

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого»



На правах рукописи

Порозова Виктория Михайловна

**Когерентное взаимодействие света с одиночными
атомами и атомными ансамблями в условиях квантового
вырождения**

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., в. н.с. ЦКТ МГУ
Куприянов Дмитрий Васильевич

Санкт-Петербург — 2020

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Когерентные оптические процессы в атомных системах в условиях квантового вырождения	12
1.1 Поведение атомных систем при низких температурах	13
1.1.1 Краткий исторический обзор методов охлаждения	13
1.1.2 Протокол рамановского охлаждения (RSC)	15
1.2 Когерентное состояние материи: конденсат Бозе-Эйнштейна	18
1.2.1 Оптические свойства конденсата	18
1.2.2 Динамическое уравнение Гросса-Питаевского	20
1.2.3 Сверхтекучесть конденсата и её связь с оптомеханикой	23
1.3 Основные понятия квантовой информатики	25
1.3.1 Кубиты	25
1.3.2 Квантовые логические элементы	26
1.3.3 Механизм дипольной блокады ридберговских атомов	32
Глава 2. Рассеяние света на атомах в условиях квантового вырождения	35
2.1 Общий формализм задачи рассеяния	35
2.2 Динамика оптического возбуждения	38
2.2.1 Диаграммное представление	38
2.2.2 Некогерентные потери и диэлектрическая проницаемость конденсата. Уравнение рассеяния	39
2.3 Приближение бесконечной однородной среды	45
2.4 Выводы по главе	49
Глава 3. Одномерная модель задачи рассеяния	51
3.1 Пространственный профиль параметра порядка	51
3.2 Дифракция Брэгга на пространственных осцилляциях параметра порядка	58
3.2.1 Интерференция материальных волн	58

	Стр.	
3.2.2	Рассеяние света цепочкой атомов	63
3.2.3	Сравнение результатов	64
3.2.4	Связь с физикой фотонного кристалла	67
3.3	Выводы по главе	75
Глава 4. Одиночный атом в оптической дипольной ловушке . . .		77
4.1	Принцип рамановского охлаждения	77
4.2	Возможные схемы рамановского охлаждения атома, связанного потенциалом дипольной ловушки	81
4.2.1	Независимое охлаждение колебательных мод	81
4.2.2	Трёхмерный вариант рамановского охлаждения	83
4.3	Результаты численного расчёта	96
4.4	Выводы по главе	101
Заключение		103
Список сокращений и условных обозначений		106
Список литературы		107
Список рисунков		120
Приложение А. Краткий обзор диаграммного подхода, используемого в диссертации		126
Приложение Б. Преобразование матрицы плотности в протоколе рамановского охлаждения		130
Приложение В. Матричные элементы, вносящие вклад в (4.23) и (4.24)		134

Введение

Представленная диссертационная работа связана с разработкой теории когерентного взаимодействия света как с атомными ансамблями в условиях квантового вырождения, так и с одиночными атомами и ориентирована на описание экспериментов проводимых с щелочными атомами в условиях глубокого лазерного охлаждения. Мотивация нашей работы, в значительной степени, обусловлена заметным прогрессом в области оптических экспериментов, проводящихся с ансамблями ультрахолодных атомов (в основном щелочных металлов) во многих исследовательских лабораториях, позволяющих контролировать поведение атомов при температурах порядка десятков микрокельвин и ниже. Так, например, продемонстрирована возможность реализации схемы рамановского охлаждения одиночного атома, локализованного в пространстве с помощью "оптического пинцета" в трехмерном режиме [1; 2]. Управление пространственной решеткой, сформированной системой локализованных атомов, посредством протокола "дипольной блокады" может рассматриваться как вариант создания квантового симулятора в моделях Гейзенберга и Хаббарда - традиционных объектах статистической физики и теории фазовых переходов [3]. Однако требуемая высокая степень надежности квантово-информационных логических операций еще не достигнута. В частности, необходимо обеспечить охлаждения атома до основного состояния оптического пинцета. В связи с этим представляется важной оптимизация протокола рамановского охлаждения, в данный момент рассматриваемого как наиболее эффективный способ замедления движения атома в микроскопической дипольной ловушке, в идеальном варианте, до основного состояния.

Количество работ в направлении экспериментального исследования мезоскопических атомных систем стремительно возрастает, чему имеются определенные важные причины. Благодаря достижениям в области квантовой оптики, нелинейной и интегральной оптики, а также атомной физики стала возможной реализация различных физических платформ и каналов обработки и передачи информации на уровне элементарных объектов материи - фотонов, атомов, в том числе в коллективных системах, связанных эффектом квантовой запутанности. Ансамбли холодных атомов как вырожденные, так и формирующие пространственные решетки, являются одним из примеров подобной физической

платформы. Любая квантовая сеть или процессор требуют создания особых алгоритмов передачи, обработки и хранения информации, в основе которых лежат физические принципы квантовой неопределённости и перепутывания состояний. Естественным образом возникает необходимость разработки способов обмена и контроля квантовыми состояниями для объектов разной физической природы, т.е. создания полноценных систем квантового интерфейса. Системы холодных атомов, спиновое состояние которых слабо взаимодействует с окружением, являются одним из потенциальных кандидатов для создания систем квантового интерфейса между материальными объектами и квантами света [4; 5].

В диссертационной работе нами рассмотрены примеры оптических процессов, в основном связанных с когерентным взаимодействием света с системами ультрахолодных атомов. Автор надеется, что представленная работа несёт определённый вклад в это новое направление перспективных (**актуальных**) исследований, сформировавшиеся на стыке атомной физики, квантовой оптики и квантовой физики в целом.

Целью представленной диссертации, в её первой части, является разработка квантового описания рассеяния света атомным ансамблем, находящимся в условиях квантового вырождения. Вырожденность означает, что внутреннее движение атомов заморожено и ансамбль формирует коллективное квантовое состояние, известное как конденсат Бозе-Эйнштейна. В этих условиях даже слабое межатомное взаимодействие становится критически важным с точки зрения описания как стационарного состояния, так и динамики объекта, например, при его фрагментации. Во второй части диссертационной работы **целью** служит разработка теории рамановского охлаждения как инструмента замедления и остановки движения атома, захваченного оптическим пинцетом. Проблема, на которой мы сосредотачиваемся, обусловлена необходимостью обеспечить замедление движения атома по всем трём пространственным направлениям. Возникает ряд нетривиальных требований, предъявляемых к геометрии охлаждающих пучков и к внешним параметрам, связанным с импульсами света, обеспечивающими процесс комбинационного рассеяния для одновременного подавления всех поступательных степеней свободы атома.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Провести расчёт процесса рассеяния одиночного фотона атомным ансамблем в условиях квантового вырождения, основанный на методах квантовой теории рассеяния и инвариантной теории возмущений.
2. Провести анализ спектральных зависимостей параметров рассеяния (коэффициентов прохождения и отражения) при вариации профиля параметра порядка вырожденного атомного газа.
3. Исследовать влияние эффекта нелинейной квантовой интерференции, проявляющегося в условиях фрагментации конденсата Бозе-Эйнштейна, на характеристики рассеяния.
4. Исследовать предъявляемые теорией оптимальные условия рамановского охлаждения, обеспечивающие одновременное замедление движения атома, локализованного в дипольной ловушке, вдоль всех его направлений движения.
5. Проанализировать возможность оптимизации схемы рамановского охлаждения и представить практические рекомендации для эксперимента.

Научная новизна: В диссертации получены следующие оригинальные результаты:

1. Разработана микроскопическая квантовая теория рассеяния света — одиночного фотона — на системе тождественных атомов в условиях их квантового вырождения. Ключевым результатом теории является построение интегро-дифференциального уравнения рассеяния для функции Грина одночастичного возбуждения поляритонного типа.
2. Построено аналитическое решение этого уравнения и проанализировано распространение одночастичного возбуждения в бесконечно протяженной однородной среде.
3. Исследовано рассеяние света на модуляциях плотности вещества, обусловленной интерференцией материальных волн - фрагментов конденсата Бозе-Эйнштейна. Показано, что данная неоднородная пространственная структура приводит к механизму рассеяния света, аналогичному явлению дифракции Брэгга-Вульфа.
4. Выявлено, что обнаруженный механизм рассеяния имеет определенные аналогии с распространением света в среде с периодической модуляцией диэлектрической проницаемости и обладающей свойствами фотонного кристалла.

5. Теоретически исследована схема рамановского охлаждения в условиях одновременного замедления атома, захваченного оптическим пинцетом, вдоль всех направлений его движения.
6. Сформулированы и проанализированы условия оптимальной схемы рамановского охлаждения, предполагающие симметричную геометрию облучения и определённые соотношения между частотами Раби управляющих полей.

Практическая значимость

Диссертационная работа посвящена развитию квантовой теории рассеяния света на атомных системах, являющихся активно исследуемыми объектами лабораторных экспериментов, проводимых при сверхнизких температурах. Это предполагает использование систем тождественных атомов, находящихся в условиях квантового вырождения, а также разработку оптимальных схем глубокого рамановского охлаждения, требующих замедления пространственного движения изолированного атома, пленённого потенциалом дипольной ловушки.

Взаимодействие света с атомной подсистемой, находящейся в вырожденном квантовом состоянии, представляет собой как фундаментальный, так и практический интерес для новых квантово-информационных технологий. Так, например, в работе [6] продемонстрирован оптический когерентный контроль состояния атомной подсистемы, находящейся в фазе конденсации. Демонстрирована возможность образования суперпозиционных вихревых состояний, для которых относительная фаза определяется относительными фазами когерентных оптических полей. Приготовление таких суперпозиционных состояний позволяет расширить сверхтекучее движение вещества на более сложный вариант суперпозиции макроскопических квантовых состояний, часто называемых "Шредингеровскими котами". Подобные закрученные неклассические состояния вещества также интересны в квантовой информатике, в частности, при разработке квантовых повторителей, где так называемые "летающие кубиты" являются фотонами с орбитальным угловым моментом [7; 8]. Образование квантовой вихревой нити в конденсате интересно и с фундаментальной точки зрения изучения взаимоотношений между двумя фазами: конденсации и сверхтекучести в одномерных и двумерных системах [9]. Так, в работе [10] показано, что сильно взаимодействующий одномерный газ проявляет свойства сверхтекучести, хотя такая система не переходит в фазу бозе-эйнштейновской конденсации. Сверхтекучесть в кольцевой геометрии открывает новые

возможности, например, с добавлением квантового эффекта туннелирования, аналогично эффекту Джозефсона, можно с помощью эффекта сверхтекучести реализовать квантовый интерфейс для вырожденного атомарного газа [11]. Перечисленные примеры указывают на востребованность последовательной теории когерентного взаимодействия света с атомным ансамблем в условиях квантового вырождения и, по мнению автора, обосновывают её определённую практическую значимость.

Теория рамановского охлаждения атома, захваченного микроскопической дипольной ловушкой - «оптическим пинцетом» - и оптимизация протокола охлаждения и локализации атома имеет важное практическое применение. Успешные эксперименты по реализации рамановского протокола для охлаждения атома в системах типа "оптического пинцета" в трехмерном режиме [1; 2] и возможность относительно простого управления состоянием атомов с помощью механизма ридберговской блокады определяют перспективы для практической реализации квантового компьютера на атомной платформе [3]. Для достижения высокой надежности квантово-информационных операций необходимо осуществить охлаждение атома, понизив его энергию вплоть до основного колебательного состояния, поэтому практическая реализация рамановского охлаждения одиночных нейтральных атомов в микроскопической дипольной ловушке до основного состояния удерживающего потенциала имеет решающее значение для создания элементарного квантового процессора.

Методология и методы исследования. Результаты, приведённые в данной диссертационной работе, получены с помощью использования современного аппарата теоретической и математической физики. Взаимодействие света с атомной средой рассматривается на основе квантово-электродинамического подхода, инвариантной теории возмущений и диаграммных методов, обладающих высокой строгостью микроскопического описания физических процессов. В сочетании с методами численного моделирования развиваемые подходы обеспечивают необходимую точность и надежность результатов при описании рассматриваемых явлений. В некоторых случаях теоретические расчёты позволяют провести упреждающее моделирование планируемых экспериментов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Рассеяние света на пространственных осцилляциях параметра порядка конденсата Бозе-Эйнштейна аналогично явлению дифракции Брэгга.

Особенностью процесса является возможность сильного когерентного рассеяния даже при низкой плотности атомов в образце.

2. Конденсат Бозе-Эйнштейна в процессе фрагментации образует неоднородную пространственную структуру с периодическими осцилляциями параметра порядка и плотности атомов, что приводит к пространственной модуляции диэлектрической проницаемости конденсата, формируя оптическую среду, подобную фотонному кристаллу.
3. Для эффективного рамановского охлаждения в трёхмерной ловушке необходимо обеспечить квантовое перепутывание спиновой и колебательной подсистем атома в дипольной ловушке.
4. Оптимальными условиями рамановского охлаждения в трёхмерной ловушке являются максимально симметричная геометрия облучения четырьмя лучами света в направлении биссектрис главных октантов дипольной ловушки, а также согласование интенсивностей и поляризаций оптических мод, управляющих процессом охлаждения.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях:

- V.M. Ezhova, L.V. Gerasimov, D.V. Kupriyanov, International Youth Conference on Physics and Astronomy “Physics SPb”, “On a theory of light scattering from a Bose-Einstein condensate”, 26-29 October 2015, St. Petersburg
- V.M. Ezhova, L.V. Gerasimov, and D.V. Kupriyanov, "Coherent light scattering from a quantum degenerate Bose-gas RQC Summer School, August 22-27, 2016, Moscow, Russia
- V.M. Ezhova, L.V. Gerasimov, and D.V. Kupriyanov, "Coherent light scattering from a quantum degenerate Bose-gas”, EMN Meeting on QCQI, August 23-26, 2016, Berlin, Germany
- V.M. Porozova, L.V. Gerasimov, D.V. Kupriyanov, “Light scattering from an atomic gas under conditions of quantum degeneracy”, D.N.Klyshko Workshop, April 23-26, 2017, Radisson Resort, Zavidovo

- V.M. Porozova, L.V. Gerasimov, D.V. Kupriyanov, "Light scattering from a spatially inhomogeneous system of bosonic atoms under conditions of quantum degeneracy International conference Physica.SPb/2017, October 24-26, 2017, St. Petersburg, Russia

- V.M. Porozova, L.V. Gerasimov, D.V. Kupriyanov "Light scattering from a quantum degenerate bosonic atomic gas XV International Conference on Quantum Optics and Quantum Information (ICQOQI'2017), November 20-23, 2017, Minsk, Belarus

- V.M. Porozova, L.V. Gerasimov, D.V. Kupriyanov "On a theory of the Raman sideband cooling in dipole trap June 6, 2018, Quantum Technology and Quantum Information Labs (MSU), Nonlinear Optics Building

- V.M. Porozova, L.V. Gerasimov, D.V. Kupriyanov, "On a Theory of the Raman Sideband Cooling of a Single Atom in a Dipole Trap LPHYS'18, July 16-20, 2018, Nottingham, United Kingdom

- В. М. Порозова, Л. В. Герасимов, И. Б. Бобров, С. С. Страупе, С. П. Кулик, Д. В. Куприянов, "Рамановское охлаждение одиночного атома в оптической дипольной ловушке: теоретический оптимум в трёхмерном режиме Всероссийская научная конференция "Физика ультрахолодных атомов -2019 16-18 декабря 2019, Новосибирск, Академгородок, ИПФ СО РАН, Россия

В. М. Порозова неоднократно выступала с докладами на городском межинститутском семинаре по квантовой оптике, организуемым кафедрой Теоретической физики и астрономии РПГУ им. Герцена, а также на семинарах Лаборатории квантовой оптики и квантовой информатики ЦПИ СПбПУ.

Личный вклад Основные результаты, представленные в работе были получены автором лично. Выбор общего направления исследования, обсуждение и постановка рассматриваемых задач осуществлялись совместно с руководителем.

Публикации Основные результаты диссертации опубликованы в четырёх достаточно известных научных изданиях (SCOPUS, WOS и РИНЦ) с

высоким импакт фактором и в том числе входящих в квартиль Q1 [12–15], рекомендованных ВАК.

V. M. Ezhova, L. V. Gerasimov, D. V. Kupriyanov, "On a theory of light scattering from a Bose-Einstein condensate"// J. Phys.: Conf. Ser. — 2016. — Vol. 769, no. 012045.

V.M. Porozova, L.V. Gerasimov, M.D. Havey, D.V. Kupriyanov, "Light scattering from an atomic gas under conditions of quantum degeneracy"// Phys. Rev. A. — 2018. — Vol. 97, no. 053805.

В.М. Порозова, В.А. Пивоваров, Л.В. Герасимов, Д.В. Куприянов, "Дифракция Брэгга в атомных системах в условиях квантового вырождения"// Письма в ЖЭТФ. — 2018. — Т. 108, No 10. — С. 726–735.

V.M. Porozova, L.V. Gerasimov, I.B. Bobrov, S.S. Straupe, S.P. Kulik, and D.V. Kupriyanov, "Raman sideband cooling of a single atom in an optical dipole trap: Towards theoretical optimum in a three-dimensional regime"// Phys. Rev. A. — 2019. — Vol. 99, no. 043406.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и трёх приложений. Полный объём диссертации составляет 139 страниц, включая 20 рисунков. Список литературы содержит 130 наименований.

Глава 1. Когерентные оптические процессы в атомных системах в условиях квантового вырождения

Квантовая физика сформировалась, в значительной степени, в результате попыток понять, как устроено взаимодействие излучения с элементарными составляющими вещества - атомами и молекулами [16]. В дальнейшем, бурно развиваясь в первой четверти XX-го века, она дала начало таким ветвям физики как атомная физика, ядерная физика, физика конденсированных сред, квантовая теория поля, квантовая оптика, и, в последние годы, физика квантовой информации. Прогресс в квантовой оптике и атомной физике, наблюдающийся в течение последних десятилетий, показал, что когерентные процессы взаимодействия излучения с атомными системами, в частности, с ансамблями холодных атомов, приводят к большому количеству новых оптических явлений, наблюдаемых в экспериментах. Исследование взаимодействий электромагнитного излучения с системами ультрахолодных атомов при температурах десятков микро-Кельвин и ниже является важной и востребованной задачей квантовой оптики и атомной физики, имеющей фундаментальное значение, а возможные приложения для подобных систем лежат в таких областях, как атомная и молекулярная спектроскопия, метрология, физика конденсированных сред и физика квантовой информации.

В области физики квантовой информации активно разрабатываются основанные на когерентных эффектах механизмы преобразования микросостояний (квантового интерфейса) света и атомов, такие как протоколы квантовой памяти и квантового перепутывания. Будучи реализованным между объектами микроскопических и мезоскопических масштабов, эти механизмы открывают новые возможности, в частности для квантовых неразрушающих измерений и преодоления стандартного квантового предела в метрологии [4; 5].

1.1 Поведение атомных систем при низких температурах

1.1.1 Краткий исторический обзор методов охлаждения

Впервые идея лазерного охлаждения разреженного газа была опубликована Theodor Hänsch и Arthur Schawlow в 1975 году [17]. В дальнейшем в 1978-м году коллективы из западной Германии [18] и США [19] продемонстрировали лазерное охлаждение ионов, предварительно локализованных в электромагнитных ловушках. Температура составила менее 40 К [19]. Охлаждение газа нейтральных атомов впервые было осуществлено в Советском Союзе: в 1979-м году коллективом Института спектроскопии АН СССР было сообщено о торможении атомного пучка лазерным лучом [20], а в 1981 году – о сужении распределения скоростей вдоль одного из направлений, то есть о понижении температуры, которая вдоль этого направления движения составила 1,5К. В 1984-м году тот же коллектив путем радиационной коллимации добился двумерного охлаждения атомного пучка [21] и температуры 3,5mK. Коллективом Bell Laboratories (USA) в 1985-м году было осуществлено трехмерное охлаждение до 240μK [22]. Через два года Steven Chu спроектировал и реализовал магнито-оптическую ловушку [23] (MOT – magneto-optical trap), и впоследствии в 1997-м году был удостоен Нобелевской премии за лазерное охлаждение и пленение вещества: устройство MOT позволяет не только охлаждать атомный газ, но и удерживать его силой светового давления [22; 23].

Экспериментальные исследования ультрахолодных атомов активизировались в России после 2000 г., когда образовалось сразу несколько научных групп с различной направленностью работ. В Институте лазерной физики СО РАН (Новосибирск), в ФИАНе и ВНИИФТРИ (Москва) основной целью является разработка и создание современных сверхточных оптических стандартов частоты на базе ультрахолодных атомов и ионов, в Новосибирске, в Институте физики полупроводников СО РАН, ведутся исследования высоковозбужденных ультрахолодных атомов и их применений в квантовой информатике, в Институте автоматизации и электротехники СО РАН (Новосибирск) решена задача экспериментальной реализации конденсации Бозе–Эйнштейна, в ОИВТ (Москва) исследуется процесс формирования ультрахолодной плазмы в газе

ридберговских атомов лития, в Нижнем Новгороде, в Институте прикладной физики РАН (ИПФ РАН), впервые создан двумерный ферми-газ на основе ультрахолодных атомов лития. В лаборатории "Ультрахолодные квантовые газы" ИПФ РАН под руководством А. В. Турлапова была достигнута минимальная температура (около 10 нК), являющаяся рекордным значением для атомных систем [24]; впервые в мире получен 2-мерный ферми-газ атомов [25], что, в свою очередь, привело к появлению нового направления в физике ультрахолодных газов, разрабатываемого в настоящее время коллективами из США, Австралии, Великобритании. Интересным примером является наблюдение в 2-мерной квантовой газе перехода между двумя фазовыми состояниями, подчиняющимися, альтернативным статистикам Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна [26].

В процессе глубокого охлаждения, когда тепловая длина волны де-Бройля возрастает до размеров порядка межчастичного расстояния ($\lambda_B \sim n_0^{-1/3}$, где n_0 - концентрация атомов), становятся важными волновые свойства частиц, газ достигает состояния квантового вырождения, а его поведение становится коллективным, даже если парные межчастичные взаимодействия малы. В 1995-м году был получен конденсат Бозе-Эйнштейна (БЕС - Bose-Einstein condensate) атомов рубидия [27]. Конденсация наступила при температуре 170 нК, а наименьшая достигнутая температура составила 20 нК, при этом принцип лазерного охлаждения комбинировался с испарительным охлаждением в магнитной ловушке. Низкая температура конденсации была достигнута при малой плотности газа. В 1999-м году подобным методом был также приготовлен атомный газ в состоянии фермиевского вырождения [28]. Посредством исключительно лазерного охлаждения вырожденные газы бозонов и фермионов получены соответственно в 2001-м [29] и 2002-м [30] годах. В 2017-м году была создана мобильная лаборатория - Cold Atom Laboratory (CAL) - и 21 мая 2018 году с прямой трансляцией по SPACE TV эта лаборатория была запущена на Международную Космическую Станцию (МКС) в качестве инструмента для изучения свойств материи в условиях малой гравитации. Установка CAL изначально работала в условиях низких температур и микрогравитации на МКС, что привело к образованию фазовых состояний БЕС, которые имели температуру существенно ниже, чем те, которые были созданы при проведении экспериментов в земных условиях. В космической лаборатории достижимы времена взаимодействия до двадцати секунд и понижение температуры вплоть до

50nK [31]. В будущем с помощью установки CAL планируется проверить физические эффекты, предсказываемые на стыке общей теории относительности (ОТО) и квантовой физики. Так например, длительное падение ВЕС поможет проверить краеугольный камень теории относительности Эйнштейна - принципа эквивалентности, согласно которому гравитацию и внешнее ускорение нельзя различить экспериментально [32]. Организаторы проекта CAL планируют повторить известный эксперимент Галилея, в котором бросались пушечные ядра с Пизанской башни, но использовать атомы в качестве массивного объекта. Сбрасывая атомы внутри установки и позволяя им находиться в состоянии свободного падения в течение нескольких секунд, пока станция движется вокруг Земли, можно с высокой точностью определить различия в ускорении атомов. Планируемый эксперимент может показать, как гравитация и пространство-время связаны с квантовыми свойствами вещества. Особенностью установки также является то, что впервые удалось локализовать протокол приготовления ВЕС в небольшой области пространства, где атомы располагаются на специальном чипе [31].¹

1.1.2 Протокол рамановского охлаждения (RSC)

Прогресс в физике холодных атомных систем привёл к созданию специального метода пространственной локализации одиночного атома "оптического пинцета" который позволяет ограничить поступательное движение атома, помещённого в изолированную микроскопическую дипольную ловушку [33; 34]. Недавние достижения в технике "оптического пинцета" позволили осуществить управляемую загрузку одиночных атомов в микроловушки [35; 36] и структурировать пинцеты в пространственные решетки произвольной формы голографическими методами [37]. Уникальным преимуществом метода "оптического пинцета" является возможность пространственного перемещения пленённых одиночных атомов [38; 39], что в свою очередь позволяет конструировать упорядоченные структуры из одиночных атомов [40—42]. Архитектура подобных

¹Авторы проекта CAL предполагают, что сама установка вместе с лазерами, магнитными кольцами, накачкой и вакуумной камерой по своим размерам сопоставима с объемом переносного холодильника (the size of an ice chest)

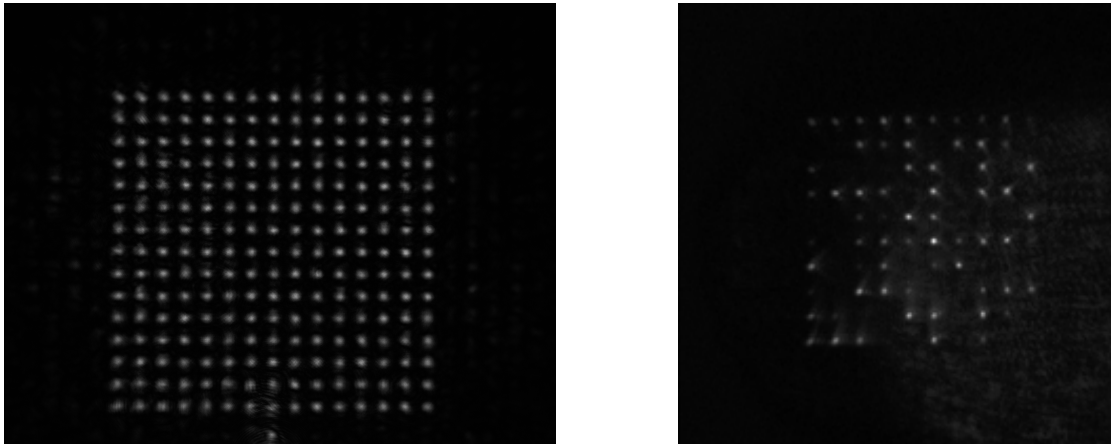
атомных массивов, позволяющая осуществить индивидуальную адресацию и управление отдельными атомами решетки, открывает хорошие перспективы для квантового моделирования [43; 44] и квантовых вычислений [45; 46].

Однако, несмотря на имеющийся прогресс в разработке элементарных принципов квантовых вычислений в массиве нейтральных атомов [47], качество перепутывания двухкубитных вентилях остается ещё не слишком высоким даже в оптимальной реализации [48]. Остаточное движение атомов в ловушке является одним из негативных факторов для, так называемой, "достоверности" (*fidelity*), являющейся мерой совпадения, в частности, двухкубитных состояний.² В "оптических пинцетах с учетом замедления атомов градиентным торможением в магнито-оптической ловушке (МОЛ), обычно достигаются температуры $T \sim 30 \mu K$, что приводит к заметному доплеровскому смещению спектров ридберговских атомов и, как следствие, ограничивает достоверность реализации двухкубитных ридберговских вентилях [47; 50]. Перепутывание квантовых логических элементов за счёт локальных спин-обменных взаимодействий [51] является еще более чувствительным к движению атомов. В идеальной конфигурации, для совершения операций без ошибок необходимо достичь полной остановки движения атома, поместив его в основное состояние дипольной ловушки. По этой причине разработка методов охлаждения одиночных нейтральных атомов в микроскопической дипольной ловушке вплоть до основного состояния удерживающего потенциала имеет решающее значение, и, фактически, является необходимым требованием создания квантового процессора с регистром из нейтральных атомов. Этому вопросу посвящена Глава 4 диссертации.

Нами рассматривается один из возможных методов - техника рамановского охлаждения (RSC – Raman Sideband Cooling), изначально разработанная для ионов в ловушках [52–55], и позднее применённая для охлаждения атомных ансамблей, состоящих из нейтральных атомов, структурированных в оптических решётках [56–61]. Для замедления атома, захваченного "оптическим пинцетом" протокол RSC предоставляет собой удобный и пока единственный инструмент для тушения колебательных степеней свободы атома вплоть до основного состояния потенциальной ямы. В ряде недавно проведенных экспериментов данный протокол был успешно применён к одиночным нейтральным атомам, захваченным оптическим пинцетом [1; 2; 62; 63], а также для пригото-

²Понятие *fidelity* впервые было введено в работе [49]

ления коллективного вырожденного квантового состояния в фазе конденсата Бозе-Эйнштейна [64].



а)

б)

Рисунок 1.1 — На диаграммах представлены: а) оптическая решётка, состоящая из 225 узлов; б) атомный массив, состоящий из 50 атомов. Фотографии предоставлены Центром квантовых технологий МГУ имени М.В. Ломоносова.

Протокол RSC используется, когда движение атома жестко ограничено по всем трём пространственным направлениям, и соответствующие частоты колебаний достаточно велики, так что рамановские переходы можно надежно разрешить в системе зеemanовских состояний сверхтонких подуровней основного состояния атома щелочного металла. В этом случае, если исходно возбуждены лишь достаточно низкие колебательные моды, данный протокол позволяет постепенно подавить колебания атома вдоль каждой из главных координатных осей удерживающего потенциала. В главе 4 нами рассмотрена схема одновременного подавления колебательного движения для всех трёх собственных мод осциллятора. Пространственный профиль потенциала "оптического пинцета" обычно имеет форму эллипсоида с двумя вырожденными радиальными (поперечными) и одной осевой (продольной) модами. Предполагается, что в эксперименте атомы загружаются в дипольную ловушку из МОЛ, в которой после стадии градиентного охлаждения характеризуется относительно высокой температурой и, как следствие, достаточно высокими значениями колебательных чисел для каждой из колебательных мод $\bar{\nu}_{x,y,z} > 1$.

Достигнутый прогресс в экспериментальной реализации протокола RSC для охлаждения атома щелочного металла в системах типа "оптического пинцета" мотивирует поиск оптимального протокола охлаждения в трехмерном

режиме [1; 2; 62]. Как будет показано в представленной диссертационной работе, в наиболее общей трёхмерной конфигурации для осуществления процесса комбинационного рассеяния, обеспечивающего одновременное подавление всех осцилляторных мод, существует ряд нетривиальных требований к геометрии охлаждающих пучков и к параметрам импульсов управляющего света.

1.2 Когерентное состояние материи: конденсат Бозе-Эйнштейна

1.2.1 Оптические свойства конденсата

Интерес к исследованию оптических свойств атомарного газа в условиях вырождения и перехода в состояние конденсата Бозе-Эйнштейна (БЕС) естественным образом возник в тот момент, когда это состояние вещества было получено в лаборатории с помощью техники лазерного и испарительного охлаждения. Впервые конденсат был получен в лаборатории Массачусетского института технологий (MIT) в разреженном атомарном газе щелочных атомов [27; 65]. Это фундаментальное экспериментальное открытие, непосредственно подтверждавшее предсказание С.Н. Бозе и А. Эйнштейна [66–68], было удостоено Нобелевской премии в 2001-м г. Современные технологии достижения сверхнизких температур, использующие методы лазерного, испарительного и др. методов охлаждения, позволяют приготавливать атомный газ в квантовом вырожденном состоянии с варьируемыми характеристиками. Первые упомянутые выше успешные экспериментальные реализации БЕС, появившиеся всего два десятилетия назад, сразу инициировали изучение оптических свойств этого необычного состояния вещества. Так например, первые опыты по, так называемой, "остановке" света были выполнены для щелочных атомов, находящихся в состоянии БЕС [69]. Впоследствии были обнаружены довольно необычные свойства БЕС, относящиеся непосредственно к рассеянию света. Так, уже в ранних экспериментах [70] было обнаружено сильное рассеяние света в спектральной области, где обычный атомарный газ был бы прозрачен. Необычным явилось также то, что сильное когерентное рассеяние света наблюдалось в этих экспериментах не по направлению возбуждающей волны (как это обычно происходит),

а в направлении пространственной протяженности конденсата. Это приводило к фрагментации конденсата и возникновению определенной пространственно упорядоченной структуры, что было интерпретировано авторами как проявление дифракционного эффекта Капицы-Дирака (т.е. связывалось с рассеянием материальной волны на оптических неоднородностях).

Следует отметить, что успешной экспериментальной реализации конденсата Бозе-Эйнштейна в 1995-м г. предшествовала теоретическая работа [71], в которой была предсказана возможность возникновения когерентных суперпозиционных состояний света и материи, распространяющихся в среде, находящейся в состоянии квантового вырождения. В разделе 2.3 главы 2 диссертации нами предоставлено теоретическое обоснование образования данного суперпозиционного состояния поляритонного типа.

Следует отметить, что эффекты усиления рассеяния в обратном направлении относительно распространения за счет проявления когерентных свойств также наблюдались в статье [72; 73]. Так, в работе Ю. Кагана [72] при резонансном рассеянии γ -квантов проявлялась когерентность, реализуемая при коллективном возбуждении ансамбля ядер (ядерного экситона) и при превращении γ -кванта в квазичастицу блоховского типа в кристалле, как в нашем случае рассеяния одиночного фотона на конденсате Бозе-Эйнштейна было обнаружено образование суперпозиционного состояния поляритонного (светоэкситон) типа, распространяющегося в ВЕС [74–76]. Причем, было отмечено, что в резонансном ядерном рассеянии по типу Брэгга γ -квантов в кристалле возникает суперпозиция двух состояний, которые не подвергаются поглощению, несмотря на наличие сильных неупругих и некогерентных каналов. Этот эффект, называемый подавлением неупругого канала, по-видимому, является наиболее ярким явлением в общей проблеме когерентности ядерного резонансного рассеяния. В статье [73] также наблюдалось образование суперпозиционного состояния поляритонного типа, распространяющегося в периодической структуре с квантовыми ямами. В рамках теории Максвелла были выведены дисперсионные уравнения для продольного и поперечного поляритонов в структуре с периодической цепочкой квантовых ям, как и в нашем случае [74] с применением формализма квантовой теории рассеяния. Отличие заключается в том, что для удерживания слабой неидеальности газа [которая в дальнейшем может проявляться в виде сверхтекучести] в фазе конденсата Бозе-Эйнштейна и наблюдения последующих эффектов сильного когерентного рассеяния практи-

чески для прозрачной среды (с очень низкой плотностью см. главу refch:ch3) необходим формализм именно квантовой теории рассеяния³.

Экспериментальные демонстрации необычных оптических свойств ВЕС, инициировали целый ряд теоретических работ, нацеленных на объяснение и правильное описание наблюдавшихся эффектов. Так, в работе [77] был предложен подход, рассматривающий взаимодействие света с веществом с позиций квантовой электродинамики. В работах [78]-[79] использовалась более простая полуклассическая теория на основе уравнений Максвелла-Блоха, причем конденсат рассматривался упрощенно в модели идеального газа. Здесь важно критически отметить, что неидеальность газа должна быть учтена, поскольку для реализации различных оптомеханических схем с участием ВЕС важным является именно возможность задействовать такое принципиальное квантовое свойство конденсата, как его сверхтекучесть. Сверхтекучесть, в свою очередь, принципиальным образом связана именно с внутренним взаимодействием и неидеальностью атомного газа. Строгое описание оптических свойств атомных систем в состоянии квантового вырождения должно быть проведено в рамках последовательной квантовой теории рассеяния с использованием формализма вторичного квантования для описания атомной подсистемы и её оптических взаимодействий. Этому посвящены работы автора [74–76] и главы 2, 3 диссертации.

1.2.2 Динамическое уравнение Гросса-Питаевского

Основы теоретического описания разреженного газа бозонов в условиях квантового вырождения были заложены Н.Н. Боголюбовым в 1947-м г. [80]. Позднее в 1961-м году Е.Р. Gross и Л.П. Питаевский независимо друг от друга получили замкнутое физическое уравнение для параметра порядка, названное впоследствии уравнением Гросса-Питаевского [81; 82]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Xi_0(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\Xi_0(\mathbf{r}) + U_0|\Xi_0(\mathbf{r})|^2\Xi_0(\mathbf{r}) = E_0\Xi_0(\mathbf{r}) \quad (1.1)$$

³В теории Максвелла, в отличие от формализма вторичного квантования, не заложено описание такой среды, обладающей и проявляющей квантовые свойства на макроскопическом уровне, как слабо взаимодействующий [неидеальный] газ в состоянии конденсации Бозе-Эйнштейна

где $\Xi_0 = \Xi_0(\mathbf{r})$ определяет пространственный профиль параметра порядка, также называемого "волновой функцией" конденсата.⁴ Этим уравнением, фактически, определяется волновая функция коллективного основного состояния многоатомной системы, построенная в приближении самосогласованного поля. Параметр порядка является пробной функцией, минимизирующей значение энергетического функционала, в котором E_0 является минимальным значением этого функционала

$$\delta E[\Psi^*, \Psi] = 0$$

При вычислении вариации волновая функция $\Psi = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_N)$ приближенно представляется произведением $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_N) = \Xi_0(\mathbf{r}_1)\Xi_0(\mathbf{r}_2) \dots \Xi_0(\mathbf{r}_N)$ и дополняется очевидным условием нормировки.

