейные комбинации этих процессов также являются возможными реакциями сильного взаимодействия. Полный их набор для всего октета барионов описан в приложении С статьи [176].

При вычисления объёмной вязкости в форме, удобной для изучения затухания колебаний нейтронных звёзд, мы следуем статье [175]. Его суть такова:

(i) Рассмотрим малое гармоническое возмущение жидкости, описываемое полем скоростей  $\mathbf{u}$ . В отличие от главы 3, здесь считается, что все сорта частиц движутся как единое целое. Предполагается, что возмущение зависит от времени  $t$  как  $\propto \exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  — частота колебаний звезды. Будем считать, что невозмущённым состоянием среды является полное гидростатическое и термодинамическое равновесие.

(ii) Колебания звезды вызывают малые отклонения концентраций частиц  $\delta n_j \propto \exp(i\omega t)$  от их равновесных значений  $n_j$ . Возмущения химических потенциалов и давления представимы в виде

$$\delta\mu_j = \sum_k \frac{\partial\mu_j}{\partial n_k} \delta n_k, \quad \delta P = \sum_j n_j \delta\mu_j, \quad (4.4)$$

где производная  $\partial\mu_j/\partial n_k$  должна быть рассчитана вблизи состояния равновесия. Эти производные связаны с эффективными массами Ландау и параметрами Ландау  $F_0^{jk}$  (см., например, формулу (D1) в [176]).

(iii) Объёмная вязкость  $\zeta$  определяется [175] с помощью выражения

$$\delta P - \delta P_{\text{eq}} = -\zeta \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (4.5)$$

Здесь  $\delta P_{\text{eq}}$  обозначает возмущение давления, вычисленное в предположении, что все слабые реакции (4.1) запрещены.<sup>3</sup> Отметим, что, при использовании комплексных экспонент, для определения скорости вязкой диссипации необходимо вычислить  $\operatorname{Re}\zeta$ .

(iv) Связь между скоростями реакций и  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  определяется уравнениями неразрывности

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \operatorname{div} n_j \mathbf{u} = \Delta \Gamma_j, \quad (4.6)$$

где  $\Delta \Gamma_j$  — полное число частиц сорта  $j$ , образующихся в единице объёма за единицу времени в ходе всех, сильных и слабых, процессов. Эти уравнения должны быть линеаризованы относительно  $\delta n_j$  и  $\mathbf{u}$ . Чтобы вычислить  $\zeta$ , следует пренебречь пространственными градиентами  $n_j$  (при этом полученная вязкость будет верна и для неоднородной среды [185], а пространственные градиенты  $n_j$  войдут в другие кинетические коэффициенты).

Возмущения концентраций  $\delta n_j$  линейно зависимы, т.к. они связаны условием квазинейтральности среды

$$\sum_j e_j \delta n_j = 0 \quad (4.7)$$

( $e_j$  — заряд частиц сорта  $j$ ) и требованием равновесия относительно сильных реакций [тех, что приведены в формулах (4.3), и подобных им]:

$$\delta\mu_{\Xi^-} + \delta\mu_p = 2\delta\mu_\Lambda, \quad (4.8a)$$

$$\delta\mu_{\Sigma^-} + \delta\mu_p = \delta\mu_\Lambda + \delta\mu_n, \quad (4.8б)$$

$$\delta\mu_{\Xi^0} + \delta\mu_n = 2\delta\mu_\Lambda, \quad (4.8в)$$

<sup>3</sup> Альтернативный подход к определению  $\zeta$  см. в [171], где  $\delta P_{\text{eq}}$  определяется для бесконечно быстрых слабых реакций. С точки зрения затухания колебаний оба подхода эквивалентны: итоговое выражение для коэффициента  $\operatorname{Re}(\zeta)$ , ответственного за диссипацию, получается одинаковым.

и т.п., где  $\delta\mu_j$  следует брать из формул (4.4). Тогда для любого числа сортов частиц в ядре звезды только четыре возмущения  $\delta n_j$  независимы.

Другим важным следствием уравнений (4.8) является равенство возмущений химического равновесия относительно любых слабых процессов:

$$\Delta\mu_\alpha = \Delta\mu_{(a)} = \delta\mu_n - \delta\mu_\Lambda = \Delta\mu. \quad (4.9)$$

Это, в частности, справедливо для реакций, приведённых в формулах (4.1).

При выборе четырёх независимых термодинамических параметров наиболее удобными являются: полная концентрация барионов  $n_b$  (сохраняется независимо от того, какие реакции протекают в системе), электронная и мюонная относительные концентрации  $y_{e,\mu} = n_{e,\mu}/n_b$  (сохраняется, так как мы ограничиваемся рассмотрением безлептонных реакций) и относительная фракция странности  $y_s = \sum_j S_j n_j / n_b$ , где  $S_j$  обозначает странность частиц сорта  $j$ . Только слабые процессы вносят вклад в несохранение странности, т.к. при сильных взаимодействиях она сохраняется. Так как мы рассматриваем только те безлептонные реакции, для которых  $\Delta S = 1$ , полная скорость генерации странности  $\Delta\Gamma_S$  является простой суммой всех частных скоростей слабых процессов  $\Delta\Gamma_\alpha$ . Используя равенство (4.9) и вспоминая, что  $S_j < 0$ , мы получаем

$$\Delta\Gamma_S = -\lambda\Delta\mu, \quad \lambda = \sum_\alpha \lambda_\alpha, \quad (4.10)$$

где  $\lambda$  — полная скорость слабых безлептонных реакций.

Уравнения неразрывности (4.6) можно преобразовать к виду

$$\delta n_b = \frac{i}{\omega} n_b \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (4.11a)$$

$$\delta y_e = \delta y_\mu = 0, \quad (4.11b)$$

$$\delta y_s = -\frac{i\Delta\Gamma_S}{\omega n_b} = \frac{i\lambda}{\omega n_b} \Delta\mu. \quad (4.11b)$$

Считая все термодинамические величины функциями  $n_b$  и  $y_{e,\mu,s}$ , с учётом формул (4.11b) получаем

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial n_b} \delta n_b + \frac{\partial P}{\partial y_s} \delta y_s, \quad (4.12a)$$

$$\Delta\mu = \frac{\partial\Delta\mu}{\partial n_b} \delta n_b + \frac{\partial\Delta\mu}{\partial y_s} \delta y_s, \quad (4.12b)$$

где  $\partial\Delta\mu/\partial X = \partial\mu_n/\partial X - \partial\mu_\Lambda/\partial X$ , как следует из формулы (4.9). Производные по  $n_b$  и  $y_s$  вычисляются вблизи положения равновесия с помощью формул (4.4), (4.7) и (4.8). Величина  $\delta P_{\text{eq}}$  рассчитывается с помощью формулы (4.12a) в предположении, что все реакции в среде выключены, т.е.  $\delta y_s = 0$ , равно как и  $\delta y_e = 0$ ,  $\delta y_\mu = 0$ .

Комбинируя формулы (4.5), (4.11) и (4.12), мы получаем (ср. с формулой (22) в [175] и (17) в [172])

$$\operatorname{Re}\zeta = \zeta_{\max} \frac{2\lambda/\lambda_{\max}}{1 + (\lambda/\lambda_{\max})^2}, \quad (4.13)$$

где

$$\zeta_{\max} = \frac{n_b}{2\omega} \frac{\partial P}{\partial y_s} \frac{\partial\Delta\mu}{\partial n_b} \left( \frac{\partial\Delta\mu}{\partial y_s} \right)^{-1}, \quad (4.14a)$$

$$\lambda_{\max} = n_b \omega \left( \frac{\partial\Delta\mu}{\partial y_s} \right)^{-1}. \quad (4.14b)$$

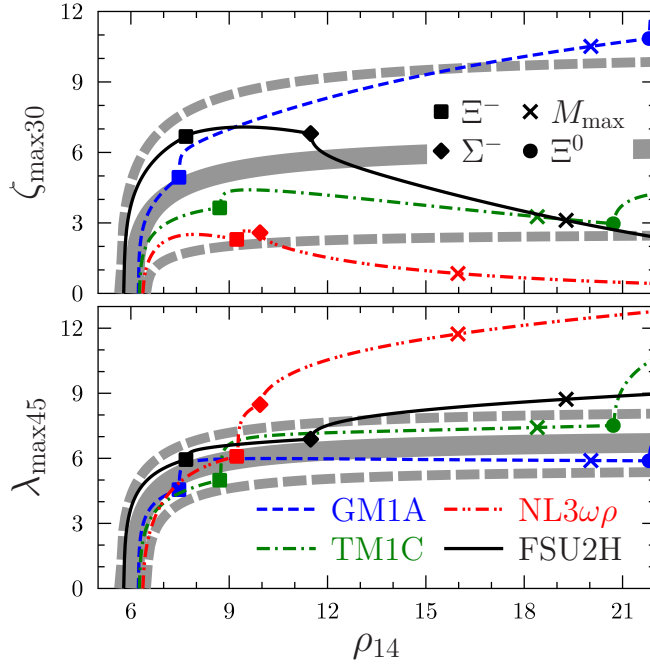


Рис. 4.5. Максимальная объёмная вязкость  $\zeta_{\max30} = \zeta_{\max}/(10^{30} \text{ г см}^{-1} \text{ с}^{-1})$  и оптимальная скорость слабых реакций  $\lambda_{\max45} = \lambda_{\max}/(10^{45} \text{ эрг}^{-1} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1})$  при  $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$  в зависимости от плотности среды  $\rho_{14} = \rho/(10^{14} \text{ г см}^{-3})$  для различных моделей уравнения состояния. Квадратиками, ромбами и кружками отмечены точки появления  $\Xi^-$ ,  $\Sigma^-$  и  $\Xi^0$ -гиперонов, соответственно. Кресты отвечают центру максимально массивной звезды с данным уравнением состояния. Широкие сплошные серые линии изображают аппроксимации представленных величин (4.15). Штриховые серые линии отображают 60%-ые ( $\zeta_{\max}$ ) и 20%-ые ( $\lambda_{\max}$ ) отклонения от такой аппроксимации [т.е. величины  $\zeta_{\max}^{\text{appr}} \times (1 \pm 0.6)$  и  $\lambda_{\max}^{\text{appr}} \times (1 \pm 0.2)$ ].

Выражение (4.13) отражает хорошо известное свойство гиперонной объёмной вязкости [6, 171–174]: она имеет максимум как функция скорости неравновесных процессов  $\lambda$ . Следовательно, она имеет максимум как функция температуры среды, т.к.  $\lambda$  монотонно зависит от  $T$ . Кроме скорости реакций  $\lambda$ , объёмная вязкость зависит от двух параметров: максимально возможной (при данной плотности и частоте колебаний среды) объёмной вязкости  $\zeta_{\max}$  и оптимальной полной скорости реакций  $\lambda_{\max}$ , определяющей, при какой скорости слабых процессов колебания с частотой  $\omega$  будут затухать быстрее всего. Эти два параметра определяются исключительно термодинамическими свойствами уравнения состояния вещества (при данной частоте  $\omega$ ) и не зависят от реакций, протекающих в нём.

На рисунке 4.5 показаны  $\zeta_{\max}$  и  $\lambda_{\max}$  как функции плотности среды  $\rho$ . Все кривые начинаются с нулевого значения в точке появления  $\Lambda$ -гиперонов в рамках того или иного уравнения состояния. Появление нового гиперона в среде вызывает резкий изломообразный рост оптимальной скорости реакций  $\lambda_{\max}$  (сама кривая при этом остаётся непрерывной). Максимальная объёмная вязкость  $\zeta_{\max}$  увеличивается при появлении новых каскадных гиперонов и уменьшается, когда появляются  $\Sigma^-$ . Главный вывод, который можно сделать, глядя на рисунок 4.5, — и  $\zeta_{\max}$ , и  $\lambda_{\max}$  сильно зависят от модели уравнения состояния. Впрочем, при не очень высоких плотностях вещества,  $\rho \lesssim 3\rho_0$ , для всех рассмотренных моделей  $\lambda_{\max}(\rho)$  ведёт себя схожим образом.

Когда в среде представлены только  $\Lambda$  и  $\Xi^-$ -гипероны, качественное, усреднённое поведение кривых на рисунке 4.5 может быть грубо воспроизведено формулой

$$\begin{pmatrix} \zeta_{\max}^{\text{appr}} \\ \lambda_{\max}^{\text{appr}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_0/\omega_4 \\ \lambda_0\omega_4 \end{pmatrix} \left( \frac{x}{1+kx} \right)^t, \quad x = \frac{\rho - \rho_\Lambda}{\rho_0}, \quad (4.15)$$

где  $\omega_4 = \omega/(10^4 \text{ с}^{-1})$ , а  $\rho_\Lambda$  обозначает плотность возникновения  $\Lambda$ -гиперонов (см. табли-

цу 4.1). Параметры в этой подгоночной формуле равны  $\zeta_0 = 6.5 \times 10^{30} \text{ г см}^{-1} \text{ с}^{-1}$ ,  $\lambda_0 = 8.0 \times 10^{45} \text{ эрг}^{-1} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ ,  $t = 0.34$  и, наконец,  $k = 1.0$  для  $\zeta_{\max}$  (максимальное относительное отклонение составляет  $\sim 60\%$ ) и  $k = 1.5$  для  $\lambda_{\max}$  (отклонение достигает  $\sim 20\%$ ). Подчеркнём, что степень  $t$ , описывающая поведение кривых при  $\rho \rightarrow \rho_\Lambda$ , одинакова для обеих подгоняемых величин, т.к. их стремление к нулю в этой точке определяется одним и тем же множителем  $(\partial\Delta\mu/\partial y_s)^{-1}$  [см. формулы (4.14)]. Аппроксимации (4.15) изображены на рисунке 4.5 сплошными серыми линиями; штриховые серые линии визуализируют 60%-ые и 20%-ые ошибки воспроизведения  $\zeta_{\max}$  и  $\lambda_{\max}$ . Конечно, подгонки (4.15) не воспроизводят изломы кривых при образовании  $\Xi^-$ -гиперонов и не способны описать поведение  $\zeta_{\max}$  и  $\lambda_{\max}$  при наличии  $\Sigma^-$  или  $\Xi^0$ -гиперонов в среде. Впрочем, используемые здесь четыре уравнения состояния крайне непохожи друг на друга. Можно надеяться, что для  $\text{прем}\Lambda\Xi^-$ -материи любое другое уравнение состояния приведёт к зависимостям  $\zeta_{\max}(\rho)$  и  $\lambda_{\max}(\rho)$ , которые описываются предложенной подгонкой с не худшей точностью.

При построении окон неустойчивости  $\gamma$ -мод усреднённая аппроксимация для  $\lambda_{\max}^{\text{appr}}$  оказывается достаточно точной, а вот подгонка  $\zeta_{\max}^{\text{appr}}$  без дополнительных коррекций не пригодна для воспроизведения окна неустойчивости для звезды с конкретным уравнением состояния. Мы отсылаем читателя к разделу 4.5 и подписи к рисунку 4.12 за описанием того, как избежать этой проблемы при использовании формулы (4.15).

Теперь обратимся к вопросу, насколько «настоящая» скорость слабых безлептонных реакций  $\lambda$  может быть близка к оптимальной.

## 4.4. Слабые безлептонные процессы

### 4.4.1. Основные формулы

При вычислении скоростей реакций использован формализм, предложенный в работах [172, 173]. В общем виде рассмотрен процесс, в котором одна пара барионов превращается в другую,

$$1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4, \quad (4.16)$$

причём странности этих барионов связаны соотношением  $|S_1 + S_2 - S_3 - S_4| = 1$ . Если в веществе присутствуют лишь  $\Lambda$  и  $\Xi^-$ -гипероны, то мы имеем дело лишь с пятью процессами (4.1).

Неупругое столкновение  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  описывается матричным элементом  $\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}$ . Здесь и далее в ходе вычислений будем считать, что волновые функции частиц нормированы на одну частицу в единице объёма. Тогда, выбирая систему единиц  $\hbar = c = 1$  и полагая частицы спин-неполяризованными, имеем выражение для скорости прямой реакции  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ :

$$\Gamma_{\rightarrow} = \int \prod_{j=1}^4 \frac{d^3 \mathbf{p}_j}{(2\pi)^3 2m_{Lj}^*} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{1}{s} \sum_{\text{спины}} |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 f_1 f_2 (1 - f_3)(1 - f_4), \quad (4.17)$$

где  $p_j = (\epsilon_j, \mathbf{p}_j)$  — 4-импульс  $j$ -ой квазичастицы, фактор симметрии  $s = 2$  для реакций (4.1b) и (4.1c), для остальных реакций  $s = 1$ , и, наконец,

$$f_j = f(z_j) = (1 + e^{z_j})^{-1}, \quad \text{где} \quad z_j = \frac{\epsilon_j - \mu_j}{k_B T}, \quad (4.18)$$

обозначает функцию распределения Ферми.

С помощью стандартной техники [50] вычисления интегралов по импульсам сильно вырожденных частиц формула (4.17) преобразуется к виду

$$\Gamma_{\rightarrow} = \frac{\prod_j p_{Fj}}{4(2\pi)^8 s} (k_B T)^3 \mathcal{I} \left( \frac{\Delta\mu}{k_B T} \right) \mathcal{A} \mathcal{J}, \quad (4.19)$$



где  $\Delta\mu = \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4$  [напомним, что согласно (4.9) все  $\Delta\mu_\alpha$  в нашей задаче равны]. Множители  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{J}$  имеют вид [172]

$$\mathcal{I}(\xi) = \int \prod_j [dz_j f(z_j)] \delta\left(\sum_j z_j - \xi\right) = \frac{4\pi^2\xi + \xi^3}{6(1 - e^{-\xi})}, \quad (4.20a)$$

$$\mathcal{A} = \int \prod_j d\Omega_j \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) = \frac{2(2\pi)^3}{\prod_j p_{Fj}} (q_{\max} - q_{\min}) \Theta(q_{\max} - q_{\min}), \quad (4.20б)$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\mathcal{A}} \int \prod_j d\Omega_j \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \langle |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 \rangle, \quad (4.20в)$$

где  $\langle \rangle$  означают усреднение по всем начальным спиновым состояниям сталкивающихся частиц и суммирование по всем конечным спиновым состояниям,  $\Theta(x)$  — функция Хевисайда, а величины

$$q_{\min} = \max\{|p_{F1} - p_{F3}|, |p_{F2} - p_{F4}|\}, \quad q_{\max} = \min\{p_{F1} + p_{F3}, p_{F2} + p_{F4}\}, \quad (4.21)$$

являются минимально и максимально возможными импульсами, переданными при столкновении.

Скорость обратной реакции  $3 + 4 \rightarrow 1 + 2$  представим в виде  $\Gamma_{\leftarrow} = \Gamma_{\rightarrow}(\Delta\mu \rightarrow -\Delta\mu)$ , а скорость всего процесса запишем как

$$\Delta\Gamma_{12 \leftrightarrow 34} = \Gamma_{\rightarrow} - \Gamma_{\leftarrow} = \frac{\prod_j p_{Fj}}{4(2\pi)^{8s}} (k_B T)^3 \Delta\mathcal{I} \left( \frac{\Delta\mu}{k_B T} \right) \mathcal{A} \mathcal{J}, \quad (4.22)$$

где

$$\Delta\mathcal{I}(\xi) = \mathcal{I}(\xi) - \mathcal{I}(-\xi) = \frac{2\pi^2}{3} \xi \left( 1 + \frac{\xi^2}{4\pi^2} \right). \quad (4.23)$$

В линейном режиме,  $\Delta\mu \ll k_B T$ , формула (4.22) принимает вид уже упомянутого выражения (4.2).

Далее нам нужно (i) записать выражение для  $\langle |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 \rangle$  и затем (ii) усреднить его по углам, получив тем самым формулу для  $\mathcal{J}$  в выражении (4.20в).

#### 4.4.2. Матричный элемент

Слабая безлептонная реакция может идти по каналам двух типов. Первый — непосредственный обмен  $W$ -бозоном между двумя барионами, т.е. контактное слабое взаимодействие. Второй — обмен виртуальным мезоном, когда  $W$ -бозон, испущенный одним из образующих барион кварков, распадается на кварк и антикварк, которые участвуют в дальнейшем формировании промежуточного мезона и исходящего бариона.

Обмен  $W$ -бозоном в слабых безлептонных реакциях хорошо изучен в контексте объёмной вязкости ядер нейтронных звёзд, см., например, [171–174].

Обмен мезоном обычно используется при изучении безлептонных распадов гиперонов, наблюдаемых в лабораторных условиях, см., например, обзор [179]. В частности, нуклон-индуцированный распад и синтез  $\Lambda$ -гиперона,  $np \leftrightarrow \Lambda p$  и  $pn \leftrightarrow \Lambda n$ , подробно исследовался в физике гиперонных атомных ядер [186–188] и нуклон-нуклонных столкновений [189]. Реализованные подходы к расчёту этих процессов включают в себя приближение одномезонного обмена (ОМО), учёт полного псевдоскалярного и векторного октета мезонов [186], однопетлевых поправок [190] и распада виртуального мезона на два других [187]. Процесс  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$  изучался в рамках задачи о гиперон-индуцированном распаде  $\Lambda$ -гиперона в дважды странных гиперонных атомных ядрах [191, 192] в рамках приближения ОМО. Насколько нам

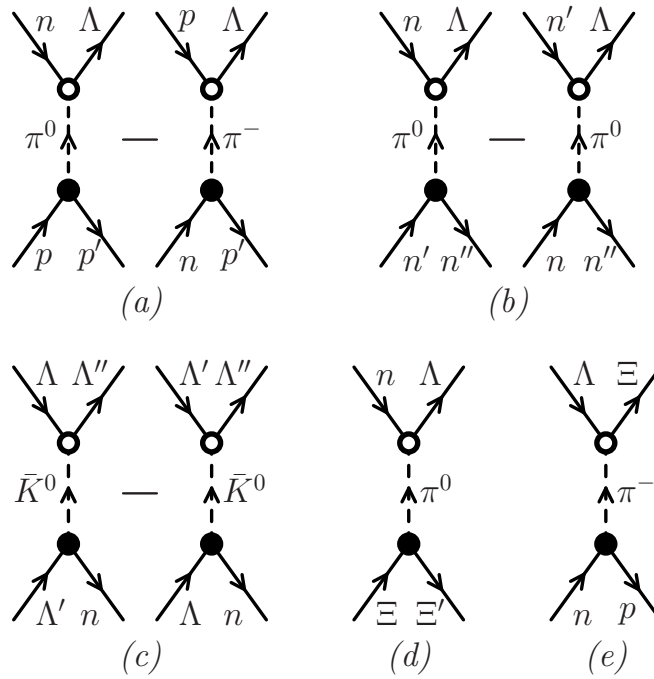


Рис. 4.6. Фейнмановские диаграммы для обмена самым лёгким из возможных мезонов при неупругих соударениях в рамках процессов (4.1). Пустые и заполненные кружки обозначают, соответственно, слабые и сильные вершины

известно, слабые процессы с  $\Xi^-$ -гипероном, как то  $n\Xi^- \leftrightarrow \Lambda\Xi^-$  и  $\Lambda n \leftrightarrow \Xi^- p$ , не изучались ни экспериментально, ни теоретически, поскольку в распаде этого гиперона доминируют сильные реакции  $\Xi^- p \rightarrow \Lambda\Lambda$  и  $\Xi^- n \rightarrow \Lambda\Sigma^-$ .