Общий нестационарный вариант уравнения Гросса-Питаевского получается, основываясь на точном операторном уравнении для вторично-квантованных Ψ -операторов в представлении Гейзенберга. Определим Гамильтониан системы N одинаковых взаимодействующих атомов, удерживаемых потенциалом ловушки $U(\mathbf{r})$, и воспользуемся представлением вторичного квантования:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \Delta \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3r + \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d^3r + \frac{1}{2} \iint \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') d^3r d^3r' \quad (1.2)$$

где $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ - потенциал парного взаимодействия, а $\hat{\Psi}$ - операторы удовлетворяют соотношениям коммутации

$$\left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \right] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.3)$$

Переходя к зависящему от времени представлению Гейзенберга для $\hat{\Psi}$ -операторов, и используя явный вид оператора Гамильтона (1.2) и правила коммутации (1.3), приходим к следующему уравнению Гейзенберга для

⁴Имеются в виду фазовые переходы II рода (в классификация Эренфеста), которые принято описывать *параметром порядка*, по определению исчезающему в симметричной фазе и отличному от нуля в несимметричной фазе. Фазовые переходы II рода это переходы такого типа, когда в точке перехода меняется симметрия вещества, при этом термодинамические величины такие, например, как свободная энергия и плотность остаются непрерывными величинами. Однако скачком меняются их производные по температуре и давлению. Само название обусловлено тем, что при переходах данного типа происходит скачок второй производной свободной энергии по температуре, которая определяет теплоемкость вещества $C_V = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$.

базовых операторов

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) d^3 r' \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \quad (1.4)$$

В представлении вторичного квантование стационарное состояние конденсата Бозе-Эйнштейна задается соотношением

$$|BEC\rangle^N = |n_0 = N, \{n_i = 0\}_i^\infty\rangle$$

а действие $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ -оператора на данное состояние

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r})|BEC\rangle^N = \Xi_0(\mathbf{r})|BEC\rangle^{N-1}$$

напоминает нам определение когерентного состояния в теории гармонического осциллятора. Аналогия очевидна, с тем отличием, что $|BEC\rangle^N$ формально не является собственным состоянием для $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$. Строго говоря, $\Xi_0(\mathbf{r})$ нельзя отождествить с собственным числом оператора уничтожения, однако в пределе большого числа частиц ($N \sim 10^6$) состояние $|BEC\rangle^{N-1}$ описывает по сути то же макроскопическое состояние, что и $|BEC\rangle^N$, и мы имеем дело с *когерентным состоянием материи*. Основываясь на соображениях устойчивости состояния конденсата как состояния материи, сделаем допущение, что вследствие внутренней динамики системы состояние конденсата сохраняется, но параметр порядка $\Xi_0(\mathbf{r})$ может менять свои свойства во времени. Тогда для оператора Гейзенберга $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ допустим отличным от нуля только матричный элемент:

$${}^{N-1}\langle BEC | \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) | BEC \rangle^N = \Xi(\mathbf{r}, t)$$

Вычисляя этот матричный элемент из уравнения Гейзенберга, приходим к уравнению Гросса-Питаевского, описывающего временную динамику параметра порядка

$$i\hbar \frac{\partial \Xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Xi(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}) \Xi(\mathbf{r}, t) + U_0 |\Xi(\mathbf{r}, t)|^2 \Xi(\mathbf{r}, t) \quad (1.5)$$

В последнем слагаемом мы вынесли из-под интеграла функции $\Xi(\mathbf{r}, t), \Xi^*(\mathbf{r}, t)$, медленно меняющиеся на атомных масштабах, и ввели параметр внутреннего взаимодействия $U_0 \equiv \int V(\mathbf{r}) d^3 r$, связанный с длиной рассеяния α для пары частиц, обладающих нулевой энергией относительного движения, посредством соотношения $\alpha = \frac{m}{4\pi\hbar^2} U_0$.

1.2.3 Сверхтекучесть конденсата и её связь с оптомеханикой

В неограниченной однородной среде отсутствует взаимодействие, связанное с удерживающим атомы потенциалом ловушки, и все определяется их внутренним взаимодействием. Принципиальным свойством подобной среды является ее устойчивость к возникновению фононных возбуждений. Как показывает кинематический анализ [83], в случае, если мы хотим создать, например, поступательное или закрученное вихревое движение в конденсате, то следует возбудить с линейной или угловой скоростью весь конденсат, тогда как элементарные неоднородные звуковые возбуждения — фононы — возбуждаться в конденсате не будут. Приготовленное подобным образом состояние, описываемое динамикой параметра порядка $\Xi(\mathbf{r}, t)$ в соответствии с уравнением Гросса-Питаевского, будет распространяться без трения. Изначально это явление было обнаружено для существенно более сложного физического объекта — жидкого гелия II — в экспериментах [84], [85] и было названо *сверхтекучестью*. Значительно позднее данное явление было также экспериментально обнаружено и в системах ультрахолодных атомов ^{87}Rb [86].

В разработке теории рассеяния света на ВЕС мы учитываем слабую неидеальность газа, позволяющую удерживать в расчете важный эффект сверхтекучести. Это фундаментальное квантовое свойство представляет интерес для интенсивно разрабатываемых схем оптомеханики [87—89], идейной основой которых является обмен квантовыми состояниями, в частности, линейным и угловым моментами между объектами разной физической природы. В настоящее время существуют надежные схемы приготовления так называемого "закрученного света" ("twisted light"), характеризуемого закрученным волновым фронтом и орбитальным угловым моментом. Подобное состояние может быть реализовано с помощью спиральных фазовых пластин, пространственных световых модуляторов, с использованием жидких кристаллов, полимеров и субволновых решеток. Эксперименты, в которых момент импульса, связанный с вращением света (прецессией вектора Пойнтинга вокруг направления его распространения) передается конденсату интересны тем, что позволяют достаточно долго сохранять квантовый угловой момент в материальной среде формируя так называемую *квантовую вихревую нить* [6; 90].

Подобные эксперименты интересны с точки зрения создания квантового интерфейса. Так, в работе [6] авторы продемонстрировали когерентный обмен между полевой и атомной подсистемой, находящейся в фазе бозе-конденсата. В эксперименте сигнальный свет приготавливался в моде Лагерра-Гаусса LG_p^l , где индекс l , определяет угловой момент фотона в единицах \hbar , а p - число узлов в распределении интенсивности поля в радиальном направлении. Моды Лагерра-Гаусса образуют ортогональный базис для распространяющихся волн, описываемых в приближении параксиальной оптики. Для создания вихревого состояния в конденсате атомов натрия авторы использовали двухфотонный стимулированный рамановский процесс с пучками сигнального света, приготовленных в модах Лагерра-Гаусса. При этом происходила когерентная передача орбитального углового момента фотона атому в дискретных единицах \hbar . Как обсуждается авторами [6], наблюдаемый в итоге процесс связан с образованием суперпозиций различных вихревых состояний, в которых относительная фаза между состояниями определяется относительными фазами управляющих оптических полей. Приготовленные суперпозиционные состояния интересны не только как необычная реализация сверхтекучего движения, но и как пример квантовой суперпозиции макроскопических состояний (типа "шредингеровского кота") в пара́х атомов. В частности, они интересны в квантовой информатике [7], например, для создания квантовых повторителей, где так называемые "летающие кубиты" приготавливаются в состояниях света с орбитальным угловым моментом [8].

В работе [9] наблюдалось образование квантовой вихревой нити в бозе-конденсате. Вихревой поток распространяющийся без трения существовал в течение десяти секунд, и это время ограничивалось только экспериментальными факторами, такими как дрейф и временем существования атомной ловушки. Квантованное вращение было инициировано путем передачи одной единицы орбитального момента от фотонов сигнального света. Явление образования квантовой вихревой нити в конденсате интересно также и с фундаментальной точки зрения выявления различий фаз конденсации и сверхтекучести, – в особенности в одномерных и двумерных системах. Так, в работе [10] сильно взаимодействующий одномерный газ проявил свойства сверхтекучести, хотя сама система не переходила в фазу бозе-конденсата. Сверхтекучесть в кольцевой геометрии открывает новые возможности, например, с добавлением квантового эффекта туннелирования, по аналогии с эффектом перехода Джозефсона в

сверхпроводящих структурах. В перспективе можно ожидать использования архитектуры сверхпроводящих систем и для таких объектов, как вырожденный квантовый газ нейтральных атомов [11].

1.3 Основные понятия квантовой информатики

Квантовая информатика является недавно сформировавшейся и бурно развивающейся областью физики. С исследовательской точки зрения, это наука изучает свойства физических систем на квантовом уровне, рассматриваемая их как информационный ресурс. С точки зрения возможных приложений, главной целью является разработка специальных информационных протоколов, позволяющих решать задачи, для которых либо есть предельные фундаментальные физические ограничения, либо их реализация невозможна, если основываться только на классических представлениях о системах обработки информации.

1.3.1 Кубиты

Элементарными классическими носителями информации являются элементы двоичного кода - биты, которые могут принимать два противоположных состояния, эквивалентных логическим "Да" и "Нет" и обозначаемых как "0" и "1". В отличие от них квантовые биты, или сокращенно *кубиты* (quantum bit=q-bit=qubit), могут принимать бесконечно много различных значений за счет когерентной суперпозиции и представляют собой системы, квантовые состояния которых описываются произвольным вектором двумерного унитарного пространства, часто смешиваемым в физической терминологии с гильбертовым пространством. Выберем в этом пространстве пару нормированных ортогональных состояний и обозначим их через $|0\rangle$ и $|1\rangle$ (в обозначениях Дирака [91]), полагая, что каждое из состояний по отдельности соответствует значениям "0" и "1" классического бита. Базис, образованный этими состояниями, называют *вычислительным базисом*. Примером подобной системы может служить элементарный квант света (фотон) с двумя возможными поляризациями или

электрон с двумя возможными направлениями спина. Тогда произвольное чистое состояние кубита можно разложить в вычислительном базисе

$$|\Psi\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle \quad (1.6)$$

где c_i - комплексные коэффициенты, являющиеся амплитудами вероятности нахождения системы в $|i\rangle$ состоянии и удовлетворяющие условию нормировки $\sum_{i=1}^n |c_i|^2 = 1$. Кубит допускает графическое изображение. Из условия нормировки следует, что разложение вектора $|\Psi\rangle$ можно представить как

$$|\Psi\rangle = e^{i\gamma} (\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|1\rangle) \quad (1.7)$$

где γ, θ, φ - действительные величины ($0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Поскольку векторы состояния определяются с точностью до произвольной комплексной фазы, то можем считать $\gamma = 0$. Таким образом, все многообразие состояний кубита описывается двумя действительными параметрами θ и φ . Эти два числа определяют точку на трехмерной сфере единичного радиуса, называемой *сферой Блоха* см. Рис.1.2. Единичный вектор, направление которого в трехмерном действительном пространстве определяется углами θ и φ , называется *вектором Блоха*.

1.3.2 Квантовые логические элементы

Однокубитовые квантовые логические элементы

Одним из фундаментальных направлений исследования в квантовой информатике являются *квантовые вычисления* или *квантовое моделирование*. Модель квантовых вычислений — это новый принцип осуществления вычислительных процессов таким способом, чтобы переложить на «квантовую природу» окружающего нас мира возможность эффективной параллелизации вычислений. В рамках кибернетики давно известна парадигма, утверждающая, что лучшей моделью системы является сама система. Используя именно этот принцип, Ричард Фейнман сформулировал идею о том, что лучше всего объекты,

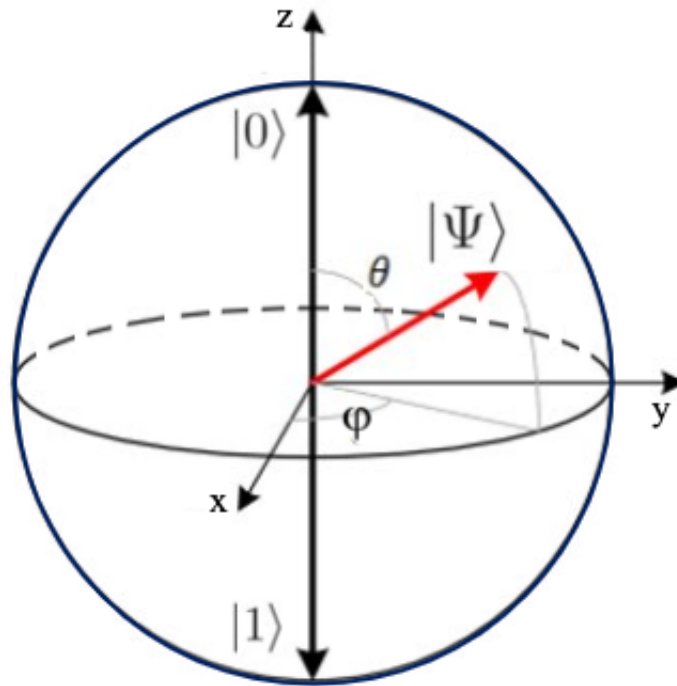


Рисунок 1.2 — Геометрическая интерпретация (1.6): Кубит изображается вектором единичной длины в пространстве \mathbb{R}^3 . Годограф вектора образует множество точек, равноудаленных от начала координат, которое называют *сферой Блоха*, а само состояние $|\Psi\rangle$ определяется *вектором Блоха*

имеющие квантовую природу, помогут смоделировать именно квантовые системы [92]. Развивая эту мысль, можно заключить, что любое моделирование какого-либо физического процесса, выполненное при помощи современных средств вычислительной техники, будет неточным и неполным, но только лишь приближённым с определенной степенью точности, и у нас есть очень ограниченные средства повышения данной точности.⁵ Однако, если для моделирования использовать именно квантовые системы, то можно отразить те физические процессы, которые в своей природе являются квантово-недетерминированными. Это понимание и стало основой развития модели квантовых вычислений. В подобных вычислениях переход к кубитам создает возможность построения новых алгоритмов, решающих определенные математические задачи за несопоставимо меньшее количество шагов, чем лучшие классические алгоритмы. В соответствии с квантовой моделью вычислений операции с кубитом производятся одновременно со всеми базисными состояниями, используемыми в разложении. Так, например, $\sim 10^{80}$ атомов в наблюдаемой

⁵Сказанное, прежде всего, относится к сложным системам, не обладающим свойством масштабной инвариантности, см. [93].

Вселенной примерно описывается числом 2^{266} в двоичной записи. Если представить умозрительный классический компьютер, использующий все атомы нашей Вселенной, и предположить, что каждый атом будет отображать один бит информации, то подобный компьютер сможет смоделировать квантовое состояние, состоящее только из 266 кубитов. Этот пример наглядно показывает вычислительные преимущества схемы квантовых вычислений.

Квантовый компьютер может быть сконструирован с помощью элементарных *квантовых логических элементов* (логических вентилях), которые являются составляющими вычислительными блоками, выполняющими одну элементарную квантовую операцию, как правило, над двумя кубитами. Квантовый логический элемент (вентиль) — унитарное преобразование в пространстве состояний квантового регистра. Если регистр состоит из N кубитов, то размерность пространства состояний равна 2^N , так что матрица унитарного преобразования имеет размерность $2^N \times 2^N$. Существует, тем не менее, несколько ключевых однокубитовых унитарных операторов, имеющих особое значение в квантовых алгоритмах. Ниже приводятся их спецификация с условными обозначениями, используемыми на графических схемах

$$\begin{array}{lll}
 \text{Элемент Паули } X & \text{---} \boxed{X} \text{---} & X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{Элемент Паули } Y & \text{---} \boxed{Y} \text{---} & Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{Элемент Паули } Z & \text{---} \boxed{Z} \text{---} & Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 \text{Элемент Адамара} & \text{---} \boxed{H} \text{---} & H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

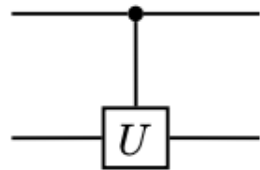
Рисунок 1.3 — Основные однокубитовые унитарные операторы [91]

Каждое из преобразований, представленное соответствующей матрицей Паули, является унитарным оператором, действие которого наглядно изображается на сфере Блоха. Так, например, действие оператора \hat{Z} (элемент Паули Z) на кубит $|\Psi\rangle$, определенный соотношением (1.7), соответствует замене $\theta \rightarrow -\theta$ и на сфере Блоха отражению вектора состояния кубита от горизонтальной плоскости XY.

Двухкубитовые квантовые логические элементы

Унитарное преобразование, совершаемое в пространстве состояний квантового регистра над одним из кубитов, называется управляемым или условным, в том случае, когда его вид зависит от состояния остальных (одного или нескольких) кубитов. Кубит, над которым совершается преобразование называется управляемым, а кубиты, от состояния которых зависит вид преобразования, называются управляющими.

Принципиальное значение имеют двухкубитовые вентили, когда один кубит является управляемым, а второй — управляющим. Можно показать, что произвольное унитарное преобразование, совершаемое над квантовым регистром, может быть представлено последовательностью однокубитовых и двухкубитовых операций. Графическое изображение двухкубитного элемента "Управляемое U обозначаемого как CU , и его матричная структура выглядят следующим образом:



$$CU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{11} & u_{12} \\ 0 & 0 & u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

Рисунок 1.4 — На схеме верхний канал соответствует управляющему кубиту, а нижний — управляемому. Взаимодействие кубитов отображено выделенной точкой и вертикальной соединяющей линией. Данный графический символ означает, что преобразование U совершается только в том случае, когда управляющий кубит находится в состоянии $|1\rangle$.

Построим унитарное пространство, элементами которого являются пары векторов, первый из которых принадлежит пространству H_1 , а второй — пространству H_2 . Такое пространство называется прямым произведением пространств H_1 и H_2 , и обозначается как $H_1 \otimes H_2$. Элементы его обозначим $|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$. Базисные векторы этого пространства представляют собой рассматриваемые одновременно состояния в исходных пространствах и задают-

ся произведениями базисных векторов из H_1 и H_2 :

$$\begin{aligned} |00\rangle &= |0_1\rangle \otimes |0_2\rangle, |01\rangle = |0_1\rangle \otimes |1_2\rangle \\ |10\rangle &= |1_1\rangle \otimes |0_2\rangle, |11\rangle = |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle \end{aligned} \quad (1.8)$$

Скалярное произведение в этом случае определяется как произведение скалярных произведений, определенных в каждом из подпространств.

$$\langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle_{H_1 \otimes H_2} = \langle \Psi_1 | \tilde{\Psi}_1 \rangle_{H_1} \langle \Psi_2 | \tilde{\Psi}_2 \rangle_{H_2} \quad (1.9)$$

В соответствии с (1.9) базисные векторы тензорного произведения пространств являются ортогональными и нормированными:

$$\langle ij | mn \rangle = \langle i | m \rangle \langle j | n \rangle = \delta_{im} \delta_{jn} \quad (1.10)$$

Разложение двухкубитового состояния по базисным векторам выглядит следующим образом:

$$|\Psi\rangle = \gamma_{00}|00\rangle + \gamma_{01}|01\rangle + \gamma_{10}|10\rangle + \gamma_{11}|11\rangle \quad (1.11)$$

Как и в случае одного кубита $|\gamma_{mn}|^2$ представляет собой вероятность обнаружить двухкубитную систему в состоянии $|mn\rangle$ и их сумма равна единице. В четырехмерном унитарном пространстве вектор $|\Psi\rangle$ является единичным вектором. Однако многомерность комплексного пространства не позволяет отобразить произвольное состояние двух кубитов в вещественном евклидовом пространстве большей размерности по аналогии со сферой Блоха, изображавшей элементарное спиновое состояние. Серьезных математических препятствий это не создает, ибо действие произвольного оператора может быть представлено композицией операторов действующих в H_1 и H_2 .

Квантовый логический вентиль CNOT

Важнейшим примером двухкубитового оператора является преобразование CNOT (управляемое «НЕТ» - controlled NOT)⁶. В базисе $H_1 \otimes H_2$,

⁶Этот квантовый логический вентиль осуществляет операцию аналогичную классическому операторному сложению XOR, подробнее в тексте

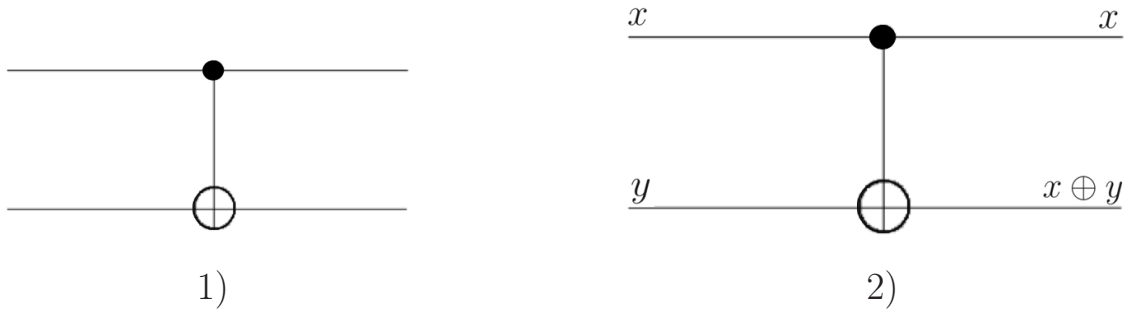


Рисунок 1.5 — 1) Квантовая схема, изображающая преобразование CNOT.

Верхний канал соответствует управляющему кубиту, а нижний — управляемому, и само преобразование отмечено выделенной точкой и вертикальной соединяющей линией. Управляющий кубит, который не меняет своего состояния в соответствии с действием оператора (1.12), а нижний — управляемый кубит- подвержен преобразованию. 2) Классический элемент XOR, где $x \oplus y$ - сложение по модулю 2

определенном нами выше, преобразование CNOT имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Действие матрицы U_{CN} на базисные векторы выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} U_{CN}|00\rangle &= |00\rangle, U_{CN}|01\rangle = |01\rangle \\ U_{CN}|10\rangle &= |11\rangle, U_{CN}|11\rangle = |10\rangle \end{aligned} \quad (1.12)$$

Таким образом, если управляющий кубит находится в состоянии $|0\rangle$, а управляемый – в одном из состояний $|0\rangle$ или $|1\rangle$, то в результате действия оператора CNOT состояние такой двухкубитовой системы не изменяется. Если же управляющий кубит находится в состоянии $|1\rangle$, а управляемый – в одном из базисных состояний, то оператор CNOT переводит его в другое базисное состояние, при этом исходное состояние управляющего кубита не изменяется. Действие преобразования CNOT можно изображать в виде квантовой схемы, представленной на Рис.1.5 1)

Отметим, что, действуя на базисное состояние, квантовое преобразование CNOT ведет себя, по существу, как классический вентиль XOR. Действительно, на вход классического оператора XOR поступают два бита – управляющий

и управляемый. Если управляющий бит находится в состоянии 0, то управляемый бит не изменяется. Если управляющий бит находится в состоянии 1, то управляемый бит изменяется на противоположный. Управляющий бит во всех случаях остается неизменным. Такое преобразование можно представить в виде классической схемы - Рис.1.5 2). На вход схемы подаются два бита x и y . На выходе получаем неизменный управляющий бит x , управляемый же бит преобразуется в $x \oplus y$ – сумму по модулю 2 управляющего и управляемого битов. Эта сумма работает так:

$$0 \oplus 0 = 0, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 0 = 1, 1 \oplus 1 = 0. \quad (1.13)$$

Сравнивая (1.13) с (1.12) видим, что квантовый элемент CNOT действительно является обобщением классического элемента XOR. На базисных векторах CNOT ведет себя так же, как XOR. Принципиальным отличием является то, что для осуществления классических логических операций на всем множестве нам понадобится существенно большее количество физических элементов, чем в квантовом случае. Так, в рассмотренном примере для реализации XOR потребуется четыре физических носителя, в то время как для реализации CNOT - только два кубита.

1.3.3 Механизм дипольной блокады ридберговских атомов

Известно, что сильно возбуждённые состояния атомов, в которых один из электронов обладает большим главным квантовым числом $n \gg 1$ и поэтому далеко удалён от ядра, по своим свойствам напоминают водородные состояния. Атомы, находящиеся в таком состоянии, называются *ридберговскими* (названы в честь Й.Р. Ридберга). Движение валентного электрона можно рассматривать в квазиклассическом приближении, что позволяет оценить радиус его орбиты исходя из квазиклассической формулы Бора-Зоммерфельда (КБЗ):

$$r = n^2 a_B \quad (1.14)$$

где $a_B = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ - боровский радиус. В разреженном атомном газе расстояние между атомами, находящимися в основном состоянии, велико, и реального взаимодействия между атомами нет. Однако, при возбуждении атомов в ридберговское состояние их радиус орбиты увеличивается пропорционально n^2 и

достигает величины, порядка 1 мкм при $n = 137$. В результате атомы как бы «сближаются» и взаимодействие между ними значительно усиливается, что приводит к смещению энергетических уровней атомов.

Это свойство ридберговских атомов используется для реализации квантовых компьютеров и симуляторов с кубитами на основе одиночных нейтральных атомов щелочных металлов в массивах оптических дипольных ловушек [47],[94; 95]. Кратковременное лазерное возбуждение атомов в ридберговские состояния позволяет включать и выключать взаимодействия между кубитами, что необходимо для выполнения квантовых операций и симуляций [96]. Предположим, что слабым импульсом света удалось возбудить только один атом из основного состояния в высоковозбужденное ридберговское состояние. В этом случае заселение того же возбужденного уровня другим атомом становится невозможным, является "блокированным" (эффект «дипольной блокады»), так как вследствие взаимодействия с первым атомом его ридберговское состояние изменит энергию и, следовательно, не будет резонансным частоте фотона [97]. Дипольная блокада была впервые предсказана в работе [3] и затем наблюдалась в различных экспериментах, а также применялась для получения перепутанных состояний кубитов на основе одиночных нейтральных атомов в оптических ловушках [98]. В экспериментах наблюдается как коллективное возбуждение и контролируемое взаимодействия между двумя атомами [99; 100], так и эффект дипольной блокады в мезоскопических образцах [97; 101]. Механизм дипольной блокады может быть использован для практического создания квантового перепутывания [3; 96].

Однако для практического применения двухкубитных вентиляей, использующих механизм дипольной блокады, требуется осуществить перепутывание основных спиновых состояний атомов с высокой степенью достоверности, чему препятствует движение атомов. Для решения этой проблемы предлагается осуществить протокол рамановского охлаждения атома переместив его в основное состояние оптической дипольной ловушки. Разработке метода охлаждения одиночных нейтральных атомов в микроскопической дипольной ловушке посвящена Глава 4 диссертации. Потенциал метода, связанный с возможностью приготовить вырожденный бозе-газ открывает интересные перспективы исследований, включающие квантовое моделирование базовых гамильтонианов статистической физики, таких как, решеточные гамильтонианы в модели Изинга [102] и моделирование квантовых фазовых переходов [103].

В заключение этой вводной главы отметим, что в настоящее время существует большой блок работ, ориентированных на возможность квантового моделирования сложных физических систем с помощью [относительно] удобно контролируемых атомных оптических решеток, подчиненных гамильтонианам, соответствующих однокубитным и двухкубитным преобразованиям, которые мы кратко описали выше. Поскольку в рассмотренных протоколах ключевую роль играют относительные фазы атомных кубитов, то естественным образом возникает интерес к моделированию физических систем, обладающих сложной калибровочной симметрией [104]-[105]. К этому относятся как задачи статистической физики, так и физики элементарных частиц. Резюмируя, можно, таким образом, заключить, что важной задачей является дальнейшее изучение физики когерентного взаимодействия света, как с атомными ансамблями в условиях квантового вырождения, так и с одиночными атомами, чему и посвящена данная диссертация.

Глава 2. Рассеяние света на атомах в условиях квантового вырождения

2.1 Общий формализм задачи рассеяния

Последовательное квантовомеханическое описание процесса рассеяния одиночного фотона на системе атомов основано на формализме T -матрицы, определенной операторным соотношением

$$\hat{T}(E) = \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}} \hat{V} \quad (2.1)$$

где \hat{H} - полный гамильтониан, представимый в виде разложения $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, где \hat{H}_0 - невозмущенный гамильтониан атомной подсистемы и поля, а \hat{V} - оператор взаимодействия. Обусловленное рассеянием преобразование начального состояния $|i\rangle$ в конечное состояние $|f\rangle$ характеризуется дифференциальным сечением, выраженным через амплитуду рассеяния, которая, в свою очередь, задана как соответствующий матричный элемент T -матрицы, рассматриваемой как функция начальной энергии:

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{\mathcal{V}^2 \omega'^2}{\hbar^2 c^4 (2\pi)^2} |T_{g'e'k'; g\mathbf{e}\mathbf{k}}(E_i + i0)|^2 d\Omega \quad (2.2)$$

Начальное состояние системы $|i\rangle = |g; \mathbf{e}, \mathbf{k}\rangle$ включает состояние фотона, обладающего волновым вектором \mathbf{k} , частотой $\omega \equiv \omega_k = ck$ и вектором поляризации \mathbf{e} , и состояние атомной подсистемы $|g\rangle$. Структура этого состояния зависит от физических условий - атомы могут рассматриваться как распределенные в пространстве классическим образом объекты, а могут находиться в состоянии квантового вырождения, требующего учета их физической неразличимости. В предельном случае полного вырождения, предполагая разреженную среду со слабыми внутренними межатомными взаимодействиями, состояние $|g\rangle = |\text{BEC}\rangle^N$ формирует коллективное состояние N атомов, в виде конденсата Бозе-Эйнштейна (БЕС), описание которого мы предполагаем в рамках теории Боголюбова [80]. В этом параграфе будем рассматривать в качестве основного примера именно такое состояние.

Конечное состояние $|f\rangle = |g'; \mathbf{e}', \mathbf{k}'\rangle$ задается аналогичным набором квантовых чисел, за исключением того, что атомная подсистема в общем случае описывается возмущенным состоянием конденсата $|g'\rangle$ для неупругих каналов, а телесный угол Ω связан с направлением волнового вектора рассеянного фотона \mathbf{k}' с поляризацией \mathbf{e}' . Присутствие объема квантования \mathcal{V} в выражении для сечения обусловлено структурой операторов взаимодействия, заданных в представлении вторичного квантования. Используя свойство унитарности матрицы рассеяния, в соответствии с оптической теоремой, полное сечение рассеяния может быть представлено лишь одним диагональным матричным элементом T -матрицы:

$$\sigma_{\text{tot}} = -\frac{2\mathcal{V}}{\hbar c} \text{Im} T_{ii}(E_i + i0) \quad (2.3)$$

Использование оптической теоремы удобно для вычисления полного сечения рассеяния в сложных системах.

Входящий в (2.1) оператор взаимодействия \hat{V} определен в дипольном приближении и задан в представлении вторичного квантования

$$\hat{V} = -\sum_n \int d^3r \left[d_{nm}^\mu \hat{E}_\mu(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_n^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_m(\mathbf{r}) + h.c. \right] \quad (2.4)$$

где d_{nm}^μ матричный элемент μ -й компоненты вектора дипольного момента атома, индексы n и m определяют соответственно возбужденное и основное состояние атома. $\hat{E}_\mu(\mathbf{r})$ суть μ -я компонента оператора электрического поля, и, сохраняя общность, мы придерживаемся ковариантной записи в индексации векторных и тензорных величин. Операторы $\hat{\Psi}_m(\mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}_n^\dagger(\mathbf{r})$ являются операторами уничтожения и рождения атома в точке \mathbf{r} соответственно в основном m и возбужденном n внутренних состояниях. Использование дипольного приближения в атомных системах с плотностью более одного атома в объеме длины волны излучения имеет определенные сложности, см. [106; 107]. По сути наше рассмотрение ограничено моделью слабо неидеального газа, в котором тем не менее внутреннее взаимодействие остается существенным и может быть учтено и описано уравнением Гросса-Питаевского.

Будем рассматривать ВЕС, состоящим из двухуровневых атомов с основным состоянием 1S_0 и возбужденным состоянием 1P_1 , так что квантовые числа $n = 0, \pm 1$ и $m = 0$ могут быть отождествлены с проекцией углового момента одиночного атома возбужденного и основного состояний соответственно.

Для основного состояния системы, существующей в конденсатной фазе при нулевой температуре, мы принимаем

$$\hat{\Psi}_0(\mathbf{r})|\text{BEC}\rangle^N = \Xi(\mathbf{r})|\text{BEC}\rangle^{N-1} \quad (2.5)$$

где $\Xi(\mathbf{r})$ параметр порядка (так называемая "волновая функция" конденсата). Мы рассматриваем ВЕС как макроскопический объект, так что параметр порядка нечувствителен к любому незначительному изменению числа частиц в конденсате. Тогда амплитуда рассеяния определяется следующим интегральным разложением

$$T_{fi}(E) = \frac{2\pi\hbar(\omega'\omega)^{1/2}}{\mathcal{V}} \iint d^3r' d^3r \sum_{n',n} (\mathbf{d}\mathbf{e}')_{n'0}^* (\mathbf{d}\mathbf{e})_{0n} \times \quad (2.6)$$

$$\mathbf{e}^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'+i\mathbf{k}\mathbf{r}} \Xi^*(\mathbf{r}') \Xi(\mathbf{r}) \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_0^\infty dt \mathbf{e}^{\frac{i}{\hbar}(E-E_0^{N-1}+i0)t} i G_{n'n}(\mathbf{r}',t;\mathbf{r},0)$$

где E_0^{N-1} энергия начального состояния конденсата, состоящего из $N-1$ частиц.

Ключевым элементом, определяющим амплитуду рассеяния, является функция Грина (пропагатор), описывающая распространение одиночного оптического возбуждения (поляритона) в конденсате

$$iG_{n'n}(\mathbf{r}',t';\mathbf{r},t) = \langle \text{BEC} | T \Psi_{n'}(\mathbf{r}';t') \Psi_n^\dagger(\mathbf{r};t) | \text{BEC} \rangle^{N-1} \quad (2.7)$$

и представляющая собой упорядоченное во времени произведение Ψ -операторов в представлении Гейзенберга, усредненное по состоянию конденсата и по полевому вакууму

$$|\text{BEC}\rangle^{N-1} \equiv |\text{BEC}\rangle_{\text{Atoms}}^{N-1} |0\rangle_{\text{Field}} \quad (2.8)$$

Возбуждение распространяется в конденсате, содержащем $N-1$ частиц, и Ψ -операторы "одеты" процессом взаимодействия. Предполагается, что оптическое взаимодействие является квазирезонансным, так что ω и ω' близки к частоте атомного перехода ω_0 .

Выражение для амплитуды рассеяния (2.6) представлено нами для методически наиболее важного для обсуждения случая - описания атомов как вырожденного квантового газа, что отражено присутствием в этом разложении

параметра порядка. В альтернативном пределе теплового ансамбля, с температурой существенно выше критической, атомы могут позиционироваться как рассеиватели имеющие определенное пространственное положение, с последующим усреднением по тепловому распределению, см. [108; 109]. В этом случае в выражении для амплитуды рассеяния (2.6) параметр порядка и интегрирование по \mathbf{r} и \mathbf{r}' должно быть заменено суммами по атомам ансамбля, см. [107].

2.2 Динамика оптического возбуждения

2.2.1 Диаграммное представление

Поляритонный пропагатор (2.7) может быть построен разложением Ψ -операторов в ряд теории возмущений и перегруппировкой слагаемых с помощью диаграммного метода Фейнмана, см. [75; 109]. В итоге приходим к следующему диаграммному уравнению Дайсона

$$\begin{array}{c} \text{====} \leftarrow \text{====} \\ \text{====} \leftarrow \text{====} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \text{====} \leftarrow \text{====} \\ \text{====} \leftarrow \text{====} \end{array} \quad (2.9)$$

где искомый пропагатор изображен двойной направленной линией и предполагается его "одевание" всеми процессами взаимодействия. Входящие и выходящие в вершины диаграмм вертикальные стрелки соответственно обозначают параметр порядка и его комплексно сопряженное значение. Соответствующий блок формирует собственно-энергетическую часть уравнения, которая физически описывает последовательную когерентную конверсию возбуждения между полем и атомом, сопровождаемое восстановлением состояния конденсата. Этот когерентный процесс частично разрушается вследствие спонтанного рассеяния, приобретения атомом импульса отдачи, и его перехода в надконденсатное состояние.

Механизм спонтанного распада включен в (2.9) присутствием неполного поляритонного пропагатора, изображенного выделенной сплошной линией, и подчиняющегося уравнению Дайсона, отдельно учитывающего вклад спонтанных процессов

The diagram shows a horizontal line with an arrow pointing to the left. This line is equal to the sum of two terms. The first term is the same horizontal line with an arrow pointing to the left. The second term is a horizontal line with an arrow pointing to the left, but with a loop attached to it. The loop is a closed path with two vertices on the main line, connected by two wavy lines. The arrow on the main line continues through the vertices.

$$(2.10)$$

Данное уравнение должно рассматриваться совместно с уравнением для функции Грина, построенной непосредственно для упорядоченного во времени вакуумного среднего от произведения гейзенберговских операторов электрического поля

The diagram shows a horizontal wavy line with an arrow pointing to the right. This line is equal to the sum of two terms. The first term is the same horizontal wavy line with an arrow pointing to the right. The second term is a horizontal wavy line with an arrow pointing to the right, but with a loop attached to it. The loop is a closed path with two vertices on the main line, connected by two straight lines. The arrow on the main line continues through the vertices.

$$(2.11)$$

Эти два графических уравнения образуют замкнутую систему и должны быть решены совместно. Этим обстоятельством подчеркивается, что оптическое возбуждение, рожденное в конденсате, может привести к спонтанному излучению, и данный процесс аналогичен процессу некогерентного рассеяния в неупорядоченном газе той же плотности. Действительно, уравнение (2.10) имеет структуру полностью аналогичную распаду возбужденного атома, помещенного в неупорядоченную среду слабо неидеального газа. В свою очередь, диаграммное уравнение (2.11) формально совпадает с функцией Грина фотона в подобной некогерентно рассеивающей диэлектрической среде [75; 83; 110] и определяет диэлектрическую проницаемость конденсата.