Вообще говоря, в слабых безлептонных распадах гиперонов канал обмена  $W$ -бозоном менее эффективен, чем канал обмена мезоном. Более того, некоторые процессы вообще не идут посредством обмена  $W$ -бозоном ввиду отсутствия слабого кваркового  $sd$ -тока перехода<sup>4</sup> [193]. Среди набора (4.1) таких процессов большинство: только процессы  $np \leftrightarrow \Lambda p$  и  $\Lambda n \leftrightarrow \Xi^- p$  могут идти по каналу  $W$ -обмена. Однако лишь однажды, в работе ван Далена и Диперинка [173], канал ОМО был использован для расчёта объёмной вязкости в ядре нейтронной звезды. В их статье рассматривались три реакции,  $nn \leftrightarrow \Sigma^- p$ ,  $np \leftrightarrow \Lambda p$  и  $pn \leftrightarrow \Lambda n$ , с использованием как ОМО, так и  $W$ -обмена. Результат работы, в частности, свидетельствовал, что вклад ОМО в скорость процесса  $np \leftrightarrow \Lambda p$  примерно в 10 раз больше. Однако полученные в [173] скорости реакций и объёмная вязкость не были представлены в виде, пригодном для использования в дальнейших вычислениях. Настоящая работа проделана, чтобы воспроизвести расчёты статьи [173], адаптировать их к современным представлениям о гиперонном составе ядра и представить их в удобном для использования виде.

При рассмотрении ОМО мы учли лишь обмен самыми лёгкими из возможных мезонов:  $K^0/\bar{K}^0$ -мезонами для  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$  и  $\pi$ -мезонами для остальных четырёх процессов. Все эти мезоны псевдоскалярны. Соответствующие диаграммы Фейнмана показаны на рисунке 4.6 для каждого из пяти процессов. Вкладом каких-либо иных мезонов, например,  $\rho$ -мезона, мы пренебрегли. Как правило, их эффект заключается в уменьшении скорости реакции в 3 – 4 раза, что не критично для наших целей (см. также раздел 4.6).

На каждой такой диаграмме есть одна слабая (отмечена как  $\circ$ ) и одна сильная (отмечена  $\bullet$ ) вершина взаимодействия бариона с мезоном. Все эти вершины являются феноменоло-

<sup>4</sup> Это обстоятельство было не столь существенно, когда рассматривались ядра звёзд, содержащие только  $\Sigma^-$  и  $\Lambda$ -гипероны [171–174].

Таблица 4.2. Феноменологические константы взаимодействия, соответствующие вершинам на диаграммах 4.6:  $g$  — константа сильного взаимодействия при вершинах  $\bullet$ ,  $A$  и  $B$  — константы слабого взаимодействия при вершинах  $\circ$  [см. также формулу (4.24)].

Вершина	$g$	$A$	$B$	Ссылка
pp $\pi$	13.3	—	—	[186], таб. III
np $\pi$	$13.3\sqrt{2}$	—	—	[186], таб. III
nn $\pi$	-13.3	—	—	[186], таб. III
$\Lambda n\pi$	—	-1.07	-7.19	[173], разд. V
$\Lambda p\pi$	—	1.46	9.95	[173], разд. V
$\Lambda nK$	-14.1	—	—	[186], таб. III
$\Lambda\Lambda K$	—	0.67	-12.72	[191] <sup>a</sup> , таб. IV
$\Xi^- \Lambda\pi$	—	2.04	-7.5	[194], гл. 30.3.1
$\Xi^- \Xi^- \pi$	-5.4	—	—	[195] <sup>b</sup> , ф-ла (2.14)

<sup>a</sup> Матрица  $\gamma^5$  в статье [191] определена с другим знаком.

<sup>b</sup> Константы сильного взаимодействия  $f$  из статьи [195] связаны с использованными здесь константами  $g$  соотношением  $g = f(m_2 + m_4)/m_\pi$ .

гическими. При обмене псевдоскалярным мезоном им соответствуют коэффициенты

$$\circ = G_F m_\pi^2 (A + B\gamma^5), \quad \bullet = g\gamma^5, \quad (4.24)$$

где  $G_F = 1.436 \times 10^{-49}$  эрг см<sup>3</sup> — константа слабого взаимодействия Ферми,  $m_\pi$  — масса заряженного пиона, а для дираковской матрицы использовано определение  $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ . Феноменологические константы взаимодействия  $g$ ,  $A$  и  $B$  для вершин, присутствующих на диаграммах на рисунке 4.6, даны в таблице 4.2. Часть из них измерена в лабораторных экспериментах, часть рассчитывается исключительно теоретически.

Пропагатор виртуального мезона  $D_M(q)$ , где  $q$  — переданный 4-импульс, подробно рассмотрен в разделе 4.4.3.

Волновые функции начальных и конечных состояний частиц рассматриваются в рамках подхода RMF (согласованно с уравнениями состояния). Они считаются релятивистскими биспинорами,

$$\psi_j = C_j u_j e^{ip_j^\mu x_{j\mu}}. \quad (4.25)$$

Для сильно вырожденных барионов в ядре звезды можно пользоваться приближением  $|\mathbf{p}_j| = p_{Fj}$ . Далее, в выражении для биспинора  $u_j$  необходимо использовать эффективную массу Ландау  $m_{Lj}^*$  вместо  $\epsilon_j$  и эффективную массу Дирака  $m_{Dj}^*$  в качестве собственной массы частицы. Связь между массами Дирака и Ландау в данном случае имеет вид [170]

$$m_{Lj}^{*2} = p_{Fj}^2 + m_{Dj}^{*2}. \quad (4.26)$$

Тогда выражения для нормировочной константы  $C_j$  (нормировка на единицу объёма) и биспинора  $u_j$  будут иметь вид

$$C_j = \frac{1}{\sqrt{2m_{Lj}^*}}, \quad \bar{u}_j u_j = 2m_{Dj}^*, \quad \sum_{\text{спины}} u_j \bar{u}_j = \gamma^0 m_{Lj}^* - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_j + m_{Dj}^*. \quad (4.27)$$

Процессы  $np \leftrightarrow \Lambda p$ ,  $nn \leftrightarrow \Lambda n$  и  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$  описываются как прямой, так и обменной диаграммами. Процессы  $n\Xi^- \leftrightarrow \Lambda\Xi^-$  и  $\Lambda n \leftrightarrow \Xi^- p$  в используемом приближении<sup>5</sup> описываются лишь прямыми диаграммами. Так происходит при обмене пионом из-за сохранения странности в сильных вершинах и правила  $|\Delta S| = 1$  для слабых вершин. Кроме того, в процессе  $\Lambda n \leftrightarrow \Xi^- p$  нет тождественных пар частиц. В дальнейшем при рассмотрении произвольного процесса, удовлетворяющего схеме (4.16), мы будем считать, что прямая и обменная диаграммы отличаются перестановкой  $1 \leftrightarrow 2$ , причём слабыми будут вершины  $1 - 3$  и  $2 - 3$ , а отсутствие обменной диаграммы будет имитироваться равенством нулю констант связи в её вершинах.

Матричный элемент для прямой диаграммы имеет вид

$$\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}^{\text{dir}} = G_F m_\pi^2 \bar{u}_3 (A_{13} + B_{13} \gamma^5) u_1 D_M(q) \bar{u}_4 g_{24} \gamma^5 u_2, \quad (4.28)$$

для обменной —  $\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}^{\text{exch}} = \mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}^{\text{dir}}|_{1 \leftrightarrow 2}$ . Соответственно, полный матричный элемент записывается как  $\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34} = \mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}^{\text{dir}} - \mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}^{\text{exch}}$ .

После усреднения по начальным и суммирования по конечным спиновым состояниям, квадрат матричного элемента получается равным

$$\langle |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 \rangle = G_F^2 m_\pi^4 [X(q) D_M^2(q) + X'(q') D_M^2(q') + Y(q, q') D_M(q) D_M(q')], \quad (4.29)$$

где  $q = p_3 - p_1$ ,  $q' = p_3 - p_2$ ,

$$X(q) = X(|\mathbf{q}|^2) = m_M^4 X_0 + m_M^2 X_1 |\mathbf{q}|^2 + X_2 |\mathbf{q}|^4, \quad (4.30a)$$

$$Y(q, q') = Y(|\mathbf{q}|^2, |\mathbf{q}'|^2) = m_M^4 Y_0 + m_M^2 Y_1 |\mathbf{q}|^2 + m_M^2 Y_2 |\mathbf{q}'|^2 + Y_3 |\mathbf{q}|^2 |\mathbf{q}'|^2, \quad (4.30б)$$

$$X'(q) = X'(|\mathbf{q}'|^2) = m_M^4 X'_0 + m_M^2 X'_1 |\mathbf{q}'|^2 + X'_2 |\mathbf{q}'|^4. \quad (4.30в)$$

Здесь  $X_k$ ,  $X'_k$  и  $Y_k$  являются безразмерными функциями ферми-импульсов  $p_{F1\dots 4}$ . Явные выражения для них вычислены авторами статьи [180] и выписаны в приложении Г.

Последний вопрос, который необходимо решить перед вычислением выражения (4.20в), — какое выражение использовать для мезонного пропагатора  $D_M$ .

#### 4.4.3. Пропагаторы мезонов

В общем виде мезонный пропагатор выглядит так:

$$D_M^{-1}(\omega, \mathbf{q}) = \omega^2 - \mathbf{q}^2 - m_M^2 - \Pi_M(\omega, \mathbf{q}), \quad (4.31)$$

где  $\omega$  и  $\mathbf{q}$  обозначают, соответственно, энергию и импульс, переносимые мезоном,  $m_M$  — голая (вакуумная) масса<sup>6</sup> мезона ( $m_\pi = 139$  МэВ и  $m_K = 494$  МэВ), а  $\Pi_M$  — поляризационный оператор мезона.

При расчётах неупругих барионных столкновений в качестве мезона-переносчика часто используют свободный мезон [49, 173, 196], то есть искусственно полагается  $\Pi_M = 0$  и, по ряду причин, отбрасывается слагаемое  $\omega^2$ . В почти равновесной материи ядра нейтронной звезды для нейтральных мезонов и в самом деле  $\omega = 0$ , однако для заряженных пионов в диаграммах для реакций  $np \leftrightarrow \Lambda p$  (рисунок 4.6а) и  $\Lambda n \leftrightarrow \Xi^- p$  (рисунок 4.6е) мы имеем  $\omega = \mu_e \neq 0$ . Поэтому подход к пропагатору, использованный в [173], следует подвергнуть пересмотру.

<sup>5</sup> Строго говоря, диаграммы с переставленными частицами 1 и 2 появятся при учёте обмена вторым по массивности мезоном.

<sup>6</sup> Здесь не делается различия между массами мезонов, входящих в один изомультиплет, а значения масс берутся из книги [170].

Если подставить  $\omega = \mu_e$  в пропагатор свободного мезона, возникнет проблема: уже при  $n_b \gtrsim 0.2 \text{ фм}^{-3}$  химический потенциал электрона оказывается настолько велик, что  $\mu_e > m_\pi$ , то есть пионный пропагатор может принимать положительные значения при вещественных значениях переданного импульса. Это означает пионизацию среды — появление реальных пионов в веществе ядра звезды, — что не согласуется с используемыми моделями уравнения состояния. Такая проблема возникает не только в моделях, используемых в этой работе (см. раздел 4.2), но и в широко известных нуклонных уравнениях состояния, таких как APR [45] и BSk21 [43]. Следовательно, мы вынуждены учитывать поляризационный оператор  $\Pi_{\pi^-}$  отрицательных пионов в надежде, что при  $\omega = \mu_e$  он окажется достаточно большим, чтобы сделать  $D_{\pi^-} < 0$  при всех плотностях.

Для дальнейших рассуждений удобно ввести эффективную массу виртуального пиона

$$\tilde{m}_{\pi^-} = \sqrt{m_\pi^2 - \mu_e^2 + \Pi_{\pi^-}(\mu_e, \mathbf{q})}. \quad (4.32)$$

Пропагатор в этом случае принимает вид

$$D_{\pi^-}^{-1} = -\mathbf{q}^2 - \tilde{m}_{\pi^-}^2(\mathbf{q}). \quad (4.33)$$

Отметим, что  $\mu_e$  меняется с ростом плотности среды, так что  $\tilde{m}_{\pi^-}$  фактически зависит не только от переданного импульса  $\mathbf{q}$ , но и от  $n_b$ . Очевидно, что масса  $\tilde{m}_{\pi^-}$  при запрещённой пионизации должна быть строго вещественна.

В веществе, характерном для атомных ядер, пропагатор пиона представляется в виде  $\Pi_{\pi^-} = \Pi_S + \Delta\Pi_S + \Pi_P$  [197], где вклад  $\Pi_S$  возникает от S-рассеяния пиона на нейтроне, слагаемое  $\Delta\Pi_S$  описывает вклад S-поглощения, а член  $\Pi_P$  описывает вклад P-рассеяния. Из них положительно только слагаемое  $\Pi_S$ , поэтому мы остановим своё внимание на нем с целью оценить  $\Pi_{\pi^-}$  сверху. В главном порядке теории возмущений  $\Pi_S$  в нуклонно-гиперонном ядре нейтронной звезды имеет вид [198]

$$\Pi_S(\omega) = \frac{\omega}{f_\pi^2} \sum_j (-I_{3j}) n_j + \frac{\sigma_N}{f_\pi^2} \left( \frac{\omega^2}{m_\pi^2} - 1 \right) n_b, \quad (4.34)$$

где  $j$  обозначает сорт бариона,  $I_{3j}$  — проекция изоспина  $j$ -го бариона,  $f_\pi = 92.4 \text{ МэВ}$  и  $\sigma_N \approx 45 \text{ МэВ}$ . В нуклонном веществе выражение (4.34) совпадает с формулой (11) статьи [197].

Жирными кривыми на рисунке 4.7 показано отношение  $\tilde{m}_{\pi^-}/m_\pi$ , где принято  $\Pi_{\pi^-} = \Pi_S$ , для уравнений состояния, использованных в этой работе. В этом случае, согласно формуле (4.32),  $\tilde{m}_{\pi^-}$  фактически зависит только от  $n_b$ . Тонкие кривые соответствуют  $\tilde{m}_{\pi^-}$  с  $\Pi_{\pi^-} = 0$ . Они подтверждают сказанное в начале этого раздела:  $\mu_e$  становится больше голыи массы пиона при  $n_b \sim 0.2 \text{ фм}^{-3}$ ; поэтому во избежание пионизации необходимо учитывать поляризационный оператор.

Вклад S-рассеяния даёт лишь оценку сверху для  $\Pi_{\pi^-}$ . Поэтому настоящие значения  $\tilde{m}_{\pi^-}/m_\pi$  располагаются на графике 4.7 ниже жирных кривых. Получается, что для плотностей между точкой появления гиперонов и плотностью в центре звезды с максимальной массой верхний предел  $\tilde{m}_{\pi^-}$  лежит в диапазоне  $(0.7 - 1.6)m_\pi$ . Для грубых оценок верхним пределом  $\tilde{m}_{\pi^-}$  можно считать просто голую массу  $m_\pi$ . Соответственно, выражение  $1/D_{\pi^-} = -\mathbf{q}^2 - m_\pi^2$  можно использовать в качестве грубой оценки снизу для модуля пропагатора. Оно может быть использовано для оценки снизу скоростей слабых безлептонных реакций. Учёт упомянутых вариаций верхнего предела  $\tilde{m}_{\pi^-}$  может изменить значения скоростей реакций в пределах фактора  $\sim 2$ . В нашей задаче этим можно пренебречь.

Разумеется, учёт других слагаемых в  $\Pi_{\pi^-}$  может сильно изменить итоговые значения  $D_{\pi^-}$  в сравнении с тем, что даёт простое выражение (4.33) с подстановкой  $\tilde{m}_{\pi^-} = m_\pi$ . В более детальном расчёте эффективная масса пиона (4.32) должна быть заменена т.н. эффективной пионной щелью [199], которая может быть много меньше  $m_\pi$ . Соответственно,

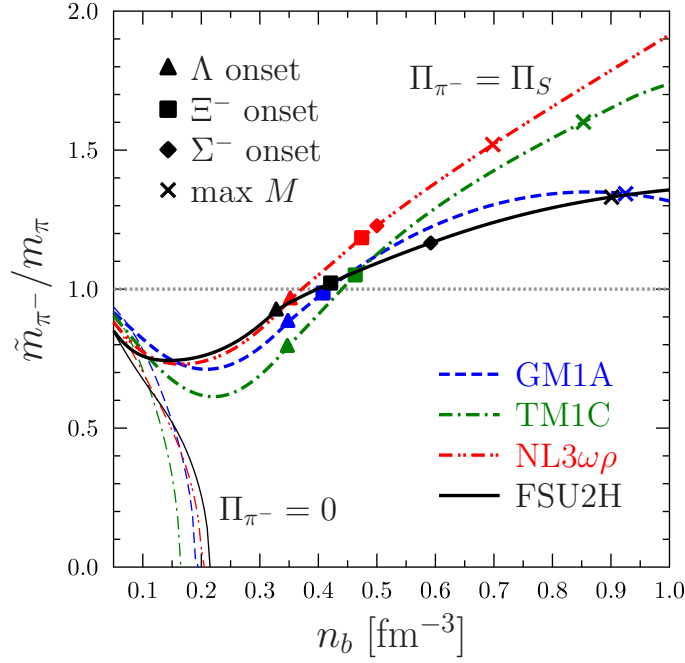


Рис. 4.7. Жирными кривыми показана зависимость эффективной массы отрицательного пиона от концентрации барионов для различных уравнений состояния. Тонкими кривыми показано, что произойдёт, если пренебречь поляризационным оператором в выражении (4.32).

пропагатор пиона сильно возрастет. Однако величина эффективной пионной щели модельно зависима, а её аккуратный расчёт сложен. Поэтому в данной работе мы будем пользоваться выражением (4.33) с  $\tilde{m}_{\pi^-} = m_\pi$ , аналогично тому, как это делалось в [49, 173, 196].

Что делать с пропагаторами нейтральных мезонов,  $\bar{K}^0$  и  $\pi^0$ ? Первая частица является довольно тяжёлым мезоном, и относительное влияние эффектов среды на пропагатор вряд ли будет существенным. Поэтому  $\bar{K}^0$ -мезон может быть надёжно описан вакуумным пропагатором. Второй мезон,  $\pi^0$ , требует более тщательного подхода. На том же уровне надёжности, что и для  $\pi^-$ , можно искусственно положить его пропагатор равным вакуумному.

В конечном счёте, мы пришли к тому, что все пропагаторы в нашем расчёте берутся в виде

$$D_M^{-1} = -q^2 - m_M^2. \quad (4.35)$$

Это может привести к недооценке скоростей изучаемых реакций. Впрочем, такая недооценка частично компенсируется неучтённым вкладом векторных мезонов, см. рассуждение в разделе 4.6.