2.2.2 Некогерентные потери и диэлектрическая проницаемость конденсата. Уравнение рассеяния

В стационарном и однородном случае функции, удовлетворяющие уравнениям (2.10)-(2.11), зависят только от разностных пространственных и временных аргументов и могут быть представлены разложением Фурье. Вводим соответствующие представления для фотонного пропагатора (2.11)

$$D_{\mu\mu'}^{(E)}(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3 R \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} D_{\mu\mu'}^{(E)}(\mathbf{R}, \tau) \Bigg|_{\substack{\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \\ \tau = t - t'}} \quad (2.12)$$

и для неполного поляритонного пропагатора (2.10)

$$G_{nn'}^{(\gamma)}(\mathbf{p}, E) = \int d^3R \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{\frac{i}{\hbar}E\tau - \frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} G_{nn'}^{(\gamma)}(\mathbf{R}, \tau) \Bigg|_{\substack{\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \\ \tau = t - t'}} \quad (2.13)$$

Дополнительный индекс γ указывает на то, что динамика данного пропагатора обусловлена спонтанным рассеянием рождаемого в среде одночастичного оптического возбуждения.

После проведения преобразования Фурье, уравнение (2.11) может быть непосредственно разрешено и результат представлен в следующей форме

$$\begin{aligned} D_{\mu'\mu}^{(E)}(\mathbf{k}, \omega) k, \omega &= -\frac{4\pi\hbar\omega^2}{\omega_k^2 - \epsilon(k, \omega)\omega^2} \left[\delta_{\mu\mu'} - c^2 \frac{k_\mu k_{\mu'}}{\epsilon(k, \omega)\omega^2} \right] \\ &\approx -\frac{4\pi\hbar\omega^2}{\omega_k^2 - \epsilon(\omega)\omega^2} \left[\delta_{\mu\mu'} - c^2 \frac{k_\mu k_{\mu'}}{\epsilon(\omega)\omega^2} \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

где введено обозначение

$$\epsilon(k, \omega) = 1 - \frac{4\pi}{\hbar} d_0^2 n_0 G_{nn'}^{(\gamma)}(\hbar k; \hbar\omega + \epsilon_0). \quad (2.15)$$

Здесь d_0 - модуль матричного элемента дипольного момента, предполагаемого одинаковым для всех рассматриваемых переходов, $n_0 = |\Xi|^2 = const$ - плотность атомов. Соотношение (2.12) связывает фотонный пропагатор с неполным поляритонным пропагатором. В случае бесконечной однородной и изотропной среды с вырожденным возбуждённым состоянием ($E_n = const$) можно допустить (и подтвердить согласованностью дальнейших преобразований), что

$$G_{nn'}^{(\gamma)}(\mathbf{p}; E) = \delta_{nn'} G^{(\gamma)}(p; E). \quad (2.16)$$

В случае слабо неидеального конденсата, приращение $E_0^N - E_0^{N-1} = \epsilon_0 \equiv \mu_c + E_0$ определяет изменение энергии при добавлении частицы в конденсат, которая включает в себя химический потенциал μ_c и формально внутреннюю энергию основного состояния E_0 одиночного атома, которую можно было бы положить равной нулю. Однако для удобства последующих преобразований мы оставляем E_0 в качестве физического параметра. При этом для вырожденного квантового газа, состоящего из достаточно разреженных и слабо взаимодействующих атомов, допускающих описание в рамках модели Гросса-Питаевского [81; 82], справедливо следующее неравенство

$$\mu_c \lesssim \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m_A} \ll \hbar\gamma \quad (2.17)$$

где $k_0 \equiv 2\pi/\lambda_0$ - волновое число, соответствующее резонансному атомному переходу, m_A - атомная масса, и γ - скорость спонтанного распада изолированного атома. В случае модели бесконечной и однородной среды химический потенциал определяется следующей оценкой

$$\mu_c = n_0 \int d^3r U(r) > 0 \quad (2.18)$$

где $U(r)$ потенциальная энергия взаимодействия в системе двух атомов. Правое неравенство в (2.17), разделяющее доплеровский режим и предел отдачи в охлаждении атома, выполняется с достаточной точностью для всех щелочных атомов. Вклад кинетической энергии атома с импульсом $\hbar k \sim \hbar k_0$ в рассматриваемые спектральные зависимости несущественен в сравнении с γ , поэтому можно допустить $\epsilon(k, \omega) \approx \epsilon(0, \omega) \equiv \epsilon(\omega)$, что позволяет совершить приближённый переход в равенстве (2.14).

Сделаем поясняющий комментарий к результату (2.14). В достаточно общем обосновании, см. [109], подобная структура «фотонной функции Грина в среде» может быть соотнесена с фундаментальным решением макроскопических уравнений Максвелла, где $\epsilon(\omega)$ - диэлектрическая проницаемость среды. Обратим, однако внимание на то, что в случае квантового вырождения внешний фотон и возбужденный атом, распространяются через образец в режиме суперпозиции - поляритона - как это предполагает графическое уравнение (2.9). Хотя аналогия с обычной средой не является безупречной, мы будем интерпретировать $\epsilon(\omega)$ как диэлектрическую проницаемость конденсата, предполагая, тем самым, что в формировании $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$, состоящей из дисперсионной и диссипативной составляющей, вносит вклад только процесс некогерентного рассеяния, переводящий атомы в тепловое надконденсатное состояние.

Уравнение (2.10), представленное в аналитической форме и записанное в представлении Фурье, включает полевую функцию Грина (2.14) в собственно-энергетическую часть в виде интеграла свертки с атомным пропагатором. Учет некогерентных потерь, а также взаимодействие с квантовым континуумом поля важны для области спектра вблизи атомного резонанса, и можно ожидать, что при вычислении соответствующего интеграла внутренние аргументы варьируются в достаточно широких пределах, но, вместе с тем, сосредоточены вблизи

$\omega \sim \omega_0$ и $k \sim k_0 = \omega_0/c$, где $\omega_0 = (E_n - E_0)/\hbar$ - частота атомного перехода. Рассматривая полевую функцию Грина как аналитическую функцию отстройки $\Delta = \omega - \omega_0$ в комплексной полуплоскости, где $\text{Im}[\Delta] > 0$, вычислим интеграл по ω , приближенно продолжив его как интеграл по Δ в бесконечных пределах, который в этом допущении определяется вычетом в полюсе $\omega_E = (E - E_0)/\hbar$ (соответственно $\Delta \rightarrow \Delta_E = (E - E_n)/\hbar$). В такой оценке мы можем не учитывать несущественное смещение полюса, связанное с доплеровским сдвигом, что представляет неоправданно малую и превышающую точность нашего расчета поправку релятивистского типа при вычислении внешнего интеграла по переменной \mathbf{k} .

В этом случае уравнение (2.10) преобразуется к виду

$$\left[E - \frac{p^2}{2m_A} - E_n - \Sigma^{(\gamma)}(p, E) \right] G^{(\gamma)}(p; E) = \hbar \quad (2.19)$$

где собственно-энергетическая часть может быть представлена в виде суммы двух слагаемых

$$\Sigma^{(\gamma)}(p, E) = \Sigma^{(\text{st})}(p, E) + \Sigma^{(\text{rad})}(p, E) \quad (2.20)$$

Первый вклад определяется интегралом

$$\Sigma^{(\text{st})}(p, E) = \frac{4\pi}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d_0^2}{\epsilon(k, \omega_E)} \approx \frac{4\pi}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d_0^2}{\epsilon(\omega_E)} \quad (2.21)$$

Второй вклад также имеет интегральное представление

$$\begin{aligned} \Sigma^{(\text{rad})}(p, E) &= -\frac{8\pi}{3} d_0^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_E^2}{c^2 k^2 - \epsilon(k, \omega_E) \omega_E^2} \\ &\approx -\frac{8\pi}{3} d_0^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_E^2}{c^2 k^2 - \epsilon(\omega_E) \omega_E^2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Оба слагаемых оказываются расходящимися величинами, что является естественной "расплатой" за все сделанные, казавшиеся нам физически оправданными приближения и допущения. Тем не менее, как мы показываем далее, возникающие расходимости могут быть устранены с помощью разумной схемы перенормировки.

Действительно, первое слагаемое можно интерпретировать как бесконечную энергию взаимодействия диполя с его собственным ближним полем,

создаваемым внутри вещества. В этом можно убедиться прямым электродинамическим расчетом (поместив диполь в начало координат)

$$\frac{4\pi}{3}d_0^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\epsilon(\omega)} = -\mathbf{dE}_{\text{dip}}^{(\text{med})}(0) \quad (2.23)$$

В соответствии с приближенным описанием атома, трактуемого как сосредоточенный диполь, что законно для взаимодействия атома с модами достаточно длинных волн, в преобразованном гамильтониане обязательно присутствует вклад, соответствующий взаимодействию точечного диполя со своим полем в вакууме, см. [107],[111]. Как показано в этих работах, данное взаимодействие контактного типа, в действительности, не оказывает влияния на динамику диполя, ибо в соответствующих уравнениях Гейзенберга полностью компенсируется другим бесконечным энергетическим вкладом, связанным с собственной энергией диполя, см. [106]. Таким образом, из собственно энергетической части (2.20) следует вычесть не имеющий физического содержания вакуумный вклад контактного взаимодействия диполя

$$\frac{4\pi}{3}d_0^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\mathbf{dE}_{\text{dip}}^{(\text{vac})}(0) \quad (2.24)$$

Разность этих слагаемых (которая в вакуумном случае с $\epsilon(\omega) = 1$ была бы равна нулю) и представляет собой реальную физическую энергию взаимодействия диполя со средой в квазистатическом приближении

$$-\mathbf{dE}_{\text{dip}}^{(\text{med})}(0) - \mathbf{dE}_{\text{dip}}^{\text{vac}}(0) = -\mathbf{d}(\mathbf{E}_{\text{loc}}(0) = \frac{4\pi}{3}n_0\mathbf{d}) = -\frac{4\pi}{3}n_0d_0^2 \quad (2.25)$$

Для оценки этой энергии предлагается использовать идею локального поля Лоренц-Лорентца. Фактически, здесь предполагается, что рождаемое в среде возбуждение, в случае его распада по некогерентному каналу, связано с формируемой надконденсатной компонентой, которая может быть интерпретирована в духе представлений об атомных диполях, распределенных в пространстве с помощью классического статистического распределения.

Второе слагаемое собственно-энергетической части представляет собой радиационную часть. Для его физического вычисления вычтем из него "нулевой" вклад

$$-\frac{8\pi}{3}d_0^2 \frac{\omega^2}{c^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - i0} - (\hbar\Delta_L = \infty) + i\hbar\frac{\gamma}{2} \quad (2.26)$$

где $\hbar\Delta_L$ — формально бесконечный радиационный (лэмбовский) сдвиг, а γ — скорость радиационного распада атома. Присутствующий бесконечный радиационный сдвиг принципиально не может быть вычислен в рассматриваемых приближениях, но он может быть объединен с физической энергией изолированного атома. В итоге радиационный вклад (2.22) в собственно-энергетическую часть (2.20) должен быть заменен на физически понятную коррекцию как скорости спонтанного распада, так и светового сдвига $-i\hbar\sqrt{\epsilon(\omega)}\gamma/2$.

С учетом соотношения (2.15) из уравнения (2.19) можно построить замкнутое алгебраическое уравнение для $\epsilon(\omega)$ и для связанного с ней пропагатора $G^{(\gamma)}(p, \hbar\omega)$, рассматриваемого при малых значениях импульсного аргумента $p \lesssim k_0$. Приводя ниже это уравнение, мы несколько расширим результат, добавив возможность плавной пространственной зависимости для плотности атомов

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1 - \frac{8\pi}{3\hbar}n_0(\mathbf{r})d_0^2 + \frac{i}{2}\sqrt{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)}\gamma}{1 + \frac{4\pi}{3\hbar}n_0(\mathbf{r})d_0^2 + \frac{i}{2}\sqrt{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)}\gamma} \quad (2.27)$$

Может показаться, что добавление пространственной зависимости является сильным нарушением использованных нами выше допущений. Однако, в действительности, для внутренней согласованности проведенного расчета однородность среды необходимо обеспечить лишь на пространственных масштабах порядка и даже меньше длины волны резонансного излучения, см. соответствующий комментарий в [75]. Мы дополнительно обращаем внимание на то, что представленный расчет законен для сравнительно разреженной среды, когда в объеме длины волны излучения атома (его радиационной зоне) может содержаться лишь небольшое количество других атомов. Вычисляемая диэлектрическая проницаемость при этом не должна сильно отличаться от своего вакуумного значения.

Уравнение для полной одночастичной функции Грина, описывающей распространение оптического возбуждения в конденсате, и являющееся уравнением рассеяния, теперь может быть построено в замкнутом виде

$$\begin{aligned} & \left[E + \frac{\hbar^2}{2m_A}\Delta - E_n + \frac{4\pi}{3}n_0(\mathbf{r})d_0^2 + \frac{i\hbar}{2}\sqrt{\epsilon(\mathbf{r}, \omega_E)}\gamma \right] G_{nn'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) \\ & - \sum_{n''} \int d^3r'' \Sigma_{nn''}^{(c)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}''; E) G_{n''n'}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'; E) = \hbar\delta_{nn'}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Собственно-энергетическая часть этого уравнения, ответственная за когерентный процесс, имеет следующий вид

$$\Sigma_{nn'}^{(c)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \frac{1}{\hbar} \sum_{\mu, \mu'} \Xi(\mathbf{r}) \Xi^*(\mathbf{r}') \times D_{\mu\mu'}^{(E)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega_E - \frac{\mu_c}{\hbar})(d^\mu)_{0n}(d^{\mu'})_{n'0} \quad (2.29)$$

и выражена через вакуумную функцию Грина компонент напряженности электрического поля причинного типа, см. [109]:

$$D_{\mu\mu'}^{(0,E)}(\mathbf{R}, \omega) = \delta_{\mu\mu'} \hbar \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{R} e^{i\frac{|\omega|}{c}R} - \frac{\partial^2}{\partial X_\mu \partial X_{\mu'}} \left[\frac{\hbar}{R} e^{i\frac{|\omega|}{c}R} \right] \quad (2.30)$$

которая зависит лишь от разности своих пространственных аргументов: $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Решение уравнения рассеяния (2.28) в трехмерной геометрии представляет собой весьма непростую задачу. Как мы покажем далее, это решение эквивалентно решению макроскопических уравнений Максвелла в неоднородной среде. В общем случае, оно может быть построено только численно и далее, с использованием соотношений (2.2), (2.3), (2.6) определяет дифференциальное сечение упругого рассеяния. В следующем параграфе мы проведем анализ уравнения (2.28) в приближении бесконечно однородной среды. Этот предельный случай, разумеется, не может сопровождаться какими-либо каналами когерентного рассеяния, помимо распространения вперёд, но приведет нас к наглядному описанию распространения возбуждения в веществе как суперпозиционного состояния атома и фотона, т.е. светоэкситона или поляритона. Решение уравнения рассеяния (2.28) в общем случае может наглядно интерпретироваться как преобразование состояния этой квазичастицы, обусловленное пространственной неоднородностью конденсата, формирующейся в процессе его внутренней эволюции.

2.3 Приближение бесконечной однородной среды

Уравнение для функции Грина поляритона (2.28) существенно упрощается, и может быть решено в приближении бесконечной и однородной среды.

В этом случае после преобразование Фурье этого уравнения по пространственным координатам оно становится алгебраическим, и соответствующее решение для компонент Фурье функции Грина можем построить, представив его в виде разложения на продольную и поперечную составляющую:

$$G_{nn'}(p, E) = G_{\parallel}(p, E) \frac{p_n p_{n'}}{p^2} + G_{\perp}(p, E) \left[\delta_{nn'} - \frac{p_n p_{n'}}{p^2} \right] \quad (2.31)$$

где p_n - векторные компоненты импульса поляритона \mathbf{p} и индекс n , совпадающий со спецификацией возбужденного состояния атома, фактически, можно отождествить с декартовыми координатами. Для поперечной (по отношению к импульсу поляритона) компоненты функции Грина имеем

$$G_{\perp}(p, E) = \hbar \left\{ E - E_n - \frac{p^2}{2m_A} + \frac{4\pi}{3} n_0 d_0^2 + \frac{i\hbar}{2} \sqrt{\epsilon(\omega_E) \gamma} - \frac{4\pi n_0 d_0^2 \omega_E^2}{\hbar(\omega_E^2 - c^2 p^2 / \hbar^2)} \right\}^{-1} \quad (2.32)$$

где n_0 - плотность атомов в конденсате и $\epsilon(\omega)$ - введённая ранее (2.27) диэлектрическая проницаемость, формирующаяся в процессе возбуждения. Выражение для продольной функции приведено ниже, см. ф. (2.33).

При разложении цепной дроби в выражении (2.32) на простейшие дроби прослеживается появление двух поляритонных мод. Мы кратко обсудим их свойства в зависимости от параметров задачи. На рисунках 2.1 и 2.2 приведены примеры зависимостей поперечной и продольной компонент функции Грина для параметра плотности $n_0 \lambda^3 = 0.05$. Обе компоненты демонстрируют схожее поведение как функции $\omega - \omega_0$ и различное поведение как функции $k - k_0$. Из приведенных зависимостей видно, что поперечная компонента имеет две выделенные спектральные асимптоты.

Если рассматривать спектральное поведение вдоль асимптоты $\omega \rightarrow \omega_0$, приближаясь к атомному резонансу, то можно заметить, что возбуждение ведет себя подобно неподвижному атому (экситону), взаимодействующему с окружением посредством ближнего поля. Однако поляризационное взаимодействие с конденсатом корректирует сдвиг Лоренц-Лорентца $-4\pi n_0 d_0^2 / 3$, который в случае $p < \hbar \omega_0 / c$ получает дополнительное смещение в высокочастотную область. В пределе полностью покоящегося возбуждения, т. е. если в формуле (2.32) импульс квазичастицы устремить к нулю $p \rightarrow 0$, поперечная компонента функции Грина совпадёт с продольной

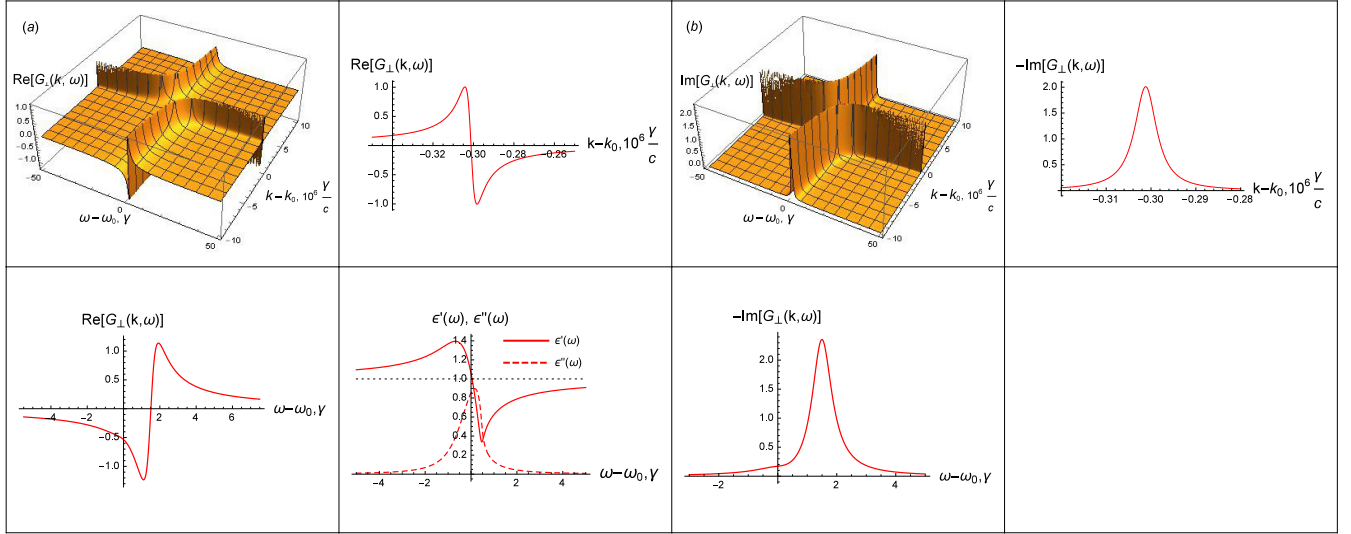


Рисунок 2.1 — Поперечная компонента функции Грина $G_{\perp}(k, \omega)$, построенная для плотности атомов в объёме длины волны излучения $n_0(\lambda_0/2\pi)^3 = 0.05$. Частотная отстройка $\Delta = \omega - \omega_0$ нормирована на скорость спонтанного распада γ , а отстройка $k - k_0$ на $c\gamma$. На рисунке отдельно представлены (а) вещественная часть и (б) мнимая часть функции Грина. Показаны спектральные профили, соответствующие сечениям трехмерных графиков (а) и (б) в крайних точках, и спектральная зависимость диэлектрической проницаемости образца $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$. Перепринт статьи автора диссертации [74].

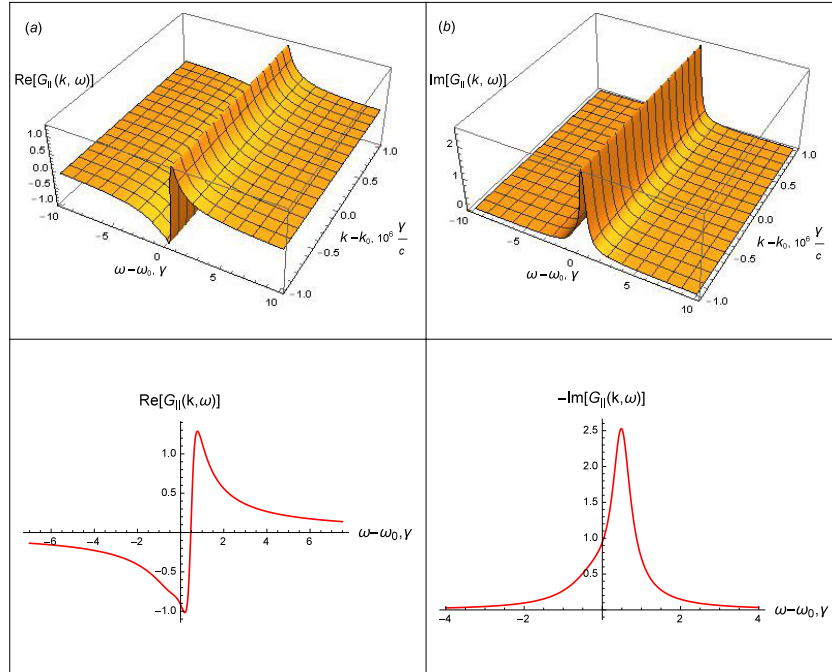


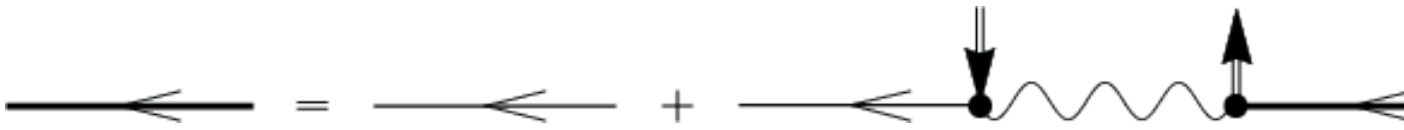
Рисунок 2.2 — То же, что и на Рис. 2.1, но для продольной компоненты поляритонного пропагатора $G_{\parallel}(k, \omega)$. Перепринт статьи автора диссертации [74].

$$G_{\parallel}(p, E) = \left\{ E - E_n - \frac{p^2}{2m_A} - \frac{8\pi}{3} n_0 d_0^2 + \frac{i\hbar}{2} \sqrt{\epsilon(\omega_E) \gamma} \right\}^{-1} \quad (2.33)$$

и картина возбуждения становится изотропной, чем подчеркивается равноправность продольного и поперечного типов возбуждений в этом пределе.

Если же двигаться вдоль асимптоты $\omega \rightarrow c|\mathbf{k}|$, то вдали от атомного резонанса внутри конденсата формируется поляритонная мода, распространяющаяся со скоростью, фактически совпадающей со скоростью света. Важно, что разделение динамики поперечного возбуждения на две ветви существует при любой плотности. Увеличение параметра плотности $n_0 \lambda^3$ приводит лишь к более сильному их разделению, то есть возбуждение формируется всё дальше от реперной точки $\omega_0 = ck_0$.

В предельном случае дальних отстроек от атомного резонанса и возможности игнорирования спонтанных потерь диаграммные разложения (2.9-2.11) существенно упрощаются, что приводит нас к следующему диаграммному уравнению для одночастичной функции Грина, описывающей полностью динамический цикл формирования суперпозиционного состояния между фотоном и конденсатом



$$(2.34)$$

Здесь первое слагаемое в правой части уравнения соответствует невозмущенной атомной функции Грина. Второе слагаемое показывает, как происходит обмен оптическим возбуждением через взаимодействие с конденсатом, преобразуя квазичастицу в световую моду и обратно в атомное возбуждение. Выражение для поперечной компоненты функции Грина без учета диссипации в системе выглядит следующим образом

$$G_{\perp}(k, \omega) = \left\{ \omega - \omega_0 - \frac{\hbar k^2}{2m} - \frac{4\pi n_0 d_0^2 \omega^2}{\hbar(\omega^2 - c^2 k^2)} \right\}^{-1} \quad (2.35)$$

В задаче рассеяния наиболее важна именно поперечная компонента функции Грина, ибо она связана с распространением возбуждения поляритонного типа, рождаемого в однородной среде падающим светом (также имеющим поперечную структуру) и распространяющимся по образцу. Поскольку скорость

распространения возбуждения в этом случае практически совпадает со скоростью света, то оно распространяется в образце конечных размеров практически без затухания. Эта поляритонная мода, формируемая на краях образца вдали от атомного резонанса с условием $\omega \sim c|\mathbf{k}|$, ответственна за эффекты сильного когерентного рассеяния, происходящих как на краях образца, так и вследствие возможной его внутренней неоднородности. Обратим внимание на то, что в этой спектральной области обычный атомарный газ той же плотности был бы полностью прозрачен для света. Возможность сильного когерентного рассеяния света атомами конденсата была предсказана в работе [71], за четыре года до экспериментальной реализации атомарного БЭК в лаборатории.

2.4 Выводы по главе

В этой главе основным результатом является построенная нами с помощью последовательного квантовомеханического формализма теория рассеяния света (одиночного фотона) на системе тождественных атомов в условиях их квантового вырождения (ВЕС). С использованием диаграммного метода Фейнмана [75] была построена система графических уравнений (2.9-2.11) для вычисления ключевого элемента задачи рассеяния – одночастичной функции Грина, определяющей амплитуду рассеяния и описывающей распространение одиночного оптического возбуждения в конденсате. С помощью решения замкнутой системы двух графических уравнений (2.10), (2.11) был получен важный вывод о том, что оптическое возбуждение, рожденное в конденсате, может привести к спонтанному излучению, и данный процесс аналогичен процессу некогерентного рассеяния в неупорядоченном газе той же плотности. Ключевым результатом главы является решение системы (2.9)-(2.11) и построение управляющего интегрально-дифференциального уравнения (2.28). Данное уравнение было решено аналитически в приближении бесконечной однородной среды и привело нас к наглядному описанию распространения возбуждения в вырожденном состоянии атомного ансамбля как суперпозиционного состояния атома и фотона – поляритона. Решение уравнения рассеяния (2.28) в общем случае может наглядно интерпретироваться как преобразование состояния этой квазичастицы, обусловленное пространственной неоднородностью конденсата,

формирующейся в процессе его внутренней эволюции. Эта поляритонная мода, формируемая на краях образца вдали от атомного резонанса с условием $\omega \sim c|\mathbf{k}|$, ответственна за эффекты сильного когерентного рассеяния, происходящих как на краях образца, так и вследствие возможной его внутренней неоднородности.

Глава 3. Одномерная модель задачи рассеяния

3.1 Пространственный профиль параметра порядка

Вырожденные квантовые газы обладают уникальными свойствами, и процесс рассеяния, происходящий в системе с уменьшенной пространственной размерностью, представляют отдельный интерес [112; 113], что мотивирует нас рассматривать результаты рассеяния для нескольких случаев различной конфигурации вырожденного газа в одномерной модели. Кроме того, как было отмечено выше, решение уравнения рассеяния (2.28) в трехмерной геометрии представляет собой весьма непростую задачу. Ниже приводятся полученные сравнительные результаты численного моделирования для одномерной модели, выраженной в терминах коэффициентов пропускания и отражения света слоем атомов, существующих либо в квантовой вырожденной фазе, либо в виде неупорядоченного классического газа.

Распределение плотности в образце, для различных пространственных профилей параметра порядка, приведены на Рис.3.1 для трех возможных конфигураций: однородное распределение БЭК с постоянной плотностью Рис.3.1(a)

$$\Xi = \sqrt{n_0} = \text{const}_z, \quad (3.1)$$

где n_0 плотность атомов, неоднородное распределение, параметризованное параметром порядка с тригонометрическим профилем [Рис.3.1 (b)]:

$$\Xi(z) = \sqrt{n_0} \cos(\pi z/L), \quad (3.2)$$

а также интерференция двух материальных волн, соответствующих фрагментам конденсата, распространяющихся навстречу друг другу Рис.3.1(c)

$$\Xi(z) = \sqrt{\frac{n_0}{2}} \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right) e^{i\Delta q z} + \sqrt{\frac{n_0}{2}} \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right) e^{-i\Delta q z}. \quad (3.3)$$

Сглаженный профиль ближе всего соответствует реальной экспериментальной картине и, как мы увидим, внутреннее движение перекрывающихся

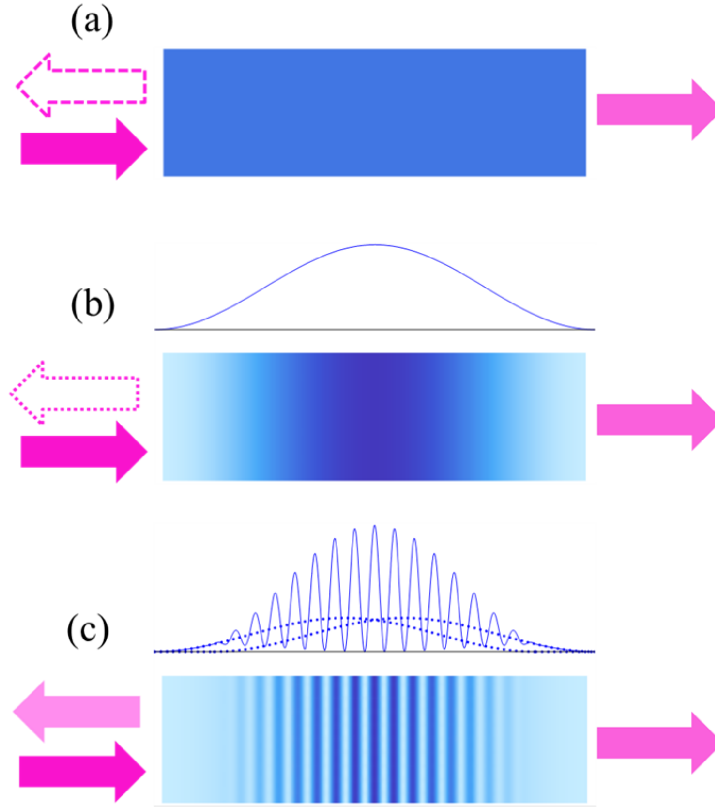


Рисунок 3.1 — Распределение плотности атомов вырожденного газа для различных пространственных профилей параметра порядка: (a) однородное распределение БЭК с постоянной плотностью в геометрии слоя толщиной L с параметром порядка (3.1); (b) неоднородное распределение, параметризованное параметром порядка с тригонометрическим профилем (3.2); (c) интерференция двух материальных волн для двух фрагментов БЭК, распространяющихся навстречу друг другу, см. (3.3).

фрагментов конденсата, выраженное (3.3) и далее в тексте может кардинально изменить картину рассеяния света.

Переход к одномерной задаче рассеяния предполагает рассмотрение неограниченного в поперечном направлении слоя вещества. Для определения нужных параметров переходим к представлению Фурье в подынтегральном выражении, рассматриваемом теперь как функция энергии и продольных координат z, z' . Вычисление интеграла (2.6) в поперечных плоскостях $dx dy$ и $dx' dy'$, с учетом δ -функции по этим координатам в поляритонном пропагаторе, приводит к множителю $\mathcal{L}_x \mathcal{L}_y$ частично сокращаемому с аналогичным множителем в объёме квантования $\mathcal{V} = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y \mathcal{L}_z$, и оставляет в одномерной задаче параметр длины квантования $\mathcal{L}_z = \mathcal{L}$.

В итоге матричный элемент T -матрицы упругого канала рассеяния, связанный с направлениями рассеяния вперед и назад, определяется следующим образом

$$T_{i'i}(E) = \frac{2\pi\omega}{\mathcal{L}} \iint dz' dz \sum_{n',n} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e})_{n'0}^* (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e})_{0n} \times \mathbf{e}^{-ik'z' + ikz} \Xi^*(z') \Xi(z) G_{n'n}(z', z; E - E_0^{N-1}) \quad (3.4)$$

где в упругом канале рассеяния частота и поляризация рассеянного фотона предполагаются неизменными $\omega' = \omega$ и $\mathbf{e}' = \mathbf{e}$, и мы переопределили $f \equiv i'$ подчеркивая физическую эквивалентность начального и конечного состояния для этого типа рассеяния.

Вместо T -матрицы удобно перейти к S -матрице¹, связывающей начальное и конечное квантовые состояния системы, см. [106; 115]

$$S_{i'i} = \delta_{i'i} - i \frac{\mathcal{L}}{\hbar c} T_{i'i}(E_i + i0) \quad (3.5)$$

В одномерной модели процесс рассеяния описывается коэффициентами прохождения $\mathcal{T}(\omega)$, отражения $\mathcal{R}(\omega)$ и потерь $\mathcal{L}(\omega)$, непосредственно определяемых S -матрицей

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\omega) &= |S_{i'i}|^2 \Big|_{k'=k>0} \\ \mathcal{R}(\omega) &= |S_{i'i}|^2 \Big|_{k'=-k<0} \\ \mathcal{L}(\omega) &= 1 - \mathcal{T}(\omega) - \mathcal{R}(\omega) \end{aligned} \quad (3.6)$$

которые могут быть найдены как результат решения уравнения (2.28) в одномерной геометрии.

Сделаем здесь важное замечание. Любой предлагаемый профиль параметра порядка должен соответствовать физически обоснованной модели конденсата, которой, в случае слабого внутреннего взаимодействия, выступает какое-либо возможное решение уравнения Гросса-Питаевского [81; 82]. В макроскопическом пределе можно предположить любой однородный пространственный профиль параметра порядка воспроизводимый, например, как приближенное решение Томаса-Ферми. В этом случае пространственный профиль, фактически, задается потенциалом ловушки. Это приближение выполняется для "мягких" связывающих ловушек, в которых период свободных колебаний больше $2\pi\hbar/\mu_c$ где μ_c - химический потенциал, оцениваемый с помощью (2.17) и ответственный за энергию парных взаимодействий (2.18), и приближение, тем

¹Впервые понятие S -матрицы было введено Джоном Уилером в его работе 1937 года [114]

самым, основано на приоритете внутреннего взаимодействия. Однако, даже рассматривая вырожденный газ как идеальный с $\mu_c \rightarrow 0$, можно также допустить достаточно общий профиль параметра порядка, который в этом случае совпадает с собственной функцией уравнения Шредингера для основного состояния в потенциале ловушки.

Рассмотрим случай однородного вырожденного квантового газа, заполняющего слой толщины L с параметром порядка, заданным (3.1), изображенного на Рис.3.1(а). Уравнение рассеяния (2.28) можно преобразовать к системе счетного множества алгебраических уравнений [75]. Эта система может быть ограничена конечным репрезентативным числом уравнений и решена численно, и спектры коэффициентов пропускания $\mathcal{T}(\omega)$ и отражения $\mathcal{R}(\omega)$ могут быть вычислены. Независимым расчетом эти же величины могут быть найдены в результате решения макроскопических уравнений Максвелла (см. [116])

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\omega) &= \left| \frac{2\sqrt{\epsilon(\omega)}}{2\sqrt{\epsilon(\omega)} \cos \psi(\omega) - i(1 + \epsilon(\omega)) \sin \psi(\omega)} \right|^2 \\ \mathcal{R}(\omega) &= \left| \frac{\sin [\psi(\omega)]}{\sin \left[\psi(\omega) - i \ln \frac{1 - \sqrt{\epsilon(\omega)}}{1 + \sqrt{\epsilon(\omega)}} \right]} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\psi(\omega) = L\sqrt{\epsilon(\omega)}\omega/c$. Подставляя диэлектрическую проницаемость (2.27), мы приходим к результату, предсказанному для макроскопического неупорядоченного газа, см. [117].

На Рис.3.2 представлены спектры пропускания и отражения света от конденсата и неупорядоченного атомарного газа той же плотности $n_0\lambda_0^3 \sim 0.05$ и в той же геометрии однородного распределения плотности Рис.3.1 (а). Диэлектрическая проницаемость, определяемая решением уравнения (2.27). В случае вырожденного неидеального газа оптическое возбуждение требует также преодоления определенного внутреннего взаимодействия, и спектр возбуждения должен быть смещен в красную часть спектра атомного резонанса на величину химического потенциала. В рассматриваемой модели этот сдвиг мал и может быть проигнорирован, поскольку критерий (2.17) хорошо выполняется для оптических переходов перехода дипольного типа и, в частности, в ансамблях атомов щелочных металлов. Таким образом, в представляемом сравнении спектров рассеяния конденсата и неупорядоченных атомов это незначительное смещение не

проявляется. Тем не менее, мы оставляем этот важный результат в поле нашего рассмотрения, поскольку подобное красное смещение является физическим эффектом и даже может быть наблюдаемым в спектрах пропускания и отражения на запрещенных оптических переходах. Действительно, красное смещение наблюдается в спектре пропускания конденсата, состоящего из атомов гелия, в спектрально узком запрещенном магнито-дипольном переходе [118].