#### 4.4.4. Скорости реакций

Взяв  $\langle |\mathcal{M}_{12 \leftrightarrow 34}|^2 \rangle$  из формулы (4.29),  $D_M$  из формулы (4.35) и подставив их в соотношение (4.20в), мы получим выражение для  $\mathcal{J}$  (подробности см. в приложении Д). Тогда с помощью формулы (4.22) мы получим выражение для скорости реакции  $\Delta\Gamma_{12 \leftrightarrow 34}$ . В линейном режиме,  $\Delta\mu \ll k_B T$ , его можно представить в терминах величины  $\lambda_{12 \leftrightarrow 34}$  [см. формулу (4.2)] в виде

$$\lambda_{12 \leftrightarrow 34} = \lambda_0^{12 \leftrightarrow 34} \mathcal{W}_{12 \leftrightarrow 34}. \quad (4.36)$$

Здесь (в системе единиц СГС)

$$\lambda_0^{12 \leftrightarrow 34} = \frac{G_F^2 m_N^4}{6\pi^3 \hbar^{10}} (q_{\max} - q_{\min}) (k_B T)^2 \Theta_{12 \leftrightarrow 34} \approx \frac{1.7 \times 10^{45}}{\text{эрг см}^3 \text{ с}} \times \frac{q_{\max} - q_{\min}}{\hbar (3\pi^2 n_0)^{1/3}} T_8^2 \Theta_{12 \leftrightarrow 34}, \quad (4.37a)$$

где  $m_N = 939 \text{ МэВ}$  — масса нуклона<sup>7</sup>,  $T_8 = T/(10^8 \text{ К})$ ,  $\Theta_{12 \leftrightarrow 34} = \Theta(q_{\max} - q_{\min})$ , и, наконец,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{12 \leftrightarrow 34} = \frac{1}{s} \left( \frac{m_\pi}{2m_N} \right)^4 & (X_0 J_0 + X_1 J_1 + X_2 J_2 + \\ & + X'_0 J'_0 + X'_1 J'_1 + X'_2 J'_2 + Y_0 J_3 + Y_1 J_4 + Y_2 J'_4 + Y_3 J_5) \end{aligned} \quad (4.376)$$

является безразмерной функцией  $p_{F1}$ ,  $p_{F2}$ ,  $p_{F3}$  и  $p_{F4}$ . Коэффициенты  $X_k$ ,  $X'_k$  и  $Y_k$  определены в приложении Г, а функции  $J_k$  и  $J'_k$  даны в приложении Д. Функция  $\mathcal{W}$  связана с множителем  $\mathcal{J}$  простым соотношением

$$\mathcal{J} = 16s G_F^2 m_N^4 \mathcal{W}. \quad (4.38)$$

В нелинейном режиме,  $\Delta\mu \gtrsim k_B T$ , скорость реакции задаётся формулой

$$\Delta\Gamma_{12 \leftrightarrow 34} = \lambda_{12 \leftrightarrow 34} \Delta\mu \left[ 1 + \left( \frac{\Delta\mu}{2\pi k_B T} \right)^2 \right]. \quad (4.39)$$

Функция  $\mathcal{W}_{12 \leftrightarrow 34}$  вбирает в себя все специфические свойства процесса  $12 \leftrightarrow 34$  (напомним, что коэффициенты  $X_k$ ,  $Y_k$  и т.д. зависят от констант сильного и слабого взаимодействия в таблице 4.2, которые для разных процессов различны). На рисунке 4.8 показано, как она зависит от плотности вещества  $\rho$  для каждого из пяти процессов (4.1) для всех четырёх используемых моделей. Функция  $\mathcal{W}$  оказывается крайне модельно зависимой: различие между её значениями для разных уравнений состояния при данной плотности может достигать 300%. К счастью, она оказывается медленной функцией  $\rho$ . Поскольку главной целью наших расчётов является их применение к диссипации  $\gamma$ -мод, достаточно предоставить простую аппроксимацию скоростей реакций. Для процессов  $np \leftrightarrow \Lambda p$ ,  $nn \leftrightarrow \Lambda n$ ,  $\Lambda n \leftrightarrow \Xi^- p$  и  $n\Xi^- \leftrightarrow \Lambda \Xi^-$  функцию  $\mathcal{W}$  достаточно считать константой, в то время как для процесса  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$  нужно учитывать возрастание  $\mathcal{W}$  с увеличением  $\rho$ . Предложена следующая приближённая формула:

$$\mathcal{W}_{\text{appr}} = W_0 \left( \frac{x+a}{x+b} \right)^p, \quad x = \frac{\rho - \rho_{\text{start}}}{\rho_0}. \quad (4.40)$$

Здесь  $\rho_{\text{start}}$  обозначает плотность, при которой включается процесс  $12 \leftrightarrow 34$ . Эта плотность может не совпадать с точкой появления  $\Lambda$  или  $\Xi^-$ -гиперонов и определяется как наименьшая плотность, при которой  $\Theta_{12 \leftrightarrow 34} > 0$ . Параметры  $W_0$ ,  $a$ ,  $b$  и  $p$  дают весьма грубую подгонку функций, изображённых цветными линиями на рисунке 4.8. Три последних параметра необходимы только для описания процесса  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$ , остальные процессы достаточно описывать константой  $W_0$ . В таблице 4.3 приведены значения параметров для каждого из рассматриваемых процессов. Сплошные серые линии на рисунке 4.8 показывают, как работает такая подгонка. В последней колонке в таблице 4.3 приведены характерные относительные отклонения  $|\mathcal{W} - \mathcal{W}_{\text{appr}}|/\mathcal{W}$ . В основном, кривые  $\mathcal{W}$  не выходят за пределы этих диапазонов (при этом подчеркнём, что с практической точки зрения лучшая точность требуется при воспроизведении поведения  $\mathcal{W}$  вдали от  $\rho_{\text{start}}$ , а не вблизи). На рисунке 4.8 границы таких диапазонов обозначены тонкими серыми линиями.

Как видно, для быстрой и простой оценки скоростей реакций для произвольного уравнения состояния достаточно взять величину  $\mathcal{W}$  согласно формуле (4.40) и подставить её в выражение (4.36). Величина  $\lambda_0$  легко вычисляется для любого процесса при известных концентрациях сталкивающихся частиц  $n_j$ . Может оказаться востребованной и приближённая формула, не требующая знания концентраций всех сортов частиц, — например, если уравнение состояния задано только феноменологической зависимостью  $P(\rho)$  и плотностью  $\rho_{\text{start}}$ . Для подобных целей предложена следующая аппроксимация для  $\lambda_0$ :

$$\lambda_{0 \text{ appr}} = l_0 \left( \frac{x}{1+cx} \right)^q T_8^2, \quad \lambda_{\text{appr}} = \lambda_{0 \text{ appr}} \mathcal{W}_{\text{appr}}. \quad (4.41)$$

<sup>7</sup> Используется здесь сугубо с целью сделать  $\mathcal{W} \lesssim 1$ .

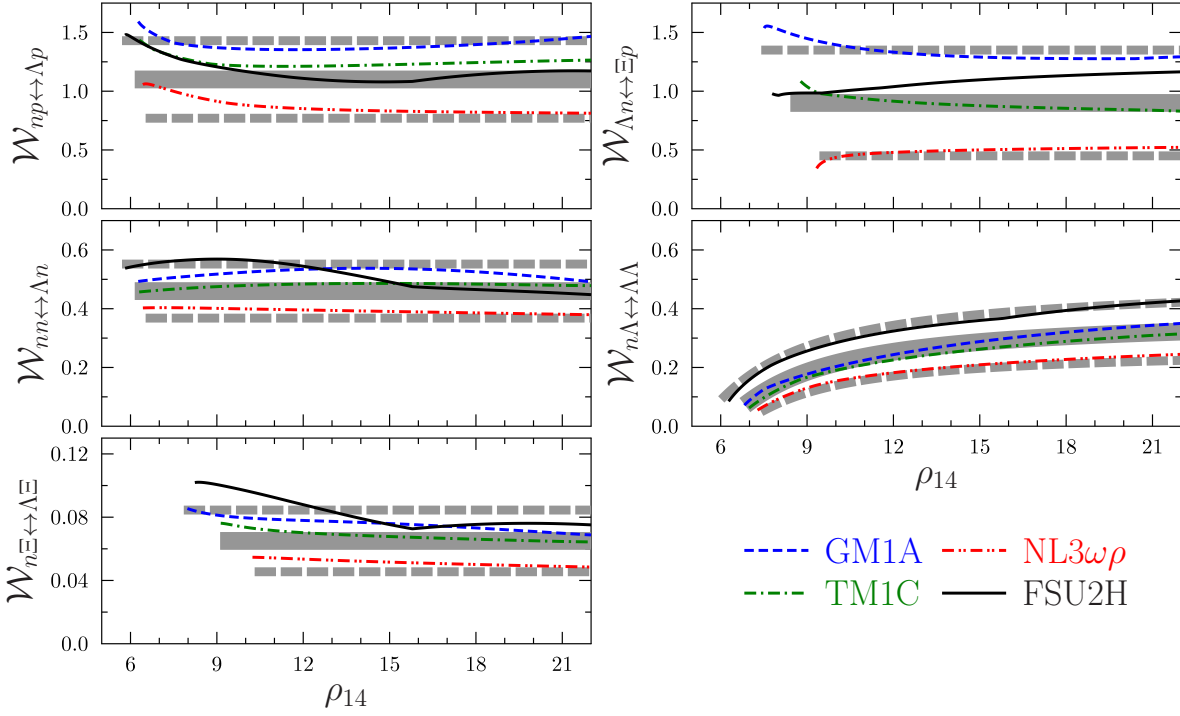


Рис. 4.8. Функции  $\mathcal{W}$  для слабых безлептонных процессов (4.1), рассчитанные для четырёх моделей уравнений состояния. Сплошные серые линии изображают подгонку  $\mathcal{W}_{\text{appr}}$  [формула (4.40)] с параметрами из таблицы 4.3, штриховые серые линии показывают отклонения от  $\mathcal{W}_{\text{appr}}$ , охватывающие (почти) все точно рассчитанные кривые.

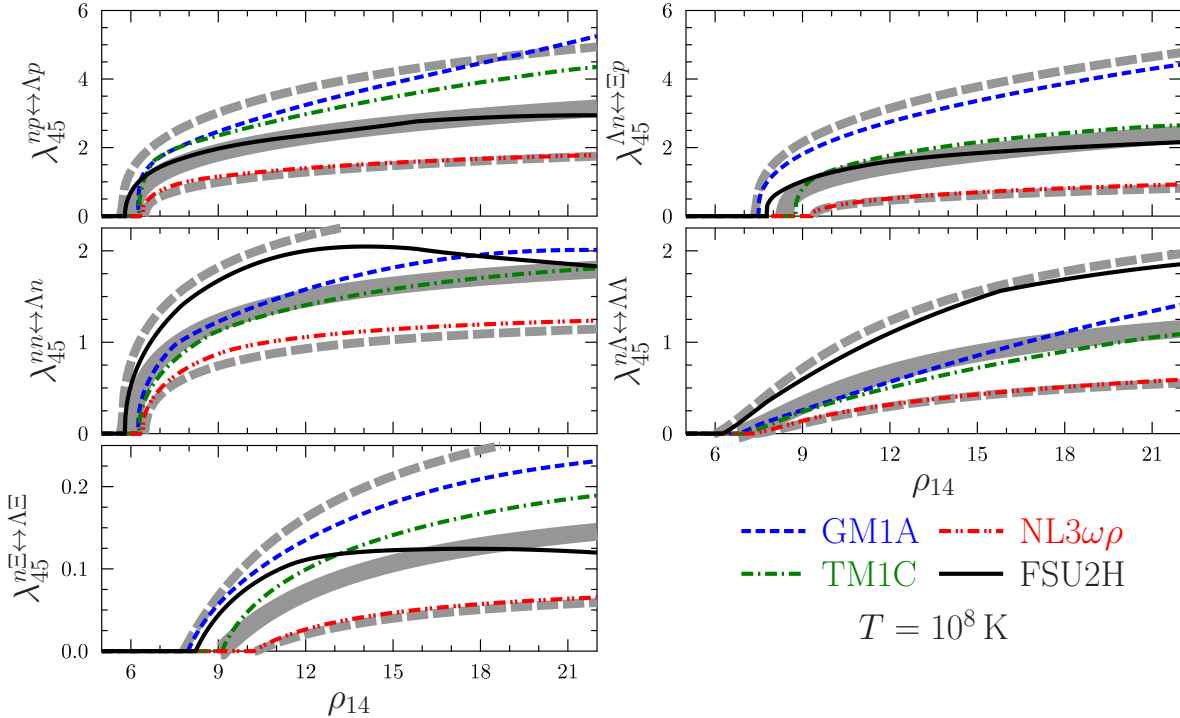


Рис. 4.9. Скорости реакций  $\lambda_{45} = \lambda / (10^{45} \text{ эрг}^{-1} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1})$  для различных моделей уравнений состояния при  $T = 10^8 \text{ K}$ . Сплошные серые линии изображают  $\lambda_{\text{appr}}$  из формулы (4.41) со значениями подгоночных параметров их таблиц 4.3 и 4.4. Штриховые серые линии показывают диапазоны отклонений в рамках ошибок, указанных в этих таблицах (охватывают все возможные значения  $\lambda(\rho)$  для данных уравнений состояния).



Таблица 4.3. Подгоночные параметры в формуле (4.40).

Процесс	$W_0$	$a$	$b$	$p$	погрешность
$np \leftrightarrow \Lambda p$	1.1	—	—	—	30%
$\Lambda n \leftrightarrow \Xi^- p$	0.9	—	—	—	50%
$nn \leftrightarrow \Lambda n$	0.48	—	—	—	20%
$n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$	0.38	0.37	0.87	2	30%
$n\Xi^- \leftrightarrow \Lambda\Xi^-$	0.068	—	—	—	30%

Таблица 4.4. Подгоночные параметры в формуле (4.41).

Процесс	$l_0$	$c$	$q$	погрешность
$np \leftrightarrow \Lambda p$	1.7	0.06	0.36	20%
$\Lambda n \leftrightarrow \Xi^- p$	1.5	0.00	0.36	30%
$nn \leftrightarrow \Lambda n$	2.9	0.3	0.4	20%
$n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$	3.5	0.8	1.0	30%
$n\Xi^- \leftrightarrow \Lambda\Xi^-$	1.6	0.5	1.0	40%

где  $x$  — та же величина, что и в формуле (4.40). Такая аппроксимация зависит только от  $\rho$  и  $\rho_{\text{start}}$ . Рекомендуемые значения параметров  $c$ ,  $q$  и  $l_0$ , как и наибольшие относительные отклонения от подгоняемых величин, представлены в таблице 4.4 для каждого процесса.

На рисунке 4.9 показаны зависимости  $\lambda(\rho)$  для всех процессов и моделей уравнения состояния, использованных в данной работе, при  $T = 10^8$  К. Серые кривые изображают  $\lambda_{\text{appr}}$  (сплошные) и пределы их погрешности (штриховые) вследствие ошибок аппроксимации  $\mathcal{W}$  и  $\lambda_0$ . Например, для процесса  $np \leftrightarrow \Lambda p$  тонкие серые линии соответствуют  $\lambda_{0\text{appr}}^{np \leftrightarrow \Lambda p} \times (1 \pm 0.3) \times \mathcal{W}_{\text{appr}}^{np \leftrightarrow \Lambda p} \times (1 \pm 0.2)$ . Скорости реакций оказываются также модельно-зависимы (как и функции  $\mathcal{W}$ ). Для всех моделей наблюдается отчётливая иерархия<sup>8</sup> характерных значений  $\lambda$ . Процессы  $np \leftrightarrow \Lambda p$  и  $\Lambda n \leftrightarrow \Xi^- p$  оказываются наиболее эффективными. Затем следуют процессы  $nn \leftrightarrow \Lambda n$  и  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$ . Скорость последнего имеет более сильную зависимость от  $\rho$ , так как он более чувствителен к фракции  $\Lambda$ -гиперонов. Процесс  $n\Xi^- \leftrightarrow \Lambda\Xi^-$  наименее интенсивен по нескольким причинам. Во-первых, он наиболее чувствителен к концентрации  $\Xi^-$ -гиперонов, которая мала. Во-вторых, ему соответствуют самые маленькие константы взаимодействия  $B$  и  $g$  (см. таблицу 4.2), и в нашем приближении он не имеет обменного вклада. Аналогичная иерархия наблюдается для  $\mathcal{W}$  на рисунке 4.8. Заметим, что точки  $\rho_{\text{start}}$  (в них на рисунке 4.9 величины  $\lambda$  начинают отличаться от нуля) лежат правее точек появления  $\Lambda$  и  $\Xi^-$ -гиперонов для процессов  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$  и  $n\Xi^- \leftrightarrow \Lambda\Xi^-$  соответственно, поскольку условия  $\Theta_{n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda} > 0$  и  $\Theta_{n\Xi^- \leftrightarrow \Lambda\Xi^-} > 0$  могут удовлетворяться только при достаточно больших  $n_\Lambda$  и  $n_{\Xi^-}$ .

#### 4.4.5. Сравнение каналов обмена одним мезоном и контактного обмена $W$ -бозоном

Сравним скорости реакций, вычисленные с помощью обмена виртуальным мезоном (ОМО) и с помощью контактного обмена  $W$ -бозоном между барионными токами. Только

<sup>8</sup> Подчеркнём, что в сверхтекучем веществе иерархия будет иной.

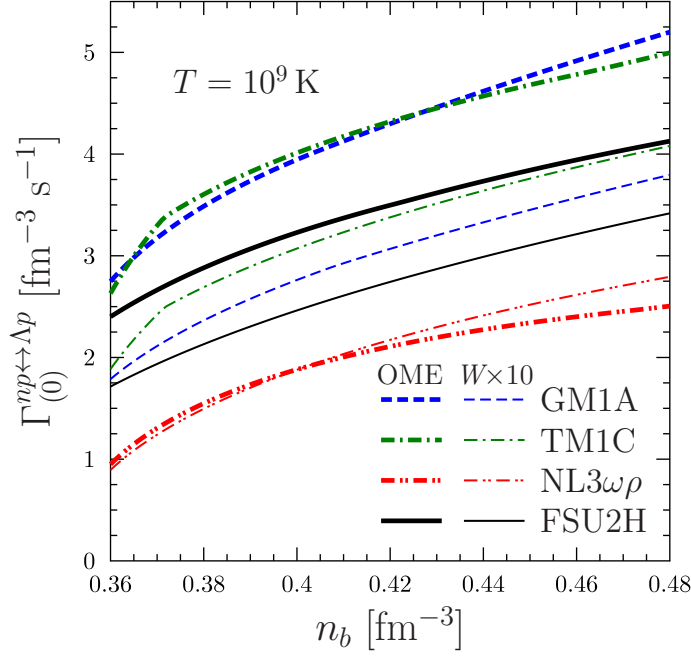


Рис. 4.10. Равновесные скорости  $\Gamma_{(0)}$  реакций, входящих в процесс  $np \leftrightarrow \Lambda p$ . Толстые линии — канал ОМО; тонкие — канал контактного  $W$ -обмена (в последнем случае изображена величина  $10 \times \Gamma_{(0)}$ ).

два процесса могут идти по каналу  $W$ -обмена,  $np \leftrightarrow \Lambda p$  и  $\Lambda n \leftrightarrow \Xi^- p$ . В ходе сравнения мы остановимся на первом из них. Для простоты используем нерелятивистский матричный элемент [171, 173, 174]

$$\langle |\mathcal{M}_{np \leftrightarrow \Lambda p}^W|^2 \rangle = 2G_F^2 \sin^2(2\theta_C) m_n m_p^2 m_\Lambda \chi_{np \leftrightarrow \Lambda p}, \quad (4.42)$$

где  $\theta_C \approx 13.36^\circ$  — угол Кабиббо, а  $\chi_{np \leftrightarrow \Lambda p} = 1 + 3|c_A^{np}|^2 |c_A^{p\Lambda}|^2 \approx 3.47$  включает в себя форм-факторы слабого взаимодействия  $c_A^{np} = -1.26$  и  $c_A^{p\Lambda} = -0.72$  [171, 173].<sup>9</sup> Здесь, так же, как и в работах [171, 173], использованы вакуумные (голые) массы барионов. Матричный элемент в формуле (4.42) не зависит от углов между импульсами реагирующих частиц, так что из формулы (4.20в) находим  $\mathcal{J} = \langle |\mathcal{M}_{np \leftrightarrow \Lambda p}^W|^2 \rangle$ . Скорость реакции в модели  $W$ -обмена можно представить в такой же форме, как и для ОМО-взаимодействия [формула (4.36)]. С помощью выражения (4.38) получим, что скорость реакции  $np \leftrightarrow \Lambda p$ , рассчитанная с помощью  $W$ -обмена, определяется формулой (4.36), где в качестве функции  $\mathcal{W}$  надо брать

$$\mathcal{W}_{np \leftrightarrow \Lambda p}^W = \frac{\sin^2 2\theta_C}{8s_{np \leftrightarrow \Lambda p}} \frac{m_n}{m_N} \frac{m_\Lambda}{m_N} \left( \frac{m_p}{m_N} \right)^2 \chi_{np \leftrightarrow \Lambda p} \approx 0.10. \quad (4.43)$$

Это примерно в 7 – 15 раз меньше, чем получается для процесса  $np \leftrightarrow \Lambda p$  за счёт ОМО, что находится в полном согласии с результатами работы ван Далена и Диперинка [173].

Для более детального сравнения результатов, полученных в этой главе, с работой [173], были рассчитаны равновесные скорости реакций, входящих в процесс  $np \leftrightarrow \Lambda p$ ,  $\Gamma_{(0)}^{np \leftrightarrow \Lambda p}$ , которые в линейном режиме связаны с неравновесной скоростью этого процесса  $\lambda_{np \leftrightarrow \Lambda p}$  выражением

$$\Gamma_{(0)}^{12 \leftrightarrow 34} = \frac{3k_B T}{2\pi^2} \lambda_{12 \leftrightarrow 34}. \quad (4.44)$$

<sup>9</sup> Подчеркнём, что в наших обозначениях  $\langle |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 \rangle$  — квадрат модуля матричного элемента, просуммированный по конечным спиновым состояниям и усреднённый по начальным, который не следует путать с обозначениями в статьях [171] и [173].