Удивительно, но это общее и, по сути, несущественное смещение спектрального профиля является единственным различием между спектрами пропускания и отражения вырожденного и невырожденного атомного газа. Наблюдается идеальное поточечное совпадение спектров, несмотря на то, что они были рассчитаны с помощью решения на первый взгляд совершенно разных уравнений. Объяснение этому факту будет представлено нами ниже в разделе п. 3.2.3. Незначительное отклонение в расчетах, наблюдаемое для отражения вблизи резонансной точки, является следствием не вполне корректно учтенных граничных эффектов, игнорируемых при преобразовании Фурье оператора Лапласа в алгебраическую форму уравнения. Эта некорректность, как мы проверили расчетом, смягчается в макроскопическом пределе $L/\lambda_0 \rightarrow \infty$. Собственно, слабый, но не пренебрежимо малый эффект отражения является следствием обратного рассеяния поляритона от краев образца, к тому же данный эффект усиливается благодаря наличию интерференции (см. 3.2.4). Такое превосходное совпадение двух независимых вычислений указывает на то, что, на первый взгляд, при рассеянии света на ансамбле атомов с равномерным распределением плотности оптический отклик системы нечувствителен к тому, каким образом выполнено статистическое усреднение, предполагающее либо квантовое, либо классическое описание.

Данное наблюдение подтверждается аналогичным расчетом, выполненными для параметра порядка с тригонометрическим профилем (3.2) (в геометрии Рис.3.1(b)), а результаты показаны на Рис.3.3). Для этого случая мы использовали дополнительные упрощения, раскладывая $\sqrt{\epsilon(z, \omega)}$ в ряд Тейлора вблизи вакуумной точки $\epsilon = 1$ и удерживая только вперед распространяющуюся волну в описании, опирающемся на макроскопическую теорию Максвелла. Расчеты показали хорошее (с точностью до сделанных приближений) согласие между обоими подходами. Мы использовали такую же пиковую плотность $n_0 \lambda_0^3 \sim 0.05$ и такие же толщины образца, что и на графиках Рис.3.2. В случае плавных границ образца с профилем плотности $n_0(z) = n_0 \cos^2(\pi z/L)$ обратное рассеяние

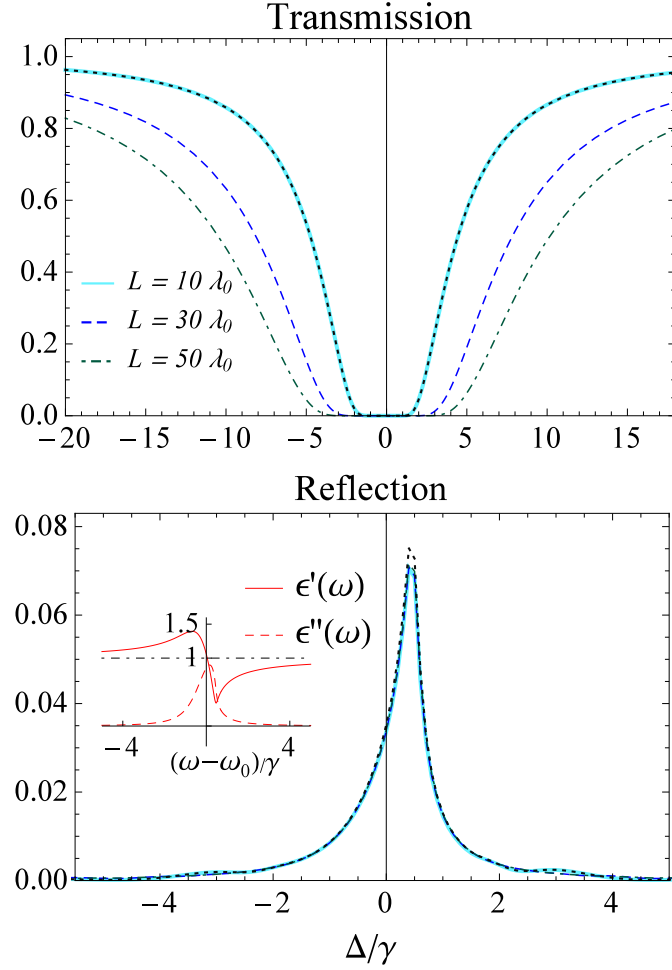


Рисунок 3.2 — Спектральные зависимости коэффициентов прохождения (верхний график) и отражения (нижний график), вычисленные как независимые результаты решения уравнений рассеяния (2.28), и решения уравнений Максвелла (3.7) в одномерной геометрии для однородной среды, см. Рис.3.1(а). Представленные зависимости построены как функции отстройки $\Delta = \omega - \tilde{\omega}_0$ от частоты смещенного резонанса $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 - \mu_c/\hbar$, см. комментарий в тексте. Результаты представлены для различных толщин L образца, отнесенного к длине волны резонансного излучения λ_0 , и соответствуют плотности $n_0\lambda_0^3 \sim 0.05$. Спектры отражения, соответствующие разным L , неразличимы в пределах разрешения графика. На вставке приведена диэлектрическая проницаемость образца $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$, заданная решением уравнения (2.27), как функция $\omega - \omega_0$. Оба вычисления по (2.28) и (3.7) дают одинаковые результаты, что проиллюстрировано примером $L = 10\lambda_0$, где дополнительно представлен (пунктирной линией) расчет по макроскопической теории Максвелла. Перепринт статьи автора диссертации [75].

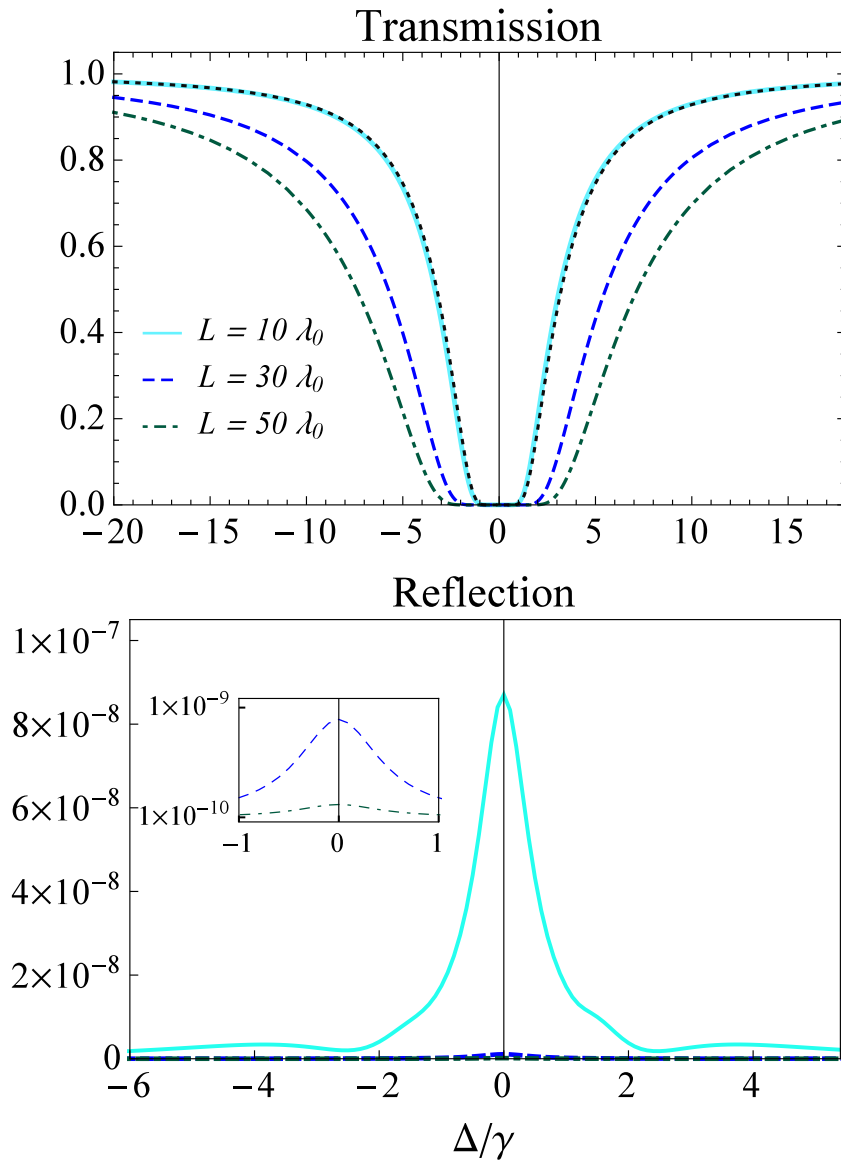


Рисунок 3.3 — То же, что и на Рис.3.2, но для распределения плотности образца, определяемого профилем параметром порядка (3.2), как показано на Рис.3.1(b). В этом случае сглаженных границ когерентное рассеяние света в обратном направлении на много порядков слабее, чем в случае резких границ, ср. с Рис.3.2(b). Перепринт статьи автора диссертации [75].

является на много порядков более слабым из-за исчезающих граничных эффектов. Это наглядно подтверждается незначительным откликом отраженного света, как следует из данных расчета, приведенных на нижнем графике Рис.3.3.

3.2 Дифракция Брэгга на пространственных осцилляциях параметра порядка

В этом разделе приводится решение уравнения рассеяния для случая периодической структуры, предполагая пространственную модуляцию плотности среды, обусловленную осцилляциями параметра порядка в условиях квантового вырождения, возникающих вследствие интерференции материальных волн. Выполняется сравнение полученных результатов с конфигурацией упорядоченно расположенных атомов, которые рассматриваются как классически распределенные в пространстве точечные рассеиватели. В последнем случае мы будем ориентироваться не на формулы (3.4), а на микроскопически точно решаемый пример рассеяния света, распространяющегося в моде одномерного диэлектрического волновода субволнового диаметра, расположенной вблизи его поверхности упорядоченной цепочкой атомов. Сильное брэгговское рассеяние в подобной системе наблюдалось в экспериментах [119; 120], а микроскопическая теория рассеяния изложена в работе [121]. Предметом нашего обсуждения будет сравнительный анализ процесса рассеяния для этих двух физических примеров с выяснением как общих черт, так и важных отличий, связанных с принципиальной разницей классического и квантового описания пространственного состояния атомов.

3.2.1 Интерференция материальных волн

В ряде экспериментов наблюдался эффект фрагментации конденсата Бозе-Эйнштейна, сопровождаемый сильным когерентным рассеянием света на возникающих пространственных неоднородностях параметра порядка [122; 123]. В рамках одномерной модели будем рассматривать внутреннюю динамику конденсата как результат интерференции двух распространяющихся навстречу друг другу фрагментов конденсата, и описывать этот процесс в системе их центра масс:

$$\begin{aligned}\Xi(z) &= \sqrt{2n_0} \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right) \cos(\Delta q z) = \sqrt{\frac{n_0}{2}} \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right) e^{i\Delta q z} \\ &+ \sqrt{\frac{n_0}{2}} \cos\left(\frac{\pi z}{2L}\right) e^{-i\Delta q z} \equiv \Xi_+(z) + \Xi_-(z)\end{aligned}\quad (3.8)$$

Объединенная материальная волна описывается параметром порядка $\Xi(z)$, а интерференция формирующих её двух фрагментов волн $\Xi_+(z)$ и $\Xi_-(z)$ приводит к возникновению сильных осцилляций плотности с пространственным шагом $\sim 1/\Delta q$ в области их перекрытия, характеризуемого макроскопическим масштабом L . Возникающий в этом случае пространственный профиль плотности $|\Xi(z)|^2$ проиллюстрирован на Рис.3.1. Подобные пространственно неоднородные распределения плотности, действительно, наблюдаются в эксперименте, см. [124]. Несмотря на наличие нелинейности, подобный профиль может быть связан с приближенным решением уравнения Гросса-Питаевского, в предположении, что внутреннее движение фрагментов характеризуется достаточно высокой относительной скоростью. Для этого кинетическая энергия, сопоставляемая относительному движению фрагментов, должна превосходить внутреннюю энергию взаимодействия атомов, характеризуемую химическим потенциалом.

В режиме интерференции материальных волн процесс рассеяния света оказывается чрезвычайно чувствительным к величине разности фаз комплексных функций $\Xi_+(z)$ и $\Xi_-(z)$, определяемой импульсом относительного движения фрагментов конденсата (в пересчете на один атом) $2\hbar\Delta q$ (Рис. 3.5). При этом скорость движения фрагментов определяет масштаб пространственных осцилляций параметра порядка, который может быть соизмерим с длиной волны рассеиваемого излучения λ . Как результат, макроскопический образец ВЕС, параметр порядка которого приобретает модуляцию с шагом, сопоставимым с оптической длиной волны $2\pi/\Delta q \sim \lambda \ll L$, может рассматриваться как пространственная решётка, плотность которой имеет модуляцию с периодом $2\pi/\Delta q \sim \lambda$. Во взаимодействии света с таким образцом будет наблюдаться эффект сильного когерентного рассеяния (в одномерной модели – отражения) света по механизму дифракции Брэгга-Вульфа Рис. 3.5. Эффект сильного отражения света от образующейся дифракционной решетки образца проиллюстрирован на Рис.3.4, где зависимость коэффициентов прохождения (верхний график) и отражения (нижний график) построена от отстройки пробного излучения $\Delta = \omega - \omega_0$, а также на Рис.3.5, где зависимость коэффициента отражения

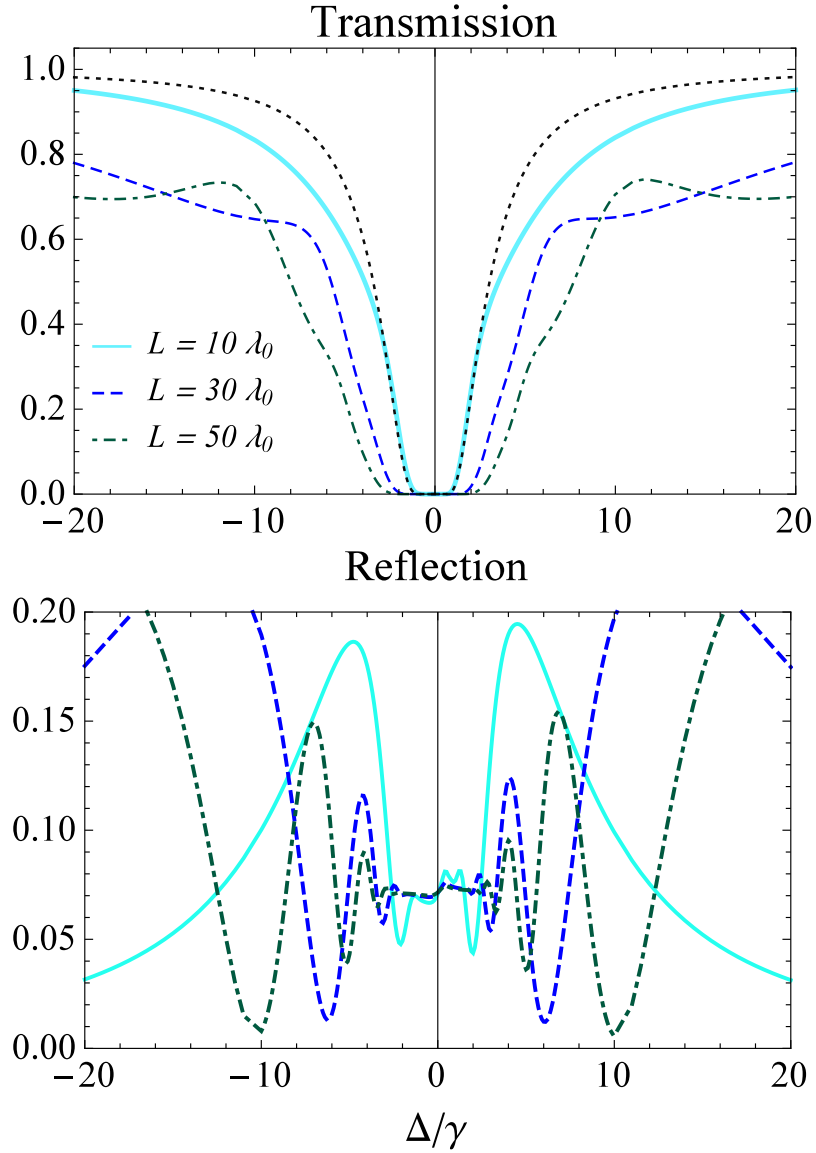


Рисунок 3.4 — Зависимость коэффициентов прохождения (верхний график) и отражения (нижний график) от отстройки пробного излучения $\Delta = \omega - \omega_0$ для неоднородного распределения плотности атомов в конденсате, определяемого параметром порядка (3.3) с $\Delta q = k_0 = \omega_0/c$, где ω_0 — резонансная частота атомного перехода. Геометрия возбуждения соответствует Рис.3.1(с). Пунктиром изображена реперная зависимость для коэффициента прохождения света через оптически плотный слой невырожденного газа той же плотности, что и рассматриваемый конденсат.

Перепринт статьи автора диссертации [75].

для того же параметра порядка, что и на (Рис. 3.4), построенная в резонансной точке при $\omega = \omega_0$, как функция $2\pi/\Delta q$ (в единицах λ_0) для различных длин образца L .

Reflection

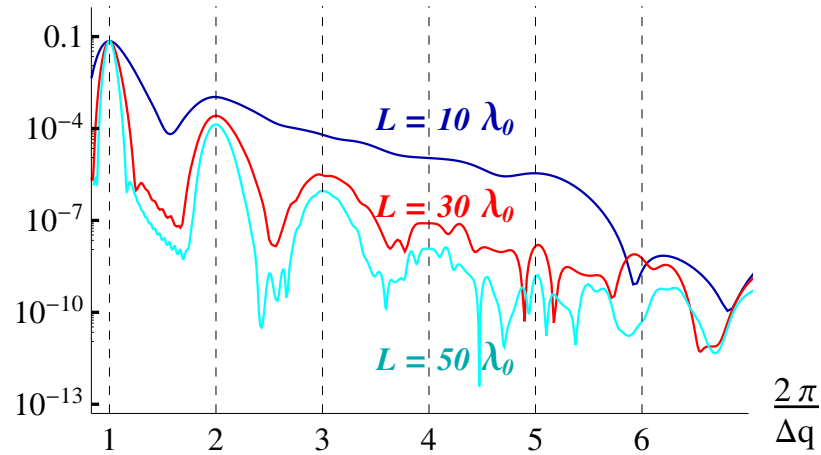


Рисунок 3.5 — Зависимость коэффициента отражения для того же параметра порядка, что и на (Рис. 3.4), построенная в резонансной точке при $\omega = \omega_0$, как функция $2\pi/\Delta q$ (в единицах λ_0) для различных длин образца L . Перепринт статьи автора диссертации [75].

Представленные на Рис.3.4 спектральные зависимости коэффициентов прохождения \mathcal{T} и отражения \mathcal{R} одиночного фотона рассматриваются как функции отстройки $\Delta = \omega - \omega_0$ его частоты ω от резонансной частоты атомного перехода $\omega_0 = ck_0 = 2\pi c/\lambda_0$, обезразмеренной скоростью спонтанного распада атома γ .² Спектральные зависимости приведены для различных продольных размеров интерферирующих фрагментов: $L = 10\lambda_0, 30\lambda_0, 50\lambda_0$, – когда скорость движения каждого из фрагментов конденсата характеризуется импульсом (в пересчете на один атом) $\hbar\Delta q = \hbar k_0 = 2\pi\hbar/\lambda_0$. В этих условиях расстояние между соседними максимумами в модуляции плотности $|\Xi(z)|^2$ равно половине длины волны $\lambda_0/2$, что является оптимальным условием для когерентного усиления отраженного света по механизму дифракции Брэгга-Вульфа (Рис. 3.5).

Приведенный спектральный профиль коэффициента отражения, показанный в нижнем графике Рис.3.4, обнаруживает весьма нетривиальное поведение в различных спектральных областях. Можно выделить две основные части спектра: область резонансного отражения, где все рассматриваемые образцы отражают свет примерно одинаково, и асимптотическую область вдали от

²Строго говоря, как обсуждалось выше, вследствие внутреннего взаимодействия частота перехода должна быть уменьшена на величину химического потенциала конденсата $\mu_0 \rightarrow \tilde{\omega}_0 = \omega_0 - \mu_0/\hbar$, а спектр рассеяния, соответственно, должен быть смещен в красное крыло. С учетом малости химического потенциала $\mu_0 \ll \hbar\gamma$ в рассматриваемых приближениях соответствующая коррекция не представляется существенной.

атомного резонанса, где проявляется сильно осциллирующая зависимость коэффициента отражения света от отстройки и масштаб осцилляций усиливается, а спектральная область отражения расширяется при удлинении образца. Весьма необычным для спектральной зависимости коэффициента отражения является то, что интенсивность рассеяния усиливается вдали от резонанса, где, казалось бы, взаимодействие света с веществом должно естественным образом ослабевать.

На Рис. 3.5 отражена зависимость от коэффициента отражения как функции $2\pi/\Delta q$ для различных длин образца L . Как видно из графиков, наблюдается локальный максимум отражения в точках $\Delta q = 2\pi/\lambda_0, 2\pi/2\lambda_0 \dots$. Данные точки являются оптимальным условием для демонстрации дифракции Брэгга-Вульфа, которая создает противоположно распространяющуюся поляритонную волну посредством рассеяния падающей волны на периодической структуре. В результате рассеяния по типу Брэгга дополнительная величина линейного импульса передается конденсату и усиливает его фрагментацию. Таким образом, дифракция Брэгга-Вульфа также приводит к определенному оптомеханическому воздействию на систему и, соответственно, приводит к кинематической перепутанности пространственно структурированного БЭК см. [123].

В нашей расчетной модели мы можем описать такой эффект первичного оптомеханического интерфейса для обратного и прямого каналов рассеяния. Тем не менее в эксперименте [122] фрагментация наблюдалась для направлений рассеяния, ортогональных падающему свету вдоль главной оси образца конденсата, приготовленного в форме эллипсоида. Наблюдаемый эффект был связан в [122] с феноменом Капицы-Дирака рассеяния волны вещества на пространственной структуре, созданной электромагнитной волной. В этом смысле можно указать, что в случае возбуждения образца БЭК внешним импульсом света, состоящим из множества фотонов, вся динамика, по-видимому, является результатом нескольких физических процессов, которые включают внутренние взаимодействия, возмущение материальной-волны (параметра порядка) внешним полем и формирование поляритонной структуры при оптическом возбуждении. Тогда рассеяние по типу Брэгга обнаруживает когерентный механизм перестройки поляритонных волн фотонного типа (см. Раздел 2.3), распространяющихся в разных направлениях.

3.2.2 Рассеяние света цепочкой атомов

В качестве альтернативного примера из работы [121], с которым проведем сравнение, рассмотрим систему изображенную на Рис.3.6, предполагающую одномерное рассеяние света атомами, присутствующими в качестве точечных рассеивателей, положение которых описывается классическим распределением. Свет распространяется вдоль диэлектрического волновода, диаметр которого $2a$ сопоставим с длиной волны излучения, и внешнее поле рассеивается цепочкой атомов, расположенных вдоль волновода на расстоянии $\rho \sim a$, и обладающих внутренней ориентацией спинового углового момента в направлении распространяемого излучения. Оптический переход атома σ_- приближенно соответствует той моде волновода, в которой распространяется излучение. Атомы упорядочены вдоль волновода с периодом $d \sim \lambda^{\text{wg}}/2$, где λ^{wg} соответствует длине волны волновода, отличающейся от вакуумной. Выбранный пример перехода $F_0 = 1 \rightarrow F = 0$ с невырожденным возбужденным состоянием соответствует конфигурации уровней, существующей в сверхтонкой структуре ^{87}Rb , и позволяет упростить в расчете описание состояния возбужденного атома, ограничившись перенормировкой константы радиационного распада, подробнее см. [121].

На Рис.3.7 приведены результаты расчета коэффициентов прохождения и отражения света атомной цепочкой, состоящей из пяти атомов, для двух различных расстояний $\rho - a$ от поверхности волновода и для различных каналов рэлеевского и рамановского рассеяния. Как видим, наблюдается сильное отражение света в обратном направлении, обусловленное конструктивной интерференцией волн, рассеянных индивидуальными атомами. Подобная интерпретация имеет здесь лишь наглядный качественный характер, подчеркивающий классический подход в описании положения каждого из атомов. В действительности, расчет, выполненный в [121], основан на микроскопическом вычислении оператора резольвенты гамильтониана (2.4) и построении T -матрицы рассеяния.

Наблюдается достаточно сильное рассеяние вблизи атомного резонанса, превосходящее рассеяние от аналогичной, но неупорядоченной структуры. Однако, в отличие от рассеяния на пространственно модулированном вырожденном газе, в данном случае спектральные зависимости имеют монотонный

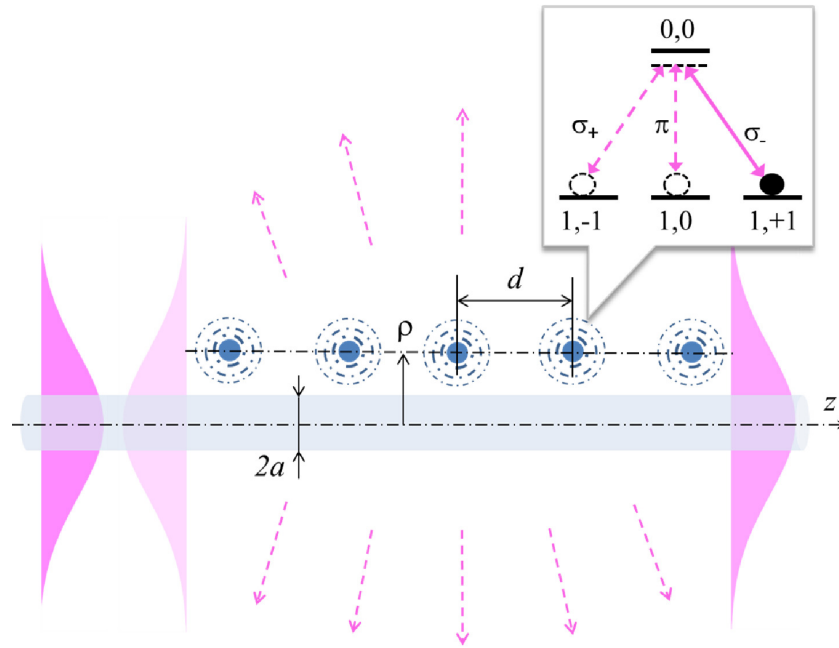


Рисунок 3.6 — Геометрия рассеяния света распространяющегося вдоль диэлектрического волновода субволнового диаметра цепочкой атомов расположенных с периодом $d \sim \lambda^{\text{wg}}/2$. Атомы расположены на расстоянии $\rho - a$ от поверхности волновода и обладают спиновой ориентацией в направлении распространения света. Выделенный оптический переход σ_- в энергетической структуре атома преимущественно взаимодействует с фундаментальной модой волновода HE_{11} в левой поляризации, препринт [121].

характер и рассеяние сосредоточено в спектральной окрестности атомного резонанса.

3.2.3 Сравнение результатов

Что же является причиной столь серьёзных различий в спектрах рассеянного излучения БЭК и атомной цепочкой? Для ответа воспользуемся следующим диаграммным тождеством, связывающим поляритонный и фотонный пропагаторы.

(3.9)

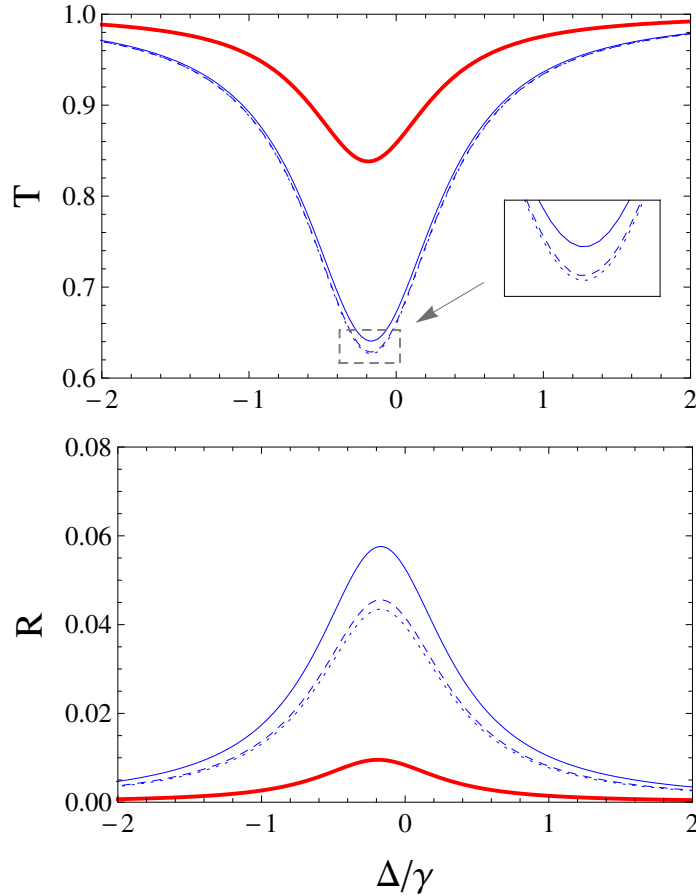


Рисунок 3.7 — Спектральные зависимости коэффициентов прохождения (верхний график) и отражения (нижний график), вычисленные для рассеяния света цепочкой из пяти атомов, удаленных от поверхности волновода на расстояние $\rho - a = 0.5a$ (тонкие синие кривые) и $\rho - a = a$ (толстые красные кривые), и разделенных дистанцией $d = \lambda^{\text{wg}}/2$. Для случая $\rho - a = 0.5a$ дополнительно приведены парциальные вклады рэлеевского канала рассеяния с сохранением поляризационной моды (точечная кривая) и с удержанием обеих поляризационных компонент (пунктирная кривая). Сплошная кривая показывает полный вклад, учитывающий рамановские каналы рассеяния, см.

Рис.3.6. Перепринт [121].

Этим тождеством, во-первых, подчеркивается равноправие роли атомной и световой подсистем в формировании оптического возбуждения в конденсате. Во-вторых, графический образ слева, фактически, воспроизводит структуру амплитуды рассеяния, определенной соотношениями (2.6) и (3.4). Правая часть тождества, в соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля [125], связывает процесс рассеяния с отклонением в распространении света в веществе от его распространения в свободном пространстве.

На основании этого наблюдения можно связать решение одномерной задачи рассеяния с решением одномерного волнового уравнения

$$\frac{d^2}{dz^2} \mathcal{E} + \epsilon(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E} = 0 \quad (3.10)$$

где $\mathcal{E} = \mathcal{E}(z, \omega)$ - комплексная положительно-частотная компонента электрического поля, распространяющегося в среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon(z, \omega)$. Диэлектрическая проницаемость, присутствующая в этом уравнении, является сильно осциллирующей функцией пространственной координаты z . В резонансном случае квантовая пространственная модуляция параметра порядка и обусловленная этим модуляция коэффициента отражения качественно моделируются периодической структурой атомной цепочки, и оба процесса естественным образом могут быть связаны с эффектом брэгговской дифракции.

Однако при глубоких отстройках от резонанса картина существенно меняется. В этом случае функция $\epsilon = \epsilon(z, \omega)$ становится вещественной, близкой к единице, но содержащей, вместе с тем, сильно осциллирующую малую поправку к среднему, фактически, вакуумному значению. Для протяженной среды это приводит к проявлению свойств фотонного кристалла и формированию зонной структуры вблизи резонансной частоты атома. Уже при относительно небольших отстройках, но при выполнении условия $\Delta \gg \gamma$, в крыле резонанса формируется периодическая дисперсионная зависимость частоты от волнового числа, что в свою очередь приводит к возбуждению падающей волной двух мод, распространяющихся в противоположных направлениях. Такая картина существует в широкой спектральной области и с учетом конечности образца приводит к сложной осцилляционной зависимости коэффициентов отражения и прохождения, что и наблюдается на нижних графиках Рис.2.2. Конечность образца, рассматриваемого в численном расчете, не позволяет проследить

структуру зон и образование запрещенной зоны, что должно наблюдаться при глубоких отстройках $\Delta \sim (n_0 \lambda^3)^{1/2} \sqrt{\gamma \omega_0}$.

Подобная картина отражения света не может быть воспроизведена конфигурацией атомов, которые рассматриваются как классически распределенные рассеиватели, см. Рис. 3.6. Потребовалось бы приготовить атомную цепочку значительно более высокой линейной плотности, и эффективная диэлектрическая константа была бы величиной существенно превосходящей единицу, что является типичным для создания фотонных кристаллов в полупроводниковых системах, см. [126]. Обратим также еще раз внимание на то, что в случае конденсата модуляция плотности обусловлена глубоко квантовым эффектом нелинейной интерференции материальных волн и внутреннего движения слоев конденсата. В следующем параграфе будет разобрана обнаруженная аналогия с фотонным кристаллом более подробно.

3.2.4 Связь с физикой фотонного кристалла

Фотонный кристалл является средой со структурой запрещенных и разрешенных зон для электромагнитного излучения. В действительности фотонный кристалл — оптический аналог кристалла, в котором данная энергетическая структура возникает в результате рассеяния электронов в периодическом потенциале, коллективно создаваемом ионами решетки. В случае фотонного кристалла модуляция осуществляется периодически изменяющейся функцией диэлектрической проницаемости среды. Рассмотрим фотонный кристалл, возникающий в атомном газе, находящемся в фазе конденсации Бозе-Эйнштейна. Проанализируем возникающую структуру поляритонных мод, модифицированных периодическими осцилляциями плотности.

Рассмотрим одномерное обобщенное волновое уравнение типа Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dz^2} u + \frac{\omega^2}{c^2} [1 + 4\pi\chi(z, \omega)] u = 0 \quad (3.11)$$

здесь $u = u(z)$ произвольная полевая компонента в Фурье-представлении, а диэлектрическая восприимчивость промодулирована вдоль направления z с пе-

риодом a .

$$\chi(z, \omega) = 2\chi_0(\omega) \cos^2 \frac{\pi z}{a} \quad (3.12)$$

В нашем случае $a = \lambda_0/2$, где λ_0 — резонансная длина волны атомного перехода, при этом предполагается, что в области глубоких спектральных отстроек от атомного резонанса $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$ восприимчивость становится вещественной величиной. Тогда, согласно теореме Блоха³, в системе с периодическим потенциалом произвольную полевую компоненту, удовлетворяющую (3.11), можно представить в виде

$$u(z) \equiv u(z, \omega) = e^{ikz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{a} z\right) \quad (3.13)$$

где второй множитель является периодической функцией с периодом, определенным выше. Волновое число, характеризуемое произвольным знаком $k > 0$ либо $k < 0$, зависит от ω в виде $k = k(\omega)$ так, чтобы однородное уравнение (3.11) имело нетривиальное решение. Подставляя (3.13) и (3.12) в (3.11), и с учетом разложения

$$\cos^2 \frac{\pi z}{a} = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{2\pi z}{a} \right]$$

одномерное дифференциальное уравнение 2-го порядка может быть преобразовано к бесконечному множеству алгебраических уравнений

$$\left\{ - \left(k + \frac{2\pi n}{a} \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} [1 + 4\pi\chi_0(\omega)] \right\} u_n + \frac{2\pi\omega^2}{c^2} \chi_0(\omega) \sum_m [\delta_{n-1,m} + \delta_{n+1,m}] u_m = 0 \quad (3.14)$$

Полученная система может быть решена численно. Нам достаточно рассмотреть его приближенное решение в пределе $|\chi_0(\omega)| \ll 1$. В нулевом приближении, опустив вклады, обусловленные диэлектрической восприимчивостью, система (3.14) сводится к уравнению

$$\left[- \left(k + \frac{2\pi n}{a} \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] u_n = 0 \quad (3.15)$$

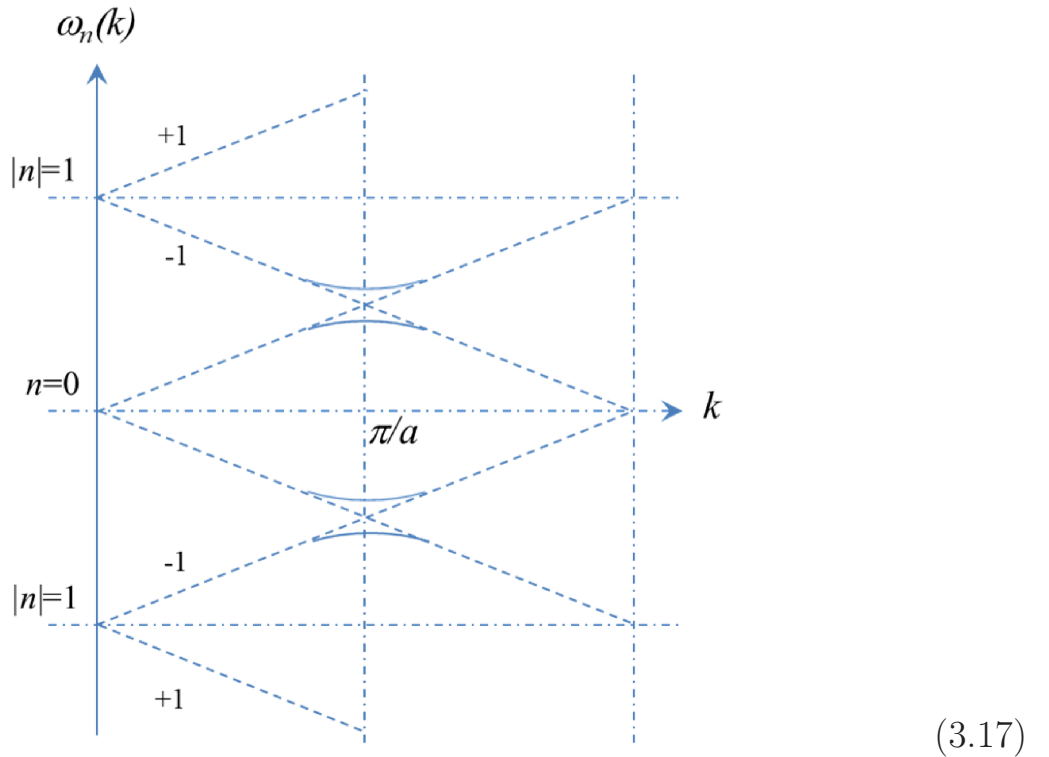
³Теорема Блоха является физическим аналогом известной математической теоремы Флоке, применяемой в теории обыкновенных дифференциальных уравнений[127].