Для каждой модели уравнения состояния из раздела 4.2 график этой величины построен на рисунке 4.10. Он частично воспроизводит рисунок 7 из статьи ван Далена и Диперинка [173]: наши толстые линии соответствуют сплошной линии на их рисунке ( $\Gamma_{(0)}^{np \leftrightarrow \Lambda p}$  с использованием ОМО), а наши тонкие линии — их точечной линии ( $10 \times \Gamma_{(0)}^{np \leftrightarrow \Lambda p}$  с использованием контактного  $W$ -обмена). Как и ожидалось, взаимодействие ОМО приводит к темпу реакций, примерно в 10 раз большему, чем контактный  $W$ -обмен. Однако (к нашему удивлению) вычисленные нами  $\Gamma_{(0)}$  систематически оказываются в  $\gtrsim 4$  раза меньше, чем в статье [173], как в ОМО, так и в  $W$ -обменном канале.<sup>10</sup>

#### 4.5. Окна неустойчивости $g$ -мод

Применительно к окнам неустойчивости  $g$ -мод будем следовать методу расчёта из статьи Найара и Оуэна [174]. А именно, мы рассмотрим квадрупольную ( $l = m = 2$ )  $g$ -моду в рамках несверхтекучей нерелятивистской гидродинамики (ср. раздел 4.3), но с радиальными профилями невозмущённых величин  $\rho(r)$ ,  $n_j(r)$  и т.д., рассчитанными путём численного решения уравнений Толмана-Оппенгеймера-Волкова (1.2). Критерий устойчивости  $g$ -моды можно представить в виде

$$\frac{1}{\tau_{\text{GW}}(\nu)} + \frac{1}{\tau_{\zeta}(\nu, \tilde{T})} + \frac{1}{\tau_{\eta}(\tilde{T})} > 0, \quad (4.45)$$

где  $|\tau_{\text{GW}}|$  — характерное время развития неустойчивости моды за счёт гравитационно-волнового излучения (формально  $\tau_{\text{GW}} < 0$ , неустойчивость Чандрасекара-Фридмана-Шутца [164, 165]), а  $\tau_{\zeta} > 0$  и  $\tau_{\eta} > 0$  — характерные времена затухания колебаний за счёт объёмной и сдвиговой вязкостей, соответственно. Эти характерные времена зависят от частоты вращения звезды  $\nu$  и температуры недр  $\tilde{T}$ . Зависимость  $\nu(\tilde{T})$ , для которой правая часть неравенства (4.45) обращается в нуль, соответствует кривой критической частоты на плоскости  $\nu - \tilde{T}$ . Область  $\nu$  и  $\tilde{T}$ , в которой условие (4.45) не выполняется (над кривой критической частоты), называется окном неустойчивости  $g$ -мод. Наблюдение нейтронной звезды с частотой и температурой внутри этого окна маловероятно [6].

Формулы, необходимые для расчёта  $\tau_{\text{GW}}$  и  $\tau_{\zeta}$ , приведены в статье [174]. Для последней величины была использована вязкость  $\zeta$ , вычисленная в двух предыдущих разделах [выражения (4.13) и (4.14), дополненные формулами (4.36) и (4.37) для необходимых неупругих процессов]. Метод вычисления  $\tau_{\eta}$  описан в статье [200]. Основной вклад в сдвиговую вязкость  $\eta$  дают лептоны,  $e$  и  $\mu$ , независимо от того, в сверхтекучем или нормальном состоянии находятся барионы [67]. Более того, если протоны сверхтекучие и, соответственно, сверхпроводящие, то лептонная сдвиговая вязкость  $\eta$  усиливается [67, 201]. Поскольку затухание колебаний за счёт сдвиговой вязкости наиболее значительно при низких температурах, когда протоны, скорее всего, сверхпроводящие, для  $\eta$  необходимо использовать «сверхпроводящее» выражение. К счастью, для  $\eta$  при наличии сверхпроводимости существует оценка сверху, не зависящая от профиля критической температуры протонов («лондоновский предел»,  $T_{\text{cp}} \gg 10^9$  К; подробности и расчётную формулу для  $\eta$  см. в [201]). Численный расчёт окон неустойчивости производился с помощью программы, написанной М.Е. Гусаковым и оптимизированной диссертантом.

На рисунке 4.11 показаны окна неустойчивости для различных моделей нейтронных звёзд с гиперонными ядрами. Два верхних графика соответствуют несверхтекучим ядрам

<sup>10</sup> В статье [173] в формулах для квадратов матричных элементов реакций по контактному каналу есть опечатка. Если в левой части равенства стоит просто  $|\mathcal{M}|^2$ , то в правой — сумма этой величины по всем спиновым состояниям, большая в 16 раз. Возможно, в процессе вычислений авторами [173] была допущена аналогичная неточность.

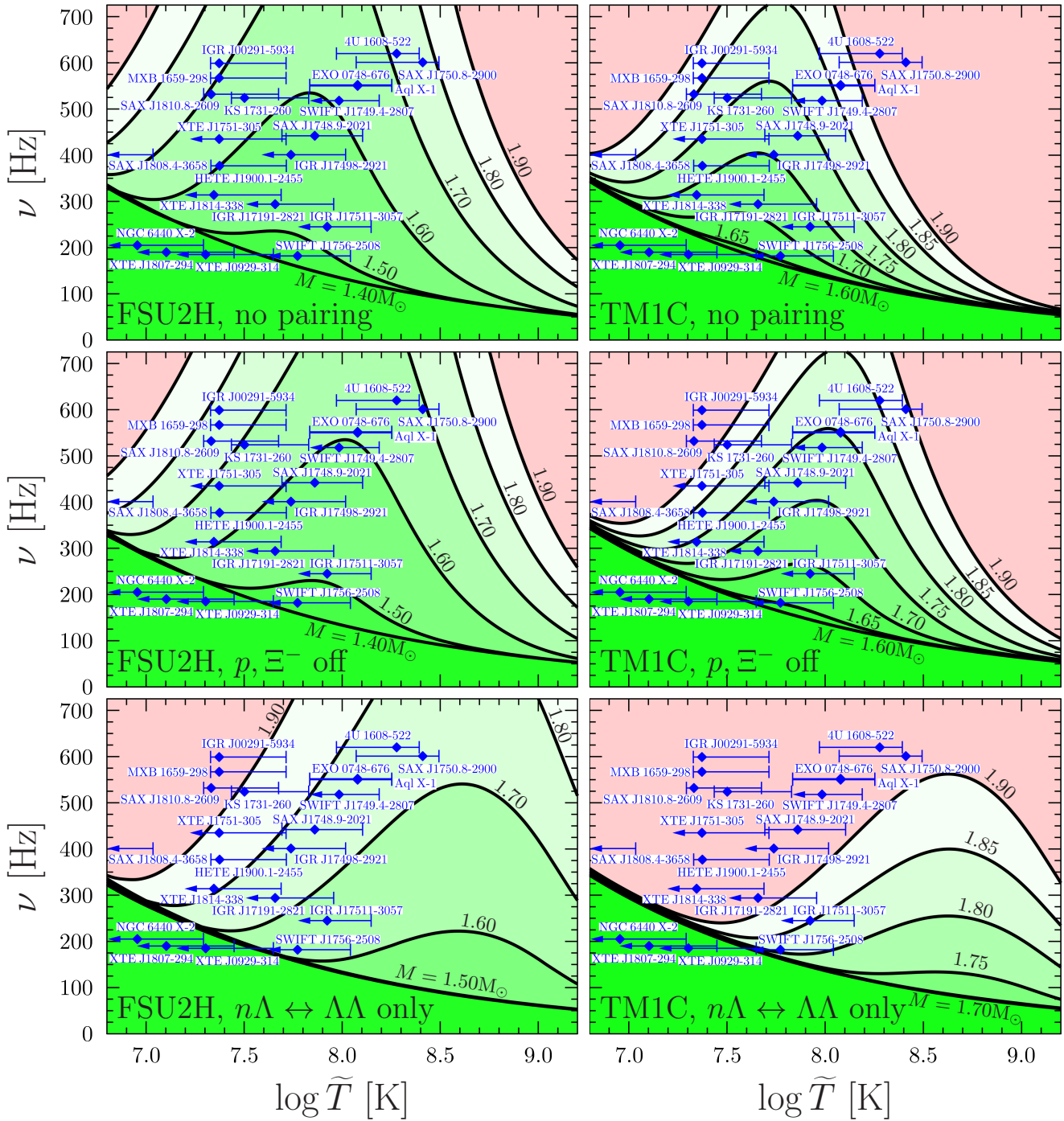


Рис. 4.11. Примеры кривых критических частот для уравнений состояния FSU2H (слева) и TM1C (справа) для различных масс нейтронных звезд. Для каждой массы неустойчивая область частот  $\nu$  и температур  $\tilde{T}$  (окно неустойчивости) находится над критической кривой. На каждом графике нижняя кривая фактически является критической для звезд, имеющих слишком малую массу для образования гиперонов. На верхних графиках представлены окна неустойчивости для случая, когда все процессы из набора (4.1) включены (без учёта сверхтекучести). Средние графики иллюстрируют случай выключенных реакций с участием протонов (консервативный учёт сверхтекучести  $p$  и  $\Xi^-$ ). Наконец, нижние графики изображают частичный учёт сверхтекучести  $n$  (процесс  $pn \leftrightarrow \Lambda n$  выключен, а процесс  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$  без изменений). Синие кресты ошибок обозначают LMXB с измеренными  $\nu$  и оцененными  $\tilde{T}$ , подробнее см. [202] и сноску 11.

звёзд, для которых и рассчитывалась объёмная вязкость в предыдущих разделах. Мы ограничиваемся нейтронными звёздами с  $M \leq 1.9 M_{\odot}$ , чтобы избежать необходимости рассматривать эффекты, связанные с наличием  $\Sigma^{-}$ -гиперона.

С помощью незначительных изменений в описанной схеме расчёта можно оценить, насколько сверхтекучесть исказит картину окон неустойчивости. Как известно, сверхтекучесть того или иного сорта барионов катастрофически подавляет диссипативные процессы, связанные с этими барионами [172], и значительно искажает гидродинамику барионного вещества. В частности, в сверхтекучем веществе связь между скоростями реакций, объёмной вязкостью и характерным временем затухания колебаний будет существенно иной [175], — но этот эффект учесть крайне сложно. Поэтому будем пользоваться «несверхтекучими» выражениями для связи  $\tau_{\zeta}$ ,  $\zeta$  и скоростей слабых процессов  $\lambda$ , но при расчёте последней величины учтём подавление реакций сверхтекучестью. Широко распространено мнение [4, 15], что для нейтральных барионов в ядрах нейтронных звёзд критические температуры сверхтекучести меньше, чем для заряженных. Поэтому среди рассматриваемых здесь процессов в первую очередь окажутся подавлены те, что протекают с участием протонов  $p$  и  $\Xi^{-}$ -гиперонов. Консервативный способ учёта этого эффекта — искусственное «выключение» всех таких процессов (в нашем случае  $np \leftrightarrow \Lambda p$ ,  $\Lambda n \leftrightarrow \Xi^{-}p$  и  $n\Xi^{-} \leftrightarrow \Lambda\Xi^{-}$ ). На двух средних графиках на рисунке 4.11 изображены окна неустойчивости, при построении которых полный темп реакций  $\lambda$  определялся лишь оставшимися процессами,  $nn \leftrightarrow \Lambda n$  и  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$ .

Кроме того, есть основания считать, что в силу относительной неэффективности  $\Lambda\Lambda$ -взаимодействия [203] критическая температура  $\Lambda$ -гиперонов существенно ниже, чем нейтронов [204]. Сверхтекучесть нейтронов гораздо сильнее подавляет процесс  $nn \leftrightarrow \Lambda n$ , чем  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$ . Поэтому частичный учёт нейтронной сверхтекучести можно произвести, выключив процесс  $nn \leftrightarrow \Lambda n$  и считая, что скорость реакций определяется только процессом  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$ . Построенные таким образом окна неустойчивости показаны на двух нижних графиках на рисунке 4.11.

На рисунке 4.11 приведены графики окон неустойчивости для уравнений состояния FSU2H и TM1C. Аналогичные графики для модели GM1A похожи на то, что получается для FSU2H. В свою очередь, вид окон неустойчивости для NL3 $\omega\rho$  схож с TM1C, с той лишь разницей, что в первой модели гиперонизация начинается при существенно более высоких массах звёзд (см. таблицу 4.1), а рост пика критической частоты с массой происходит медленнее. Так, например, звезда с уравнением состояния NL3 $\omega\rho$  и массой  $M = 2.55 M_{\odot}$  и звезда с уравнением состояния TM1C и массой  $M = 1.9 M_{\odot}$  имеют практически одинаковые области устойчивости на диаграмме  $\nu - \tilde{T}$ . Но если первая из них превосходит массу, при которой в ядре звезды появляются гипероны, на  $0.6 M_{\odot}$ , то вторая — лишь на  $0.3 M_{\odot}$ . Разница в темпе роста пика критической частоты с массой объясняется тем, что уравнение состояния NL3 $\omega\rho$  даёт сравнительно малую фракцию гиперонов, меньше, чем любое из трёх оставшихся уравнений состояния.

Анализируя рисунок 4.11, можно сделать следующие выводы. Во-первых, разные модели уравнений состояния приводят к различным окнам неустойчивости при одной и той же массе звезды. Впрочем, форма кривых критической частоты во всех случаях одинакова.

Во-вторых, для каждой из рассмотренных моделей уравнения состояния существует такая масса звезды, для которой при температурах  $\tilde{T} \sim (0.1 - 3) \times 10^8$  К устойчивой оказывается практически вся область частот, показанная на графиках на рисунке 4.11 (кроме нижнего правого). Эта область особенно важна для физики г-мод, поскольку в неё попадают наблюдаемые объекты (LMXB), объяснение которых в рамках существующих моделей нейтронных звёзд затруднено (см. раздел 4.1). Эти звёзды показаны на рисунке 4.11 синими крестами ошибок.<sup>11</sup> Все эти рентгеновские источники попадают внутрь стабильных областей частот

<sup>11</sup> Это те же рентгеновские источники, что и в статье [202], но с добавлением SAX J1810.8–2609 ( $\nu$  из [205], температура  $\tilde{T}$  вычислена по данным [206]). Для всех источников температура  $\tilde{T}$  вычислена по из-

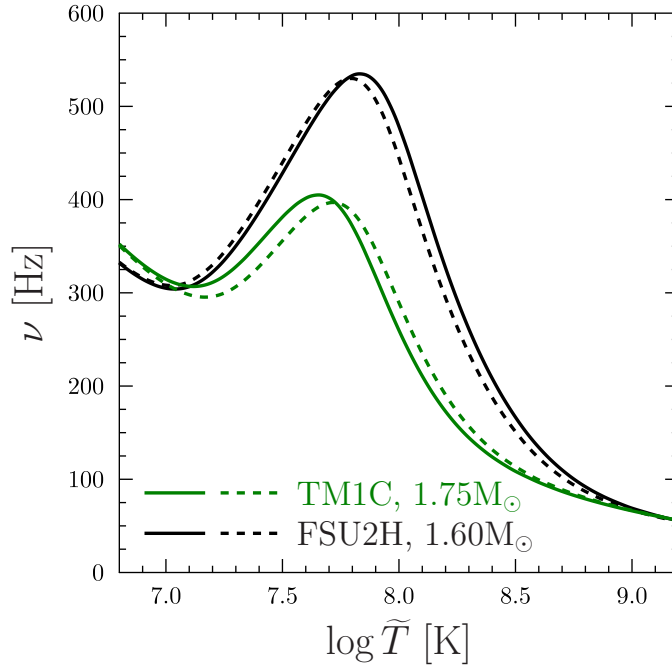


Рис. 4.12. Сравнение кривых критической частоты вращения звезды, вычисленных с использованием точно рассчитанной объёмной вязкости (сплошные линии) и подгоночных формул (4.15), (4.40) и (4.41) (штриховые линии). Плотность гиперонизации  $\rho_\Lambda$  взята из таблицы 4.1 для каждого уравнения состояния. При использовании аппроксимации (4.15) параметр  $\zeta_{\max}$  был умножен на 1.4 для FSU2H и на 0.8 для TM1C. Все процессы из набора (4.1) включены.

и температур для достаточно массивных нейтронных звёзд, даже если процессы с участием  $p$  и  $\Xi^-$  полностью подавлены сверхтекучестью. В частности, для модели FSU2H почти все объекты охватываются кривыми критической частоты для звёзд с массой не выше  $1.7 M_\odot$  и развитой сверхтекучестью заряженных барионов. В этом результаты нашей работы отличаются от результатов [174], где подход к слабым безлептонным процессам требовал хотя бы малое количество несверхпроводящих заряженных барионов для стабилизации нужного диапазона  $\nu$  и  $\tilde{T}$ . В отличие от работы [174], мы учитываем влияние процесса  $nn \leftrightarrow \Lambda n$  (исключён из рассмотрения в [174]), который является основным «источником» объёмной вязкости в случае сверхтекучих заряженных частиц. Другое отличие наших результатов от полученного в статье [174] заключается в том, что в [174] максимум критических частот получался при  $T \gtrsim 10^9$  K, в то время как в наших расчётах он достигается при  $T \sim 10^8$  K (кроме случая, когда разрешён только процесс  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda n$ ). Это следствие использования ОМО-модели слабого взаимодействия при расчёте скоростей реакций, — в статье [174] использовался менее интенсивный контактный  $W$ -обмен.

Разумеется, выключение всех процессов, кроме  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda n$ , является крайне грубым приближением для изучения эффектов сверхтекучести нейтронов. Когда температура вещества в какой-либо области ядра звезды падает ниже критической температуры нейтронов, оба процесса, которые имеет смысл рассматривать в предположении сильной сверхтекучести заряженных частиц, —  $nn \leftrightarrow \Lambda n$  и  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda n$ , — оказываются сильно подавлены в этой области. При этом последний процесс подавлен в меньшей степени, чем первый. Напротив, в той области ядра звезды, где температура слишком высока для нейтронной сверхтекучести, ни один из этих процессов не подавлен. Детальное рассмотрение влияния этих явлений на подавление неустойчивости  $\gamma$ -мод колебаний нейтронных звёзд выходит за рамки данной работы.

В разделах 4.3 и 4.4 представлены простые подгоночные выражения для объёмной вязкомерной эффективной температуре поверхности в предположении, что  $M = 1.4 M_\odot$  и  $R = 10$  км. Подробнее об этом см. [202].

сти. Схема их использования следующая: надо взять  $\zeta_{\max}$  и  $\lambda_{\max}$  из формулы (4.15), скорости реакций из комбинаций формул (4.36), (4.40) и (4.41), и подставить их в формулу (4.13). Получившаяся аппроксимация зависит от  $T$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{\Lambda}$  (точки появления гиперонов) и различных порогов включения неупругих процессов  $\rho_{\text{start}}$  (для процессов  $np \leftrightarrow \Lambda p$  и  $pn \leftrightarrow \Lambda n$  можно считать  $\rho_{\text{start}} \approx \rho_{\Lambda}$ ).

При заданной модели уравнения состояния значение  $\rho_{\Lambda}$  определяется тривиально. Пороговые значения  $\rho_{\text{start}}$  необходимо аккуратно подбирать для каждого процесса, если с помощью предложенных аппроксимаций нужно воспроизвести окна неустойчивости для данного уравнения состояния. Строго говоря, параметр  $\zeta_0$  в подгоночном выражении (4.15) для максимальной объёмной вязкости тоже нужно подбирать с хорошей точностью. Предложенное в разделе 4.3 значение  $\zeta_0 = 6.5 \times 10^{30} \text{ г см}^{-1} \text{ с}^{-1}$ , усреднённое по всем четырём используемым здесь моделям, имеет ограниченную применимость — для одних моделей вязкость слишком сильно недооценивается, для других переоценивается. Чтобы сколько-нибудь удовлетворительно воспроизвести свойства конкретного уравнения состояния, необходимо подобрать  $\zeta_0$  специально для него. Например, модель FSU2H требует  $\zeta_0 \approx 1.4 \times$  (усреднённое значение), а для GM1A, TM1C и NL3 $\omega\rho$  необходимо использовать корректирующие множители 1.45, 0.8 и 0.55, соответственно. С учётом этих поправок, описанная подгонка объёмной вязкости позволяет весьма точно воспроизвести кривые критической частоты с рисунка 4.11, как это показано на рисунке 4.12. Более высокой точности можно добиться, если подобрать параметр  $s$  в формуле (4.15) отдельно для каждого уравнения состояния.

## 4.6. Нерешённые проблемы

Вычисления, проведённые в данной главе, используют большое количество упрощений и допущений. Некоторые из них могут привести к существенному отличию полученных результатов от истинных значений исследуемых величин. В принципе, от этих упрощений можно было бы отказаться — правда, сложность расчёта при этом многократно возрастает. Среди сделанных упрощений необходимо подробно обсудить четыре: (i) упрощённое вычисление скоростей реакций; (ii) искусственно ограниченный гиперонный состав вещества; (iii) практически полное отсутствие учёта сверхтекучести барионов; (iv) упрощённый метод расчёта окон неустойчивости  $\gamma$ -мод.

(i) Первое значительное упрощение нашего вычисления величин  $\lambda_{12 \leftrightarrow 34}$  заключается в рассмотрении обмена только самым лёгким из возможных мезонов. В нашем случае это  $\pi$ -мезон ( $m_{\pi} = 139 \text{ МэВ}$ ) для процессов  $np \leftrightarrow \Lambda p$ ,  $pn \leftrightarrow \Lambda n$ ,  $n\Xi^- \leftrightarrow \Lambda\Xi^-$  и  $\Lambda n \leftrightarrow \Xi^- p$  и  $K$ -мезон ( $m_K = 494 \text{ МэВ}$ ) для процесса  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$ . Оба этих псевдоскалярных мезона ответственны за притяжение барионов на больших расстояниях. С одной стороны, именно взаимодействие на больших расстояниях наиболее важно в грубом (борновском) приближении, а современная физика нейтронных звёзд ещё не нуждается в особо точном расчёте величин  $\lambda$ . С другой стороны, характерное расстояние между барионами в ядре нейтронной звезды составляет  $\lesssim 1 \text{ фм}$ , а именно на таких расстояниях потенциал перехода для слабых безлептонных процессов начинает существенно отклоняться от того, что предсказывает модель ОМО (по крайней мере, в веществе атомных ядер [187, 190]). Поэтому не ясно, достаточно ли приближения ОМО для астрофизических целей.

Как правило, учёт более тяжёлых мезонов (в первую очередь  $\rho$ -мезона с массой 770 МэВ) не меняет порядка величины скорости реакций. Скорость распада гиперонов в атомных ядрах, вычисленная с учётом только обмена  $\pi$ -мезоном (а также без учёта корреляций на малых расстояниях, ядерных форм-факторов и взаимодействия конечных состояний), оказывается всего в 2–3 раза меньше, чем результаты расчётов в мезонном подходе [186, 191]. В контексте нейтронных звёзд сравнение  $\pi$ - и  $(\pi + \rho)$ -обменов было проведено Фриманом и Максвеллом [49] для тормозного излучения нейтринных пар при столкновениях нейтронов.

Согласно их результату,  $\pi$ -обмен приводит к переоценке скорости такой реакции в 2–5 раз в сравнении с  $(\pi + \rho)$ -обменом. Аналогичный эффект был получен при использовании реалистичной матрицы рассеяния вместо однопионного обмена (детали см. в обзоре [67]).