Полученный результат не так тривиален, как может показаться на первый взгляд. Уравнение Гельмгольца (3.11) справедливо для произвольного a , включая $a \rightarrow 0$. Дальнейший переход от функции (3.13) к плоской волне в пределе $\chi_0 \rightarrow 0$ и $a \rightarrow 0$ оставляет вклад только $u_{n=0}$. Но если мы оставляем χ_0 как малую, но не исчезающую добавку, то тем самым мы сохраняем пространственную периодичность и должны рассматривать (3.13) и (3.15) для заданного и конечного пространственного шага a .

Для нахождения коэффициентов u_n , определяющих разложение (3.13) мы воспользуемся данным приближенным характеристическим уравнением, имеющим следующее решение

$$\begin{aligned} \omega &= |\omega_n(k)| \\ \omega_n(k) &= \pm c \left(k + \frac{2\pi n}{a} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Данный результат может быть наглядно продемонстрирован следующей диаграммой



где найденные "невозмущенные" спектральные ветви изображены прямыми пунктирными линиями. В точках пересечения ветви имеют одинаковые частоты и волновые числа, поэтому становится очевидным, что наличие любого слабого взаимодействия (заданное, например, малой χ_0) приведет к связыванию тех коэффициентов u_n , для которых имеет место точка пересечения и для которых n отличаются на 1.

С включенным взаимодействием линейные зависимости трансформируются таким образом, что появляются области антипересечения вместо пересечений в точках $k = \pi/a, 3\pi/a, \dots$. Этот эффект, выделенный сплошными линиями на диаграмме (3.17), приводит к коррекции спектральных зависимостей $\omega(k)$ вблизи точек антипересечения. Таким образом формируется зонная структура спектра $\omega_s(k)$ (где s - индекс зоны, образованный двумя различными n'), так что каждая $\omega_s(k)$ выражается периодической функцией k .

Может показаться, что полученная периодическая зависимость ω_s от k вступает в противоречие с принятым разложением (3.13), но на самом деле мы всегда можем сместить k на $2\pi m/a$, где m - любое целое число, без изменения структуры разложения. И действительно,

$$\begin{aligned}
 u(z) &= e^{ikz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \exp\left(i\frac{2\pi n}{a}z\right) \rightarrow \exp\left[i\left(k + \frac{2\pi m}{a}\right)z\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \exp\left(i\frac{2\pi n}{a}z\right) \\
 &= e^{ikz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \exp\left(i\frac{2\pi(n+m)}{a}z\right) = e^{ikz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{n-m} \exp\left(i\frac{2\pi n}{a}z\right) \\
 &= e^{ikz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{u}_n \exp\left(i\frac{2\pi n}{a}z\right)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $\tilde{u}_n = u_{n-m}$ дает то же семейство коэффициентов разложения, отличающееся только смещенным нулевым индексом. Нетривиальность теоремы Блоха заключается в том, что вносящее вклад волновое число k является непрерывной величиной, заданной с периодом $2\pi/a$ на интервале $-\pi/a < k < +\pi/a$, который принято называть первой зоной Бриллюэна. Этим подчеркивается тот факт, что выбранная факторизация в (3.13) не уникальна и любая периодическая функция (второй множитель в произведении) может быть изменена посредством умножения на произвольную экспоненциальную периодическую функцию $\exp\left[i\frac{2\pi m}{a}z\right]$ с получением физически идентичного собственного решения волнового уравнения (3.11).

Рассматривая уравнение (3.14) вблизи точки антипересечения при $k \sim \pi/a$ и $\omega \sim ck \sim c\pi/a$ с удерживанием только амплитуды вырожденных спек-

тральных ветвей, получаем следующую пару связанных уравнений

$$\begin{cases} \left\{ -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} [1 + 4\pi\chi_0(\omega)] \right\} u_0 + \frac{2\pi\omega^2}{c^2} \chi_0(\omega) u_{-1} = 0 \\ \left\{ -\left(k - \frac{2\pi}{a}\right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} [1 + 4\pi\chi_0(\omega)] \right\} u_{-1} + \frac{2\pi\omega^2}{c^2} \chi_0(\omega) u_0 = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Данная система линейных однородных алгебраических уравнений может быть решена приравниванием определителя системы нулю и с использованием приближенного разложения вблизи атомного резонанса

$$\frac{\omega^2}{c^2} \approx \frac{\omega_0^2}{c^2} + \frac{2\omega_0(\omega - \omega_0)}{c^2},$$

. Так что 3.19 сводится к

$$\left[\frac{2\omega_0(\omega - \omega_0)}{c^2} + \frac{4\pi\omega_0^2}{c^2} \chi_0(\omega) \right]^2 - \left[\frac{2\pi\omega_0^2}{c^2} \chi_0(\omega) \right]^2 = 0 \quad (3.20)$$

Решение построим в спектральной области $\gamma \ll |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, где мы можем допустить следующую асимптотику для восприимчивости как функции от ω ,

$$\chi_0(\omega) \approx -\frac{n_0 d_0^2}{\hbar(\omega - \omega_0)} = -\frac{3}{4} n_0 \lambda^3 \frac{\gamma}{\omega - \omega_0} \quad (3.21)$$

где γ радиационная скорость распада и n_0 плотность атомов.

Из (3.20) получаем

$$\frac{2\omega_0(\omega - \omega_0)}{c^2} + \frac{4\pi\omega_0^2}{c^2} \chi_0(\omega) \approx \pm \frac{2\pi\omega_0^2}{c^2} \chi_0(\omega) \quad (3.22)$$

и с учетом (3.21) находим решение

$$(\omega - \omega_0)^2 \approx \frac{3\pi}{2} \left(1 \mp \frac{1}{2} \right) n_0 \lambda^3 \gamma \omega_0, \quad (3.23)$$

четыре корня этого уравнения отвечают за структуру формирующихся зон. Корни характеристического уравнения имеют порядок $(n_0 \lambda^3 \gamma \omega_0)^{1/2} \gg \gamma$ и удовлетворяют всем необходимым предположениям. Построенное решение позволит нам описать структуру спектральных зон и проанализировать результат с помощью дополнительных физических аргументов.

Полученный результат – существование четырех, а не двух корней – может быть физически интерпретирован, если обратить внимание на наличие

однородного (фонового) вклада в диэлектрическую восприимчивость образца $\chi(z, \omega) = \chi_0(\omega)$, имеющего тот же порядок величины, что и периодическая добавка. Вначале учтем только этот вклад в наших расчетах и проследим за тем, как он изменит конструкцию мод. Теперь имеется следующее уравнение Гельмгольца

$$\frac{d^2}{dz^2} u + \frac{\omega^2}{c^2} [1 + 4\pi\chi_0(\omega)] u = 0 \quad (3.24)$$

Воспользовавшись разложением

$$u(z) \equiv u(z, \omega) = e^{ikz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{a} z\right), \quad (3.25)$$

приходим к уравнению

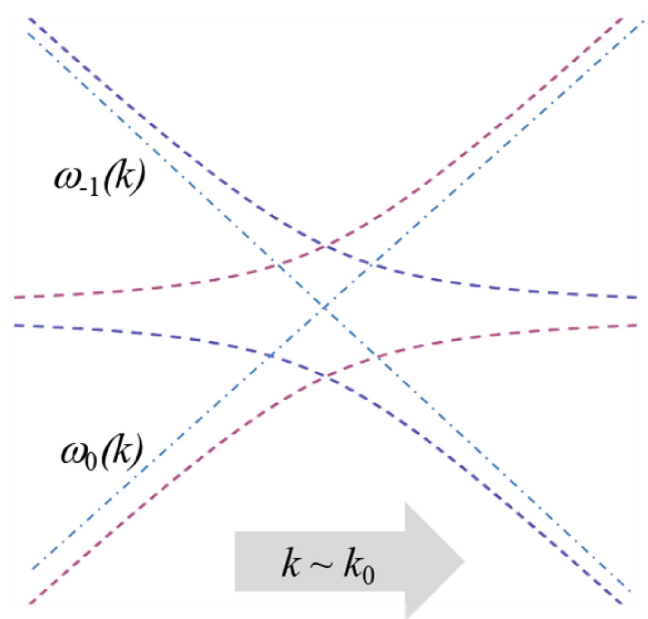
$$\left[- \left(k + \frac{2\pi n}{a} \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + 4\pi\chi_0(\omega)) \right] u_n = 0, \quad (3.26)$$

решая которое, находим модифицированное характеристическое уравнение нулевого приближения для спектральных зон

$$\begin{aligned} \omega &= |\omega_n(k)| \\ k_n(\omega) &= \pm \frac{\omega}{c} [1 + 4\pi\chi_0(\omega)]^{1/2} - \frac{2\pi n}{a} \\ &\approx \pm \frac{\omega}{c} [1 + 2\pi\chi_0(\omega)] - \frac{2\pi n}{a}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где линейное разложение корня обосновано требованием $|\chi_0(\omega)| \ll 1$, а ветвь $\omega_n(k)$ определяется как функция обратная функции $k_n(\omega)$.

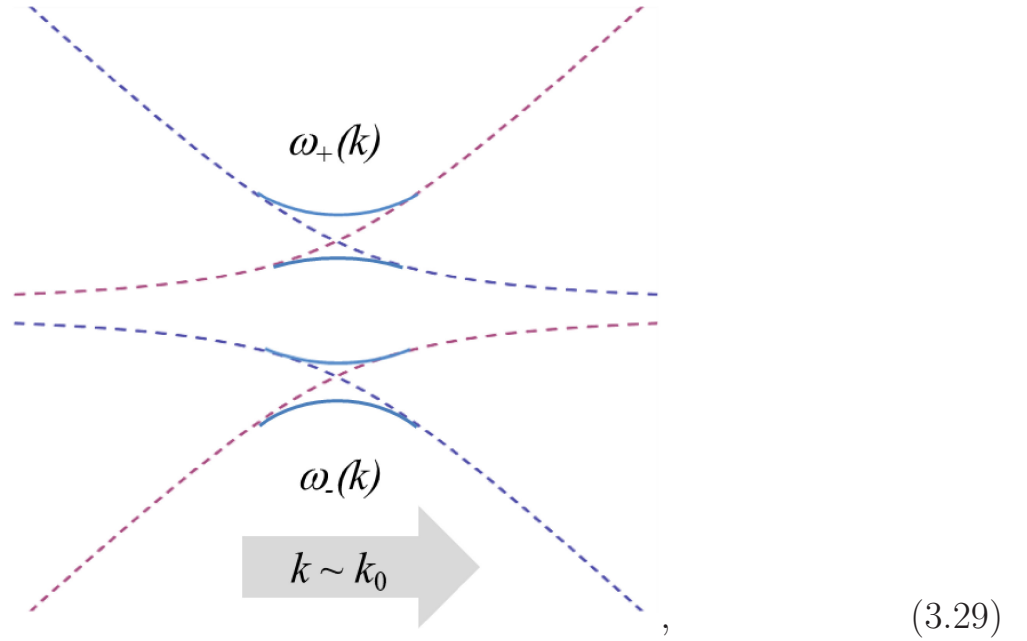
Данный промежуточный результат представим фрагментом спектра вблизи точки пересечения ветвей $\omega_0(k)$ и $\omega_{-1}(k)$.



(3.28)

Здесь мы воспользовались асимптотикой $\chi_0(\omega)$ вдали от резонанса, которая показывает расщепление $\omega_0(k)$ и $\omega_{-1}(k)$ на два участка, расположенных соответственно выше и ниже резонансной частоты $\omega \sim \omega_0$. Модифицированные спектральные ветви соответственно обозначены пурпурным и голубым цветами. Разумеется, это наблюдение лишь приближенно справедливо вблизи тех частот, которые значительно отстроены (в единицах γ) от атомного резонанса.

Добавляя в наше рассмотрение периодическую часть восприимчивости образца, мы приходим к следующей конфигурации антипересечений

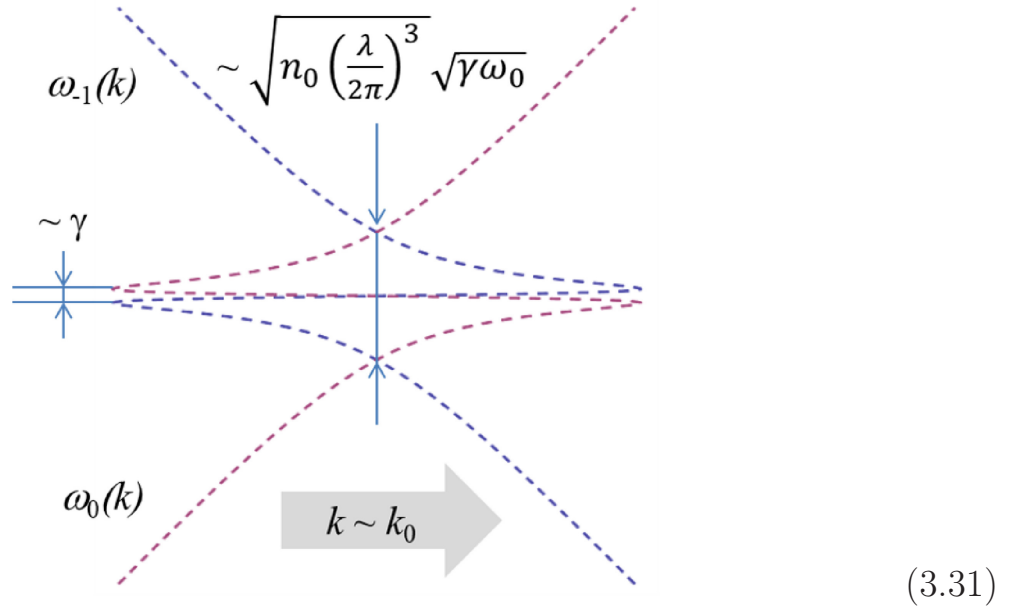


которая показывает, что полученные спектральные зоны $\omega_+(k)$ и $\omega_-(k)$ в действительности состоят из двух ветвей, а структура запрещённой зоны более сложна, чем ожидалось. Положение экстремумов как раз и определяется решением (3.23).

Мы выяснили, почему в решении (3.23) существует четыре корня, но естественным образом возникает другой вопрос: почему мы не наблюдаем сильное рассеяние света в обратном направлении от запрещенной зоны, предсказываемой на невозмущенной диаграмме (3.28) и возникающей на диаграмме (3.29)? Попробуем найти ответ, рассматривая уравнение (3.24) с комплексной восприимчивостью, которую для простоты ограничим приближением разреженного газа

$$\chi_0(\omega) \approx -\frac{3}{4}n_0\lambda_0^3\gamma\frac{(\omega - \omega_0) - i\gamma/2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} \equiv \chi'_0(\omega) + i\chi''_0(\omega) \quad (3.30)$$

если мы формально отбросим мнимую часть $\chi_0''(\omega)$, приходим к следующей диаграмме



Важное дополнение к (3.29) состоит в том, что диаграмма (3.31) показывает нам, что запрещённая зона существенно удалена от окрестности атомного резонанса (масштабируемого в единицах γ), где фактически и выполнен расчет, и она не может быть приближена периодической добавкой в восприимчивости. Наши предыдущие оценки могут быть подтверждены ключевым предположением, что $\gamma \ll (n_0 \lambda^3) \omega_0$ для любых разумных плотностей таких, что область поглощения всегда много уже, чем спектральное разрешение между точками пересечения, где применимо асимптотическое приближение (3.21). Мы можем с уверенностью утверждать, что спектральная зонная структура, построенная в конфигурации фотонного кристалла и воспроизводимая диаграммой (3.31), применима во всей спектральной области, за исключением узкой (порядка γ) окрестности резонансной точки ω_0 .

Проанализируем процесс рассеяния, обращаясь к зонной структуре (3.29) и (3.31), которой соответствует решение (3.23), отражающее положение экстремумов дисперсионных кривых. По существу, формируются две запрещённые зоны: верхняя, ограниченная ветвью $\omega_+(k)$, и нижняя, ограниченная нижней ветвью $\omega_-(k)$, как показано на диаграмме (3.29). Но внутри существует спектральный диапазон, где также формируется довольно широкая область прозрачности, которая постепенно при приближении к атомному резонансу трансформируется в зону поглощения, как показано на диаграмме (3.31). Именно здесь и проведен численный расчет, представленный нами выше. Осциллирующее спектральное поведение коэффициентов прохождения и отражения,

наблюдаемое для довольно широкой области отстроек ω , варьируемой вблизи ω_0 , (при соблюдении неравенства $\gamma \ll |\omega - \omega_0| \ll [(n_0\lambda^3)\gamma\omega_0]^{1/2}$) есть в действительности результат интерференции двух мод/волн, распространяющихся во встречных направлениях. Данные моды принадлежат различным частям дисперсионной кривой с нормальным и аномальным дисперсионными наклонами и поэтому имеют групповые скорости разных знаков. В отсутствии периодической пространственной модуляции мы будем наблюдать только одну моду (пурпурная кривая), которая характеризуется нормальной дисперсией и будет распространяться в прямом направлении.

3.3 Выводы по главе

В данной главе нами была рассмотрена задача рассеяния света (одиночного фотона) на системе тождественных атомов в условиях их квантового вырождения. Особенностью процесса являлось формирование атомами когерентного состояния вещества, описываемой материальными волнами плотности атомов в фазе ВЕС. Интерференция подобных волн формируют неоднородную периодическую пространственную структуру. Нами показано, что данная структура в спектральной области, квазирезонансной оптическому переходу атома, приводит к специфическому механизму рассеяния света на периодической структуре аналогичному эффекту дифракции Вульфа-Брэгга. Проанализированы как общие черты, так и принципиальные различия в рассеянии света на вырожденных атомных системах с рассеянием на одномерных атомных решетках, в которых положение атомов описывается классической статистикой.

Вдали от атомного резонанса обнаруженный эффект когерентного рассеяния может быть связан с параметрами материальной среды в макроскопической теории Максвелла. Проведенный анализ в одномерной модели показал, что в области оптической прозрачности конденсат Бозе-Эйнштейна обладает свойствами фотонного кристалла с достаточно необычными свойствами. Диэлектрическая проницаемость подобной среды близка к вакуумному значению, но вместе с тем характеризуется сильными пространственными осцилляциями. В подобной среде формируются две поляритонные волны, распространяющи-

еся в противоположных направлениях. Интерференция этих волн определяет осциллирующую зависимость коэффициента отражения образца.

Глава 4. Одиночный атом в оптической дипольной ловушке

4.1 Принцип рамановского охлаждения

Будем рассматривать атом, захваченный оптической дипольной ловушкой, как элемент равновесного канонического ансамбля с температурой $T \equiv \beta^{-1}$.

Предположим, что атом посредством механизма оптической накачки переселяется в определённое спиновое состояние (зеemanовский подуровень сверхтонкой структуры), которое мы обозначим $|s\rangle$ и в дальнейшем мы будем рассматривать данное состояние как исходное расположение атома в каждом цикле охлаждения. В этом случае матрица плотности всей системы представляется в виде произведения колебательного состояния (заданного термодинамическим равновесием) и внутреннего спинового (чистого) состояния

$$\hat{\rho} = \sum_{v_x, v_y, v_z} \exp \left\{ \beta \left[\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{v_x v_y v_z} \right] \right\} |v_x, v_y, v_z\rangle \langle v_x, v_y, v_z| \times |s\rangle \langle s|, \quad (4.1)$$

где $\mathcal{F} = \mathcal{F}(T) \equiv \mathcal{F}(\beta)$ свободная энергия и $\epsilon_{v_x v_y v_z}$ энергия собственного состояния гармонического осциллятора, параметризованная колебательными квантовыми числами $v_x, v_y, v_z = 0, 1, 2, \dots$, соответствующих колебаниям вдоль главных осей ловушки x, y, z . Аппроксимируем потенциал ловушки моделью аксиально-симметричного гармонического осциллятора, имеющим продольную и радиальную частоты колебаний Ω_{\parallel} и Ω_{\perp} соответственно. Произвольное стационарное колебательное состояние $|v_x v_y v_z\rangle$ имеет энергию

$$\epsilon_{v_x v_y v_z} = \hbar \Omega_{\parallel} \left(v_z + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega_{\perp} (v_x + v_y + 1). \quad (4.2)$$

Требование симметричности ловушки не является принципиальным, и наше обсуждение может быть обобщено на случай анизотропного потенциала.

Идея протокола рамановского охлаждения (RSC) состоит в том, чтобы обеспечить последовательность стимулированных циклов комбинационного рассеяния, которые переводят атом в состояние с пониженным значением квантового числа в каждой моде. При этом в разложении матрицы плотности (4.1) мы можем выделить состояние

$$|s\rangle \times |0,0,0\rangle \equiv |\text{Dark}\rangle, \quad (4.3)$$

которое не подвержено влиянию рамановского процесса и обычно называется «темным» состоянием. Небольшая начальная заселенность этого состояния постепенно увеличивается за счет повторения процесса, состоящего из последовательных циклов рамановских переходов и оптической накачки, возвращающих спиновую подсистему обратно в исходное состояние $|s\rangle$. В идеальном сценарии ожидается, что атом в конечном итоге перейдет в темное состояние с вероятностью 100% и, следовательно, будет находиться в основном колебательном состоянии потенциала ловушки.

Поясним эту идею, отслеживая преобразование состояния системы на каждом шаге протокола. Идеальный рамановский переход может быть выражен как однократный перенос начального базового состояния $|b\rangle = |s\rangle |v_x v_y v_z\rangle$, селектированного в исходной матрице плотности (4.1), в определенное конечное состояние $|d\rangle$ в соответствии с со следующим правилом

$$\begin{aligned} |b\rangle \equiv |s\rangle |v_x, v_y, v_z\rangle &\xrightarrow{\text{Raman}} C_x^{(v_x v_y v_z)} |t_x\rangle |v_x-1, v_y, v_z\rangle + C_y^{(v_x v_y v_z)} |t_y\rangle |v_x, v_y-1, v_z\rangle \\ &+ C_z^{(v_x v_y v_z)} |t_z\rangle |v_x, v_y, v_z-1\rangle = \sum_{\mu=x,y,z} C_\mu^{(v_x v_y v_z)} |t_\mu\rangle |\dots, v_\mu-1, \dots\rangle \equiv |d\rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

Мы предполагаем, что рамановский переход является динамическим процессом без потерь: $|C_x^{(v_x v_y v_z)}|^2 + |C_y^{(v_x v_y v_z)}|^2 + |C_z^{(v_x v_y v_z)}|^2 = 1$. Если одна из колебательных мод уже достигла основного состояния, то соответствующий коэффициент разложения, формирующий сумму в правой части (4.4), должен быть обнулен, т.е. $C_x^{(0 v_y v_z)} \rightarrow 0$ или $C_y^{(v_x 0 v_z)} \rightarrow 0$, или $C_z^{(v_x v_y 0)} \rightarrow 0$. Спиновые состояния $|t_x\rangle$, $|t_y\rangle$ и $|t_z\rangle$, присутствующие в разложении (4.4), являются определенными целевыми состояниями для выбранной схемы перехода и энергетической структуры и зависят от параметров рамановского импульса, обеспечивающего предполагаемое идеальное преобразование.

Построенная суперпозиция (4.4) описывает атомный волновой пакет, рассматриваемый в момент его приготовления. Тогда в произвольный момент времени состояние становится зависимым от времени

$$|d(t)\rangle|_{t>0} \Rightarrow \sum_{\mu=x,y,z} C_\mu^{(v_x v_y v_z)} |t_\mu(t)\rangle \exp[-i\Omega_\mu t] |\dots, v_\mu-1, \dots\rangle, \quad (4.5)$$

где $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_\perp$ и $\Omega_z = \Omega_\parallel$, а каждое спиновое состояние $|t_\mu(t)\rangle$ имеет собственную временную динамику. Динамический процесс подвержен определенным возмущениям, обусловленным флуктуациями (неоднородностями) внешних полей, потенциала ловушки и др. неконтролируемыми процессами.

На следующем этапе протокола с помощью резонансного импульса оптической накачки атом переселяется обратно в исходное спиновое состояние $|s\rangle$. В данном процессе, являющимся кинетическим и не связанным с унитарным преобразованием полного состояния атома, преобразование спиновой матрицы плотности происходит независимо от поступательного движения атома. Данное требование может быть обеспечено малостью кинематического параметра Лэмба-Дике, благодаря чему вибрационные моды не возбуждаются под действием слабого резонансного импульса оптической накачки, состоящего всего из нескольких фотонов. В результате цикла оптической накачки предполагается вернуть систему к расцепленной факторизованной структуре матрицы плотности, похожей на исходное состояние (4.1), но с изменённой компонентой, отвечающей колебательным степеням свободы. Чтобы обосновать это, сделаем определенное упрощение и предположим, что перепутанное состояние (4.4) является декомпозицией Шмидта, так что целевые состояния $|t_x\rangle$, $|t_y\rangle$ и $|t_z\rangle$ взаимно ортогональны. В этом оптимальном случае после цикла оптической накачки состояние системы, действительно, воспроизводится в виде произведения (4.1), но теперь с увеличенной вероятностью заселения тёмного состояния. Детали расчёта приведены в Приложении А

После n шагов последовательно применённых циклов комбинационного рассеяния и оптической накачки матрица плотности системы преобразуется следующим образом:

$$\hat{\rho}^{(n)} = \exp\{\beta\mathcal{F}(\beta)\} \mathcal{Z}^{(n)}(\beta) \times |0,0,0\rangle\langle 0,0,0| \times |s\rangle\langle s| + \dots \quad (4.6)$$

где $\mathcal{Z}^{(n)}$ обозначает "обрезанную" статистическую сумму, содержащую n возбуждений осцилляторных мод

$$\mathcal{Z}^{(n)}(\beta) = \sum_{\substack{v_x, v_y, v_z \\ v_x + v_y + v_z \leq n}} \exp[-\beta\epsilon_{v_x v_y v_z}] = \sum_{\epsilon \leq \epsilon_n} g_\epsilon \exp[-\beta\epsilon]. \quad (4.7)$$

Здесь g_ϵ является кратностью вырождения состояний системы $|v_x, v_y, v_z\rangle$ с равными энергиями $\epsilon = \epsilon_{v_x v_y v_z}$, отвечающим различным наборам колебательных чисел, ϵ_n верхняя граница энергии отвечающая $n = \max\{v_x + v_y + v_z\}$ возбуждениям колебательных мод. Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{Z}^{(n)}(\beta) = \exp\{-\beta \mathcal{F}(\beta)\}, \quad (4.8)$$

и как следствие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\rho}^{(n)} = |0,0,0\rangle\langle 0,0,0| \times |s\rangle\langle s| \quad (4.9)$$

Вклад, обозначенный многоточием в (4.6), соответствует остаточной заселенности состояний отличных от темного состояния и в пределе $n \rightarrow \infty$ исчезает. Это свидетельствует о внутренней сходимости процесса рамановской схемы охлаждения с полным подавлением колебательного движения.

Мы обосновали преобразование матрицы плотности (4.6)-(4.9) в предположении, что уравнение (4.4) является разложением Шмидта для перепутанного состояния, распределенного между колебательной и спиновой подсистемами. Однако в общем случае произвольного рамановского процесса, для которого нам только известно, что он обеспечивает идеальное преобразование спинового и колебательного состояния атома, разложение Шмидта конечного состояния может отличаться от (4.4). В общем случае можно предположить следующую структуру разложения Шмидта

$$|s\rangle \times |v_x, v_y, v_z\rangle \xrightarrow{\text{Raman}} = \sum_{q=1,2,3} C_q |t_q\rangle \times |\text{vib}_q\rangle, \quad (4.10)$$

где C_q коэффициенты Шмидта и размерность разложения $q \leq 3$ совпадает с числом колебательных степеней свободы. Таким образом, каждое из колебательных базисных состояний $|\text{vib}_q\rangle$ представляет собой суперпозицию состояний $|\dots, v_\mu - 1, \dots\rangle$ с $\mu = x, y, z$. После цикла оптической накачки колебательная часть матрицы плотности превращается в смешанное состояние, содержащее когерентную связь между различными модами. В соответствии с (4.5) матрица плотности вибрационной подсистемы будет иметь недиагональные элементы, осциллирующие во времени. Тем не менее, можно ожидать, что вследствие естественного распада когерентности, созданной между различными колебательными модами, обусловленного слабыми внешними возмущениями потенциала ловушки, проблема нивелируется, и базовый результат, отраженный

в уравнениях (4.6)-(4.9), достигается и с другими, вероятно, менее оптимальными вариантами рамановского перехода.

4.2 Возможные схемы рамановского охлаждения атома, связанного потенциалом дипольной ловушки

В этом разделе рассматриваются возможные схемы использования комбинационного рассеяния для ослабления колебательного движения атома, что составляет основу протокола охлаждения, и формально представлено преобразованием (4.4). Мы поставим возможные схемы реализации рамановского процесса в зависимость от того, с какой первоначальной энергией (температурой) атом загружается в дипольную ловушку.

4.2.1 Независимое охлаждение колебательных мод

Рассмотрим ситуацию, когда дипольная ловушка настолько плотная в поперечном направлении, что атомный осциллятор слабо возбужден и средние радиальные колебательные числа $\bar{\nu}_x \sim \bar{\nu}_y \sim 1$. Для продольной моды допускаем значение колебательного числа $\bar{\nu}_z > 1$, но не сильно превосходящее единицу. Физически это соответствует захвату атома "оптическим пинцетом" с температурой $T \sim \Omega_{\perp}$. Для этого случая протокол охлаждения может быть осуществлен отдельно для каждой колебательной степени свободы атома. Пример схемы рамановского перехода и соответствующая геометрия возбуждения показаны на Рис.4.1. Комбинационное рассеяние с переходом на колебательный уровень, сопровождающееся уменьшенным на единицу значения колебательного числа, обеспечивается распространяющимися навстречу коллинеарными пучками с ортогональной круговой поляризацией.

Выбор комбинаций пар лучей с частотами Раби $\Omega^{(0)}$ и $\Omega^{(j)}$ с $j = 1, 2, 3$, последовательно направляемых вдоль осей ловушки и настроенных на выделенный переход, связывающий спиновое и колебательное движение, приводит к резонансному взаимодействию Λ -типа между базовым $|b\rangle$ и конечным $|d\rangle$

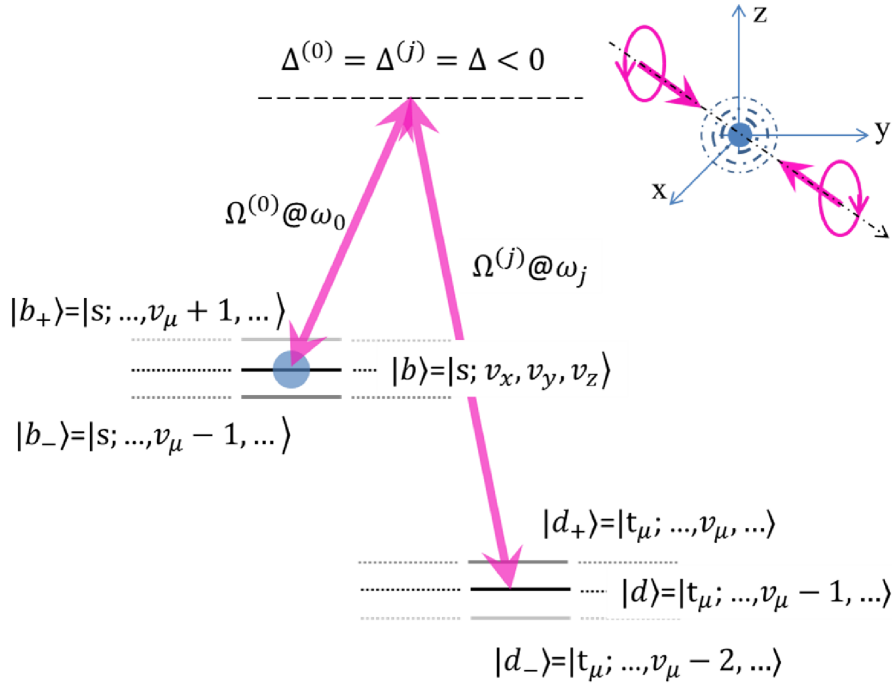


Рисунок 4.1 — Одномерная схема рамановского охлаждения: Комбинационное рассеяние осуществляется между исходным $|s\rangle$ и целевым $|t_\mu\rangle$ ($\mu = x, y, z$) спиновыми состояниями.

Пара световых лучей, имеющих несущие частоты ω_0 и ω_j ($s \ j = 1, 2, 3 \Leftrightarrow \mu = x, y, z$) и последовательно направляемых вдоль осей ловушки, приводит к ослаблению колебательного движения с уменьшением квантового числа на единицу $v_\mu \rightarrow v_\mu - 1$. Это обеспечивается резонансной связью в канале рассеяния полных (спиново-колебательных) базового $|b\rangle$ и конечного $|d\rangle$ состояний атома, отличающихся значением колебательного числа. Перепринт статьи автора диссертации [128].

состояниями. Отстройки световых лучей относительно верхней сверхтонкой структуры уровней оптического перехода можно выбрать одинаковыми для всех возможных направлений облучения, см. Рис.2.1, так что $\Delta^{(0)} = \Delta^{(j)} \equiv \Delta$ для всех $j = 1, 2, 3$. В отсутствии спонтанных потерь процесс можно свести к двухуровневой системе и описать временной динамикой амплитуд вероятности $c_b(t)$ и $c_d(t)$, соответствующих заселенности данных состояний:

$$\begin{aligned} c_b(\tau) &= \cos \left[\frac{1}{2} \int_0^\tau \Omega(t) dt \right] \\ c_d(\tau) &\sim \sin \left[\frac{1}{2} \int_0^\tau \Omega(t) dt \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\Omega(t)$ эффективная частота Раби рамановского процесса, и во второй строчке мы опустили несущественный фазовый фактор. Данные уравнения очевидно отражают хорошо известную из теории двухуровневого атома концепцию

π -импульса, когда площадь под интегралом $\int_0^T \Omega(t) dt = \pi$ является необходимым и достаточным условием конвертирования состояния атома с уровня $|b\rangle$ на уровень $|d\rangle$ и обратно. Тем не менее, несмотря на кажущуюся простоту, замечаем, что в стимулированном рамановском цикле следует ожидать, что световые импульсы будут достаточно продолжительными, мощными и вместе с тем стабилизированными, чтобы накопить контролируемый передаваемый атому линейный кинематический импульс для подавления колебательного движения.

Если объединить этот процесс с циклом оптической накачки, возвращающим атом в исходное спиновое состояние $|s\rangle$, и допустить, что другие возмущения, связанные с несовершенством ловушки и перекрестным взаимодействием колебательных мод, не влияют на общую динамику процесса, атом перейдет в темное состояние (4.3) после нескольких шагов повторения протокола. Данный процесс может быть осуществлен отдельно и независимо для каждой колебательной степени свободы, что в конечном итоге позволит перевести все колебательное движение в основное состояние дипольной ловушки. Но и здесь, несмотря на кажущуюся простоту, следует отметить, что на каждом этапе протокола используемый резонанс Λ -типа будет весьма чувствителен к структуре зеемановских энергетических подуровней и внешним возмущениям, приводящим к сдвигам связанным с неоднородностью и флуктуациями внешнего магнитного поля, а также к световым сдвигам, обусловленным внешними управляющими когерентными полями.

4.2.2 Трёхмерный вариант рамановского охлаждения

Рассмотрим теперь основной сценарий, когда атомный осциллятор возбуждается во всех трех направлениях, так что $\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z > 1$ и колебательные числа предполагаются относительно высокими. В такой ситуации естественно ожидать, что даже достаточно слабое перекрёстное взаимодействие между колебательными модами может лишить экспериментатора преимущества простоты описанного выше механизма независимого охлаждения каждой моды ловушки в отдельности. Ниже будет описана оптимальная, по нашему мнению, стратегия одновременного подавления колебаний во всех трех направлениях движения атома.

Геометрия возбуждения и схема переходов

В трёхмерной геометрии мы изменим схему, изображенную на Рис. 4.1 обеспечив возможность управления движением атома и передачи импульса одновременно в каждую колебательную степень свободы. Из Рис.4.2 следует, что одновременный и независимый контроль может быть осуществлен, если волновые векторы управляющих лучей \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , и \mathbf{k}_3 образуют равнобедренные треугольники с волновым вектором возбуждающего луча \mathbf{k}_0 . В такой геометрии возбуждения углы $\angle(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0) = \angle(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_0) = \angle(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_0) = \arccos(1/\sqrt{3}) = 54.7^\circ$ и три волновых вектора отдачи $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0$, $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_0$, и $\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_0$ являются взаимно ортогональными и могут быть ориентированы вдоль главных осей дипольной ловушки. На Рис. 4.2, передаваемые импульсы показаны розовыми пунктирными стрелками. В этом случае векторы $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ соответственно направлены вдоль биссектрис основного и трех соседних октантов главных координат ловушки. Ось квантования, совпадающая с направлением внешнего магнитного поля, может быть ориентирована вдоль \mathbf{k}_0 (если возбуждающий луч циркулярно поляризован) либо вдоль направления поляризации возбуждающего луча (если он линейно поляризован). Мы далее выбираем первый вариант, поскольку полная связь между базовым и конечным состояниями представляется наиболее эффективной именно для этого случая.