Другой недостаток заключается в наивном рассмотрении влияния эффектов среды на пропагатор мезонов  $D_M$ , в основном — пионов ( $M = \pi$ ). Как указано в разделе 4.4.3, используемое нами выражение для пропагаторов (4.35) основано на учёте вклада  $S$ -рассеяния в поляризационный оператор  $\Pi$  (хотя даже это делается упрощённо), но вклад  $P$ -рассеяния в  $\Pi$  при этом практически игнорируется. Это приводит к существенной недооценке  $D_M$  и, как следствие, скоростей реакций  $\lambda$ . Различные попытки учёта модификации взаимодействия барионов эффектами среды приводят к противоречивым результатам [67]. Согласно некоторым из них, пропагатор модифицируется настолько сильно, что скорости реакций возрастают на несколько порядков [72, 199].

Занижены или завышены, с учётом всего выше сказанного, наши результаты для скоростей реакций? Если эффекты среды для пропагаторов  $D_M$  близки к тем, что описаны в обзоре [72], то полученные значения  $\lambda$  определённо занижены. Если эффекты среды не имеют столь катастрофического влияния, ситуация менее определённая. Однако кажется предпочтительным считать, что эффекты перенормировки  $D_M$  в среде будут сильнее, чем влияние тяжёлых мезонов, и истинные скорости реакций будут выше, чем получено в данной работе.

(ii) В процессе всех расчётов мы предполагали наличие только  $\Lambda$  и  $\Xi^-$ -гиперонов в ядре звезды. Однако для большого числа моделей уравнения состояния в ядре звезды появляются  $\Sigma^-$ -гипероны (например, в глубине ядер очень массивных звёзд с уравнениями состояния NL3 $\omega\rho$  и FSU2H; см. также [108, 177, 178]). Связь между  $\zeta$  и  $\lambda$ , данная в разделе 4.3, в этом случае будет по-прежнему справедлива, но полная скорость реакций  $\lambda$  должна вычисляться с учётом слабых безлептонных процессов с участием  $\Sigma^-$ -гиперона. Она может существенно отличаться от случая, когда в веществе есть только  $\Lambda$  и  $\Xi^-$ -гипероны. Выражения для скорости реакций  $\lambda_{12 \leftrightarrow 34}$ , приведённые в разделе 4.4, применимы для любого слабого безлептонного процесса  $12 \leftrightarrow 34$ , протекающего за счёт обмена псевдоскалярным мезоном. Однако найти в литературе все необходимые константы взаимодействия оказывается затруднительным.

(iii) Пожалуй, главный недостаток нашей работы — (почти) полное отсутствие учёта сверхтекучести барионов. Во-первых, сверхтекучесть изменяет скорости реакций. Это обычно учитывают посредством введения факторов подавления реакций  $\mathcal{R}$  [172]. Некоторые из них уже рассчитаны и аппроксимированы удобными аналитическими формулами, другие (в частности,  $\mathcal{R}$  для процесса  $nn \leftrightarrow \Lambda n$  при сверхтекучих нейтронах) рассчитаны, но не опубликованы, третьи ещё не рассчитаны. Подчеркнём, что грубый учёт факторов  $\mathcal{R}$  посредством выключения процессов, вовлекающих сверхтекучие барионы, является слишком упрощённым и может качественно исказить картину окон неустойчивости. Во-вторых, сверхтекучесть изменяет связь между объёмной вязкостью и скоростями реакций. Более того, количество кинетических коэффициентов объёмной вязкости в сверхтекучем веществе увеличивается. Эти эффекты проанализированы в работе [175]. В-третьих, сверхтекучесть влияет на гидродинамику  $g$ -мод. Попытки исследовать эту проблему предпринимались [207–210], но к настоящему моменту она не решена полностью.

(iv) Последний недочёт, которому мы уделим внимание, частично перекрывается с предыдущим — это наивное вычисление критических частот вращения звёзд для устойчивости  $g$ -мод. Помимо того, что характерные времена подавления и развития неустойчивости [см. формулу (4.45)] отличаются в сверхтекучем веществе, сам по себе « $\tau$ -подход» к вычислению кривых критических частот является лишь оценкой. Принято считать, что он достаточно точен в нормальном веществе, но при наличии сверхтекучести такой подход требует пересмотра [210]. Кроме того, характерное время  $\tau_\zeta$ , описывающее подавление неустойчивости за счёт вязкости, рассчитано с использованием метода из статьи Найара и Оуэна [174]. В част-



ности, использована их аппроксимационная формула для усреднённого по углам квадрата дивергенции поля скоростей  $\gamma$ -моды  $(\text{div } \mathbf{u})^2$ , которая была получена для моделей нейтронных звёзд с определёнными уравнениями состояния. В число последних не входит ни одна из использованных здесь моделей, и степень применимости указанной формулы к нашим моделям звёзд неизвестна. Наконец, в расчётах мы использовали нерелятивистскую гидродинамику (без учёта искривления пространства-времени), которая также лишь приближённо справедлива в применении к ядрам нейтронных звёзд.

## 4.7. Выводы к главе 4

В данной главе представлены следующие результаты:

1. Рассчитана объёмная вязкость  $\zeta$  вещества ядер нейтронных звёзд с гиперонами. Рассмотрены четыре современных модели уравнения состояния вещества, в которых ядро звезды имеет  $pre\mu\Lambda\Xi^-$ -состав, в противоположность большинству предыдущих работ [171–174] (впрочем, см. [211]). В таком веществе объёмная вязкость определяется следующими слабыми безлептонными процессами:  $np \leftrightarrow \Lambda p$ ,  $nn \leftrightarrow \Lambda n$ ,  $n\Lambda \leftrightarrow \Lambda\Lambda$ ,  $n\Xi^- \leftrightarrow \Lambda\Xi^-$  и  $\Lambda n \leftrightarrow \Xi^- p$ . Из них последние три рассмотрены в контексте нейтронных звёзд впервые, а последние два, насколько нам известно, ранее вообще не изучались в литературе. Рассчитаны скорости этих процессов  $\lambda_{12\leftrightarrow 34}$  [в соавторстве с М.Е. Гусаковым [180]; см. формулы (4.36), (4.37) и приложения Г и Д]. Для этого использована модель слабого неупругого взаимодействия барионов за счёт обмена мезоном, так же, как это сделано в статье [173]. Подтверждён результат работы [173], согласно которому слабые безлептонные процессы в нейтронных звёздах идут по каналу обмена мезоном гораздо эффективнее, чем по каналу контактного обмена  $W$ -бозоном (который в основном используется в литературе, посвящённой объёмной вязкости нейтронных звёзд, например, [171, 174]). Аналогично статье [175], получены выражения, связывающие вязкость  $\zeta$  и скорости слабых процессов  $\lambda$  в несверхтекучих ядрах нейтронных звёзд с произвольным гиперонным составом вещества [формулы (4.13) и (4.14)].
2. Вычисленная вязкость  $\zeta$  применена для расчёта окон неустойчивости  $\gamma$ -мод (согласно методу из [174]; программа вычисления границ окон неустойчивости любезно предоставлена М.Е. Гусаковым). Показано, что положения максимумов критических частот вращения нейтронных звёзд сдвинуты в область более низких температур по сравнению с предыдущими расчётами (ср. рисунок 4.11 и, например, статью [174]), даже если предположить сильную сверхпроводимость заряженных частиц и умеренную сверхтекучесть нейтральных частиц в ядре звезды. Так происходит, поскольку в нашем расчёте использован канал слабого взаимодействия за счёт обмена мезоном, а не контактный обмен  $W$ -бозоном, как в статье [174]. Сдвиг максимумов кривых критических частот в область низких температур позволяет объяснять наблюдаемые свойства нейтронных звёзд в составе маломассивных рентгеновских двойных систем в рамках предположения о наличии гиперонов в ядрах нейтронных звёзд.
3. Предложены простые аппроксимационные формулы для вязкости  $\zeta$  и скоростей реакций  $\lambda$  в виде элементарных функций плотности  $\rho$  и температуры  $T$  среды. А именно, для скорости каждого процесса  $\lambda_{12\leftrightarrow 34}$  можно воспользоваться формулами (4.36), (4.40) и (4.41) с параметрами, взятыми из таблиц 4.3 и 4.4 [или формулами (4.36), (4.37a) и (4.40), если известны значения концентраций всех частиц]. В свою очередь, чтобы оценить  $\zeta$ , можно воспользоваться формулами (4.13) и (4.15) совместно с приближёнными формулами для  $\lambda$ . Однако такой аппроксимацией следует пользоваться с осторожностью: если нужно воспроизвести кривые критической частоты для конкретной модели

гиперонного уравнения состояния, для него необходимо подобрать свои параметры  $\zeta_0$  и  $\rho_\Lambda$ ; см. пример в конце раздела 4.5 и в подписи к рисунку 4.12. То значение  $\zeta_0$ , которое приведено в разделе 4.3, может быть полезно для исследования г-мод в рамках феноменологических уравнений состояния без детализированной микрофизики гиперонов.

Результаты данной главы вносят существенный вклад в изучение проблемы устойчивости г-мод колебаний нейтронных звёзд. Фактически показано, что решение парадокса г-мод (см. раздел 4.1) с помощью учёта гиперонов более реалистично, чем считалось ранее. Материалы данной главы опубликованы в статьях [180, 181] и представлены на конференциях «PHAROS WG1+WG2 meeting “Neutron stars: the equation of state, superconductivity, superfluidity and transport coefficients”» (2018, Coimbra University), «Физика.СПб/2019» (ФТИ. им. А.Ф. Иоффе) и «Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра» (2019, ИКИ РАН).

## Заключение

В диссертации выполнены следующие исследования в области физики нейтронных звёзд:

- Исследование остывания нейтронных звёзд в рамках различных моделей уравнения состояния и сверхтекучести барионов в ядрах звёзд. Теоретическая интерпретация наблюдений остывающих нейтронных звёзд.
- Изучение свойств нейтронных звёзд с максимальной массой в зависимости от модели уравнения состояния сверхплотного вещества. Проверка этих моделей с помощью сопоставления с наблюдательными и теоретическими ограничениями, существующими для максимально массивных нейтронных звёзд.
- Исследование процессов в недрах нейтронных звёзд с магнитным полем. Расчёт движений среды в недрах звёзд с магнитным полем. Изучение влияния магнитного поля на свойства вещества нейтронных звёзд.
- Изучение нейтронных звёзд с гиперонными ядрами. Вычисление объёмной вязкости и исследование затухания колебаний таких звёзд за счёт неравновесных процессов с участием гиперонов. Анализ подавления неустойчивости колебаний таких звёзд по отношению к излучению гравитационных волн. Интерпретация наблюдений нейтронных звёзд в маломассивных рентгеновских двойных системах.

### Основные результаты, полученные в диссертации:

1. Получены аппроксимации нейтринной светимости и теплоёмкости нейтронных звёзд удобными аналитическими функциями массы и радиуса звезды. Эти аппроксимации универсальны для широкого класса уравнений состояния ядер нейтронных звёзд. Для теплоёмкости рассмотрены парциальные вклады нейтронов, протонов и лептонов, а также полная теплоёмкость несверхтекучего вещества и теплоёмкость в случае сильной протонной сверхтекучести. Для нейтринной светимости рассмотрены вклады прямого и модифицированного урка-процессов, а также вклад тормозного излучения нейтрино при столкновениях нейтронов. На основе полученных аппроксимаций предложено аналитическое выражение для кривых остывания нейтронных звёзд, описывающее нейтринную и фотонную стадии остывания единым образом.
2. Метод модельно-независимого анализа остывания нейтронных звёзд усовершенствован и обобщён на фотонную стадию остывания. Показано, что качественное влияние сверхтекучести нуклонов в ядре звезды на её остывание может быть описано с помощью двух параметров (факторов остывания). Исследована связь факторов остывания с известными свойствами моделей сверхтекучести нуклонов. С помощью данного метода проведён анализ остывания 12 нейтронных звёзд с измеренными температурами поверхности и возрастами. Для некоторых из этих звёзд (в частности, RX J1856–3754, ХММУ J1732–344 и пульсара Вела) получены ограничения на свойства сверхтекучести нуклонов в недрах звёзд и массу аккрецированного материала в теплоизолирующих оболочках этих звёзд. Проведено подробное (с учётом результатов детального анализа теплового рентгеновского спектра) исследование остывания звезды ХММУ J1732–344 и пульсара Вела. Изучена возможность использования теории остывания для наложения ограничений на массы и радиусы нейтронных звёзд.
3. Выполнен самосогласованный расчёт квазистационарных потоков вещества, возникающих в ядре нейтронной звезды с осесимметричным магнитным полем в предположении,

что ядро звезды состоит из нейтронов, протонов и электронов. Показано, что скорости движения вещества как целого многократно превосходят диффузионные скорости всех сортов частиц. Этот результат требует пересмотра распространенной в литературе картины эволюции магнитного поля в ядре нейтронной звезды. Показано, что увлечение магнитного поля потоком вещества в ядре может вносить существенный вклад в эволюцию поля в ядрах магнитаров.

4. Рассчитана электронная сдвиговая вязкость за счёт рассеяния электронов на атомных ядрах в коре нейтронной звезды с сильным магнитным полем. Исследовано поведение коэффициентов сдвиговой вязкости в зависимости от силы магнитного поля и свойств вещества коры.
5. Рассчитаны скорости слабых безлептонных процессов в веществе ядер нейтронных звёзд с  $\Lambda$  и  $\Xi^-$ -гиперонами. Рассмотрен полный набор слабых безлептонных процессов, протекающих в таком веществе за счёт обмена одним виртуальным мезоном. Рассчитана объёмная вязкость вещества гиперонных ядер нейтронных звёзд. Результаты аппроксимированы аналитическими формулами, позволяющими легко оценивать объёмную вязкость гиперонного вещества для широкого класса уравнений состояния ядер нейтронных звёзд.
6. Вычисленная объёмная вязкость применена для расчёта окон неустойчивости г-мод колебаний нейтронных звёзд с гиперонными ядрами. Полученные окна неустойчивости сопоставлены с данными наблюдений нейтронных звёзд в маломассивных рентгеновских двойных системах. Показано, что учёт канала слабого взаимодействия за счёт одномезонного обмена при расчёте скоростей слабых безлептонных процессов может позволить добиться устойчивости г-мод колебаний таких нейтронных звёзд.

## Благодарности

Я благодарен моему научному руководителю Д.Г. Яковлеву за чуткое руководство, постоянную помощь и бесконечное терпение.

Я благодарен М.Е. Гусакову, который сформулировал задачи глав 3 и 4 и оказал огромную помощь в их решении, и без чьего участия не было бы почти половины статей, на которых основана эта диссертация.

Я благодарен П.С. Штернину за неоценимую помощь на поздних стадиях написания текста диссертации.

Я благодарен А.В. Карповой, А.А. Даниленко, Ю.А. Шибанову, Д.А. Зюзину, Д.К. Ключкову и В.Ф. Сулейманову за предоставленные результаты обработки спектров нейтронных звёзд и полезные консультации.

Я благодарен всем сотрудникам сектора теоретической астрофизики ФТИ им. А.Ф. Иоффе, в особенности Д.П. Барсукову, А.Д. Каминкеру, Е.М. Кантор, А.Ю. Потехину, А.И. Чугунову, за полезные обсуждения, техническую помощь и моральную поддержку.

Кроме того, хочу поблагодарить П. Хэнселя, М. Фортин и Л. Ждуника из Астрономического центра им. Н. Коперника (Варшава, Польша) за предоставленные модели уравнений состояния, гостеприимство и полезные обсуждения, которые способствовали написанию глав 1 и 4.

Я также признателен моим родителям за помощь и поддержку.

## Список сокращений и условных обозначений

$M_{\odot}$	—	масса Солнца, $1.99 \times 10^{33}$ г
$\rho_0$	—	стандартная плотность ядерной материи, $2.8 \times 10^{14}$ г см $^{-3}$
$n_0$	—	стандартная концентрация нуклонов в ядерной материи, $0.16$ фм $^{-3}$
$G$	—	гравитационная постоянная, $6.674 \times 10^{-8}$ см $^3$ г $^{-1}$ с $^{-2}$
$G_F$	—	константа слабого взаимодействия Ферми, $1.436 \times 10^{-49}$ эрг см $^3$
$c$	—	скорость света, $2.998 \times 10^{10}$ см/с
$\hbar$	—	постоянная Планка, $1.055 \times 10^{-27}$ эрг с
$k_B$	—	постоянная Больцмана, $1.38 \times 10^{-16}$ эрг/К
$t$	—	время
$t_{\text{yt}}$	—	возраст нейтронной звезды, измеренный в годах
$r$	—	окружный радиус
$\theta, \varphi$	—	полярный и азимутальный углы
$\Phi$	—	метрическая функция
$P$	—	давление
$\rho$	—	плотность гравитационной массы (релятивистская плотность)
$\varepsilon$	—	плотность энергии, $\varepsilon = \rho c^2$
$M$	—	гравитационная масса нейтронной звезды
$R$	—	окружный радиус нейтронной звезды
$r_g$	—	гравитационный радиус нейтронной звезды
$x_g$	—	параметр компактности нейтронной звезды, $x_g = r_g/R$
$R_{\text{core}}$	—	окружный радиус ядра нейтронной звезды
$T$	—	локальная температура среды
$T_8, T_9$	—	температура $T$ в единицах $10^8$ К и $10^9$ К
$T_{\text{cn}}, T_{\text{cp}}$	—	локальная критическая температура нейтронной и протонной сверхтекучестей
$\tilde{T}$	—	температура, вычисленная с учётом гравитационного красного смещения
$\tilde{T}_9$	—	температура $\tilde{T}$ в единицах $10^9$ К
$T_s$	—	эффективная температура поверхности нейтронной звезды
$T_{s6}$	—	температура $T_s$ в единицах $10^6$ К
$T_s^{\infty}$	—	эффективная температура поверхности нейтронной звезды, регистрируемая удалённым наблюдателем
$T_b$	—	температура на дне теплоизолирующей оболочки нейтронной звезды
$T_{b9}$	—	температура $T_b$ в единицах $10^9$ К

$L_\nu^\infty, L_\gamma^\infty$	— интегральные нейтринная и фотонная светимости нейтронной звезды, вычисленные в системе отсчёта удалённого наблюдателя
$C$	— интегральная теплоёмкость нейтронной звезды
$n_a$	— концентрация частиц сорта $a$
$n_b$	— концентрация барионов
$\zeta$	— размерный множитель, $\zeta = 10^9$ К/1 год (главы 1 и 2)
$\zeta$	— объёмная вязкость (глава 4)
$q$ и $s$	— безразмерные функции нейтринного и фотонного охлаждения (главы 1 и 2)
$q$	— 4-импульс, переданный при столкновении частиц (глава 4)
$q$	— 3-импульс, переданный при столкновении частиц
$\ell$	— функция остывания нейтронной звезды
$f_\ell$	— фактор нейтринного остывания нейтронной звезды
$f_{\ell\max}$	— максимальное теоретическое значение $f_\ell$
$f_{\ell p}$	— фактор остывания нейтронных звёзд с сильной протонной сверхтекучестью
$f_C$	— фактор фотонного остывания (фактор сверхтекучего подавления теплоёмкости) нейтронной звезды
$B, B_{\text{surf}}$	— величина магнитного поля на экваторе нейтронной звезды (глава 2)
$\Delta M_{\text{acc}}$ ( $\Delta M_C$ )	— масса аккрецированного вещества (углерода) в теплоизолирующей оболочке нейтронной звезды
$\rho_b$	— плотность на дне теплоизолирующей оболочке (глава 2)
$\rho_C$	— плотность на границе между углеродом и железом в теплоизолирующей оболочке (глава 2)
$\mathbf{E}, \mathbf{B}$	— векторы электрического и магнитного полей
$\mathbf{u}_a$	— вектор дрейфовой скорости частиц сорта $a$
$\mathbf{U}_b$	— вектор скорости потока барионов
$\mathbf{w}_a$	— вектор диффузионной скорости частиц сорта $a$
$\mathbf{E}_{\text{com}}$	— вектор электрического поля в системе отсчёта, локально сопутствующей потоку барионов
$\mathbf{A}^{(p)}, \mathbf{A}^{(t)}$	— полоидальная и тороидальная компоненты произвольного вектора $\mathbf{A}$ ( $\mathbf{A} = \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{U}_b, \dots$ )
$\mathbf{j}$	— вектор плотности электрического тока
$e_a$	— электрический заряд частиц сорта $a$
$\mu_a$	— химический потенциал частиц сорта $a$
$\delta\mu_a$	— возмущение химического потенциала частиц сорта $a$
$\Delta\mu$	— рассогласованность химических потенциалов относительно равновесия