Предполагаемому рамановскому процессу соответствует диаграмма переходов, изображенная на Рис.4.3. Для определённости в дальнейшем мы выберем в качестве исходного состояния верхнее зеемановское состояние на так называемом "часовом" переходе в сверхтонкой структуре основного состояния атома щелочного металла: $|s\rangle \equiv |F_+, 0\rangle$. Здесь и далее мы будем обозначать два возможных значения полного спинового момента атома $F_0 = F_+, F_-$ с $F_\pm = I \pm 1/2$, где I - спин ядра, и мы будем различать зеемановские состояния $M_0 = M_\pm$ для верхнего/нижнего сверхтонких подуровней. Каждый из управляющих лучей открывает три допустимых поляризационных канала, так что для возбуждающего луча в σ_+ -поляризации целевые спиновые состояния $|t_x\rangle$, $|t_y\rangle$, и $|t_z\rangle$, в общем случае должны быть выражены линейными комбинациями $|F_-, 0\rangle$, $|F_-, 1\rangle$, и $|F_-, 2\rangle$.

В соответствии с рассматриваемой геометрией возбуждения, см. Рис.4.2, каждый j -й управляющий луч с $j = 1, 2, 3$ обеспечивает подавление колеба-

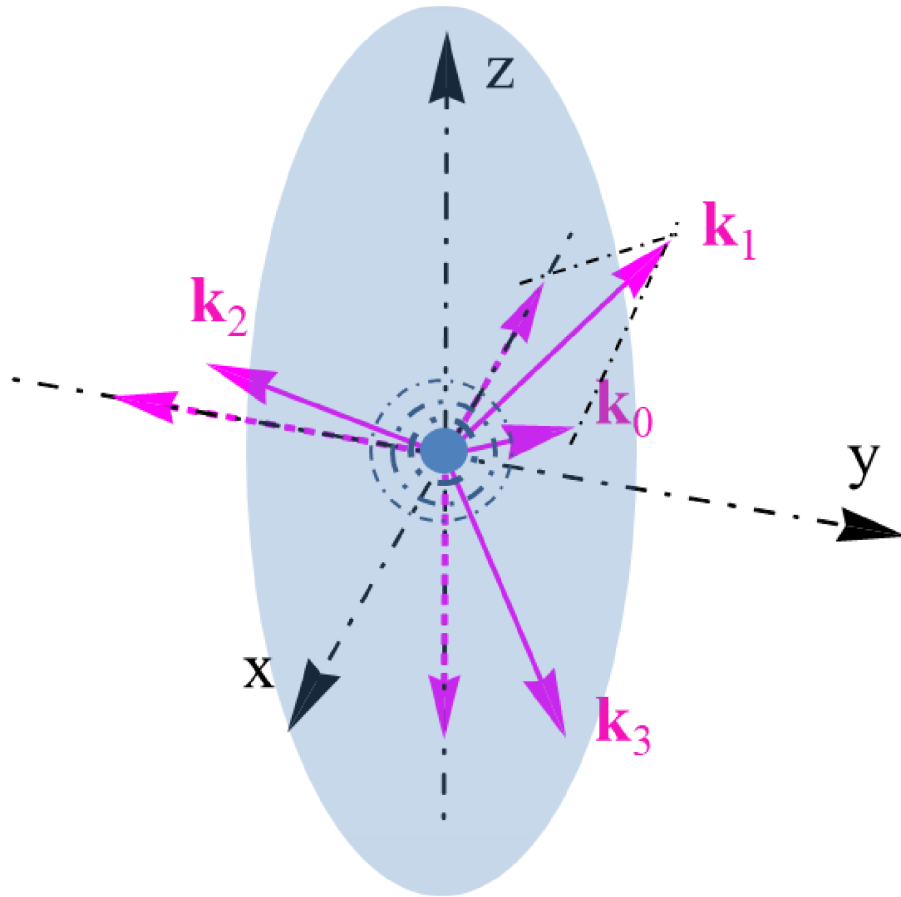


Рисунок 4.2 — Геометрия световых лучей, обеспечивающих одновременное подавление колебательного движения в трёх измерениях. Четыре световых луча направлены вдоль биссектрис основного и трех прилегающих октантов координат ловушки. Возбуждающий луч, которому соответствует волновой вектор \mathbf{k}_0 , в комбинации с каждым отдельным управляющим лучом \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , и \mathbf{k}_3 формирует импульс отдачи, передаваемый атому в направлении каждой из главных осей ловушки. Это наглядно показано на примере векторного параллелограмма, построенного на волновых векторах \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_1 . Перепринт статьи автора диссертации [128].

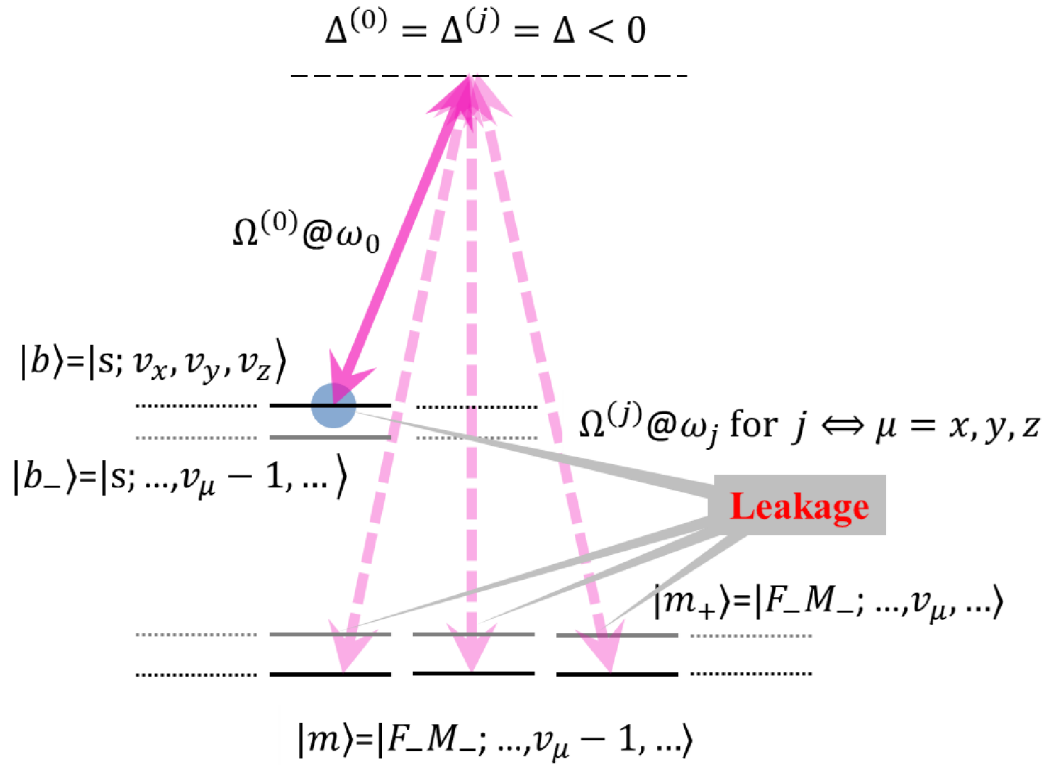


Рисунок 4.3 — Схема переходов, отвечающая геометрии возбуждения, изображенной на Рис. 4.2. Для отдельного j -го управляющего луча рамановский процесс переводит атом на нижний сверхтонкий подуровень основного состояния с уменьшенным на единицу соответствующего этому каналу колебательного числа v_μ . Каждая управляющая мода связана с одной соответствующей ей колебательной модой, так что $j = j(\mu)$. Главный канал рассеяния конкурирует с нерезонансной утечкой, обусловленной слабым нерезонансным рассеянием в те же спиновые состояния, но с сохранением колебательного числа. Перепринт статьи автора диссертации [128].

тельного движения вдоль направления μ -й главной оси ловушки с $\mu = x, y, z$. Отдельно выделенный рамановский канал, связанный с каким-либо управляющим лучом, обеспечивает переход на подпространство состояний $|m\rangle = |F_-, M_-, \dots, v_\mu - 1, \dots\rangle$, однако, для полного перехода задействована суперпозиция всех состояний с $\mu = x, y, z$. Как будет показано далее, поляризации управляющих лучей следует выбрать взаимно ортогональными, и при идеальном сценарии ожидается, что построенные спиновые состояния будут слабо перекрываться. В этом случае состояние назначения $|d\rangle$ будет близко к состоянию максимально перепутывающему спиновые и колебательные степени свободы, как это предполагалось в разложении (4.4) при определении оптимальной стратегии.

Процесс стимулированного рамановской конверсии атома из базового состояния $|b\rangle$ в конечное состояние $|d\rangle$ ослаблен малым значением параметра Лэмба-Дике. Если система развивается полностью динамически, так что спонтанные потери пренебрежимо малы, основной канал рассеяния будет конкурировать с утечкой¹, обусловленной слабым нерезонансным рассеянием в те же спиновые состояния, но с сохранением колебательного числа. Утечка, показанная на Рис. 4.3 как переход в группу состояний $|m_+\rangle$ подавлена из-за нерезонансности, но она не сопровождается передачей импульса и, тем самым, присутствует в уравнениях уже в нулевом порядке по параметру Лэмба-Дике. Таким образом, оптимальный протокол охлаждения должен обеспечить минимальную утечку в каждом цикле рамановского перехода атома из состояния $|b\rangle$ в состояние $|d\rangle$.

Уравнение Шредингера

Для удобства в этом разделе мы введем сокращенные обозначения для произвольного объединенного основного электронного и колебательного состояния атома $|m\rangle \equiv |F_0 M_0; v_x, v_y, v_z\rangle$ и для оптически возбужденного состояния $|n\rangle \equiv |F M; w_x, w_y, w_z\rangle$. Мы также примем во внимание, что жесткость дипольной ло-

¹Утечкой (en. leakage) мы называем нерезонансный канал (амплитуду вероятности), соответствующий в рамановском рассеянии переходу атома в те же спиновые состояния, но с сохранением колебательного числа

вушки различна для этих состояний. Тогда динамическая часть рамановского процесса подчиняется уравнению Шрёдингера, зависящему от времени. Волновая функция атома может быть представлена следующим разложением в базисе стационарных состояний

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) e^{-\frac{i}{\hbar} E_m t} |m\rangle + \sum_n c_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |n\rangle, \quad (4.12)$$

где коэффициенты разложения (амплитуды вероятности) удовлетворяют уравнению Шрёдингера, записанному в энергетическом представлении:

$$\begin{aligned} \dot{c}_n(t) &= -\frac{i}{\hbar} \sum_m V_{nm}(t) e^{i\omega_{nm}t} c_m(t) \\ \dot{c}_m(t) &= -\frac{i}{\hbar} \sum_n V_{mn}(t) e^{i\omega_{mn}t} c_n(t), \end{aligned} \quad (4.13)$$

Взаимодействие с когерентными полями рассматривается в условиях приближения вращающейся волны и имеет вид

$$V_{nm}(t) = -\frac{\hbar}{2} \sum_{j=0}^3 \Omega_{nm}^{(j)}(t) e^{-i\omega_j t} \quad (4.14)$$

где предполагается эрмитовость $V_{mn}(t) = V_{nm}^*(t)$. Процесс управляется четырьмя когерентными полями, и матричные элементы параметризованы медленно меняющимися временными профилями соответствующих перекрывающихся импульсов, имеющих разные несущие частоты. В уравнении Шрёдингера это отражено временной зависимостью частот Раби, определённых для возбуждающей моды $\Omega_{nm}^{(0)}(t)$, и для трёх управляющих полей $\Omega_{nm}^{(1)}(t)$, $\Omega_{nm}^{(2)}(t)$ и $\Omega_{nm}^{(3)}(t)$ соответственно. Мы показываем, что данная система может быть настроена на однонаправленный рамановский переход из спинового состояния $|s\rangle$ в пространство состояний $|t_\mu\rangle$, связанных с соответствующими им колебательными модами $|\dots, v_\mu - 1, \dots\rangle$, см. уравнение (4.4).

Уравнение (4.13) может быть преобразовано к более простой структуре в случае рамановского рассеяния вдали от атомного резонанса, так что вклад от возбужденных состояний в уравнениях (4.12) может быть адиабатически исключен. Действительно, построив формальное решение первого из уравнений (4.13) и подставляя $c_n(t)$ во второе уравнение, имеем

$$\begin{aligned} \dot{c}_m(t) = & \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \sum_{j,k} \sum_{n,m'} \Omega_{mn}^{(j)}(t) e^{i(\omega_j - \omega_{nm})t} \\ & \times \int_{-\infty}^t dt' \Omega_{nm'}^{(k)}(t') e^{-i(\omega_k - \omega_{nm'})t'} c_{m'}(t'). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Интеграл в правой части может быть вычислен приближенно, если заметить, что доминирующие члены с $\omega_j - \omega_k + \omega_{mm'} \sim 0$ характеризуются плавной трендовой динамикой амплитуд вероятности на крупномасштабной шкале времени. В этом приближении оставляем только главные вклады уравнения, которые удовлетворяют условию $\omega_j - \omega_{nm} \sim \omega_k - \omega_{nm'}$ для всех возможных комбинаций как в рэлеевском, так и в рамановском каналах. В подынтегральной части уравнения (4.15) мы можем определить каждую k -ю моду задав для неё отстройку $\Delta_{nm'}^{(k)} = \omega_k - \omega_{nm'}$ от оптического перехода $m' \rightarrow n$. Концепция адиабатического исключения подразумевает, что вклад неэкспоненциального множителя подынтегрального выражения в (4.15), рассматриваемого как гладкая функция на временном масштабе большем чем $1/\Delta_{nm'}^{(k)}$, может быть заменен его значением в момент времени, заданный верхним пределом интеграла. Тогда интеграл в уравнении (4.15) может быть непосредственно вычислен и уравнение принимает вид

$$\dot{c}_m(t) = -i \sum_{j,k} \sum_{n,m'} \frac{\Omega_{mn}^{(j)}(t) \Omega_{nm'}^{(k)}(t)}{4\Delta_{nm'}^{(k)}} \exp[i(\omega_j - \omega_k + \omega_{mm'})t] c_{m'}(t). \quad (4.16)$$

Данное уравнение может быть интерпретировано как сокращённое уравнение Шрёдингера, описывающего медленно меняющуюся динамику амплитуд вероятности, с эффективным гамильтонианом взаимодействия, определённым в правой части уравнения (4.16).

Возможность игнорирования спонтанных потерь предполагает, что рамановский процесс осуществляется с помощью оптических полей отстроенных далеко от всех сверхтонких подуровней верхнего состояния, и эти отстройки могут быть сопоставимы или даже превосходить сверхтонкое расщепление основного состояния. В этом случае для того, чтобы иметь основание рассматривать процесс, показанный на Рис. 4.3, в качестве доминирующего канала рассеяния, следует также исключить конкурирующие каналы упругих рамановских переходов, инициируемых управляющими полями, что может быть обеспечено неравенством $|\Omega_{mn}^{(j)}| \ll |\Omega_{nm}^{(0)}|$ для $j = 1, 2, 3$. Тогда в правой части

(4.16) достаточно оставить только вклады пропорциональные $|\Omega_{nm}^{(0)}|^2$, $\Omega_{mn}^{(j)} \Omega_{nm'}^{(0)}$, $\Omega_{mn}^{(0)} \Omega_{nm'}^{(k)}$.

Схема оптимизации

Рассмотрим конфигурацию управляющих полей с прямоугольным профилем импульса, действующих на атом в течение $0 < t < \tau$. В соответствии с приведенными выше аргументами уравнение Шрёдингера может быть сведено к системе дифференциальных уравнений для амплитуд вероятности (4.16), сохраняя только резонансную связь между верхним и нижним подуровнями основного состояния с учетом колебательного перехода.

Теперь мы откажемся от упрощенных обозначений, введенных в предыдущем подразделе, и будем использовать более точную запись, разделяющую обозначения для нижнего и верхнего сверхтонких подуровней основного состояния. Обозначим те зеемановские состояния верхнего сверхтонкого подуровня, проекция спинового момента которых $M_+ \neq 0$ (заселение которых не исключается в общей динамике развивающегося процесса) как $|b'\rangle \equiv |F_+, M_+; v_x v_y v_z\rangle$ с вариацией проекции момента $-F_+ \leq M_+ \leq F_+$. Будем различать множество состояний $|b'\rangle$ и базовое состояние $|b\rangle$ с $M_+ = 0$, в котором атом находится в начальный момент времени. При оптимальных условиях рамановского процесса ожидается, что все эти состояния должны быть опустошены, а атом переселён в состояния с более низкой энергией $|m\rangle \equiv |F_-, M_-; \dots, v_\mu - 1, \dots\rangle$ с проекцией момента, варьирующейся в интервале $-F_- \leq M_- \leq F_-$.

В итоге рамановский процесс описывается следующими уравнениями для зеемановских состояний верхнего сверхтонкого подуровня

$$\begin{aligned}
 \dot{c}_b(t) &= -i \sum_n \frac{|\Omega_{nb}^{(0)}|^2}{4\Delta_n} c_b(t) - i \sum_m \left[\sum_n \frac{\Omega_{bn}^{(0)} \Omega_{nm}^{(j)}}{4\Delta_n} \right] \Big|_{j=j(m)} \\
 &\quad \times \exp[i(\omega_0 - \omega_j + \omega_{bm})t] c_m(t) + \dots \\
 \dot{c}_{b'}(t) &= -i \sum_n \frac{|\Omega_{nb'}^{(0)}|^2}{4\Delta_n} c_{b'}(t) - i \sum_m \left[\sum_n \frac{\Omega_{b'n}^{(0)} \Omega_{nm}^{(j)}}{4\Delta_n} \right] \Big|_{j=j(m)} \\
 &\quad \times \exp[i(\omega_0 - \omega_j + \omega_{b'm})t] c_m(t) + \dots
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

и дополняющими уравнениями для нижних состояний

$$\begin{aligned}
\dot{c}_m(t) = & -i \sum_n \frac{|\Omega_{nm}^{(0)}|^2}{4(\Delta_n - \Delta_{\text{hpf}})} c_m(t) - i \left[\sum_n \frac{\Omega_{mn}^{(j)} \Omega_{nb}^{(0)}}{4\Delta_n} \right] \Bigg|_{j=j(m)} \times \\
& \exp [i(\omega_j - \omega_0 + \omega_{mb})t] c_b(t) - i \sum_{b' \neq b} \left[\sum_n \frac{\Omega_{mn}^{(j)} \Omega_{nb'}^{(0)}}{4\Delta_n} \right] \Bigg|_{j=j(m)} \times \\
& \exp [i(\omega_j - \omega_0 + \omega_{mb'})t] c_{b'}(t) + \dots
\end{aligned} \tag{4.18}$$

вместе образующими полную систему уравнений. В приведенных уравнениях учитывается, что каждая мода j осуществляет переходы в состояния $|m\rangle$, связанные с определённой модой ловушкой, так что $j = j(m)$, как это показано на Рис. 4.3 на примере перехода атома из базового состояния $|b\rangle$. Слагаемые в правой части уравнений нами упорядочены в соответствии с приоритетом их воздействия на динамику атома, а многоточием обозначены отброшенные слагаемые, влияние которых, в соответствии с ограничениями, сформулированными в конце предыдущего параграфа, несущественно. В частотных знаменателях уравнений (4.17) и (4.18) нами проигнорирована незначительная разница в отстройках для всех оптических мод, так что $\Delta_{nb} = \Delta_{nm}^{(j)} = \Delta_{nm'}^{(k)} \equiv \Delta_n < 0$ и $\Delta_{\text{hpf}} > 0$ обозначает сверхтонкое расщепление основного состояния.

Первые слагаемые в правой части уравнений (4.17) и (4.18) определяют световые сдвиги энергетических состояний, участвующих в процессе. Существенно то, что эти сдвиги вызывают нежелательную фазовые рассогласования в уравнениях амплитуд переходов, что неконтролируемым образом меняет их временную динамику. Оптимальным представляется настроить моды возбуждающего и управляющих полей в резонанс со смещенными уровнями энергии на рамановском переходе

$$\omega_j - \omega_0 + \omega_{mb} + \bar{\delta}_m - \delta_b = 0 \tag{4.19}$$

где

$$\delta_b = \sum_n \frac{|\Omega_{nb}^{(0)}|^2}{4\Delta_n} \tag{4.20}$$

световой сдвиг базового состояния и

$$\bar{\delta}_m = \sum_n \frac{|\Omega_{nm}^{(0)}|^2}{4(\Delta_n - \Delta_{\text{hpf}})} \quad (4.21)$$

световой сдвиг, усредненный по трём основным состояниям, эффективное заселение которых и является главной целью протокола, см. Рис. 4.3.

Предположим, что изначально состояния b, b' и m вырождены (т.е. атомы помещены в нулевое внешнее магнитное поле), и представим амплитуды вероятностей в виде

$$\begin{aligned} c_b(t) &= \tilde{c}_b(t) e^{-i\delta_b t} \\ c_{b'}(t) &= \tilde{c}_{b'}(t) e^{-i\delta_{b'} t} \\ c_m(t) &= \tilde{c}_m(t) e^{-i\bar{\delta}_m t} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Подставим эти выражения в ур. (4.17) и (4.18). Тогда уравнение (4.17) преобразовывается к следующему виду

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{c}}_b(t) &= -i \sum_m \left[\sum_n \frac{\Omega_{bn}^{(0)} \Omega_{nm}^{(j)}}{4\Delta_n} \right] \Bigg|_{j=j(m)} \tilde{c}_m(t) + \dots \\ \dot{\tilde{c}}_{b'}(t) &= -i \left[\sum_n \frac{|\Omega_{nb'}^{(0)}|^2}{4\Delta_n} - \delta_{b'} \right] \tilde{c}_{b'}(t) - i \sum_m \left[\sum_n \frac{\Omega_{b'n}^{(0)} \Omega_{nm}^{(j)}}{4\Delta_n} \right] \Bigg|_{j=j(m)} \tilde{c}_m(t) + \dots, \end{aligned} \quad (4.23)$$

а уравнение (4.18) – к виду

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{c}}_m(t) &= -i \left[\sum_n \frac{|\Omega_{nm}^{(0)}|^2}{4(\Delta_n - \Delta_{\text{hpf}})} - \bar{\delta}_m \right] \tilde{c}_m(t) - i \left[\sum_n \frac{\Omega_{mn}^{(j)} \Omega_{nb}^{(0)}}{4\Delta_n} \right] \Bigg|_{j=j(m)} \tilde{c}_b(t) \\ &\quad - i \sum_{b' \neq b} \left[\sum_n \frac{\Omega_{mn}^{(j)} \Omega_{nb'}^{(0)}}{4\Delta_n} \right] \Bigg|_{j=j(m)} \tilde{c}_{b'}(t) + \dots \end{aligned} \quad (4.24)$$

Численное решение этих уравнений показывает, что условие (4.19) само по себе уже обеспечивает эффективное рамановское заселение, однако без требуемого перепутывания между колебательной и спиновой подсистемами. Важность перепутывания была разъяснена нами в конце раздела 4.1. Ситуация может быть откорректирована устранением остаточных зависящих от m световых сдвигов целевых спиновых состояний, вносящих вклад в первую строку

уравнения (4.24), путем добавления внешнего магнитного поля, формирующего компенсирующий линейный наклон зеемановских уровней энергии и приводя в итоге структуру зеемановских состояний нижнего сверхтонкого подуровня к вырожденной конфигурации.

Вернёмся к обсуждению геометрии лучей, изображённой на Рис.4.2, и выясним оптимальный выбор поляризаций лучей управляющих мод. В соответствии с базовой стратегией протокола рамановского охлаждения оптимальным представляется максимально приблизить рамановский процесс эффективным двухуровневым переходом между базовым $|b\rangle$ и конечными состояниями $|d\rangle$, заданным суперпозицией целевых спиновых и колебательных состояний, в соответствии с требованием разложения (4.4). Если провести несколько итерационных шагов с уравнениями (4.23) и (4.24), то можно представить структуру разложения оператора эволюции системы в ряд теории возмущений. Каждый вклад этого разложения состоит из произведения матричных элементов эффективного гамильтониана, просуммированным по промежуточным состояниям. Анализ показывает, что изоляции перехода между состояниями $|b\rangle$ и $|d\rangle$ можно добиться при выполнении двух условий. Во-первых, требуется, чтобы

$$\Omega^{(1)}\eta_{\perp}\sqrt{v_x} = \Omega^{(2)}\eta_{\perp}\sqrt{v_y} = \Omega^{(3)}\eta_{\parallel}\sqrt{v_z} \quad (4.25)$$

где $\Omega^{(j)}$ обозначает приведенный матричный элемент для частоты Раби j -й моды. Во-вторых, требуется взаимная ортогональность векторов поляризации управляющих мод. Если оба эти условия выполнены, динамика атома описывается унитарным и периодическим по времени процессом обмена населенностями состояний $|b\rangle$ и $|d\rangle$, попеременно становящимся базовым и основным друг для друга, аналогично одномерной модели, где система эквивалентна двухуровневному атому (4.11).

Ортогональность поляризаций, действительно, может быть обеспечена для рассматриваемой геометрии возбуждения, что доказывается диаграммой, изображенной на Рис. 4.4. На этом рисунке направления трех управляющих лучей (не являющиеся взаимно ортогональными!), изображены пунктирными стрелками, и показан их поворот вокруг своих трёх фиксированных ортогональных направлений линейных поляризаций, изображенных сплошными стрелками. Требуемый относительный угол между лучами каждой пары составляет 109.5° (см. Рис.4.2) и находится внутри доступного интервала вариации направлений лучей в интервале от 90° до 120° .

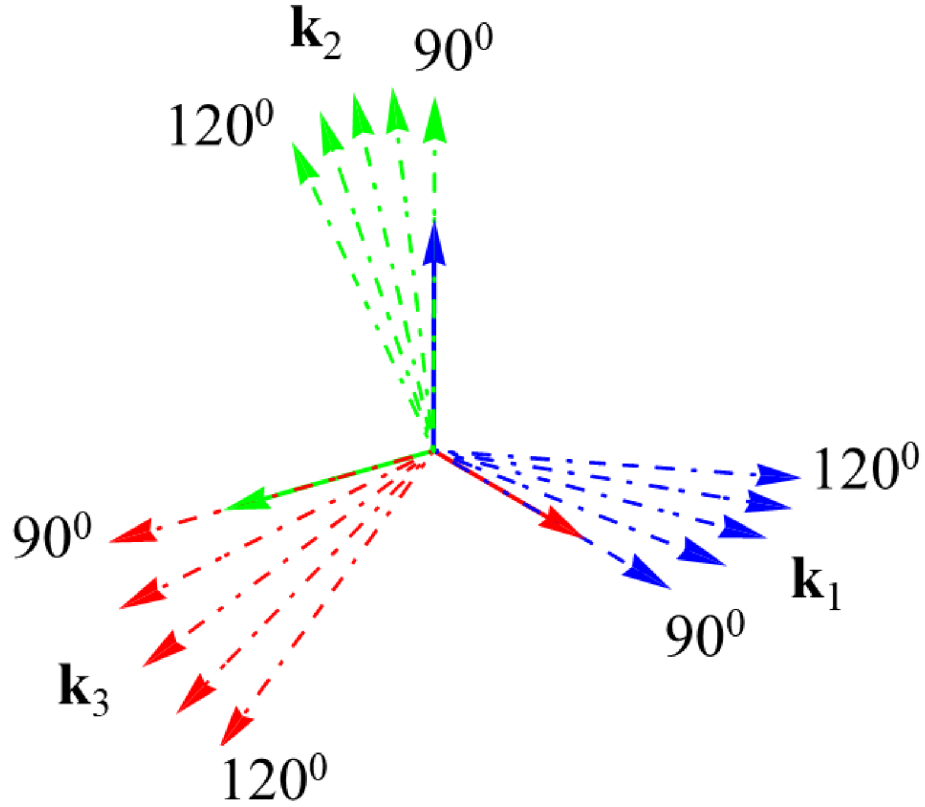


Рисунок 4.4 — На диаграмме показано, что три световых луча со взаимно ортогональными поляризациями, изображенными сплошными стрелками разных цветов, могут иметь взаимно симметричные, но, в общем случае, неортогональные направления распространения вдоль волновых векторов \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 с относительными углами, варьирующимися в интервале от 90° до 120° .

Перепринт статьи автора диссертации [128].

Система дифференциальных уравнений (4.23) и (4.24) может быть решена численно, и ее решение определяет целевые спиновые состояния, входящие в разложение (4.4) в соответствии с правилом

$$\begin{aligned}
 C_x^{(v_x v_y v_z)} |t_x\rangle &= \sum_{M_-} c_m(\tau) |_{m=F_-, M_-; v_x-1, v_y, v_z} |F_-, M_-\rangle \\
 C_y^{(v_x v_y v_z)} |t_y\rangle &= \sum_{M_-} c_m(\tau) |_{m=F_-, M_-; v_x, v_y-1, v_z} |F_-, M_-\rangle \\
 C_z^{(v_x v_y v_z)} |t_z\rangle &= \sum_{M_-} c_m(\tau) |_{m=F_-, M_-; v_x, v_y, v_z-1} |F_-, M_-\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Поскольку в качестве исходного состояния нами выбрано верхнее состояние так называемого "часового" перехода $|s\rangle = |F_+, 0\rangle$, то при выполнении

оптимальных условий целевые спиновые состояния $|t_x\rangle$, $|t_y\rangle$ и $|t_z\rangle$ будут представлены в виде суперпозиции $|F_-,0\rangle$, $|F_-,1\rangle$ и $|F_-,2\rangle$, как это показано на Рис. 4.3.

Однако такой идеальный сценарий, в действительности, не реализуется из-за несовершенства² протокола, обусловленного нарушением требования (4.25), которое не может быть выполнено для всех колебательных состояний, а также с рассогласованностью фаз амплитуд вероятности, вызванной остаточными некомпенсированными световыми сдвигами, вносящими вклад в уравнение (4.24) для $|b'\rangle$ состояний. Кроме того, процессы нерезонансного рамановского рассеяния в состоянии $|m_+\rangle$, сохраняющие колебательное состояние атома, создают утечку из основного канала рассеяния, см. Рис.4.3. Дело в том, что хотя эти процессы не являются резонансными, тем не менее соответствующие амплитуды переходов существуют уже в нулевом порядке по параметру Лэмба-Дике и могут конкурировать с основным резонансным процессом. Амплитуда перехода в произвольное состояние $|m_+\rangle$ может быть оценена с помощью метода теории возмущений

$$c_{m_+}(\tau) \sim -i \int_0^\tau dt \sum_{j=1}^3 \left[\sum_n \frac{\Omega_{m_+n}^{(j)} \Omega_{nb}^{(0)}}{4\Delta_n} \right] e^{i\Omega_\mu t} c_b(t), \quad (4.27)$$

где $c_b(t)$ определяется решением уравнения (4.23), с учетом подстановки (4.22). Здесь обозначено Ω_μ с $\mu = \mu(j)$ для $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_\perp$ и $\Omega_z = \Omega_\parallel$. Если импульсы света имеют достаточно большую длительность, так что $\Omega_\mu \tau \gg 1$, осциллирующий фактор в подынтегральном выражении подавляет временной интеграл и уменьшает тем самым амплитуду $c_{m_+}(\tau)$.

Минимальная длительность импульса, для которой данный конкурирующий нерезонансный процесс может быть проигнорирован, требует, чтобы малый параметр $1/\Omega_\mu \tau \ll 1$, определяющий слабость канала утечки, был меньше параметра Лэмба-Дике $\eta_\mu = k_0 \sqrt{\hbar/2m\Omega_\mu} \ll 1$, в свою очередь, подавляющего амплитуду рабочего рамановского перехода. Важное неравенство $1/\Omega_\mu \tau \ll \eta_\mu$ означает тот факт, что длительность импульса τ должна быть больше, чем $k_0^{-1}/\sqrt{\hbar\Omega_\mu/2m} \sim \lambda_0/\delta v_\mu$, где $\delta v_\mu = \sqrt{\hbar\Omega_\mu/2m}$ – квантовая неопределенность

²Несовершенством (en. imperfection) мы называем паразитный канал рассеяния в соседние с базовым $|b\rangle$ зеемановские подуровни $|b'\rangle$ с $M_+ \neq 0$. Заселение таких соседних состояний не исключается в общей динамике развивающегося процесса и происходит, если нарушено условие оптимизации (4.25), поэтому в окончательных графиках важно отследить, какой вклад такое несовершенство вносит.

скорости атома в основном состоянии осцилляторной ямы в направлениях $\mu = x, y, z$. Данная оценка указывает нам, что ловушка, удерживающий атом, должна быть достаточно жесткой. Отметим однако, что структура матричных элементов смягчает вышеуказанное требование параметром $\sqrt{v_\mu}$, которое при более точной оценке изменяет δv_μ на тепловую скорость атома в ловушке. Для типичной начальной температуры, установленной этапом предварительного охлаждения атома в магнитооптической ловушке, длительность импульса должна быть порядка *микросекунд* или дольше. Это приводит нас к другой неудобной проблеме: для световых импульсов, имеющих такую большую длительность, рамановский протокол должен быть защищён от потерь, связанных со спонтанным некогерентным рассеянием, которое было полностью проигнорировано нами в представленном анализе.

4.3 Результаты численного расчёта

В данном разделе нами представлены результаты численного расчёта, которые были выполнены для атома ^{85}Rb , исходно находящегося на сверхтонком подуровне основного состояния с заданной проекцией спинового момента $|s\rangle = |F_+, 0\rangle = |3, 0\rangle$, как показано на Рис.4.3. Продольная и поперечная частоты ловушки выбраны $\Omega_\perp = 2\pi \times 200$ кГц и $\Omega_\parallel = 2\pi \times 100$ кГц, что представляется потенциально достижимыми значениями для существующих дипольных ловушек, используемых в оптического пинцетах, и приводит к достаточно малым значениям параметра Лэмба-Дике $\eta_\perp \sim 0.13$ и $\eta_\parallel \sim 0.18$ соответственно для радиальной и продольных мод. При относительно низкой начальной температуре загрузки атомов из магнито-оптической ловушки – около $20 \mu\text{K}$ – средние значения колебательных чисел для атома рубидия в дипольной ловушке могут быть оценены как $\bar{v}_\perp \sim 2$ и $\bar{v}_\parallel \sim 4$. Ниже представлены результаты расчёта для рамановского цикла, оптимизированного условием (4.15), с использованием средних значений колебательных чисел $v_\perp = \bar{v}_\perp$ и $v_\parallel = \bar{v}_\parallel$, и проведено сравнение для колебательных параметров, смещенных относительно среднего значения на одну дисперсию. Чтобы продемонстрировать важность эффектов радиационного "одевания" атомных состояний и их влияние на динамику рамановского перехода, мы провели сравнительный численный расчёт для двух оптических

отстройка от сверхтонкой структуры возбужденных состояний $\Delta = -1000\gamma$ и $\Delta = -5000\gamma$. В расчете использованы значения частот Раби $\Omega^{(0)} = 20\gamma$, $\Omega^{(1)} = \Omega^{(2)} = \gamma$, и частота $\Omega^{(3)}$ фиксирована условием (4.15).

Хотя использованные параметры позволяют рассматривать нам вариант уравнения Шредингера (4.13) и (4.14) с отсечкой малых вкладов, расчёт был выполнен на основе уравнения Шрёдингера в его общем виде (4.6) с сохранением всех вкладов и, соответственно, с возможностью отследить динамику системы в направлении ее долговременной временной эволюции. Нами было учтено, что дополнительное внешнее магнитное поле, компенсирующее наклон световых сдвигов, обеспечивает зеемановское вырождение для нижнего сверхтонкого подуровня. В свою очередь, это создает частичную компенсацию наклона в системе зеемановских состояний верхнего сверхтонкого подуровня. Однако последнее достигается лишь приближенно из-за существенной разницы в частотных знаменателях уравнений (4.10) и (4.11).

На Рис.4.5 воспроизводится временная зависимость вероятностей заселения базового состояния $|c_b(t)|^2$, переселяемого состояния $\sum_m |c_m(t)|^2$, а также несовершенства переселения $\sum_{b' \neq b} |c_{b'}(t)|^2$ и утечки из основного канала рассеяния $\sum_{m_+} |c_{m_+}(t)|^2$. Представленные зависимости, построенные для отстройки $\Delta = -1000\gamma$, подтверждают, что система, действительно, имеет тенденцию к переселению базового состояния $|b\rangle$ в состояние назначения $|d\rangle$, осуществляемое в точках экстремума периодической динамики процесса. Эффективность процесса является устойчивой к существенным изменениям колебательных чисел, что подтверждает общую сходимость всего протокола охлаждения в темное состояние. На рисунке показана оценка амплитуды таких вариаций, полученная добавлением или вычитанием одного стандартного отклонения (дисперсии) для каждого среднего колебательного числа.

Отметим, что для отстройки $\Delta = -1000\gamma$, несмотря на компенсационное магнитное поле, зеемановская структура верхнего сверхтонкого подуровня хорошо разрешена, поэтому только основные и необходимые для переселения оптические переходы, показанные на рис. 4.3 являются резонансными, что поддерживает эффективный перевод атома для любого исходного колебательного состояния. Оптимальное условие (4.15) оказывается не столь критичным для этого случая. Тем не менее, обратим внимание на то, что заселение состояния $|d\rangle$ достигается в разные моменты времени для разных начальных условий.