$\Delta\Gamma_a$	— скорость производства частиц сорта $a$ в единице объёма за счёт неравновесных процессов
$\Delta\Gamma$	— скорость производства нейтронов в единице объёма неравновесной <i>пре</i> -плазмы (глава 3)
$\lambda$	— скорость производства нейтронов в неравновесной <i>пре</i> -плазме в линейном режиме, отнесённая к рассогласованности химических потенциалов $\Delta\mu$ (глава 3)
$\Delta\Gamma_{12\leftrightarrow 34}$	— скорость неравновесного слабого безлептонного процесса $1+2 \leftrightarrow 3+4$ в единице объёма вещества (глава 4)
$\lambda_{12\leftrightarrow 34}$	— скорость неравновесного процесса $1+2 \leftrightarrow 3+4$ в линейном режиме, отнесённая к рассогласованности химических потенциалов $\Delta\mu$ (глава 4)
$J_{ab}$	— коэффициент трения между частицами сортов $a$ и $b$ (глава 3)
$f_A$	— плотность силы Ампера
$\hat{P}_l\psi$	— $l$ -ая компонента разложения произвольной функции $\psi$ по полиномам Лежандра $P_l(\cos\theta)$
$\Psi$	— функция полоидального потока осесимметричного магнитного поля
$I$	— функция полоидального электрического тока для осесимметричного магнитного поля
$\Delta^*$	— оператор Грэда-Шафранова
$\sigma_{\alpha\beta}$	— тензор вязких натяжений
$\eta_i$	— коэффициенты сдвиговой вязкости среды в магнитном поле, $i = 0, \dots, 4$ (глава 3)
$\eta$	— сдвиговая вязкость немагнитного вещества (глава 4)
$x_H$	— параметр Холла для электронов в магнитном поле
$\epsilon_j, \mathbf{p}_j$	— энергия и импульс частицы $j$
$p_j$	— 4-импульс частицы $j$
$S_j$	— странность частицы сорта $j$
$p_{Fj}$	— импульс Ферми частиц сорта $j$
$m_j^*, m_{Lj}^*$	— эффективная масса Ландау частиц сорта $j$
$m_{Dj}^*$	— эффективная масса Дирака частиц сорта $j$
$\mathcal{M}_{12\rightarrow 34}$	— матричный элемент неупругого столкновения $1+2 \rightarrow 3+4$
$\gamma^k$	— гамма-матрицы Дирака, $k = 0, \dots, 5$
$\omega$	— частота колебаний нейтронной звезды [ $c^{-1}$ ]
$\omega_4$	— частота $\omega$ в единицах $10^4 c^{-1}$
$\omega$	— временная компонента переданного 4-импульса (раздел 4.4.3)
$\nu$	— частота вращения нейтронной звезды [Гц]

- MU — modified Urca (модифицированный урка-процесс излучения нейтрино)
- DU — direct Urca (прямой урка-процесс излучения нейтрино)
- SC — standard candle (стандартный сценарий остывания нейтронной звезды)



## Список литературы

1. *Haensel P., Potekhin A. Y., Yakovlev D. G.* Neutron Stars. 1. Equation of State and Structure. — Springer, New York, 2007.
2. *Lattimer J. M., Prakash M.* The equation of state of hot, dense matter and neutron stars // *Phys. Rep.* — 2016. — Vol. 621. — P. 127–164. — 1512.07820.
3. *Fiorella Burgio G., Fantina A. F.* Nuclear Equation of State for Compact Stars and Supernovae // *The Physics and Astrophysics of Neutron Stars* / Ed. by Luciano Rezzolla, Pierre Pizzochero, David Ian Jones et al. — Vol. 457 of *Astrophysics and Space Science Library*. — 2018. — P. 255. — 1804.03020.
4. D. Page, J. M. Lattimer, M. Prakash, A. W. Steiner // *Novel Superfluids*, vol. 2, / Ed. by K. H. Bennemann, J. B. Ketterson. — Vol. 157. — International Series of Monographs on Physics, vol. 157, 505, Oxford University Press, Oxford, 2015. — P. 505–579.
5. Unifying the observational diversity of isolated neutron stars via magneto-thermal evolution models / D. Viganò, N. Rea, J. A. Pons et al. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2013. — Vol. 434. — P. 123–141. — 1306.2156.
6. *Haskell B.* R-modes in neutron stars: Theory and observations // *ArXiv e-prints*. — 2015. — Aug. — 1509.04370.
7. Cooling rates of neutron stars and the young neutron star in the Cassiopeia A supernova remnant / D. G. Yakovlev, W. C. G. Ho, P. S. Shternin et al. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2011. — Vol. 411. — P. 1977–1988.
8. *Gusakov M. E., Kantor E. M., Ofengeim D. D.* Evolution of the magnetic field in neutron stars // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Vol. 96. — P. 103012.
9. *Tolman R. C.* Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid // *Physical Review*. — 1939. — Vol. 55. — P. 364–373.
10. *Oppenheimer J. R., Volkoff G. M.* On Massive Neutron Cores // *Physical Review*. — 1939. — Vol. 55. — P. 374–381.
11. Unified equations of state for cold non-accreting neutron stars with Brussels-Montreal functionals - I. Role of symmetry energy / J. M. Pearson, N. Chamel, A. Y. Potekhin et al. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2018. — Vol. 481, no. 3. — P. 2994–3026. — 1903.04981.
12. *Degenaar N., Suleimanov V. F.* Testing the Equation of State with Electromagnetic Observations // *Astrophysics and Space Science Library* / Ed. by Luciano Rezzolla, Pierre Pizzochero, David Ian Jones et al. — Vol. 457 of *Astrophysics and Space Science Library*. — 2018. — P. 185.
13. GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State / B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2018. — Vol. 121, no. 16. — P. 161101. — 1805.11581.
14. *Potekhin A. Y., De Luca A., Pons J. A.* Neutron Stars—Thermal Emitters // *Sp. Sci. Rev.* — 2015. — Vol. 191, no. 1-4. — P. 171–206. — 1409.7666.
15. *Sedrakian A., Clark J. W.* Superfluidity in nuclear systems and neutron stars // *European Physical Journal A*. — 2019. — Vol. 55, no. 9. — P. 167. — 1802.00017.
16. Neutrino emission from neutron stars / D. G. Yakovlev, A. D. Kaminker, O. Y. Gnedin, P. Haensel // *Phys. Rep.* — 2001. — Nov. — Vol. 354. — P. 1–155.
17. The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue / R. N. Manchester, G. B. Hobbs, A. Teoh, M. Hobbs // *Astron. J.* — 2005. — Vol. 129. — P. 1993–2006. — astro-ph/0412641.
18. *Olausen S. A., Kaspi V. M.* The McGill Magnetar Catalog // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* — 2014. — Vol. 212. — P. 6. — 1309.4167.
19. *Potekhin A. Y., Chabrier G.* Magnetic neutron star cooling and microphysics // *Astron. Astrophys.* — 2018. — Vol. 609. — P. A74.
20. *Yakovlev D. G., Pethick C. J.* Neutron Star Cooling // *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* —

2004. — Vol. 42. — P. 169–210.
21. Cooling neutron star in the Cassiopeia A supernova remnant: evidence for superfluidity in the core / P. S. Shternin, D. G. Yakovlev, C. O. Heinke et al. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2011. — Vol. 412. — P. L108–L112. — 1012.0045.
  22. Analysing neutron star in HESS J1731-347 from thermal emission and cooling theory / D. D. Ofengeim, A. D. Kaminker, D. Klochkov et al. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2015. — Vol. 454. — P. 2668–2676. — 1510.00573.
  23. *Gudmundsson E. H., Pethick C. J., Epstein R. I.* Structure of neutron star envelopes // *Astrophys. J.* — 1983. — Vol. 272. — P. 286–300.
  24. *Potekhin A. Y., Chabrier G., Yakovlev D. G.* Internal temperatures and cooling of neutron stars with accreted envelopes. // *Astron. Astrophys.* — 1997. — Vol. 323. — P. 415–428. — astro-ph/9706148.
  25. Neutrino Emission from Cooper Pairs and Minimal Cooling of Neutron Stars / D. Page, J. M. Lattimer, M. Prakash, A. W. Steiner // *Astrophys. J.* — 2009. — Vol. 707. — P. 1131–1140. — 0906.1621.
  26. *Potekhin A. Y., Pons J. A., Page D.* Neutron Stars—Cooling and Transport // *Sp. Sci. Rev.* — 2015. — P. 239–291. — 1507.06186.
  27. Thermal Structure and Cooling of Superfluid Neutron Stars with Accreted Magnetized Envelopes / A. Y. Potekhin, D. G. Yakovlev, G. Chabrier, O. Y. Gnedin // *Astrophys. J.* — 2003. — Vol. 594. — P. 404–418. — astro-ph/0305256.
  28. *Beznogov M. V., Potekhin A. Y., Yakovlev D. G.* Diffusive heat blanketing envelopes of neutron stars // *MNRAS.* — 2016. — Vol. 459. — P. 1569–1579. — 1604.00538.
  29. Neutrino luminosities and heat capacities of neutron stars in analytic form / D. D. Ofengeim, M. Fortin, P. Haensel et al. // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Vol. 96, no. 4. — P. 043002. — 1708.08272.
  30. *Ofengeim D. D., Yakovlev D. G.* Analytic description of neutron star cooling // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — Vol. 467, no. 3. — P. 3598–3603.
  31. *Flowers E., Ruderman M., Sutherland P.* Neutrino pair emission from finite-temperature neutron superfluid and the cooling of young neutron stars. // *Astrophys. J.* — 1976. — Apr. — Vol. 205. — P. 541–544.
  32. *Leinson L. B., Pérez A.* Vector current conservation and neutrino emission from singlet-paired baryons in neutron stars // *Physics Letters B.* — 2006. — Vol. 638. — P. 114–118. — astro-ph/0606651.
  33. Chandra Phase-resolved X-Ray Spectroscopy of the Crab Pulsar / M. C. Weisskopf, A. F. Tennant, D. G. Yakovlev et al. // *Astrophys. J.* — 2011. — Vol. 743. — P. 139.
  34. *Shternin P. S., Yakovlev D. G.* Self-similarity relations for cooling superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2015. — Vol. 446. — P. 3621–3630. — 1411.0150.
  35. The neutron star in HESS J1731-347: Central compact objects as laboratories to study the equation of state of superdense matter / D. Klochkov, V. Suleimanov, G. Pühlhofer et al. // *Astron. Astrophys.* — 2015. — Vol. 573. — P. A53.
  36. Direct URCA process in neutron stars / J. M. Lattimer, C. J. Pethick, M. Prakash, P. Haensel // *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — Vol. 66. — P. 2701–2704.
  37. *Kaminker A. D., Yakovlev D. G., Haensel P.* Theory of neutrino emission from nucleon-hyperon matter in neutron stars: angular integrals // *Astrophys. Sp. Sci.* — 2016. — Vol. 361. — P. 267. — 1607.05265.
  38. *Page D.* The Geminga neutron star: Evidence for nucleon superfluidity at very high density // *Nuclear Physics in the Universe* / Ed. by M. W. Guidry, M. R. Strayer. — 1993. — P. 151–162.
  39. Neutron star radii and crusts: Uncertainties and unified equations of state / M. Fortin, C. Providência, A. R. Raduta et al. // *Phys. Rev. C.* — 2016. — Vol. 94, no. 3. — P. 035804. — 1604.01944.

40. *Douchin F., Haensel P.* A unified equation of state of dense matter and neutron star structure // *Astron. Astrophys.* — 2001. — Vol. 380. — P. 151–167. — astro-ph/0111092.
41. *Page D., Applegate J. H.* The cooling of neutron stars by the direct URCA process // *Astrophys. J. Lett.* — 1992. — Vol. 394. — P. L17–L20.
42. The cooling of Akmal-Pandharipande-Ravenhall neutron star models / M. E. Gusakov, A. D. Kaminker, D. G. Yakovlev, O. Y. Gnedin // *MNRAS*. — 2005. — Vol. 363. — P. 555–562.
43. Analytical representations of unified equations of state for neutron-star matter / A. Y. Potekhin, A. F. Fantina, N. Chamel et al. // *Astron. Astrophys.* — 2013. — Vol. 560. — P. A48. — 1310.0049.
44. Thermal emission of neutron stars with internal heaters / A. D. Kaminker, A. A. Kaurov, A. Y. Potekhin, D. G. Yakovlev // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2014. — Vol. 442. — P. 3484–3494.
45. *Akmal A., Pandharipande V. R., Ravenhall D. G.* Equation of state of nucleon matter and neutron star structure // *Phys. Rev. C*. — 1998. — Vol. 58, no. 3. — P. 1804–1828. — nucl-th/9804027.
46. A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay / P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom et al. // *Nature*. — 2010. — Vol. 467. — P. 1081–1083.
47. A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary / J. Antoniadis, P. C. C. Freire, N. Wex et al. // *Science*. — 2013. — Apr. — Vol. 340. — P. 448. — 1304.6875.
48. The NANOGrav Nine-year Data Set: Mass and Geometric Measurements of Binary Millisecond Pulsars / E. Fonseca, T. T. Pennucci, J. A. Ellis et al. // *Astrophys. J.* — 2016. — Vol. 832. — P. 167. — 1603.00545.
49. *Friman B. L., Maxwell O. V.* Neutrino emissivities of neutron stars // *Astrophys. J.* — 1979. — Vol. 232. — P. 541–557.
50. *Shapiro S. L., Teukolsky S. A.* Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects. — Wiley-Interscience, New York, 1983.
51. *Gnedin O. Y., Yakovlev D. G., Potekhin A. Y.* Thermal relaxation in young neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2001. — Vol. 324. — P. 725–736.
52. *Zdunik J. L., Haensel P.* Formation scenarios and mass-radius relation for neutron stars // *Astron. Astrophys.* — 2011. — Vol. 530. — P. A137. — 1104.0385.
53. *Zdunik J. L., Fortin M., Haensel P.* Neutron star properties and the equation of state for the core // *Astron. Astrophys.* — 2017. — Vol. 599. — P. A119.
54. *Beznogov M. V., Yakovlev D. G.* Statistical theory of thermal evolution of neutron stars - II. Limitations on direct Urca threshold // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2015. — Vol. 452. — P. 540–548. — 1507.04206.
55. Neutrino-pair bremsstrahlung by electrons in neutron star crusts / A. D. Kaminker, C. J. Pethick, A. Y. Potekhin et al. // *Astron. Astrophys.* — 1999. — Vol. 343. — P. 1009–1024. — astro-ph/9812447.
56. *Ofengeim D. D., Kaminker A. D., Yakovlev D. G.* Neutrino-pair bremsstrahlung in a neutron star crust // *Europhysics Letters*. — 2014. — Vol. 108. — P. 31002. — 1410.7301.
57. *Ofengeim D. D., Zyuzin D. A.* Thermal spectrum and neutrino cooling rate of the vela pulsar // *Particles*. — 2018. — Vol. 1, no. 1. — P. 194–202.
58. XMM-Newton observations of a gamma-ray pulsar J0633+0632: pulsations, cooling and large-scale emission / A. Danilenko, A. Karpova, D. Ofengeim et al. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2020. — Apr. — Vol. 493, no. 2. — P. 1874–1887.
59. *Beznogov M. V., Yakovlev D. G.* Statistical theory of thermal evolution of neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2015. — Vol. 447. — P. 1598–1609. — 1411.6803.
60. *Nomoto K., Tsuruta S.* Cooling of young neutron stars and Einstein X-ray observations. // *Astrophys. J. Lett.* — 1981. — Nov. — Vol. 250. — P. L19–L23.

61. Enhanced cooling of neutron stars via Cooper-pairing neutrino emission / M. E. Gusakov, A. D. Kaminker, D. G. Yakovlev, O. Y. Gnedin // *Astron. Astrophys.* — 2004. — Vol. 423. — P. 1063–1071. — astro-ph/0404002.
62. Minimal Cooling of Neutron Stars: A New Paradigm / D. Page, J. M. Lattimer, M. Prakash, A. W. Steiner // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* — 2004. — Vol. 155. — P. 623–650. — astro-ph/0403657.
63. Diffusive nuclear burning in cooling simulations and application to new temperature data of the Cassiopeia A neutron star / M. J. P. Wijngaarden, Wynn C. G. Ho, Philip Chang et al. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2019. — Vol. 484, no. 1. — P. 974–988. — 1901.01012.
64. Rapid Cooling of the Neutron Star in Cassiopeia A Triggered by Neutron Superfluidity in Dense Matter / D. Page, M. Prakash, J. M. Lattimer, A. W. Steiner // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106, no. 8. — P. 081101. — 1011.6142.
65. *Ofengeim D. D., Yakovlev D. G.* Cooling status of three neutron stars // *Journal of Physics Conference Series.* — 2017. — Dec. — P. 012049.
66. Magnetic hydrogen atmosphere models and the neutron star RX J1856.5-3754 / W. C. G. Ho, D. L. Kaplan, P. Chang et al. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2007. — Vol. 375. — P. 821–830.
67. *Schmitt A., Shternin P.* Reaction Rates and Transport in Neutron Stars // *Astrophysics and Space Science Library* / Ed. by Luciano Rezzolla, Pierre Pizzochero, David Ian Jones et al. — Vol. 457 of *Astrophysics and Space Science Library.* — 2018. — P. 455. — 1711.06520.
68. *Shternin P. S., Baldo M., Haensel P.* In-medium enhancement of the modified Urca neutrino reaction rates // *Physics Letters B.* — 2018. — Vol. 786. — P. 28–34. — 1807.06569.
69. *Flowers E., Itoh N.* Transport properties of dense matter // *Astrophys. J.* — 1976. — Vol. 206. — P. 218–242.
70. *Voskresensky D. N., Senatorov A. V.* // *Sov. J. Nucl. Phys.* — 1987. — Vol. 45. — P. 411.
71. *Leinson L. B.* Neutrino emission from triplet pairing of neutrons in neutron stars // *Phys. Rev. C.* — 2010. — Vol. 81, no. 2. — P. 025501.
72. *Voskresensky D. N.* Neutrino Cooling of Neutron Stars: Medium Effects // *Physics of Neutron Star Interiors* / Ed. by D. Blaschke, N. K. Glendenning, A. Sedrakian. — Vol. 578 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag.* — 2001. — P. 467.
73. *Yakovlev D. G., Levenfish K. P., Shibbanov Y. A.* Cooling of neutron stars and superfluidity in their cores // *Physics Uspekhi.* — 1999. — Aug. — Vol. 42, no. 8. — P. 737–778. — astro-ph/9906456.
74. New Constraints on the Structure and Evolution of the Pulsar Wind Nebula 3C 58 / P. Slane, D. J. Helfand, E. van der Swaluw, S. S. Murray // *Astrophys. J.* — 2004. — Vol. 616. — P. 403–413.
75. Optical identification of the 3C 58 pulsar wind nebula / Y. A. Shibbanov, N. Lundqvist, P. Lundqvist et al. // *Astron. Astrophys.* — 2008. — Vol. 486. — P. 273–282.
76. Chandra Phase-Resolved X-Ray Spectroscopy of the Crab Pulsar / M. C. Weisskopf, S. L. O’Dell, F. Paerels et al. // *Astrophys. J.* — 2004. — Vol. 601. — P. 1050–1057.
77. *Zavlin V. E.* Theory of Radiative Transfer in Neutron Star Atmospheres and Its Applications // *Astrophysics and Space Science Library* / Ed. by W. Becker. — Vol. 357 of *Astrophysics and Space Science Library.* — 2009. — P. 181.
78. *Zavlin V. E., Trümper J., Pavlov G. G.* X-Ray Emission from the Radio-quiet Neutron Star in Puppis A // *Astrophys. J.* — 1999. — Vol. 525. — P. 959–967.
79. The Proper Motion of the Central Compact Object RX J0822-4300 in the Supernova Remnant Puppis A / W. Becker, T. Prinz, P. F. Winkler, R. Petre // *Astrophys. J.* — 2012. — Vol. 755. — P. 141.
80. *Gotthelf E. V., Halpern J. P.* Discovery of a 112 ms X-Ray Pulsar in Puppis A: Further Evidence of Neutron Stars Weakly Magnetized at Birth // *Astrophys. J. Lett.* — 2009. — Vol.

695. — P. L35–L39. — 0902.3007.
81. *Zavlin V. E.* First X-Ray Observations of the Young Pulsar J1357-6429 // *Astrophys. J. Lett.* — 2007. — Vol. 665. — P. L143–L146.
  82. The X-Ray Spectrum of the Vela Pulsar Resolved with the Chandra X-Ray Observatory / G. G. Pavlov, V. E. Zavlin, D. Sanwal et al. // *Astrophys. J. Lett.* — 2001. — Vol. 552. — P. L129–L133.
  83. XMM-Newton Observations of PSR B1706-44 / K. E. McGowan, S. Zane, M. Cropper et al. // *Astrophys. J.* — 2004. — Vol. 600. — P. 343–350.
  84. *Zavlin V. E., Pavlov G. G.* XMM observations of three middle-aged pulsars // *Mem. Soc. Astron. Ital.* — 2004. — Vol. 75. — P. 458–463.
  85. Cooling of neutron stars with diffusive envelopes / M. V. Beznogov, M. Fortin, P. Haensel et al. // *MNRAS.* — 2016. — Vol. 463. — P. 1307–1313. — 1608.08091.
  86. Very low braking index for the Vela pulsar / A. G. Lyne, R. S. Pritchard, F. Graham-Smith, F. Camilo // *Nature.* — 1996. — Vol. 381. — P. 497–498.
  87. *Aschenbach B., Egger R., Trümper J.* Discovery of explosion fragments outside the Vela supernova remnant shock-wave boundary // *Nature.* — 1995. — Vol. 373. — P. 587–590.
  88. The Vela Pulsar’s Proper Motion and Parallax Derived from VLBI Observations / R. Dodson, D. Legge, J. E. Reynolds, P. M. McCulloch // *Astrophys. J.* — 2003. — Vol. 596. — P. 1137–1141.
  89. Neutron Star Atmospheres / G. G. Pavlov, Y. A. Shibano, V. E. Zavlin, R. D. Meyer // NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C / Ed. by M. A. Alpar, U. Kiziloglu, J. van Paradijs. — Vol. 450 of *NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C.* — 1995. — P. 71.
  90. XMM-Newton observations of the Vela pulsar / K. Mori, C. J. Hailey, F. Paerels, S. Zane // *Advances in Space Research.* — 2004. — Vol. 33. — P. 503–506.
  91. *Manzali A., De Luca A., Caraveo P. A.* Phase-resolved Spectroscopy of the Vela Pulsar with XMM-Newton // *Astrophys. J.* — 2007. — Vol. 669. — P. 570–578.
  92. *Ho W. C. G., Potekhin A. Y., Chabrier G.* Model X-Ray Spectra of Magnetic Neutron Stars with Hydrogen Atmospheres // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* — 2008. — Vol. 178. — P. 102–109.
  93. *Wilms J., Allen A., McCray R.* On the Absorption of X-Rays in the Interstellar Medium // *Astrophys. J.* — 2000. — Oct. — Vol. 542, no. 2. — P. 914–924. — astro-ph/0008425.
  94. *Potekhin A. Y.* Atmospheres and radiating surfaces of neutron stars // *Physics Uspekhi.* — 2014. — Vol. 57. — P. 735–770. — 1403.0074.
  95. Equation of state constraints for the cold dense matter inside neutron stars using the cooling tail method / J. Nättilä, A. W. Steiner, J. J. E. Kajava et al. // *Astron. Astrophys.* — 2016. — Vol. 591. — P. A25.
  96. Constraints on the high-density nuclear equation of state from the phenomenology of compact stars and heavy-ion collisions / T. Klähn, D. Blaschke, S. Typel et al. // *Phys. Rev. C.* — 2006. — Vol. 74, no. 3. — P. 035802. — nucl-th/0602038.
  97. Fusion reactions in multicomponent dense matter / D. G. Yakovlev, L. R. Gasques, A. V. Afanasjev et al. // *Phys. Rev. C.* — 2006. — Vol. 74, no. 3. — P. 035803. — astro-ph/0608488.
  98. The  $\gamma$ -ray Pulsar J0633+0632 in X-rays / Andrey Danilenko, Peter Shternin, Anna Karpova et al. // *Publ. Astron. Soc. Australia.* — 2015. — Vol. 32. — P. e038. — 1509.06956.
  99. Constraints on axion-like particles and nucleon pairing in dense matter from the hot neutron star in HESS J1731-347 / Mikhail V. Beznogov, Ermal Rrapaj, Dany Page, Sanjay Reddy // *Phys. Rev. C.* — 2018. — Vol. 98, no. 3. — P. 035802. — 1806.07991.
  100. *Walter F. M., Wolk S. J., Neuhäuser R.* Discovery of a nearby isolated neutron star // *Nature.* — 1996. — Vol. 379. — P. 233–235.
  101. *Haberl F.* The magnificent seven: magnetic fields and surface temperature distributions // *Astrophys. Space Sci.* — 2007. — Vol. 308. — P. 181–190. — astro-ph/0609066.