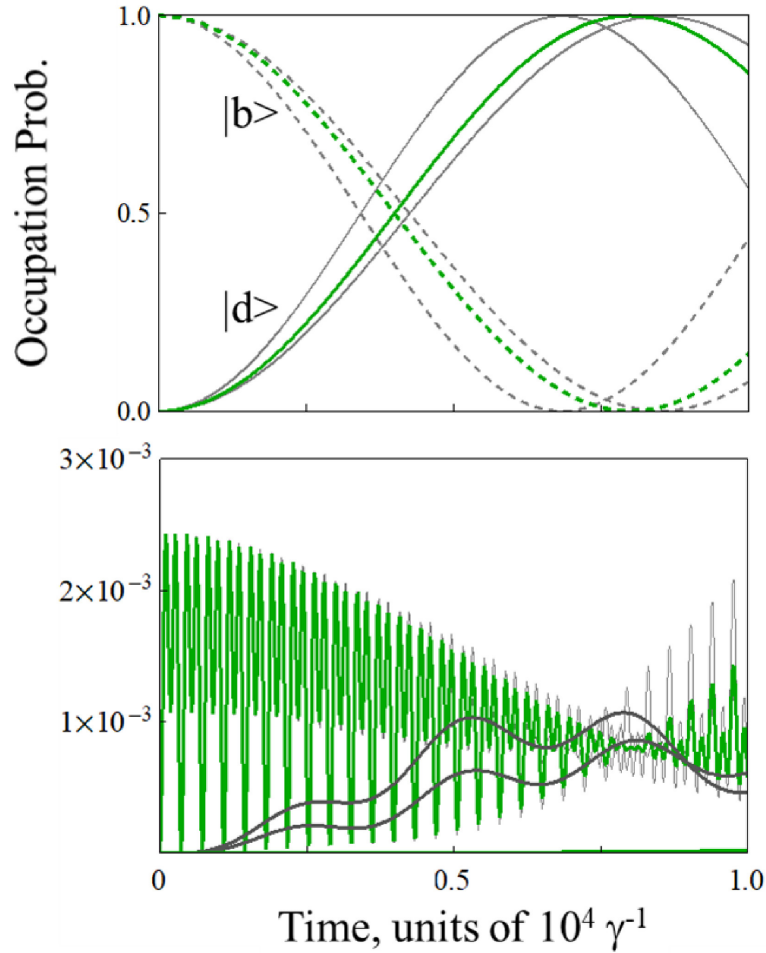


Рисунок 4.5 — *Верхний график*: Временная зависимость вероятностей заполнения базового состояния $|c_b(t)|^2$ (пунктирные кривые), состояния назначения $\sum_m |c_m(t)|^2$ (сплошные кривые) для отстройки от оптического резонанса $\Delta = -1000\gamma$. Зелёные кривые соответствуют рамановскому циклу для средних колебательных чисел $v_\perp = \bar{v}_\perp$ и $v_\parallel = \bar{v}_\parallel$, а серые кривые показывают амплитуду его изменений в пределах одного стандартного отклонения колебательных чисел от их средних значений. Все функции демонстрируют периодическую зависимость, при которой система эволюционирует до состояния назначения в точках экстремума. Реперная точка, соответствующая опустошению основного состояния, определяет длительность импульса τ для оптимального рамановского прохождения. *Нижний график*: Несовершенство переселения $\sum_{b' \neq b} |c_{b'}(t)|^2$ и утечка из основного канала рассеяния $\sum_{m_+} |c_{m_+}(t)|^2$. Заселение состояний $|b'\rangle$, отображенное нижней кривой для оптимальных параметров, вносит незначительный вклад и, фактически, неразрешимо в масштабе графика. Незначительная утечка в состояния $|m_+\rangle$ демонстрирует осциллирующее поведение с амплитудой осцилляций менее одного процента. Перепринт статьи автора диссертации [128].

Утечка также демонстрирует сложную периодическую зависимость, с сильным осцилляционным поведением внутри основного периода. Такое поведение обусловлено слабой когерентной связью базового состояния и состояний группы $|m_+\rangle$, выраженной малой, но быстрой осциллирующей вероятностью перехода, аналогично осцилляциям Раби в системе двух уровней. Подобная когерентная связь этих состояний исчезает, сохраняя лишь небольшое остаточное заселение, в те моменты времени, когда базовое состояние $|b\rangle$ становится опустошенным. Уход атома в состояния $|b'\rangle$ за счёт несовершенства дает более слабый вклад, чем утечка, и оба процесса, фактически, несущественны в сделанных приближениях и в пределах применимости нашей модели.

На Рис.(4.6) показана временная динамика населенностей для рамановского перехода с отстройкой $\Delta = -5000\gamma$. Ключевые особенности динамики такие же, как в предыдущем примере, но процесс становится более чувствительным к оптимальным условиям (4.15). Это является прямым следствием исчезновения зеэмановского расщепления верхнего сверхтонкого подуровня. Поэтому можно ожидать, что в случае отстроек $-\Delta \gg \Delta_{\text{hpf}} \sim 500\gamma$ несовершенство протокола будет заметнее влиять на эффективность рамановского протокола. Однако и в этом случае несовершенство перехода создает лишь незначительную коррекцию в общем балансе заселения основных рабочих состояний.

Как было подчеркнуто в разделе 4.2.2, для оптимизации протокола рамановского охлаждения в трехмерном режиме желательно, чтобы целевые спиновые состояния $|t_x\rangle$, $|t_y\rangle$ и $|t_z\rangle$ были бы взаимно ортогональны. Это требование не является критическим, но, по крайней мере, эти состояния должны быть линейно независимыми в спиновом подпространстве. Прямым расчетом мы убедились, что в рассмотренных примерах целевые состояния перекрываются с матричными элементами: $|\langle t_x|t_y\rangle| \sim |\langle t_x|t_z\rangle| \sim |\langle t_y|t_z\rangle| \sim 0.66$, так что ими обеспечивается полный, но не ортогональный базис в спиновом подпространстве. Тогда переселяемое состояние $|d\rangle$ формирует перепутанное состояние между спиновой и колебательной подсистемами, как того и требует реализация трехмерной схемы охлаждения.

Если представить себе несколько более усложненную экспериментальную схему, то ортогональность целевых спиновых состояний может быть обеспечена специальным приготовлением управляющих лучей, с использованием различных несущих частот для каждого канала. Зеэмановские подуровни, показанные на Рис.4.3, могут быть разрешены под действием внешнего магнитного поля

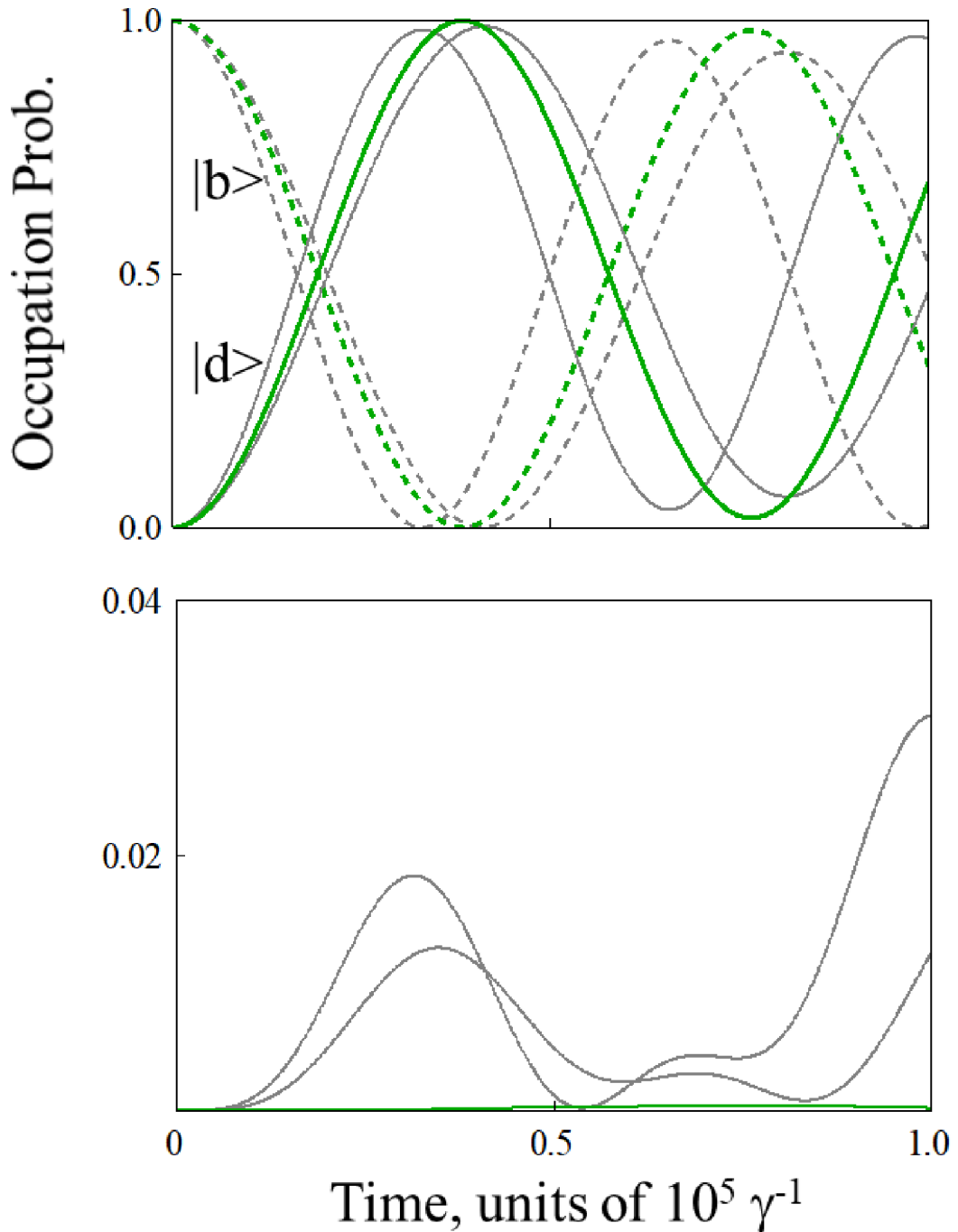


Рисунок 4.6 — То же, что на рис. 4.5 но для отстройки $\Delta = -5000\gamma$. В оптимальном режиме несовершенство переселения вносит незначительный вклад в динамику населенностей, но состояния группы $|b'\rangle$ заселяются в пределах нескольких процентов вероятности, в случае отклонения колебательных чисел от выбранных в качестве приоритетных средних значений. Утечка (нижний график) незначительна и соответствующие зависимости неразрешимы в масштабе графика. Перепринт статьи автора диссертации [128].

так, так что могут быть задействованы различные переходы для каждого из трёх управляющих лазерных полей. В случае если каждый из управляющих лучей был бы настроен в резонанс для конкретного спинового перехода, специально выбранного для каждой колебательной моды, то атом мог бы быть резонансно направлен именно в это спиновое зеемановское состояние, а все три задействованные спиновые состояния были бы взаимно ортогональны. Проблема в реализации такого сценария заключается в дополнительной технической сложности в приготовлении трех лазерных импульсов стробоскопического типа с различающимися несущими частотами, с контролируемым разрешением в мегагерцовом спектральном диапазоне.

4.4 Выводы по главе

В данной главе был рассмотрен протокол охлаждения атома, захваченного микроскопической дипольной ловушкой ("оптическим пинцетом") с помощью комбинационного (рамановского) рассеяния, осуществляемого парами когерентных импульсов, действующих на смежных переходах сверхтонкой спиновой структуры щелочного атома. Необходимость замедления движения атома по всем трём направлениям движения ставит перед экспериментом требование правильной интерпретации сложной векторной картины спиново-колебательных переходов и предварительной теоретической оптимизации.

Нами показано, что для оптимальной трехмерной организации процесса охлаждения следует использовать симметричную геометрию рамановского возбуждения с использованием четырёх лазерных лучей, соответственно направленных вдоль биссектрис октантов в системе главных координат дипольной ловушки. При этом один из лучей выполняет функцию возбуждения атома, а три других управляющих луча обеспечивают стимулированное рамановское переселение атома, независимую передачу импульса и замедление движения атома вдоль главных координат. Если поляризации управляющих лучей взаимно ортогональны, и на рабочих переходах обеспечена компенсация световых сдвигов и вырожденность зеемановских подуровней, то рамановский процесс эффективно сводится к двухуровневому переходу.

Другим важным результатом проведенного анализа является нетривиальное наблюдение, что минимизация циклов протокола, включающих как рамановские переходы, так и возвращающие циклы оптической накачки, требует перевода системы в рамановском процессе в состояние максимально перепутывающее спиновые и колебательные подсистемы. Это подразумевает, что спиновые и колебательные состояния объединятся в так называемое разложение Шмидта в котором присутствуют взаимно ортогональные базисы этих подсистем. В этом случае обеспечивается равномерное замедление движения по всем трём направлениям и количество необходимых полных циклов охлаждения соответствует исходному возбуждению атома. К сожалению, реализовать этот максимально оптимизированный сценарий сложно из-за ряда специфических ограничений в системе оптических переходов щелочного атома.

Заключение

В заключении сформулируем основные результаты диссертационной работы:

1. В Главе 2 на основе последовательного формализма квантовой теории рассеяния исследована проблема рассеяния света (одиночного фотона) на системе тождественных атомов в условиях их квантового вырождения (состояния конденсата Бозе-Эйнштейна = ВЕС). Основываясь на инвариантной теории возмущения, разложении оператора эволюции и суммировании рядов теории возмущений диаграммным методом Фейнмана была построена система графических уравнений (2.9-2.11) для ключевого элемента задачи рассеяния – одночастичной функции Грина, определяющей амплитуду рассеяния и описывающей распространение одиночного оптического возбуждения в конденсате. После исключения вспомогательных уравнений, в приближении слабой пространственной неоднородности среды, удалось построить замкнутое интегрально-дифференциальное уравнение (2.28), описывающее динамику оптического возбуждения. В приближении бесконечной однородной среды уравнение может быть решено аналитически, что привело нас к наглядной интерпретации распространения возбуждения в вырожденном атомном газе как суперпозиционного состояния вещества и фотона – поляритона или свето-экситона. Решение уравнения рассеяния (2.28) в общем случае описывает преобразование состояния этой квазичастицы, обусловленное текущим макроскопическим состоянием конденсата, формирующейся в процессе его внутренней эволюции. Таким образом, поляритонная мода, рождающаяся на краях образца, и вдали от атомного резонанса обладающая законом дисперсии близким к фотонному ($\omega \sim c|\mathbf{k}|$), в определенных условиях становится ответственной за возможность сильного когерентного рассеяния света конденсатом, возникающей вследствие его возможной внутренней неоднородности.
2. В Главе 3 рассмотрена задача рассеяния одиночного фотона на материальных волнах плотности, которые могут возникать в условиях фрагментации квантового состояния ВЕС. В результате интерфе-

ренции, данные волны формируют неоднородную пространственную структуру. В области резонансной атомному переходу это приводит к специфическому механизму рассеяния света аналогичному дифракции Вульфа-Брэгга, обычно наблюдаемой при рассеянии световых волн на упорядоченной решетке точечных рассеивателей. Нами проанализированы как общие черты, так и принципиальные различия в рассеянии света на атомных системах, рассматриваемых в условиях квантового вырождения, в сравнении с рассеянием на одномерных атомных решетках, в которых положение атомов описывается классической статистикой. Обнаружен эффект сильных осцилляций в поведении коэффициента отражения вдали от атомного резонанса (т. е. в области прозрачности для обычного атомного газа той же плотности), обусловленный интерференцией макроскопических материальных волн, который, по-видимому, наблюдался в экспериментах с рассеянием света на конденсате Бозе-Эйнштейна. В области оптической прозрачности образец формирует диэлектрическую среду, обладающую свойствами фотонного кристалла, что является причиной формирования поляритонных мод и усилению когерентного рассеяния света.

3. В Главе 4 проведен теоретический анализ известного и часто применяемого протокола оптического охлаждения одиночного атома методом стимулированного рамановского рассеяния ("рамановское охлаждение- RSC). Атом, предполагается захваченным дипольной ловушкой, представляющей в этом случае, так называемый, "оптический пинцет". В наиболее общем случае захваченный атом является элементом оптической решётки, состоящей из коллектива подобных атомов, расположение которых контролируется в пространстве, а сам массив атомов является квантовым регистром обработки данных в квантовом информационном канале. Целью протокола рамановского охлаждения является стабилизация поступательного движения атома в потенциале дипольной ловушки и его локализация в основном состоянии потенциальной ямы. Нами показано, что для оптимизации протокола необходимо обеспечить квантовое перепутывание спиновой и колебательных подсистем атома в процессе когерентного рамановского перехода. С учетом полной векторной картины процесса RSC нами проведена теоретическая оптимизация режима охлаждения одиночно-

го атома в ловушке, аппроксимированной гармоническим потенциалом. В частности, показано, что режим трехмерного охлаждения может быть наиболее эффективен, если световые лучи направлять вдоль биссектрис главных октантов дипольной ловушки. Автор надеется, что предлагаемые теоретические рекомендации будут полезны при планировании экспериментов с оптическими решетками, состоящими из нейтральных атомов.

Список сокращений и условных обозначений

- LG_p^l Laguerre-Gaussian, моды Лагеррра-Гаусса
- MOT** Magneto-optical trap, магнито-оптическая ловушка (рус. МОЛ)
- RSC** Raman Sideband Cooling, рамановский метод охлаждения
- BEC** Bose-Einstein condensate, конденсат Бозе-Эйнштейна (рус. БЭК)
- OAM** Orbital Angular Momentum, термин, употребляемый относительно света, обладающий орбитальным угловым моментом, по-другому такой свет еще называют twisted light, принято описывать модами Лагеррра-Гаусса
- SAM** Spinor Angular Momentum, речь идет о циркулярно поляризованном свете σ^\pm
- CNOT** Controlled NOT, управляемое «НЕ»

Список литературы

1. *Kaufman, A. M.* Cooling a Single Atom in an Optical Tweezer to Its Quantum Ground State / A. M. Kaufman, B. J. Lester, C. A. Regal // *Phys. Rev. X.* — 2012. — Т. 2, вып. 4. — С. 041014.
2. Zeeman-insensitive cooling of a single atom to its two-dimensional motional ground state in tightly focused optical tweezers / P. Sompet, Y. H. Fung, E. Schwartz, M. D. J. Hunter, J. Phrompao, M. F. Andersen // *Phys. Rev. A.* — 2017. — Т. 95, вып. 3. — С. 031403.
3. Dipole Blockade and Quantum Information Processing in Mesoscopic Atomic Ensembles / M. D. Lukin, M. Fleischhauer, R. Cote, L. M. Duan, D. Jaksch, J. I. Cirac, P. Zoller // *Physical Review Letters.* — 2001. — Vol. 87, no. 037901.
4. *Hammerer, K.* Quantum interface between light and atomic ensembles / K. Hammerer, A. Sorensen, P. E. // *Rev. Mod. Phys.* — 2010. — Vol. 82, no. 1041.
5. Quantum Memories. A Review based on the European Integrated Project “Qubit Applications / C. Simon, M. Afzelius, J. Appel, et al. // *Eur. Phys. J.* — 2010. — Vol. 58, no. 1.
6. Quantized Rotation of Atoms from Photons with Orbital Angular Momentum / M. F. Andersen, C. Ryu, P. Clade, V. Natarajan, A. Vaziri, K. Helmerson, W. D. Phillips // *Physical Review Letters.* — 2006. — Vol. 97, no. 170406.
7. *Kapale, K. T.* Vortex Phase Qubit: Generating Arbitrary, Counterrotating, Coherent Superpositions in Bose-Einstein Condensates via Optical Angular Momentum Beams / K. T. Kapale, J. P. Dowling // *Physical Review Letters.* — 2005. — Vol. 95, no. 173601.
8. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons / A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // *Nature.* — 2001. — Vol. 412. — P. 313—316.

9. Observation of Persistent Flow of a Bose-Einstein Condensate in a Toroidal Trap / C. Ryu, M. F. Andersen, P. Clade, V. Natarajan, V. Helmeron, W. D. Phillips // *Physical Review Letters*. — 2007. — Vol. 99, no. 260401.
10. *Kagan, Y.* Supercurrent stability in a quasi-one-dimensional weakly interacting Bose gas / Y. Kagan, N. V. Prokof'ev, B. V. Svistunov // *Physical Review A*. — 2000. — Vol. 61, no. 045601.
11. *Anderson, B. P.* Atomic-phase interference devices based on ring-shaped Bose-Einstein condensates: Two-ring case / B. P. Anderson, K. Dholakia, E. M. Wright // *Physical Review A*. — 2003. — Vol. 67, no. 033601.
12. *Ezhova, V. M.* On a theory of light scattering from a Bose-Einstein condensate / V. M. Ezhova, L. V. Gerasimov, D. V. Kupriyanov // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2016. — Vol. 769, no. 012045.
13. Light Scattering From an Atomic Gas Under Conditions of Quantum Degeneracy / V. M. Porozova, L. V. Gerasimov, M. D. Havey, D. V. Kupriyanov // *Phys. Rev. A*. — 2018. — Vol. 97, no. 053805.
14. Дифракция Брэгга в атомных системах в условиях квантового вырождения / В. Порозова, В. Пивоваров, Л. Герасимов, К. Д.В. // *Письма в ЖЭТФ*. — 2018. — Т. 108, № 10. — С. 726—735.
15. Raman sideband cooling of a single atom in an optical dipole trap: Towards theoretical optimum in a three-dimensional regime / V. M. Porozova, L. V. Gerasimov, I. B. Bobrov, S. S. Straupe, S. P. Kulik, D. V. Kupriyanov // *Phys. Rev. A*. — 2019. — Vol. 99, no. 043406.
16. *Bohr, N.* On the Constitution of Atoms and Molecules / N. Bohr // *Philosophical Magazine*. — 1913. — Vol. 26.
17. *Hansch, T. W.* Cooling of gases by laser radiation / T. W. Hansch, A. Schawlow // *Optics Communications*. — 1975. — Vol. 13, no. 1. — P. 68—69.
18. Optical-sideband cooling of visible atom cloud confined in parabolic well / W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. Toschek, H. Dehmelt // *Physical Review Letters*. — 1978. — Vol. 41. — P. 233—236.
19. *Wineland, D. J.* Radiation-pressure cooling of bound resonant absorbers / D. J. Wineland, R. E. Drullinger, F. L. Walls // *Physical Review Letters*. — 1978. — Vol. 40. — P. 1642—1639.

20. *Балыкин, В. И.* Наблюдение охлаждения свободных атомов натрия в резонансном лазерном поле со сканируемой частотой / В. И. Балыкин, В. С. Летохов, В. И. Мишин // Письма в ЖЭТФ. — 1979. — Т. 29. — С. 614—617.
21. *Балыкин, В. И.* Радиационная коллимация атомного пучка путем двумерного охлаждения лазерным излучением / В. И. Балыкин, В. С. Летохов, А. И. Сидоров // Письма в ЖЭТФ. — 1984. — Т. 40. — С. 251—253.
22. Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure / S. Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable, A. Ashkin // Physical Review Letters. — 1985. — Vol. 55. — P. 48—51.
23. Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure / E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, D. E. Pritchard // Physical Review Letters. — 1987. — Vol. 59, no. 23. — P. 2631—2634.
24. *Махалов, В. Б.* Приготовление и диагностика двумерного ферми-газа атомов // кандидатская диссертация / В. Б. Махалов // Physical Review Letters. — 2015.
25. *Martianov, K.* Observation of a Two-Dimensional Fermi Gas of Atoms / K. Martiyanov, V. Makhalov, A. Turlapov // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105, no. 030404.
26. *Makhalov, V.* Ground-State Pressure of Quasi-2D Fermi and Bose Gases / V. Makhalov, K. Martiyanov, A. Turlapov // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Vol. 112, no. 045301.
27. Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor / M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell // Science. — 1995. — Vol. 269, no. 5221. — P. 198—201.
28. *DeMarco, B.* Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas / B. DeMarco, D. S. Jin // Science. — 1999. — Vol. 285, no. 5434. — P. 1703—1706.
29. *Barrett, M. D.* All-optical formation of an atomic Bose-Einstein condensate / M. D. Barrett, J. A. Sauer, M. S. Chapman // Physical Review Letters. — 2001. — Vol. 87, no. 010404.

30. All-optical production of a degenerate Fermi gas / S. R. Granade, M. E. Gehm, K. M. O'Hara, J. E. Thomas // Physical Review Letters. — 2002. — Vol. 88, no. 12.
31. *Cho, A.* Coolest science ever headed to the space station / A. Cho // Science. — 2017. — URL: <https://sci-hub.se/https://www.sciencemag.org/news/2017/09/coolest-science-ever-headed-space-station>.
32. Quantum test of the equivalence principle and space-time aboard the International Space Station / J. Williams, S. Chiow, N. Yu, H. Muller // New Journal of Physics. — 2016. — Vol. 18. — URL: <https://sci-hub.se/https://www.sciencemag.org/news/2017/09/coolest-science-ever-headed-space-station>.
33. Sub-poissonian loading of single atoms in a microscopic dipole trap / N. Schlosser, G. Reymond, I. Protsenko, i. Grangier // Nature. — 2001. — T. 411, № 6841. — C. 1024.
34. *Schlosser, N.* Collisional Blockade in Microscopic Optical Dipole Traps / N. Schlosser, G. Reymond, P. Grangier // Phys. Rev. Lett. — 2002. — T. 89, ВЫП. 2. — C. 023005.
35. Near-deterministic preparation of a single atom in an optical microtrap / T. Grünzweig, A. Hilliard, M. McGovern, M. Andersen // Nature Physics. — 2010. — T. 6, № 12. — C. 951.
36. Rapid Production of Uniformly Filled Arrays of Neutral Atoms / B. J. Lester, N. Luick, A. M. Kaufman, C. M. Reynolds, C. A. Regal // Phys. Rev. Lett. — 2015. — T. 115, ВЫП. 7. — C. 073003.
37. Single-Atom Trapping in Holographic 2D Arrays of Microtraps with Arbitrary Geometries / F. Nogrette, H. Labuhn, S. Ravets, D. Barredo, L. Béguin, A. Vernier, T. Lahaye, A. Browaeys // Phys. Rev. X. — 2014. — T. 4, ВЫП. 2. — C. 021034.
38. Two-dimensional transport and transfer of a single atomic qubit in optical tweezers / J. Beugnon, C. Tuchendler, H. Marion, A. Gaëtan, Y. Miroshnychenko, Y. R. Sortais, A. M. Lance, M. P. Jones, G. Messin, A. Browaeys, P. Grangier // Nature Physics. — 2007. — T. 3, № 10. — C. 696.

39. In situ single-atom array synthesis using dynamic holographic optical tweezers / H. Kim, W. Lee, H.-g. Lee, H. Jo, Y. Song, J. Ahn // Nature communications. — 2016. — T. 7. — C. 13317.
40. Atom-by-atom assembly of defect-free one-dimensional cold atom arrays / M. Endres, H. Bernien, A. Keesling, H. Levine, E. R. Anschuetz, A. Krajenbrink, C. Senko, V. Vuletic, M. Greiner, M. D. Lukin // Science. — 2016.
41. An atom-by-atom assembler of defect-free arbitrary 2d atomic arrays / D. Barredo, S. De Léséleuc, V. Lienhard, T. Lahaye, A. Browaeys // Science. — 2016.
42. Synthetic three-dimensional atomic structures assembled atom by atom / D. Barredo, V. Lienhard, S. De Leseleuc, T. Lahaye, A. Browaeys // Nature. — 2018. — T. 561, № 7721. — C. 79.
43. Tunable two-dimensional arrays of single Rydberg atoms for realizing quantum Ising models / H. Labuhn, D. Barredo, S. Ravets, S. De Léséleuc, T. Macri, T. Lahaye, A. Browaeys // Nature. — 2016. — T. 534, № 7609. — C. 667.
44. Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator / H. Bernien, S. Schwartz, A. Keesling, H. Levine, A. Omran, H. Pichler, S. Choi, A. S. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, V. Vuletic, M. D. Lukin // Nature. — 2017. — T. 551, № 7682. — C. 579.
45. Randomized Benchmarking of Single-Qubit Gates in a 2D Array of Neutral-Atom Qubits / T. Xia, M. Lichtman, K. Maller, A. W. Carr, M. J. Piotrowicz, L. Isenhower, M. Saffman // Phys. Rev. Lett. — 2015. — T. 114, вып. 10. — C. 100503.
46. Rydberg-blockade controlled-not gate and entanglement in a two-dimensional array of neutral-atom qubits / K. M. Maller, M. T. Lichtman, T. Xia, Y. Sun, M. J. Piotrowicz, A. W. Carr, L. Isenhower, M. Saffman // Phys. Rev. A. — 2015. — T. 92, вып. 2. — C. 022336.
47. *Saffman, M.* Quantum computing with atomic qubits and Rydberg interactions: progress and challenges / M. Saffman // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. — 2016. — T. 49, № 20. — C. 202001.

48. High-fidelity control and entanglement of Rydberg atom qubits / H. Levine, A. Keesling, A. Omran, H. Bernien, S. Schwartz, A. S. Zibrov, M. Endres, M. Greiner, V. Vuletić, M. D. Lukin // arXiv preprint arXiv:1806.04682. — 2018.
49. *Jozsa, R.* Fidelity for mixed quantum states / R. Jozsa // Journal of modern optics. — 1994. — Т. 41, № 12. — С. 2315—2323.
50. Analysis of imperfections in the coherent optical excitation of single atoms to Rydberg states / S. de Léséleuc, D. Barredo, V. Lienhard, A. Browaeys, T. Lahaye // Phys. Rev. A. — 2018. — Т. 97, вып. 5. — С. 053803.
51. Entangling two transportable neutral atoms via local spin exchange / A. Kaufman, B. Lester, M. Foss-Feig, M. Wall, A. Rey, C. Regal // Nature. — 2015. — Т. 527, № 7577. — С. 208.
52. *Toschek, P. E.* Optical cooling revisited / P. E. Toschek, W. Neuhauser // J. Opt. Soc. Am. B. — 1989. — Т. 6, № 11. — С. 2220—2226.
53. Resolved-Sideband Raman Cooling of a Bound Atom to the 3D Zero-Point Energy / C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, S. R. Jefferts, W. M. Itano, D. J. Wineland, P. Gould // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Т. 75, вып. 22. — С. 4011—4014.
54. *Heinzen, D. J.* Quantum-limited cooling and detection of radio-frequency oscillations by laser-cooled ions / D. J. Heinzen, D. J. Wineland // Phys. Rev. A. — 1990. — Т. 42, вып. 5. — С. 2977—2994.
55. *Ghosh, P.* Ion Traps / P. Ghosh. — Oxford : Clarendon Press, 1995. — 326 с.
56. Cooling and localization of atoms in laser-induced potential wells / R. Taneb, R. Dum, J. I. Cirac, P. Marte, P. Zoller // Phys. Rev. A. — 1994. — Т. 49, вып. 6. — С. 4876—4887.
57. Resolved-Sideband Raman Cooling to the Ground State of an Optical Lattice / S. E. Hamann, D. L. Haycock, G. Klose, P. H. Pax, I. H. Deutsch, P. S. Jessen // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Т. 80, вып. 19. — С. 4149—4152.
58. Degenerate Raman Sideband Cooling of Trapped Cesium Atoms at Very High Atomic Densities / V. Vuletic, C. Chin, A. J. Kerman, S. Chu // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Т. 81, вып. 26. — С. 5768—5771.

59. Sideband cooling of neutral atoms in a far-detuned optical lattice / H. Perrin, A. Kuhn, I. Bouchoule, C. Salomon // EPL (Europhysics Letters). — 1998. — Т. 42, № 4. — С. 395.
60. 3D Raman Sideband Cooling of Cesium Atoms at High Density / D.-J. Han, S. Wolf, S. Oliver, C. McCormick, M. T. DePue, D. S. Weiss // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Т. 85, вып. 4. — С. 724—727.
61. Beyond Optical Molasses: 3D Raman Sideband Cooling of Atomic Cesium to High Phase-Space Density / A. J. Kerman, V. Vuletic, C. Chin, S. Chu // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Т. 84, вып. 3. — С. 439—442.
62. Ground-State Cooling of a Single Atom at the Center of an Optical Cavity / A. Reiserer, C. Nölleke, S. Ritter, G. Rempe // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Т. 110, вып. 22. — С. 223003.
63. Coherence and Raman Sideband Cooling of a Single Atom in an Optical Tweezer / J. D. Thompson, T. G. Tiecke, A. S. Zibrov, V. Vuletic, M. D. Lukin // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Т. 110, вып. 13. — С. 133001.
64. Creation of a Bose-condensed gas of 87Rb by laser cooling / J. Hu, A. Urvoy, Z. Vendeiro, V. Crépel, W. Chen, V. Vuletic // Science. — 2017. — Т. 358, № 6366. — С. 1078—1080.
65. Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms / K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle // Physical Review Letters. — 1995. — Vol. 75, no. 22. — P. 3969—3974.
66. *Bose, S. N.* Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese / S. N. Bose // Zeitschrift für Physik. — 1924. — Vol. 26. — P. 178—181.
67. *Einstein, A.* Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, part I / A. Einstein // Zeitschrift für Physik. — 1924.
68. *Einstein, A.* Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, part II / A. Einstein // Zeitschrift für Physik. — 1925.
69. Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas / L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, C. H. Behroozi // Nature. — 1999. — Vol. 397. — P. 594—598.

70. Superradiant Rayleigh Scattering from a Bose-Einstein Condensate / S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D. E. Pritchard, W. Ketterle // *Science*. — 1999. — Vol. 285. — P. 571–574.
71. *Politzer, H. D.* Light incident on a Bose-condensed gas / H. D. Politzer // *Phys. Rev. A*. — 1991. — Vol. 43, no. 11.
72. *Kagan, Y.* Theory of coherent phenomena and fundamentals in nuclear resonant scattering / Y. Kagan // *Hyperfine Interactions*. — 1999. — Vol. 123. — P. 83–126.
73. *Ивченко, Е. Л.* Экситонные поляритоны в периодических структурах с квантовыми ямами / Е. Л. Ивченко // *Физика твердого тела*. — 1991. — Т. 33, № 8.
74. *Ezhova, V. M.* On a theory of light scattering from a Bose-Einstein condensate / V. M. Ezhova, L. V. Gerasimov, D. V. Kupriyanov // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2016. — Vol. 769, no. 012045.
75. Light scattering from an atomic gas under conditions of quantum degeneracy / V. Porozova, L. Gerasimov, M. Havey, D. Kupriyanov // *Phys. Rev. A*. — 2018. — Vol. 97, no. 053805.
76. Дифракция Брэгга в атомных системах в условиях квантового вырождения / В. Порозова, В. Пивоваров, Л. Герасимов, К. Д.В. // *Письма в ЖЭТФ*. — 2018. — Т. 108, № 10. — С. 726–735.
77. *Moore, M. G.* Theory of Superradiant Scattering of Laser Light from Bose-Einstein Condensates / M. G. Moore, P. Meystre // *Physical Review Letters*. — 1999. — Vol. 83, no. 25. — P. 5202–5205.
78. *Zobay, O.* Spatial effects in superradiant Rayleigh scattering from Bose-Einstein condensates / O. Zobay, G. M. Nikolopoulos // *Physical Review A*. — 2006. — Vol. 73, no. 013620. — 013620-(1–14).
79. *Avetisyan, Y. A.* Spatial effects in superradiant Rayleigh scattering from Bose-Einstein condensates / Y. A. Avetisyan, E. D. Trifonov // *Physical Review A*. — 2013. — Vol. 88, no. 025601. — 025601-(1–3).
80. *Bogolubov, N.* On the theory of superfluidity / N. Bogolubov // *J. Phys. (USSR)*. — 1947. — Vol. 11, no. 1. — P. 23–32.

81. *Gross, E. P.* Structure of a quantized vortex in boson systems / E. P. Gross // Nuovo Cimento. — 1961. — Vol. 20, no. 3.
82. *Pitaevskii, L. P.* Vortex Lines in an Imperfect Bose Gas / L. P. Pitaevskii // Sov. Phys. JETP. — 1961. — Vol. 13, no. 451.
83. *Lifshits, E.* Course of Theoretical Physics: Statistical Physics. Part II / E. Lifshits, L. Pitaevskii. — Oxford: Pergamon Press, 1980.
84. *Kapitza, P.* Viscosity of Liquid Helium below the λ -Point / P. Kapitza // Nature. — 1938. — Vol. 141, no. 74.
85. *Allen, J.* Flow of Liquid Helium II / J. Allen, D. Misener // Nature. — 1938. — Vol. 141, no. 75.
86. Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate / K. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, J. Dalibard // Physical Review Letters. — 2000. — Vol. 84, no. 806.
87. Spin Squeezed Atoms: A Macroscopic Entangled Ensemble Created by Light / J. Hald, J. L. Sorensen, C. Schori, E. S. Polzik // Physical Review Letters. — 1999. — Vol. 83, no. 1319.
88. Cavity-assisted squeezing of a mechanical oscillator / K. Jahne, C. Genes, K. Hammerer, M. Wallquist, E. S. Polzik, P. Zoller // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol. 79, no. 063819.
89. Entanglement Generated by Dissipation and Steady State Entanglement of Two Macroscopic Objects / H. Krauter, C. A. Muschik, K. Jensen, W. Wasilewski, J. M. Petersen, J. I. Cirac, E. S. Polzik // Physical Review Letters. — 2011. — Vol. 107, no. 080503.
90. Inducing vortices in a Bose-Einstein condensate using holographically produced light beams / J. F. S. Brachmann, W. S. Bakr, J. Gillen, A. Peng, M. Greiner // OSA. — 2011. — Vol. 19, no. 14.
91. *Nielsen, M. A.* Quantum Computation and Quantum Information / M. A. Nielsen, I. L. Chuang. — Cambridge University Press, USA, 2010.
92. *Feynman, R. P.* Simulating Physics with Computers / R. P. Feynman // International Journal of Theoretical Physics. — 1982. — Vol. 21. — P. 467–488.
93. *Ландау, Л. Д.* Статистическая физика, Ч. 1, §149 / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1976.