102. Thin magnetic hydrogen atmospheres and the neutron star RX J1856.5 3754 / W. C. G. Ho, D. L. Kaplan, P. Chang et al. // *Astrophys. Space Sci.* — 2007. — Vol. 308. — P. 279–286.
103. Revisiting the Parallax of the Isolated Neutron Star RX J185635-3754 Using HST/ACS Imaging / F. M. Walter, T. Eisenbeiß, J. M. Lattimer et al. // *Astrophys. J.* — 2010. — Vol. 724. — P. 669–677. — 1008.1709.
104. Detection of 16 Gamma-Ray Pulsars Through Blind Frequency Searches Using the Fermi LAT / A. A. Abdo, M. Ackermann, M. Ajello et al. // *Science.* — 2009. — Vol. 325. — P. 840. — 1009.0748.
105. The Second Fermi Large Area Telescope Catalog of Gamma-Ray Pulsars / A. A. Abdo, M. Ajello, A. Allafort et al. // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* — 2013. — Vol. 208. — P. 17. — 1305.4385.
106. *Biryukov A., Astashenok A., Beskin G.* Refinement of the timing-based estimator of pulsar magnetic fields // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — Vol. 466. — P. 4320–4331.
107. *Raduta A. R., Sedrakian A., Weber F.* Cooling of hypernuclear compact stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2018. — Vol. 475, no. 4. — P. 4347–4356. — 1712.00584.
108. Cooling of Small and Massive Hyperonic Stars / R. Negreiros, L. Tolos, M. Centelles et al. // *Astrophys. J.* — 2018. — Vol. 863, no. 1. — P. 104. — 1804.00334.
109. *Jones P. B.* Neutron star magnetic field decay - Hall drift and Ohmic diffusion // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1988. — Vol. 233. — P. 875–885.
110. *Shalybkov D. A., Urpin V. A.* The Hall effect and the decay of magnetic fields. // *Astron. Astrophys.* — 1997. — Vol. 321. — P. 685–690.
111. *Rheinhardt M., Geppert U.* Hall-Drift Induced Magnetic Field Instability in Neutron Stars // *Physical Review Letters.* — 2002. — Vol. 88, no. 10. — P. 101103.
112. *Hollerbach R., Rüdiger G.* Hall drift in the stratified crusts of neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2004. — Vol. 347. — P. 1273–1278.
113. Hall equilibria with toroidal and poloidal fields: application to neutron stars / K. N. Gourgouliatos, A. Cumming, A. Reisenegger et al. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2013. — Vol. 434. — P. 2480–2490.
114. *Gourgouliatos K. N., Cumming A.* Hall Attractor in Axially Symmetric Magnetic Fields in Neutron Star Crusts // *Physical Review Letters.* — 2014. — Vol. 112, no. 17. — P. 171101.
115. *Gourgouliatos K. N., Wood T. S., Hollerbach R.* Magnetic field evolution in magnetar crusts through three-dimensional simulations // *Proceedings of the National Academy of Science.* — 2016. — Vol. 113. — P. 3944–3949.
116. Simulated magnetic field expulsion in neutron star cores / J. G. Elfritz, J. A. Pons, N. Rea et al. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2016. — Vol. 456. — P. 4461–4474.
117. *Bransgrove A., Levin Y., Beloborodov A.* Magnetic field evolution of neutron stars - I. Basic formalism, numerical techniques and first results // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2018. — Vol. 473. — P. 2771–2790.
118. The relevance of ambipolar diffusion for neutron star evolution / A. Passamonti, T. Akgün, J. A. Pons, J. A. Miralles // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — Vol. 465. — P. 3416–3428.
119. *Castillo F., Reisenegger A., Valdivia J. A.* Magnetic field evolution and equilibrium configurations in neutron star cores: the effect of ambipolar diffusion // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — Vol. 471. — P. 507–522.
120. *Jones P. B.* Type II superconductivity and magnetic flux transport in neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2006. — Vol. 365. — P. 339–344. — astro-ph/0510396.
121. *Goldreich P., Reisenegger A.* Magnetic field decay in isolated neutron stars // *Astrophys. J.* — 1992. — Vol. 395. — P. 250–258.
122. *Thompson C., Duncan R. C.* The Soft Gamma Repeaters as Very Strongly Magnetized Neutron Stars. II. Quiescent Neutrino, X-Ray, and Alfvén Wave Emission // *Astrophys. J.* — 1996. — Vol. 473. — P. 322.

123. Hoyos J., Reisenegger A., Valdivia J. A. Magnetic field evolution in neutron stars: one-dimensional multi-fluid model // *Astron. Astrophys.* — 2008. — Vol. 487. — P. 789–803.
124. Reisenegger A. Stable magnetic equilibria and their evolution in the upper main sequence, white dwarfs, and neutron stars // *Astron. Astrophys.* — 2009. — Vol. 499. — P. 557–566.
125. Hoyos J. H., Reisenegger A., Valdivia J. A. Asymptotic, non-linear solutions for ambipolar diffusion in one dimension // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2010. — Vol. 408. — P. 1730–1741.
126. Glampedakis K., Jones D. I., Samuelsson L. Ambipolar diffusion in superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2011. — Vol. 413. — P. 2021–2030.
127. Beloborodov A. M., Li X. Magnetar Heating // *Astrophys. J.* — 2016. — Vol. 833. — P. 261.
128. Ofengeim D. D., Gusakov M. E., Kantor E. M. Quasistationary fluid motions in magnetized neutron stars // *Journal of Physics Conference Series.* — Vol. 1038. — 2018. — Jun. — P. 012009.
129. Ofengeim D. D., Gusakov M. E. Fast magnetic field evolution in neutron stars: The key role of magnetically induced fluid motions in the core // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 98, no. 4. — P. 043007. — 1805.03956.
130. Sinha M., Sedrakian A. Magnetar superconductivity versus magnetism: Neutrino cooling processes // *Phys. Rev. C.* — 2015. — Vol. 91, no. 3. — P. 035805. — 1502.02979.
131. From microphysics to dynamics of magnetars / A. Sedrakian, H. Xu-Guang, M. Sinha, J. W. Clark // *Journal of Physics Conference Series.* — Vol. 861 of *Journal of Physics Conference Series.* — 2017. — P. 012025. — 1701.00895.
132. Ofengeim D. D., Yakovlev D. G. Shear viscosity in magnetized neutron star crust // *EPL (Europhysics Letters).* — 2015. — Dec. — Vol. 112, no. 5. — P. 59001. — 1512.03915.
133. Chugunov A. I., Yakovlev D. G. Shear Viscosity and Oscillations of Neutron Star Crust // *Astron. Rep.* — 2005. — Vol. 49. — P. 724–738. — astro-ph/0511300.
134. Yakovlev D. G., Shalybkov D. A. Electrical conductivity of neutron star cores in the presence of a magnetic field - I. General solution for a multicomponent Fermi liquid - II. - A free particle model of npeSigma/-/-matter // *Astrophys. Sp. Sci.* — 1991. — Vol. 176. — P. 171–189.
135. Reisenegger A. Deviations from Chemical Equilibrium Due to Spin-down as an Internal Heat Source in Neutron Stars // *Astrophys. J.* — 1995. — Apr. — Vol. 442. — P. 749. — astro-ph/9410035.
136. Cowling T. G. The non-radial oscillations of polytropic stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1941. — Vol. 101. — P. 367.
137. Shalybkov D. A., Urpin V. A. Ambipolar diffusion and anisotropy of resistivity in neutron star cores // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1995. — Vol. 273. — P. 643–648.
138. Goedbloed J. P., Keppens R., Poedts S. *Advanced Magnetohydrodynamics.* — Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010.
139. Yakovlev D. G., Shalybkov D. A. Electrical Conductivity and Resistivity in Magnetized Cores of Neutron Stars // *Soviet Astronomy Letters.* — 1990. — Vol. 16. — P. 86.
140. Gourgouliatos K. N., Cumming A. Hall effect in neutron star crusts: evolution, endpoint and dependence on initial conditions // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2014. — Vol. 438. — P. 1618–1629. — 1311.7004.
141. Beskin V. S., Gurevich A. V., Istomin Y. N. *Physics of the Pulsar Magnetosphere.* — Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2006.
142. Glampedakis K., Lasky P. D. Persistent crust-core spin lag in neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2015. — Vol. 450. — P. 1638–1650. — 1501.05473.
143. Heiselberg H., Hjorth-Jensen M. Phases of dense matter in neutron stars // *Phys. Rep.* — 2000. — Vol. 328, no. 5-6. — P. 237–327. — nucl-th/9902033.
144. Yakovlev D. G., Shalybkov D. A. Electrical Conductivity of Neutron Star Cores in the Presence of a Magnetic Field - Part Two - a Free-Particle Model of Npe - / Matter // *Astrophys. Space Sci.* — 1991. — Vol. 176. — P. 191–215.

145. Stability of magnetic fields in non-barotropic stars: an analytic treatment / T. Akgün, A. Reisenegger, A. Mastrano, P. Marchant // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2013. — Vol. 433. — P. 2445–2466. — 1302.0273.
146. Popov S. B., Postnov K. A. Millisecond extragalactic radio bursts as magnetar flares // *ArXiv e-prints*. — 2013. — 1307.4924.
147. Beloborodov A. M. A Flaring Magnetar in FRB 121102? // *Astrophys. J. Lett.* — 2017. — Vol. 843. — P. L26. — 1702.08644.
148. Popov S. B., Postnov K. A., Pshirkov M. S. Fast radio bursts: superpulsars, magnetars, or something else? // *ArXiv e-prints*. — 2018. — 1801.00640.
149. Andersson N., Kokkotas K. D. The R-Mode Instability in Rotating Neutron Stars // *Intern. J. Mod. Phys. D.* — 2001. — Vol. 10. — P. 381–441. — gr-qc/0010102.
150. Haensel P., Jerzak A. J. transport in strange stars // *Asta Physica Polonica*. — 1989. — P. 141–161.
151. Nandkumar R., Pethick C. J. Transport coefficients of dense matter in the liquid metal regime // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1984. — Aug. — Vol. 209. — P. 511–524.
152. Shternin P. S. Shear viscosity of degenerate electron matter // *J. Phys. A.* — 2008. — Vol. 41, no. 20. — P. 205501. — 0803.3893.
153. Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P. Physical kinetics. — Course of theoretical physics, Oxford: Pergamon Press, 1981.
154. Transport properties of degenerate electrons in neutron star envelopes and white dwarf cores / A. Y. Potekhin, D. A. Baiko, P. Haensel, D. G. Yakovlev // *Astron. Astrophys.* — 1999. — Vol. 346. — P. 345–353. — astro-ph/9903127.
155. Ziman J. M. Electrons and phonons. — Clarendon Press, Oxford, 1960.
156. Braginskii S. I. // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* — 1957. — Vol. 33. — P. 645.
157. Vieillefosse P., Hansen J. P. Statistical mechanics of dense ionized matter. V. Hydrodynamic limit and transport coefficients of the classical one-component plasma // *Phys. Rev. A.* — 1975. — Vol. 12. — P. 1106–1116.
158. Wallenborn J., Baus M. Kinetic theory of the shear viscosity of a strongly coupled classical one-component plasma // *Phys. Rev. A.* — 1978. — Vol. 18. — P. 1737–1747.
159. Yakovlev D. G., Levenfish K. P., Haensel P. Thermal state of transiently accreting neutron stars // *Astron. Astrophys.* — 2003. — Vol. 407. — P. 265–271. — astro-ph/0209027.
160. Glampedakis K., Andersson N., Samuelsson L. Magnetohydrodynamics of superfluid and superconducting neutron star cores // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2011. — Vol. 410. — P. 805–829. — 1001.4046.
161. Magnetic field evolution in superconducting neutron stars / V. Graber, N. Andersson, K. Glampedakis, S. K. Lander // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2015. — Vol. 453. — P. 671–681.
162. Landau L., Lifshitz E. Fluid Mechanics. No. C., 6. — Elsevier Science, 2013. — ISBN: 9781483140506.
163. Glampedakis K., Gualtieri L. Gravitational Waves from Single Neutron Stars: An Advanced Detector Era Survey // *Astrophysics and Space Science Library* / Ed. by Luciano Rezzolla, Pierre Pizzochero, David Ian Jones et al. — Vol. 457 of *Astrophysics and Space Science Library*. — 2018. — Jan. — P. 673. — 1709.07049.
164. Chandrasekhar S. Solutions of Two Problems in the Theory of Gravitational Radiation // *Phys. Rev. Lett.* — 1970. — Mar. — Vol. 24. — P. 611–615.
165. Friedman J. L., Schutz B. F. Secular instability of rotating Newtonian stars. // *Astrophys. J.* — 1978. — May. — Vol. 222. — P. 281–296.
166. Andersson N., Kokkotas K. D. The R-Mode Instability in Rotating Neutron Stars // *International Journal of Modern Physics D.* — 2001. — Jan. — Vol. 10. — P. 381–441. — gr-qc/0010102.



167. *Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G.* Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. I. Direct Urca processes in npemu matter // *Astron. Astrophys.* — 2000. — May. — Vol. 357. — P. 1157–1169. — astro-ph/0004183.
168. *Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G.* Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. II. Modified Urca processes in npe mu matter // *Astron. Astrophys.* — 2001. — Jun. — Vol. 372. — P. 130–137. — astro-ph/0103290.
169. *Vidaña I.* Hyperons and neutron stars // American Institute of Physics Conference Series. — Vol. 1645 of *American Institute of Physics Conference Series.* — 2015. — Feb. — P. 79–85.
170. *Glendenning N. K.* Compact stars : nuclear physics, particle physics, and general relativity. Astronomy and astrophysics library. — New York : Springer, 2000.
171. *Lindblom L., Owen B. J.* Effect of hyperon bulk viscosity on neutron-star r-modes // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Mar. — Vol. 65. — P. 063006. — astro-ph/0110558.
172. *Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G.* Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. III. Effects of Sigma<sup>-</sup> hyperons // *Astron. Astrophys.* — 2002. — Jan. — Vol. 381. — P. 1080–1089. — astro-ph/0110575.
173. *van Dalen E. N., Dieperink A. E.* Bulk viscosity in neutron stars from hyperons // *Phys. Rev. C.* — 2004. — Feb. — Vol. 69. — P. 025802. — nucl-th/0311103.
174. *Nayyar M., Owen B. J.* R-modes of accreting hyperon stars as persistent sources of gravitational waves // *Phys. Rev. D.* — 2006. — Apr. — Vol. 73. — P. 084001. — astro-ph/0512041.
175. *Gusakov M. E., Kantor E. M.* Bulk viscosity of superfluid hyperon stars // *Phys. Rev. D.* — 2008. — Oct. — Vol. 78. — P. 083006. — 0806.4914.
176. *Gusakov M. E., Haensel P., Kantor E. M.* Physics input for modelling superfluid neutron stars with hyperon cores // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2014. — Vol. 439, no. 1. — P. 318–333. — 1401.2827.
177. Hypernuclei and massive neutron stars / M. Fortin, S. S. Avancini, C. Providência, I. Vidaña // *Phys. Rev. C.* — 2017. — Jun. — Vol. 95. — P. 065803.
178. Hyperonic stars and the symmetry energy / Constança Providência, Morgane Fortin, Helena Pais, Aziz Rabhi // *Frontiers in Astronomy and Space Sciences.* — 2019. — Vol. 6. — P. 13. — 1811.00786.
179. *Gal A., Hungerford E. V., Millener D. J.* Strangeness in nuclear physics // *Reviews of Modern Physics.* — 2016. — Jul. — Vol. 88. — P. 035004. — 1605.00557.
180. Bulk viscosity in neutron stars with hyperon cores / D. D. Ofengeim, M. E. Gusakov, P. Haensel, M. Fortin // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Nov. — Vol. 100, no. 10. — P. 103017. — 1911.08407.
181. R-mode stabilization in neutron stars with hyperon cores / D. D. Ofengeim, M. E. Gusakov, P. Haensel, M. Fortin // *Journal of Physics Conference Series.* — Vol. 1400 of *Journal of Physics Conference Series.* — 2019. — Nov. — P. 022029.
182. *Horowitz C. J., Piekarewicz J.* Neutron Star Structure and the Neutron Radius of <sup>208</sup>Pb // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 5647–5650. — astro-ph/0010227.
183. The NANOGrav 11-year Data Set: High-precision Timing of 45 Millisecond Pulsars / Z. Arzoumanian, A. Brazier, S. Burke-Spolaor et al. // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* — 2018. — Apr. — Vol. 235. — P. 37. — 1801.01837.
184. Relativistic Shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar / H. T. Cromartie, E. Fonseca, S. M. Ransom et al. // *Nature Astronomy.* — 2019. — P. 439. — 1904.06759.
185. *Gusakov M. E., Yakovlev D. G., Gnedin O. Y.* Thermal evolution of a pulsating neutron star // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2005. — Aug. — Vol. 361, no. 4. — P. 1415–1424. — astro-ph/0502583.
186. *Parreño A., Ramos A., Bennhold C.* Weak decay of hypernuclei // *Phys. Rev. C.* — 1997. — Jul. — Vol. 56. — P. 339–364. — nucl-th/9611030.

187. *Itonaga K., Motoba T.* Hypernuclear Weak Decays // *Progress of Theoretical Physics Supplement*. — 2010. — Jan. — Vol. 185. — P. 252–298.
188. *Bauer E., Garbarino G., Rodríguez Peña C. A.* Nonmesonic weak decay of  $\Lambda$  hypernuclei: The three-nucleon induced mode // *Physics Letters B*. — 2017. — Mar. — Vol. 766. — P. 144–148. — 1701.03957.
189. Weak strangeness production reaction  $pn \rightarrow p\Lambda$  in a one-boson-exchange model / A. Parreño, A. Ramos, N. G. Kelkar, C. Bennhold // *Phys. Rev. C*. — 1999. — Apr. — Vol. 59. — P. 2122–2129. — nucl-th/9810020.
190. One-loop contributions in the effective field theory for the  $\Lambda N \rightarrow NN$  transition / A. Pérez-Obiol, D. R. Entem, B. Juliá-Díaz, A. Parreño // *Phys. Rev. C*. — 2013. — Apr. — Vol. 87. — P. 044614. — 1302.6955.
191. *Parreño A., Ramos A., Bennhold C.* Novel weak decays in doubly strange systems // *Phys. Rev. C*. — 2002. — Jan. — Vol. 65. — P. 015205. — nucl-th/0106054.
192. *Bauer E., Garbarino G., Rodríguez Peña C. A.* Nonmesonic weak decay of double- $\Lambda$  hypernuclei: A microscopic approach // *Phys. Rev. C*. — 2015. — Jul. — Vol. 92. — P. 014301. — 1503.06125.
193. *Grotz K., Klapdor H. V.* The weak interaction in nuclear, particle and astrophysics. — 1990.
194. *Okun L. B.* Leptons and Quarks. — WORLD SCIENTIFIC, 2014.
195. *Rijken T. A., Stoks V. G. J., Yamamoto Y.* Soft-core hyperon-nucleon potentials // *Phys. Rev. C*. — 1999. — Jan. — Vol. 59. — P. 21–40. — nucl-th/9807082.
196. *Maxwell O. V.* Neutrino Emission Processes in Hyperon-populated Neutron Stars // *Astrophys. J.* — 1987. — May. — Vol. 316. — P. 691.
197. *Kolomeitsev E. E., Kaiser N., Weise W.* Chiral Dynamics of Deeply Bound Pionic Atoms // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Mar. — Vol. 90. — P. 092501. — nucl-th/0207090.
198. *Kolomeitsev E. E.* // *private communication*. — 2018.
199. Pion degrees of freedom in nuclear matter / A. B. Migdal, E. E. Saperstein, M. A. Troitsky, D. N. Voskresensky // *Phys. Rep.* — 1990. — Sep. — Vol. 192. — P. 179–437.
200. *Lindblom L., Owen B. J., Morsink S. M.* Gravitational Radiation Instability in Hot Young Neutron Stars // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Jun. — Vol. 80. — P. 4843–4846. — gr-qc/9803053.
201. *Shternin P. S.* Transport coefficients of leptons in superconducting neutron star cores // *Phys. Rev. D*. — 2018. — Sep. — Vol. 98. — P. 063015. — 1805.06000.
202. *Gusakov M. E., Chugunov A. I., Kantor E. M.* Explaining observations of rapidly rotating neutron stars in low-mass x-ray binaries // *Phys. Rev. D*. — 2014. — Sep. — Vol. 90. — P. 063001. — 1305.3825.
203. Observation of a  ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$  Double Hypernucleus / H. Takahashi, J. K. Ahn, H. Akikawa et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Nov. — Vol. 87. — P. 212502.
204. Occurrence of Hyperon Superfluidity in Neutron Star Cores / T. Takatsuka, S. Nishizaki, Y. Yamamoto, R. Tamagaki // *Progress of Theoretical Physics*. — 2006. — Feb. — Vol. 115. — P. 355–379. — nucl-th/0601043.
205. Thermal Emission in the Quiescent Neutron Star SAX J1810.8-2609 / Jessamyn L. Allen, Jeroen Homan, Deepto Chakrabarty, Michael Nowak // *Astrophys. J.* — 2018. — Feb. — Vol. 854. — P. 58.
206. A Millisecond Oscillation in the Bursting X-Ray Flux of SAX J1810.8-2609 / A. V. Bilous, A. L. Watts, D. K. Galloway, J. J. M. in 't Zand // *Astrophys. J.* — 2018. — Jul. — Vol. 862. — P. L4. — 1805.10065.
207. *Lee U., Yoshida S.* r-Modes of Neutron Stars with Superfluid Cores // *Astrophys. J.* — 2003. — Mar. — Vol. 586, no. 1. — P. 403–418. — astro-ph/0211580.
208. *Haskell B., Andersson N.* Superfluid hyperon bulk viscosity and the r-mode instability of rotating neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2010. — Nov. — Vol. 408, no. 3. —

- P. 1897–1915. — 1003.5849.
209. *Kantor E. M., Gusakov M. E.* Temperature-dependent r modes in superfluid neutron stars stratified by muons // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2017. — Aug. — Vol. 469, no. 4. — P. 3928–3945. — 1705.06027.
210. *Dommes V. A., Kantor E. M., Gusakov M. E.* Temperature-dependent oscillation modes in rotating superfluid neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2019. — Jan. — Vol. 482, no. 2. — P. 2573–2587. — 1810.08005.
211. *Chatterjee D., Bandyopadhyay D.* Effect of hyperon-hyperon interaction on bulk viscosity and r-mode instability in neutron stars // *Phys. Rev. D.* — 2006. — Jul. — Vol. 74. — P. 023003. — astro-ph/0602538.

## Приложение А

### Вывод уравнения эволюции функции полоидального магнитного потока

Как объяснено в разделе 3.3.5, осесимметричное магнитное поле может быть выражено через функцию полоидального потока  $\Psi$  и функцию полоидального электрического тока  $I$ ,<sup>1</sup>

$$\mathbf{B} = \nabla\Psi \times \nabla\varphi + I\nabla\varphi = \text{rot}(\Psi\nabla\varphi) + I\nabla\varphi, \quad (\text{A.1})$$

где  $\nabla\varphi = \mathbf{e}_\varphi/(r \sin \theta)$ . Тогда плотность электрического тока имеет вид

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{B} = -\frac{c}{4\pi} \Delta^* \Psi \nabla\varphi + \frac{c}{4\pi} \nabla I \times \nabla\varphi, \quad (\text{A.2})$$

где

$$\Delta^* = \Delta + \frac{\nabla[(\nabla\varphi)^2]}{(\nabla\varphi)^2} \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.3})$$

обозначает оператор Грэда-Шафранова (см., например, книгу [138]). Плотность силы Ампера  $\mathbf{f}_A$ , согласно формуле (3.6), принимает вид

$$\mathbf{f}_A = -\frac{(\nabla\varphi)^2}{4\pi} (\Delta^* \Psi \nabla\Psi + I\nabla I + \nabla\Psi \times \nabla I). \quad (\text{A.4})$$

В силу осевой симметрии в рассматриваемой задаче не существует силы, способной уравновесить  $\mathbf{f}_A$ , т.е. выполняется равенство (3.35), а, значит,  $I = I(\Psi, t)$ . Формула (3.37a) может быть переписана в виде

$$\text{rot} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial t} \nabla\varphi \right) = \text{rot} \left[ -c\delta\mathbf{E}_{\text{com}}^{(t)} + \mathbf{U}_b^{(p)} \times (\nabla\Psi \times \nabla\varphi) \right]. \quad (\text{A.5})$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} \nabla\varphi = -c\delta\mathbf{E}_{\text{com}}^{(t)} - \nabla\varphi \left( \mathbf{U}_b^{(p)} \cdot \nabla\Psi \right) + \nabla\psi, \quad (\text{A.6})$$

где  $\psi$  — произвольная скалярная функция. Она не сказывается на эволюции наблюдаемых величин и может быть опущена. Более того, поскольку рассматриваемая физическая система осесимметрична, мы можем считать, что  $\psi$  зависит только от  $r$  и  $\theta$ , и её градиент — полоидальный вектор. Так как все остальные члены в уравнении (A.6) являются тороидальными векторами, с необходимостью  $\nabla\psi = 0$ .

С помощью выражений (3.12) и (A.1) мы получаем

$$\delta\mathbf{E}_{\text{com}}^{(t)} = \frac{J_{ep}}{e^2 n_e^2} \mathbf{j}^{(t)} - \frac{n_n^2}{cn_b J_{np}} \nabla\delta\mu_n \times \mathbf{B}^{(p)} = -\frac{cJ_{ep}}{4\pi e^2 n_e^2} \Delta^* \Psi \nabla\varphi + \frac{n_n^2}{cn_b J_{np}} (\nabla\delta\mu_n \cdot \nabla\Psi) \nabla\varphi. \quad (\text{A.7})$$

Вместе с тождеством (A.6) это даёт

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{c^2 J_{ep}}{4\pi e^2 n_e^2} \Delta^* \Psi - \frac{n_n^2}{n_b J_{np}} \nabla\delta\mu_n \cdot \nabla\Psi - \mathbf{U}_b^{(p)} \cdot \nabla\Psi, \quad (\text{A.8})$$

что совпадает с уравнением (3.38).

<sup>1</sup> Следует помнить, что градиенты этих функций и, вообще говоря, градиенты любых скаляров в нашей задаче являются полоидальными векторами, перпендикулярными к  $\nabla\varphi$ . Этот факт активно используется в приложениях А, Б и параграфе 3.3.5.

## Приложение Б

### Вывод уравнения (3.40)

Умножая уравнение (3.39) скалярно на  $\nabla\varphi$ , можно получить

$$\begin{aligned} \left( I'_\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial t} + I'_t \right) (\nabla\varphi)^2 &= \nabla\varphi \cdot \text{rot} \left( -c\delta\mathbf{E}_{\text{com}}^{(p)} + I\mathbf{U}_b^{(p)} \times \nabla\varphi + \mathbf{U}_b^{(t)} \times \mathbf{B}^{(p)} \right) = \\ &= \text{div} \left[ -c\delta\mathbf{E}_{\text{com}}^{(p)} \times \nabla\varphi - I(\nabla\varphi)^2 \mathbf{U}_b^{(p)} + \mathbf{B}^{(p)} \left( \nabla\varphi \cdot \mathbf{U}_b^{(t)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

Последний член в правой части этого равенства может быть записан как

$$\text{div} \left[ \mathbf{B}^{(p)} \left( \nabla\varphi \cdot \mathbf{U}_b^{(t)} \right) \right] = \mathbf{B}^{(p)} \cdot \nabla \left( \nabla\varphi \cdot \mathbf{U}_b^{(t)} \right), \quad (\text{Б.2})$$

так как  $\text{div} \mathbf{B}^{(p)} = 0$ . Средний член в правой части выражения (Б.1) равен

$$- \text{div} \left[ I(\nabla\varphi)^2 \mathbf{U}_b^{(p)} \right] = -I \text{div} \left[ (\nabla\varphi)^2 \mathbf{U}_b^{(p)} \right] - (\nabla\varphi)^2 I'_\Psi \mathbf{U}_b^{(p)} \cdot \nabla\Psi, \quad (\text{Б.3})$$

где было использовано тождество (3.36а). Теперь запишем полоидальную часть сопутствующего электрического поля (3.12):

$$\delta\mathbf{E}_{\text{com}}^{(p)} = \frac{J_{ep}}{e^2 n_e^2} \mathbf{j}^{(p)} - \frac{n_n^2}{c n_b J_{np}} \nabla\delta\mu_n \times \mathbf{B}^{(t)} + \frac{\mathbf{f}_A^{(p)}}{en_e}. \quad (\text{Б.4})$$

Здесь опущено слагаемое  $-\nabla\delta\mu_e/e$ , не дающее вклада в  $\text{rot} \delta\mathbf{E}_{\text{com}}$  [см. первое равенство в выражении (Б.1)]. С помощью формул (А.1), (А.2) и (А.4) после некоторых алгебраических преобразований можно получить

$$c\delta\mathbf{E}_{\text{com}}^{(p)} \times \nabla\varphi = -\frac{c^2 J_{ep}}{4\pi e^2 n_e^2} I'_\Psi (\nabla\varphi)^2 \nabla\Psi + \frac{n_n^2}{n_b J_{np}} I (\nabla\varphi)^2 \nabla\delta\mu_n - \frac{c(\nabla\varphi)^2}{4\pi en_e} (\Delta^*\Psi + I'_\Psi I) \mathbf{B}^{(p)}. \quad (\text{Б.5})$$

Вновь обращаясь к закону  $\text{div} \mathbf{B}^{(p)} = 0$ , мы получаем для первого члена в правой части равенства (Б.1)

$$\begin{aligned} - \text{div} \left( c\delta\mathbf{E}_{\text{com}}^{(p)} \times \nabla\varphi \right) &= \frac{c^2 J_{ep}}{4\pi e^2 n_e^2} (\nabla\varphi)^2 I'_\Psi \Delta^*\Psi + \\ &+ (\nabla\varphi)^2 \nabla \left( \frac{c^2 J_{ep}}{4\pi e^2 n_e^2} I'_\Psi \right) \cdot \nabla\Psi - \frac{n_n^2}{n_b J_{np}} (\nabla\varphi)^2 I'_\Psi \nabla\delta\mu_n \cdot \nabla\Psi - \\ &- I \text{div} \left[ \frac{n_n^2}{n_b J_{np}} (\nabla\varphi)^2 \nabla\delta\mu_n \right] + \mathbf{B}^{(p)} \cdot \nabla \left[ \frac{c(\nabla\varphi)^2}{4\pi en_e} (\Delta^*\Psi + I'_\Psi I) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Подставляя уравнения (Б.2), (Б.3) и (Б.6) в формулу (Б.1), можно видеть, что второй член в правой части (Б.3) и первый и третий члены в правой части (Б.6) комбинируются в выражение  $(\nabla\varphi)^2 I'_\Psi \partial\Psi/\partial t$  [см. уравнение (А.8)]. Это выражение взаимно сокращается с таким же выражением в левой части (Б.1). В конце концов, мы приходим к результату

$$\begin{aligned} (\nabla\varphi)^2 I'_t &= (\nabla\varphi)^2 \nabla \left( \frac{c^2 J_{ep}}{4\pi e^2 n_e^2} I'_\Psi \right) \cdot \nabla\Psi - I \text{div} \left[ (\nabla\varphi)^2 \left( \frac{n_n^2}{n_b J_{np}} \nabla\delta\mu_n + \mathbf{U}_b^{(p)} \right) \right] + \\ &+ \mathbf{B}^{(p)} \cdot \nabla \left[ \frac{c(\nabla\varphi)^2}{4\pi en_e} (\Delta^*\Psi + I'_\Psi I) + \nabla\varphi \cdot \mathbf{U}_b^{(t)} \right], \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

то есть к уравнению (3.40).

## Приложение В

### Пространственные производные невозмущённых концентраций частиц вблизи границы кора-ядро

В холодном бета-равновесном вырожденном веществе  $P + \varepsilon = n_b d\varepsilon/dn_b$ , где  $\varepsilon = \rho c^2$  — плотность энергии вещества. С помощью этой формулы можно переписать левую часть уравнения Толмана-Оппенгеймера-Волкова (1.2а) в виде

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dn_b} \frac{dn_b}{dr} = \left(\frac{c_s}{c}\right)^2 \frac{P + \varepsilon}{n_b} \frac{dn_b}{dr}, \quad (\text{B.1})$$

где  $c_s = \sqrt{dP/d\rho}$  — скорость звука. Кроме того, воспользуемся тем, что масса коры не превосходит нескольких процентов от общей массы звезды. Значит, в уравнении (1.2а) можно с хорошей точностью положить  $m(r) \approx M = \text{const}$  в малой окрестности дна коры. С помощью этого приближения и формулы (B.1) уравнение (1.2а) преобразуется к виду

$$\left. \frac{dn_b/dr}{n_b/r} \right|_{r \approx R_{\text{core}}} \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{c}{c_s}\right)^2 \left(\frac{R_{\text{core}} c^2}{2GM} - 1\right)^{-1}, \quad (\text{B.2})$$

где мы пренебрегли  $P$  в сравнении с  $\varepsilon$ , что оправданно при  $n_b \lesssim n_0$  [1]. Вблизи границы коры и ядра, при  $n_b \sim 0.5n_0$ , отношение  $(c/c_s)^2$ , входящее в правую часть формулы (B.2), много больше единицы. По мере углубления в ядро уравнение состояния становится жестче, и фактор  $(c/c_s)^2$  уменьшается, но по-прежнему в несколько раз превосходит единицу. Заметим также, что аналогичный результат можно получить для концентрации частиц любого сорта. Более того, похожие оценки могут быть сделаны для производных высших порядков [например, для отношения  $n_b''(r)/(n_b'/r)$ ], но соответствующие выражения будут громоздкими, включающими производные от  $c_s$ . Последний факт, впрочем, должен лишь усилить обсуждаемый эффект.

Соотношение (B.2) показывает, что стандартная оценка пространственной производной в ядре,  $d/dr \sim 1/R$  или  $1/R_{\text{core}}$ , некорректна применительно к невозмущённым величинам вблизи границы коры и ядра. Другими словами, характерный пространственный масштаб во внешних слоях ядра значительно меньше радиуса звезды, порядка толщины коры.

## Приложение Г

## Коэффициенты в формуле (4.30)

Введём безразмерные переменные

$$\alpha_j = \frac{m_{Lj}^*}{m_M}, \quad \beta_j = \frac{m_{Dj}^*}{m_M}, \quad x_j = \frac{p_{Fj}}{m_M}. \quad (\Gamma.1)$$

В таких обозначениях коэффициенты в выражении (4.30а) будут иметь вид:

$$X_0 = g_{24} (2\alpha_2\alpha_4 - 2\beta_2\beta_4 - x_2^2 - x_4^2) [(A_{13}^2 + B_{13}^2) (2\alpha_1\alpha_3 - x_1^2 - x_3^2) + 2\beta_1\beta_3 (A_{13}^2 - B_{13}^2)], \quad (\Gamma.2)$$

$$X_1 = g_{24}^2 (A_{13}^2 + B_{13}^2) (2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - 2\beta_2\beta_4) + 2g_{24}^2 (A_{13}^2 - B_{13}^2) \beta_1\beta_3, \quad (\Gamma.3)$$

$$X_2 = g_{24}^2 (A_{13}^2 + B_{13}^2). \quad (\Gamma.4)$$

Аналогично, для выражения (4.30б) будет:

$$\begin{aligned} Y_0 = & g_{14}g_{24} (A_{13}A_{23} - B_{13}B_{23}) [\beta_2\beta_3x_1^2 + \beta_1\beta_3x_2^2 + \beta_1\beta_3x_4^2 + \beta_2\beta_3x_4^2 - \beta_3\beta_4x_3^2 - \beta_3\beta_4x_4^2 \\ & + 2\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4 - 2\alpha_1\alpha_4\beta_2\beta_3 - 2\alpha_2\alpha_4\beta_1\beta_3 + 2\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4] \\ & + g_{14}g_{24} (A_{13}A_{23} + B_{13}B_{23}) [-x_2^2x_1^2 - x_3^2x_4^2 - \alpha_1\alpha_2x_1^2 + \alpha_2\alpha_3x_1^2 + \alpha_2\alpha_4x_1^2 - \alpha_1\alpha_2x_2^2 \\ & + \alpha_1\alpha_3x_2^2 + \alpha_1\alpha_3x_4^2 + \alpha_2\alpha_3x_4^2 + \alpha_1\alpha_4x_2^2 + \alpha_1\alpha_4x_3^2 + \alpha_2\alpha_4x_3^2 - \alpha_3\alpha_4x_3^2 - \alpha_3\alpha_4x_4^2 \\ & + \beta_1\beta_2x_1^2 - \beta_2\beta_4x_1^2 + \beta_1\beta_2x_2^2 - \beta_1\beta_4x_2^2 - \beta_1\beta_4x_3^2 - \beta_2\beta_4x_3^2 + 2\alpha_1\alpha_3\beta_2\beta_4 \\ & + 2\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_4 - 2\alpha_3\alpha_4\beta_1\beta_2 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4], \quad (\Gamma.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1 = & g_{14}g_{24}A_{13}A_{23} [(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4) + (\beta_2 + \beta_3)(\beta_4 - \beta_1)] \\ & + g_{14}g_{24}B_{13}B_{23} [(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4) - (\beta_2 - \beta_3)(\beta_1 - \beta_4)], \quad (\Gamma.6) \end{aligned}$$

$$Y_2 = Y_1 \Big|_{1 \leftrightarrow 2}, \quad (\Gamma.7)$$

$$Y_3 = g_{14}g_{24} (A_{13}A_{23} + B_{13}B_{23}). \quad (\Gamma.8)$$

Наконец, в выражении (4.30в):

$$X'_{0,1,2} = X_{0,1,2} \Big|_{1 \leftrightarrow 2}. \quad (\Gamma.9)$$

## Приложение Д

## Преобразование выражения (4.20в)

Введём безразмерные переменные

$$\mathbf{x}_j = \frac{\mathbf{p}_j}{m_M}, \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{q}}{m_M} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{q}'}{m_M} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2. \quad (\text{Д.1})$$

Аналогичным образом введём величину  $x_{\min, \max} = q_{\min, \max}/m_M$ , которую можно выразить через  $x_j = |\mathbf{x}_j| = p_{Fj}/m_M$ . Угловой интеграл (4.20б) без функции нагрузки также представим в безразмерном виде  $\mathcal{A} = A/m_M^3$ , где

$$A = \frac{2(2\pi)^3}{\prod_j x_j} (x_{\max} - x_{\min}) \Theta(x_{\max} - x_{\min}). \quad (\text{Д.2})$$

Подставляя  $\langle |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 \rangle$  из выражения (4.29) и  $D_M$  из формулы (4.35) в уравнение (4.20в), находим:

$$\mathcal{J} = G_F^2 m_\pi^4 (X_0 J_0 + X_1 J_1 + X_2 J_2 + X'_0 J'_0 + X'_1 J'_1 + X'_2 J'_2 + Y_0 J_3 + Y_1 J_4 + Y_2 J'_4 + Y_3 J_5). \quad (\text{Д.3})$$

Безразмерные функции  $J_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $k = 1 \dots 5$ , имеют следующий вид:

$$J_k = \frac{1}{A} \int \prod_j d\Omega_j \frac{x^{2k}}{(x^2 + 1)^2} \delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4) = \frac{\Theta(x_{\max} - x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \frac{x^{2k}}{(x^2 + 1)^2} \quad (\text{Д.4})$$

для  $k = 0, 1, 2$ ,

$$J_3 = \frac{1}{A} \int \prod_j d\Omega_j \frac{\delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)}{(x^2 + 1)(x'^2 + 1)} = \frac{\Theta(x_{\max} - x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{t_1^2(x) - t_2^2(x)}} \quad (\text{Д.5})$$

$$J_4 = \frac{1}{A} \int \prod_j d\Omega_j \frac{x^2 \delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)}{(x^2 + 1)(x'^2 + 1)} = \frac{\Theta(x_{\max} - x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)\sqrt{t_1^2(x) - t_2^2(x)}}, \quad (\text{Д.6})$$

$$J_5 = \frac{1}{A} \int \prod_j d\Omega_j \frac{x^2 x'^2 \delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)}{(x^2 + 1)(x'^2 + 1)} \\ = J_3 + \frac{\Theta(x_{\max} - x_{\min})}{x_{\max} - x_{\min}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \left( \frac{x^2}{x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{t_1^2(x) - t_2^2(x)}} \right), \quad (\text{Д.7})$$

где использованы обозначения из статьи [196]:

$$t_1 = x_1^2 + x_2^2 - x^2 + 1 - 2x_3 x_4 \cos \theta_1 \cos \theta_2, \quad t_2 = 2x_3 x_4 \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad (\text{Д.8})$$

причём

$$\cos \theta_1 = \frac{x_3^2 - x_1^2 + x^2}{2x_3 x}, \quad \cos \theta_2 = \frac{x_2^2 - x_4^2 - x^2}{2x_4 x}. \quad (\text{Д.9})$$



Для «обменных» интегралов справедливо

$$J'_k = J_k|_{x_1 \leftrightarrow x_2} \quad (\text{Д.10})$$

для  $k = 0, 1, 2, 4$ , что соответствует замене  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$  в подынтегральных выражениях (для  $k = 3, 5$  имеем просто  $J'_k = J_k$ ). Подставляя (Д.3) в (4.22), мы получаем искомое выражение (4.36).

Сведение многократных интегралов к однократным выполнено согласно стандартной методике, см., например, [49, 50, 196]. При этом использованы тождества [196]

$$1 = \int d^3\mathbf{x} \delta(\mathbf{x} + \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1), \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2. \quad (\text{Д.11})$$

Однократные интегралы в правых частях равенств (Д.4) — (Д.7) могут быть легко вычислены как аналитически, так и численно. Аналитические выражения приведены в статьях [49, 196].