94. *Saffman, M.* Quantum information with Rydberg atoms / M. Saffman, T. G. Walker, K. Molmer // *Rev. Mod. Phys.* — 2010. — Vol. 82, no. 2313.
95. Спектроскопия холодных ридберговских атомов рубидия для применений в квантовой информатике / И. И. Рябцев, И. И. Бетеров, Д. Б. Третьяков, В. М. Энтин, Е. А. Якшина // *УФН.* — 2016. — Т. 186, № 2.
96. Fast Quantum Gates for Neutral Atoms / D. Jaksch, J. I. Cirac, P. Zoller, S. L. Rolston, R. Cté, M. D. Lukin // *Physical Review Letters.* — 2000. — Vol. 85, no. 2208.
97. Evidence for Coherent Collective Rydberg Excitation in the Strong Blockade Regime / R. Heidemann, U. Raitzsch, V. Bendkowsky, B. Butscher, R. Löw, L. Santos, T. Pfau // *Physical Review Letters.* — 2007. — Vol. 99, no. 163601.
98. *Comparat, D.* Dipole blockade in a cold Rydberg atomic sample / D. Comparat, P. Pillet // *J. Opt. Soc. Amer. B.* — 2010. — Vol. 27, no. 6. — A208—A232.
99. Observation of collective excitation of two individual atoms in the Rydberg blockade regime / A. Gaëtan, Y. Miroshnychenko, T. Wilk, A. Chotia, M. Viteau, D. Comparat, P. Pillet, A. Browaeys, P. Grangier // *Nature.* — 2009. — Vol. 5. — P. 115—118.
100. Observation of Rydberg blockade between two atoms / E. Urban, T. A. Johnson, T. Henage, L. Isenhower, D. D. Yavuz, T. G. Walker, M. Saffman // *Nature.* — 2009. — Vol. 5. — P. 110—114.
101. Наблюдение эффекта дипольной блокады при регистрации ридберговских атомов методом селективной ионизации электрическим полем / Е. А. Якшина, Д. Б. Третьяков, В. М. Энтин, И. И. Бетеров, И. И. Рябцев // *ЖЭТФ.* — 2020. — Т. 157, № 2. — С. 206—220.
102. *Bloch, I.* Quantum simulations with ultracold quantum gases / I. Bloch, J. Dalibard, S. Nascimbène // *Nature.* — 2012. — Vol. 8. — P. 267—276.
103. Stationary States of a Rotating Bose-Einstein Condensate: Routes to Vortex Nucleation / K. W. Madison, F. Chevy, V. Bretin, J. Dalibard // *Physical Review Letters.* — 2001. — Vol. 86, no. 4443.
104. *Jaksch, D.* Creation of effective magnetic fields in optical lattices: The Hofstadter butterfly for cold neutral atoms / D. Jaksch, P. Zoller // *New J. Phys.* — 2003. — Vol. 5, no. 56.

105. *Goldman, N.* Quantum Transport in Lattices Subjected to External Gauge Fields / N. Goldman. — VDM Verlag, 2009. — 616 p.
106. *Cohen-Tannoudji, C.* Atom-Photon Interactions. Basic Processes and Applications / C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg. — John Wiley & Sons, Inc., 1992.
107. *Kupriyanov, D.* Mesoscopic coherence in light scattering from cold, optically dense and disordered atomic systems / D. Kupriyanov, I. Sokolov, M. Havey // Physics Reports. — 2017. — Vol. 671. — P. 1–60.
108. *Placzek, G.* The Rayleigh and Raman scattering / G. Placzek. — Berkeley, Calif.: Lawrence Radiation Laboratory, 1959.
109. *Berestetskii, V.* Course of Theoretical Physics: Quantum Electrodynamics / V. Berestetskii, E. Lifshits, L. Pitaevskii. — Oxford: Pergamon Press, 1981.
110. *Dzyaloshinskii, I.* Van der Waals Forces in an Inhomogeneous Dielectric / I. Dzyaloshinskii, L. Pitaevskii // Soviet Physics JETP. — 1959. — Vol. 36, no. 6.
111. Light scattering from a dense and ultracold atomic gas / I. M. Sokolov, M. D. Kupriyanova, D. V. Kupriyanov, M. Havey // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol. 79, no. 053405.
112. *Salomon, C.* Many-Body Physics with Ultracold Gases / C. Salomon, G. Shlyapnikov, L. F. Cugliandolo. — Oxford University Press, 2013.
113. *Levin, K.* Ultracold Bosonic and Fermionic Gases / K. Levin, A. L. Fetter, D. M. Stamper-Kurn. — Elsevier, Oxford, 2012.
114. *Wheeler, J. A.* On the Mathematical Description of Light Nuclei by the Method of Resonating Group Structure / J. A. Wheeler // Phys. Rev. Journals Archive. — 1937. — T. 52. — С. 1107–1122.
115. *Goldberger, M.* Collision Theory / M. Goldberger, K. Watson. — Wiley, 1964.
116. *Ландау, Л. Д.* Электродинамика сплошных сред. Т. VIII / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 2-е изд, перераб. и доп. — М. : изд. «Наука», 1982. — 622 с. — ¶86, задача 4.
117. Light scattering from a dense and ultracold atomic gas / I. M. Sokolov, M. D. Kupriyanova, D. V. Kupriyanov, M. D. Havey // Phys. Rev. A. — 2009. — Vol. 79, no. 053405.

118. *Notermans, R. P. M. J. W.* Comparison of Spectral Linewidths for Quantum Degenerate Bosons and Fermions / R. P. M. J. W. Notermans, R. J. Rengelink, W. Vassen // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117, no. 213001.
119. Large Bragg reflection from one-dimensional chains of trapped atoms near a nanoscale waveguide / N. Corzo, B. Gouraud, A. Chandra, A. Goban, A. Sheremet, D. Kupriyanov, J. Laurat // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117, no. 133603.
120. Coherent backscattering of light off one-dimensional atomic strings / H. Sorensen, J.-B. Beguin, K. Kluge, I. Iakoupov, A. Sorensen, J. Muller, E. Polzik, J. Appel // Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117, no. 133604.
121. Light scattering from an atomic array trapped near a one-dimensional nanoscale waveguide: A microscopic approach / V. Pivovarov, A. Sheremet, L. Gerasimov, V. Porozova, N. Corzo, J. Laurat, D. V. Kupriyanov // Phys. Rev. A. — 2018. — Vol. 97, no. 023827.
122. The onset of matter-wave amplification in a superradiant Bose-Einstein condensate / D. Schneble, Y. Torii, M. Boyd, E. W. Streed, D. E. Pritchard, W. Ketterle // Science. — 2003. — No. 300.
123. Rayleigh superradiance and dynamic Bragg gratings in an end-pumped Bose-Einstein condensate / A. Hilliard, F. Kaminski, R. I. Targat, C. Olausson, E. S. Polzik, J. H. Müller // Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 78, 051403(R).
124. Superradiant Rayleigh Scattering from a Bose-Einstein Condensate / S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D. E. Pritchard, W. Ketterle // Science. — 1999. — No. 285.
125. *Born, M.* Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light / M. Born, E. Wolf. — Pergamon, 1959.
126. *Joannopoulos, J.* Photonic crystals: Molding the flow of light / J. Joannopoulos. — Princeton University Press, 2008.
127. *Floquet, G.* Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques / G. Floquet // Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. — 1883. — Vol. 12.

128. Raman sideband cooling of a single atom in an optical dipole trap: Towards theoretical optimum in a three-dimensional regime / V. Porozova, L. V. Gerasimov, I. B. Bobrov, S. S. Straupe, S. P. Kulik, D. Kupriyanov // *Phys. Rev. A.* — 2019. — Vol. 99, no. 043406.
129. Experimental Issues in Coherent Quantum-State Manipulation of Trapped Atomic Ions / D. J. Wineland, C. Monroe, W. M. Itano, D. Leibfried, B. E. King, D. M. Meekhof // *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* — 1998. — Vol. 103, no. 259.
130. *Landau, L.* Course of Theoretical Physics: Quantum Mechanics / L. Landau, E. Lifshitz. — Oxford : Pergamon Press, 1980. — 616 c.

Список рисунков

- 1.1 На диаграммах представлены: а) оптическая решётка, состоящая из 225 узлов; б) атомный массив, состоящий из 50 атомов. Фотографии предоставлены Центром квантовых технологий МГУ имени М.В. Ломоносова. 17
- 1.2 Геометрическая интерпретация (1.6): Кубит изображается вектором единичной длины в пространстве \mathbb{R}^3 . Голограф вектора образует множество точек, равноудаленных от начала координат, которое называют *сферой Блоха*, а само состояние $|\Psi\rangle$ определяется вектором *Блоха* 27
- 1.3 Основные однокубитовые унитарные операторы [91] 28
- 1.4 На схеме верхний канал соответствует управляющему кубиту, а нижний — управляемому. Взаимодействие кубитов отображено выделенной точкой и вертикальной соединяющей линией. Данный графический символ означает, что преобразование U совершается только в том случае, когда управляющий кубит находится в состоянии $|1\rangle$ 29
- 1.5 1) Квантовая схема, изображающая преобразование CNOT. Верхний канал соответствует управляющему кубиту, а нижний — управляемому, и само преобразование отмечено выделенной точкой и вертикальной соединяющей линией. Управляющий кубит, который не меняет своего состояния в соответствии с действием оператора (1.12), а нижний — управляемый кубит- подвержен преобразованию. 2) Классический элемент XOR, где $x \oplus y$ - сложение по модулю 2 31

- 2.1 Поперечная компонента функции Грина $G_{\perp}(k, \omega)$, построенная для плотности атомов в объёме длины волны излучения $n_0(\lambda_0/2\pi)^3 = 0.05$. Частотная отстройка $\Delta = \omega - \omega_0$ нормирована на скорость спонтанного распада γ , а отстройка $k - k_0$ на $c\gamma$. На рисунке отдельно представлены (а) вещественная часть и (б) мнимая часть функции Грина. Показаны спектральные профили, соответствующие сечениям трехмерных графиков (а) и (б) в крайних точках, и спектральная зависимость диэлектрической проницаемости образца $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$. Перепринт статьи автора диссертации [74]. 47
- 2.2 То же, что и на Рис. 2.1, но для продольной компоненты поляритонного пропагатора $G_{\parallel}(k, \omega)$. Перепринт статьи автора диссертации [74]. 47
- 3.1 Распределение плотности атомов вырожденного газа для различных пространственных профилей параметра порядка: (а) однородное распределение БЭК с постоянной плотностью в геометрии слоя толщиной L с параметром порядка (3.1); (б) неоднородное распределение, параметризованное параметром порядка с тригонометрическим профилем (3.2); (с) интерференция двух материальных волн для двух фрагментов БЭК, распространяющихся навстречу друг другу, см. (3.3). 52

- 3.2 Спектральные зависимости коэффициентов прохождения (верхний график) и отражения (нижний график), вычисленные как независимые результаты решения уравнений рассеяния (2.28), и решения уравнений Максвелла (3.7) в одномерной геометрии для однородной среды, см. Рис.3.1(a). Представленные зависимости построены как функции отстройки $\Delta = \omega - \tilde{\omega}_0$ от частоты смещенного резонанса $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 - \mu_c/\hbar$, см. комментарий в тексте. Результаты представлены для различных толщин L образца, отнесенного к длине волны резонансного излучения λ_0 , и соответствуют плотности $n_0\lambda_0^3 \sim 0.05$. Спектры отражения, соответствующие разным L , неразличимы в пределах разрешения графика. На вставке приведена диэлектрическая проницаемость образца $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$, заданная решением уравнения (2.27), как функция $\omega - \omega_0$. Оба вычисления по (2.28) и (3.7) дают одинаковые результаты, что проиллюстрировано примером $L = 10\lambda_0$, где дополнительно представлен (пунктирной линией) расчет по макроскопической теории Максвелла. Перепринт статьи автора диссертации [75]. 56
- 3.3 То же, что и на Рис.3.2, но для распределения плотности образца, определяемого профилем параметром порядка (3.2), как показано на Рис.3.1(b). В этом случае сглаженных границ когерентное рассеяние света в обратном направлении на много порядков слабее, чем в случае резких границ, ср. с Рис.3.2(b). Перепринт статьи автора диссертации [75]. 57
- 3.4 Зависимость коэффициентов прохождения (верхний график) и отражения (нижний график) от отстройки пробного излучения $\Delta = \omega - \omega_0$ для неоднородного распределения плотности атомов в конденсате, определяемого параметром порядка (3.3) с $\Delta q = k_0 = \omega_0/c$, где ω_0 — резонансная частота атомного перехода. Геометрия возбуждения соответствует Рис.3.1(c). Пунктиром изображена реперная зависимость для коэффициента прохождения света через оптически плотный слой невырожденного газа той же плотности, что и рассматриваемый конденсат. Перепринт статьи автора диссертации [75]. 60

- 3.5 Зависимость коэффициента отражения для того же параметра порядка, что и на (Рис. 3.4), построенная в резонансной точке при $\omega = \omega_0$, как функция $2\pi/\Delta q$ (в единицах λ_0) для различных длин образца L . Перепринт статьи автора диссертации [75]. 61
- 3.6 Геометрия рассеяния света распространяющегося вдоль диэлектрического волновода субволнового диаметра цепочкой атомов расположенных с периодом $d \sim \lambda^{\text{wg}}/2$. Атомы расположены на расстоянии $\rho - a$ от поверхности волновода и обладают спиновой ориентацией в направлении распространения света. Выделенный оптический переход σ_- в энергетической структуре атома преимущественно взаимодействует с фундаментальной модой волновода HE_{11} в левой поляризации, перепринт [121]. 64
- 3.7 Спектральные зависимости коэффициентов прохождения (верхний график) и отражения (нижний график), вычисленные для рассеяния света цепочкой из пяти атомов, удаленных от поверхности волновода на расстояние $\rho - a = 0.5a$ (тонкие синие кривые) и $\rho - a = a$ (толстые красные кривые), и разделенных дистанцией $d = \lambda^{\text{wg}}/2$. Для случая $\rho - a = 0.5a$ дополнительно приведены парциальные вклады рэлеевского канала рассеяния с сохранением поляризационной моды (точечная кривая) и с удержанием обеих поляризационных компонент (пунктирная кривая). Сплошная кривая показывает полный вклад, учитывающий рамановские каналы рассеяния, см. Рис.3.6. Перепринт [121]. 65
- 4.1 Одномерная схема рамановского охлаждения: Комбинационное рассеяние осуществляется между исходным $|s\rangle$ и целевым $|t_\mu\rangle$ ($\mu = x, y, z$) спиновыми состояниями. Пара световых лучей, имеющих несущие частоты ω_0 и ω_j ($j = 1, 2, 3 \Leftrightarrow \mu = x, y, z$) и последовательно направляемых вдоль осей ловушки, приводит к ослаблению колебательного движения с уменьшением квантового числа на единицу $v_\mu \rightarrow v_\mu - 1$. Это обеспечивается резонансной связью в канале рассеяния полных (спиново-колебательных) базового $|b\rangle$ и конечного $|d\rangle$ состояний атома, отличающихся значением колебательного числа. Перепринт статьи автора диссертации [128]. 82

- 4.2 Геометрия световых лучей, обеспечивающих одновременное подавление колебательного движения в трёх измерениях. Четыре световых луча направлены вдоль биссектрис основного и трех прилегающих октантов координат ловушки. Возбуждающий луч, которому соответствует волновой вектор \mathbf{k}_0 , в комбинации с каждым отдельным управляющим лучом \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , и \mathbf{k}_3 формирует импульс отдачи, передаваемый атому в направлении каждой из главных осей ловушки. Это наглядно показано на примере векторного параллелограмма, построенного на волновых векторах \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_1 . Перепринт статьи автора диссертации [128]. 85
- 4.3 Схема переходов, отвечающая геометрии возбуждения, изображенной на Рис. 4.2. Для отдельного j -го управляющего луча рамановский процесс переводит атом на нижний сверхтонкий подуровень основного состояния с уменьшенным на единицу соответствующего этому каналу колебательного числа ν_μ . Каждая управляющая мода связана с одной соответствующей ей колебательной модой, так что $j = j(\mu)$. Главный канал рассеяния конкурирует с нерезонансной утечкой, обусловленной слабым нерезонансным рассеянием в те же спиновые состояния, но с сохранением колебательного числа. Перепринт статьи автора диссертации [128]. 86
- 4.4 На диаграмме показано, что три световых луча со взаимно ортогональными поляризациями, изображенными сплошными стрелками разных цветов, могут иметь взаимно симметричные, но, в общем случае, неортогональные направления распространения вдоль волновых векторов \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 с относительными углами, варьирующимися в интервале от 90° до 120° . Перепринт статьи автора диссертации [128]. 94

- 4.5 *Верхний график:* Временная зависимость вероятностей заполнения базового состояния $|c_b(t)|^2$ (пунктирные кривые), состояния назначения $\sum_m |c_m(t)|^2$ (сплошные кривые) для отстройки от оптического резонанса $\Delta = -1000\gamma$. Зелёные кривые соответствуют рамановскому циклу для средних колебательных чисел $v_\perp = \bar{v}_\perp$ и $v_\parallel = \bar{v}_\parallel$, а серые кривые показывают амплитуду его изменений в пределах одного стандартного отклонения колебательных чисел от их средних значений. Все функции демонстрируют периодическую зависимость, при которой система эволюционирует до состояния назначения в точках экстремума. Реперная точка, соответствующая опустошению основного состояния, определяет длительность импульса τ для оптимального рамановского прохождения. *Нижний график:* Несовершенство переселения $\sum_{b' \neq b} |c_{b'}(t)|^2$ и утечка из основного канала рассеяния $\sum_{m_+} |c_{m_+}(t)|^2$. Заселение состояний $|b'\rangle$, отображенное нижней кривой для оптимальных параметров, вносит незначительный вклад и, фактически, неразрешимо в масштабе графика. Незначительная утечка в состояния $|m_+\rangle$ демонстрирует осциллирующее поведение с амплитудой осцилляций менее одного процента. Перепринт статьи автора диссертации [128]. 98
- 4.6 То же, что на рис. 4.5 но для отстройки $\Delta = -5000\gamma$. В оптимальном режиме несовершенство переселения вносит незначительный вклад в динамику населенностей, но состояния группы $|b'\rangle$ заселяются в пределах нескольких процентов вероятности, в случае отклонения колебательных чисел от выбранных в качестве приоритетных средних значений. Утечка (нижний график) незначительна и соответствующие зависимости неразрешимы в масштабе графика. Перепринт статьи автора диссертации [128]. 100

Приложение А

Краткий обзор диаграммного подхода, используемого в диссертации

В данном приложении представлены технические комментарии к диаграммным уравнениям, построенным и обсуждаемым в основном тексте диссертации. Мы придерживаемся стандартных определений и правил вакуумной диаграммной техники Фейнмана, см., например, [109], но проводим их определенную корректировку с учетом используемого дипольного приближения в описании взаимодействия света и атомов, см. [107].

Оператор эволюции в представлении взаимодействия, рассматриваемый в бесконечных пределах (S -матрица), имеет вид

$$\hat{S} = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}^{(0)}(t) e^{-0 \cdot |t|} \right] \quad (\text{A.1})$$

Этот оператор может быть разложен в суммы, которые после набора определённых перестановок и применения теоремы Вика могут быть перегруппированы в суммы произведений функций Грина (2.7)

$$\begin{aligned} iG_{n'n}(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}, t) &= \langle \text{BEC} | \hat{S}^{-1} T \left[\Psi_{n'}^{(0)}(\mathbf{r}'; t') \Psi_n^{(0)\dagger}(\mathbf{r}; t) \hat{S} \right] | \text{BEC} \rangle^{N-1} \\ &= \langle \text{BEC} | T \left[\Psi_{n'}^{(0)}(\mathbf{r}'; t') \Psi_n^{(0)\dagger}(\mathbf{r}; t) \hat{S} \right] | \text{BEC} \rangle^{N-1} \end{aligned}$$

Нулевыми индексами в Ψ -операторах отражено представление взаимодействия. Каждому из слагаемых сопоставляется определенная диаграмма, а сами диаграммы состоят из объектов, перечисленных ниже.

Невозмущённая причинная функция Грина операторов электрического поля определяется путём перестановки полевых операторов в любом парном произведении от хронологически T -упорядоченной к нормально N -упорядоченной форме

$$iD_{\mu\mu'}^{(E)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = T \left[E_{\mu}^{(0)}(\mathbf{r}; t) E_{\mu'}^{(0)}(\mathbf{r}'; t') \right] - N \left[E_{\mu}^{(0)}(\mathbf{r}; t) E_{\mu'}^{(0)}(\mathbf{r}'; t') \right] \quad (\text{A.2})$$

Данная функция Грина может быть представлен фундаментальным объектом квантовой электродинамики, а именно с фотонным пропагатором причинного типа

$$D_{\mu\mu'}^{(E)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} D_{\mu\mu'}^{(c)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \Bigg|_{\substack{\mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \\ \text{или} \\ t \neq t'}} \quad (\text{A.3})$$

следуя принципу калибровочной инвариантности теории, мы фиксируем пропагатор посредством исключения скалярного потенциала, так что $\mu, \mu' = x, y, z$. Предполагая упрощенные обозначения для векторных и координатно-временных аргументов $\mu, \mathbf{r}, t \rightarrow x$ и $\mu', \mathbf{r}', t' \rightarrow x'$, функция Грина электрического поля изображается волнистой линией

$$iD^{(E)}(x, x') \Leftrightarrow \overset{x}{\sim} \text{~~~~~} \overset{x'}{\sim} \quad (\text{A.4})$$

а индексация концов линии часто опускаются в графических уравнениях. Введенная функция зависит только от разностных пространственных и временных аргументов и может быть представлена разложением Фурье

$$\begin{aligned} D_{\mu\mu'}^{(E)}(\mathbf{k}, \omega) &= \int d^3R \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} D_{\mu\mu'}^{(E)}(\mathbf{R}, \tau) \Big|_{\substack{\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \\ \tau = t - t'}} \\ &= \frac{4\pi\hbar\omega^2}{\omega^2 - \omega_k^2 + i0} \left[\delta_{\mu\mu'} - c^2 \frac{k_{\mu'} k_{\mu}}{\omega^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

где $\omega_k = ck$.

Функция Грина электрического поля может быть выражена через решение микроскопических уравнений Максвелла с точечным источником тока поляризации (точечного диполя) и в области $\omega > 0$ совпадает с положительно-частотной компонентой запаздывающей функции Грина $D_{\mu'\mu}^{(R)}(\mathbf{k}, \omega)$, являющейся фундаментальным решением этих уравнений

$$D_{\mu\mu'}^{(E)}(\mathbf{k}, \omega) \Big|_{\omega > 0} = \frac{\omega^2}{c^2} D_{\mu'\mu}^{(R)}(\mathbf{k}, \omega) \Big|_{\omega > 0} \quad (\text{A.6})$$

Совпадение этих функций в области положительных частот, фактически, обеспечивает возможность их отождествления в приближении вращающейся волны (ПВВ = RWA), и отражается удобным образом с помощью добавления стрелки на диаграммах, как например в (A.4), для указания последовательности виртуальных событий, связанных с конечными точками пропагатора.

Невозмущённая атомная функция Грина определяется путём перестановки атомных операторов в любом парном произведении от хронологически T -упорядоченной к нормально N -упорядоченной форме. Так, например, для операторов возбуждённого состояния она определяется следующим образом

$$iG_{nn'}^{(0)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = T \left[\Psi_n^{(0)}(\mathbf{r}; t) \Psi_{n'}^{(0)\dagger}(\mathbf{r}'; t') \right] - \Psi_{n'}^{(0)\dagger}(\mathbf{r}'; t') \Psi_n^{(0)}(\mathbf{r}; t) \quad (\text{A.7})$$

и аналогично с заменой $n, n' \rightarrow m, m' = 0$ для операторов основного состояния. Используя упрощенные обозначения для спиновых и пространственно-временных аргументов $n, \mathbf{r}, t \rightarrow x$ and $n', \mathbf{r}', t' \rightarrow x'$ атомная функция Грина изображается направленной прямой линией

$$iG^{(0)}(x, x') \Leftrightarrow \begin{array}{c} x \longleftarrow x' \end{array} \quad (\text{A.8})$$

и индексация концов линии часто опускаются в графических уравнениях. Эта функция также зависит только от разницы между ее пространственными и временными аргументами и может быть представлена разложением Фурье

$$\begin{aligned} G_{nn'}^{(0)}(\mathbf{p}, E) &= \int d^3R \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{\frac{i}{\hbar}E\tau - \frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}} G_{nn'}^{(0)}(\mathbf{R}, \tau) \Big|_{\substack{\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \\ \tau = t - t'}} \\ &= \delta_{nn'} \frac{\hbar}{E - p^2/2m_A - E_n + i0} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

где m_A атомная масса и предполагается, что внутреннее атомное состояние является вырожденным для спиновых состояний атом, так что $E_n = \text{const}_n$.

Атомная функция Грина может быть представлена фундаментальным решением уравнения Шредингера для свободного атома, которое описывает распространение атомной волны, изначально локализованной в определенной пространственной точке - атомный пропагатор. Как следует из (A.7) эта функция исчезает, если $t < t'$, так что [в нерелятивистском приближении] пропагатор атома причинного типа идентичен пропагатору запаздывающего типа.

В теории существуют разные вершинные диаграммы, указывающие на оптические взаимодействия разных типов. Если виртуальный фотон взаимодействует с атомом, который также представлен в виде виртуального объекта на диаграмме, то в ПВВ мы связываем процесс со следующими двумя вершинами

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} d_{nm}^{\mu} &\Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \mu \\ \text{---} \bullet \\ \text{---} n \quad \text{---} m \end{array} \\ \frac{i}{\hbar} d_{mn}^{\mu} &\Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \mu \\ \text{---} \bullet \\ \text{---} m \quad \text{---} n \end{array} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Если аналогичный процесс развивается с частицами конденсата, мы связываем его с вершинами другого типа

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{\hbar} d_{nm}^{\mu} \Xi(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_0 t} &\Leftrightarrow \begin{array}{c} \downarrow m \\ \bullet \\ \leftarrow n \quad \rightarrow \mu \end{array} \\
 \frac{i}{\hbar} d_{mn}^{\mu} \Xi^*(\mathbf{r}) e^{+\frac{i}{\hbar} \epsilon_0 t} &\Leftrightarrow \begin{array}{c} \uparrow m \\ \bullet \\ \leftarrow \mu \quad \rightarrow n \end{array}
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

которые описывают либо возбуждение атома из фазы конденсата (верхняя диаграмма), либо его восстановление в фазу конденсата (нижняя диаграмма). Подробная спецификация вершин обычно опускается.

В исходном представлении каждая вершина соответствует интегралу по соответствующим пространственным и временным переменным, и каждая участвующая линия расшифровывается в соответствии с (A.4) и (A.8). В стационарных и однородных условиях, после проведения преобразования Фурье внешние линии расшифровывается в соответствии с (A.5) и (A.9), но внутренние линии, в тех случаях когда они образуют петлю, вносят вклад в интегралы типа свёртки по взаимным переменным, таким как энергия (частота) и импульс (волновой вектор), с сохранением полной энергии и импульса, переносимых диаграммой. Более детальная информация по используемой диаграммной технике содержится в [107; 109].

Приложение Б

Преобразование матрицы плотности в протоколе рамановского охлаждения

В данном приложении приводятся математические детали преобразования матрицы плотности в протоколе рамановского охлаждения, а также объясняются условия, необходимые для выполнения соотношений (4.6)-(4.9), представленных в тексте диссертации.

В результате акта комбинационного рассеяния (4.4), матрица плотности атома (4.1) изменяется следующим образом

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \Rightarrow & \exp \{ \beta [\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{000}] \} |0,0,0\rangle \langle 0,0,0| \times |s\rangle \langle s| + \\ & \sum_{v_x+v_y+v_z \geq 1} \exp \{ \beta [\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{v_x v_y v_z}] \} \times \\ & \sum_{\mu, \mu' = x, y, z} C_{\mu}^{(v_x v_y v_z)} C_{\mu'}^{(v_x v_y v_z)*} |t_{\mu}\rangle | \dots, v_{\mu}-1, \dots \rangle \langle \dots, v_{\mu'}-1, \dots | \langle t_{\mu'}| \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

и представляет собой смешанное состояние, не распадающееся на произведение состояний спиновой и колебательной подсистем и эволюционирующее в соответствии с ур. (4.5).

На следующем этапе протокола в цикле оптической накачки атом переселяется обратно в исходное спиновое состояние $|s\rangle$:

$$\rho^{(1)} = \rho_{\text{vib}} \times |s\rangle \langle s| \quad (\text{Б.2})$$

В данном процессе, являющимся кинетическим и не связанным с унитарным преобразованием полного состояния атома, преобразование спиновой матрицы плотности происходит независимо от поступательного движения атома. Данное требование может быть обеспечено малостью кинематического параметра Лэмба-Дике, благодаря чему колебательные моды не возбуждаются под действием короткого резонансного импульса оптической накачки, содержащего всего нескольких фотонов. В результате цикла оптической накачки система возвращается к исходной факторизованной структуре матрицы плотности (4.1), но с изменённой компонентой, отвечающей колебательным степеням свободы. При условии взаимной ортогональности целевых спиновых состояний $|t_x\rangle$, $|t_y\rangle$

и $|t_z\rangle$ имеем

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{vib}} = \text{Tr}'_{\text{spin}} \hat{\rho} = \exp \{ \beta [\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{000}] \} |0,0,0\rangle \langle 0,0,0| + \\ \sum_{v_x+v_y+v_z \geq 1} \exp \{ \beta [\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{v_x v_y v_z}] \} \sum_{\mu=x,y,z} |C_{\mu}^{(v_x v_y v_z)}|^2 \times |\dots, v_{\mu}-1, \dots\rangle \langle \dots, v_{\mu}-1, \dots| \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

где во втором слагаемом правой части мы можем выделить вклад основного колебательного состояния (то есть члены с $v_x + v_y + v_z = 1$) и объединить их с первым слагаемым. В итоге получаем

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{\text{vib}} = \exp \{ \beta [\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{000}] \} \times \{ 1 + 2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\perp}] + \exp[-\beta \hbar \Omega_{\parallel}] \} |0,0,0\rangle \langle 0,0,0| + \\ \sum_{v_x+v_y+v_z \geq 1} \exp \{ \beta [\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{v_x v_y v_z}] \} \sum_{\mu=x,y,z} |C_{\mu}^{(\dots v_{\mu}+1 \dots)}|^2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\mu}] |v_x, v_y, v_z\rangle \langle v_x, v_y, v_z| \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

где мы дополнительно сместили колебательную сумму на одну единицу во втором слагаемом, чтобы суммирование начиналось с $v_x + v_y + v_z \geq 1$. Полученный оператор плотности описывает изменённое стационарное состояние атома, которое, как видим, уже не описывается распределением Гиббса канонического ансамбля.

В полной матрице плотности (Б.2) отдельно выделим вклад темного состояния

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(1)} = \exp \{ \beta [\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{000}] \} \times \{ 1 + 2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\perp}] + \exp[-\beta \hbar \Omega_{\parallel}] \} \times \\ |0,0,0\rangle \langle 0,0,0| \times |s\rangle \langle s| + \dots \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

который теперь усилен коэффициентом, совпадающим с приближенно вычисленной статистической суммой осциллятора, ограниченной условием $v_x + v_y + v_z \leq 1$.

Для обобщения этого наблюдения на произвольное число шагов рассчитаем коэффициент усиления после второго шага протокола. Для этого мы должны учесть только следующие состояния в разложении (Б.4): $|1,0,0\rangle$ (переселённых из состояний $|2,0,0\rangle$, $|1,1,0\rangle$, и $|1,0,1\rangle$), $|0,1,0\rangle$ (переселённых из $|1,1,0\rangle$, $|0,2,0\rangle$, и $|0,1,1\rangle$), и $|0,0,1\rangle$ (переселённых из $|1,0,1\rangle$, $|0,1,1\rangle$, and $|0,0,2\rangle$). Коэффициенты C , вносящие вклад в (А.3) удовлетворяют следующим условиям нормировки

$$\begin{aligned} |C_x^{(200)}| = 1, \quad |C_y^{(020)}| = 1, \quad |C_z^{(002)}| = 1 \\ |C_x^{(110)}|^2 + |C_y^{(110)}|^2 = 1 \\ |C_x^{(101)}|^2 + |C_z^{(101)}|^2 = 1 \\ |C_y^{(011)}|^2 + |C_z^{(011)}|^2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Сами коэффициенты не являются независимыми и не могут быть приняты в качестве произвольных параметров протокола, поскольку их значения определяются полной структурой действующего рамановского импульса.

Уточним разложение (Б.5), добавив те слагаемые, которые появляются на втором этапе протокола

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}^{(1)} = & \exp \{ \beta [\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{000}] \} \{ 1 + 2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\perp}] + \exp[-\beta \hbar \Omega_{\parallel}] \} |0,0,0\rangle \langle 0,0,0| \times \\
& |s\rangle \langle s| + \exp \{ \beta [\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{100}] \} \left\{ |C_x^{(200)}|^2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\perp}] + |C_y^{(110)}|^2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\perp}] + \right. \\
& \left. |C_z^{(101)}|^2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\parallel}] \right\} |1,0,0\rangle \langle 1,0,0| \times |s\rangle \langle s| + \exp \{ \beta [\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{010}] \} \times \\
& \left\{ |C_x^{(110)}|^2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\perp}] + |C_y^{(020)}|^2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\perp}] + |C_z^{(011)}|^2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\parallel}] \right\} \times \\
& |0,1,0\rangle \langle 0,1,0| \times |s\rangle \langle s| + \exp \{ \beta [\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{001}] \} \left\{ |C_x^{(101)}|^2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\perp}] + \right. \\
& \left. |C_y^{(011)}|^2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\perp}] + |C_z^{(002)}|^2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\parallel}] \right\} |0,0,1\rangle \langle 0,0,1| \times |s\rangle \langle s| + \dots
\end{aligned} \tag{Б.7}$$

После последовательности циклов рамановского преобразования и оптической накачки выделенные вклады будут преобразованы в темное состояние и объединены в один вклад. С учетом (Б.6) на втором этапе протокола мы приходим к следующей структуре матрицы плотности

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}^{(2)} = & \exp \{ \beta [\mathcal{F}(\beta) - \epsilon_{000}] \} \{ 1 + 2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\perp}] + \exp[-\beta \hbar \Omega_{\parallel}] + \\
& 3 \exp[-2\beta \hbar \Omega_{\perp}] + 2 \exp[-\beta \hbar \Omega_{\perp} - \beta \hbar \Omega_{\parallel}] + \exp[-2\beta \hbar \Omega_{\parallel}] \} \times \\
& |0,0,0\rangle \langle 0,0,0| \times |s\rangle \langle s| + \dots
\end{aligned} \tag{Б.8}$$

что можно представить в эквивалентной записи как

$$\hat{\rho}^{(2)} = \exp \{ \beta \mathcal{F}(\beta) \} \sum_{v_x + v_y + v_z \leq 2} \exp [-\beta \epsilon_{v_x v_y v_z}] |0,0,0\rangle \langle 0,0,0| \times |s\rangle \langle s| + \dots \tag{Б.9}$$

Оставшиеся члены, обозначенные многоточием, описывают распределение возбужденных состояний осциллятора, которое не совпадает с каноническим распределением Гиббса. Заселение возбужденных состояний подавляется, и вероятность заселения темного состояния увеличивается множителем, совпадающим со статистической суммой, вычисленной во втором порядке спектра возбуждения осциллятора т.е. ограниченной условием $v_x + v_y + v_z \leq 2$.

Распространяя приведенные выше аргументы на более высокие порядки рамановского протокола, мы можем обосновать главный результат, представленный уравнениями (4.6)-(4.9) в основном тексте диссертации. Можно

отметить, что приведенные выше преобразования могут быть распространены и на случай ангармонического потенциала. Тем не менее важно, что в реальности для осуществления рамановского прохода в многоуровневой конфигурации требуется разумно ограниченное количество управляющих импульсов с разными несущими частотами, что может быть обеспечено для эквидистантных колебательных шагов, однако будет трудно выполнить для высоковозбужденного ангармонического осциллятора.

Приложение В

Матричные элементы, вносящие вклад в (4.23) и (4.24)

В качестве наглядного примера мы рассматриваем только те матричные элементы в уравнениях (4.23) и (4.24), которые ответственны за рамановский процесс с подавлением движения вдоль оси x . Другие матричные элементы эффективного гамильтониана могут быть сконструированы подобным образом из выражений, полученных ниже, простым изменением модовых индексов. По тем же самым причинам мы связываем обозначения $|b'\rangle$ и $|b\rangle$ с состояниями одного типа, которые мы в дальнейшем обозначаем как $|b\rangle$. Мы определяем все вносящие вклад в рамановский процесс матричные элементы полным набором квантовых чисел системы, а затем выражаем их через основные спектральные параметры процесса.

Для коэффициента, ответственного за переселение атома из состояния $|b\rangle$ в состояние $|m\rangle$ в (4.24), получаем

$$\sum_n \frac{\Omega_{mn}^{(1)} \Omega_{nb}^{(0)}}{4\Delta_n} = \sum_{FM} \frac{1}{\hbar^2 \Delta_F} \sum_{w_x, w_y, w_z} \langle F_- M_-; v_x - 1, v_y, v_z | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_1^*) e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} | FM; w_x, w_y, w_z \rangle \times$$

$$\langle FM; w_x, w_y, w_z | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0) e^{+i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} | F_+ M_+; v_x, v_y, v_z \rangle =$$

$$\sum_{FM} \frac{\langle F_- M_- | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_1^*) | FM \rangle \langle FM | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0) | F_+ M_+ \rangle}{\hbar^2 \Delta_F} \langle v_x - 1 | \exp \left[i \frac{2}{\sqrt{3}} k_0 x \right] | v_x \rangle$$
(B.1)

где в последней строке мы использовали соотношение полноты для колебательных степеней свободы атома, возбужденного в верхнее состояние. В определениях частот Раби \mathbf{E}_0 и \mathbf{E}_1 являются векторами комплексных амплитуд подбрасывающей (переселяющей) и управляющей мод соответственно. Отстройка $\Delta_n \equiv \Delta_F$ определяется полным угловым моментом сверхтонких подуровней верхнего (возбужденного) состояния. Экспонента в вибрационном матричном элементе, кроме выбранного для последнего множителя, содержит только x -направленное смещение положения атома от центра ловушки, что показыва-

ет, что гашение колебаний атома в ловушке вдоль направления x связано с включением управляющей моды ω_1 .

Выбранный матричный элемент может быть оценен как

$$\langle v_x - 1 | \exp \left[i \frac{2}{\sqrt{3}} k_0 x \right] | v_x \rangle \approx \langle v_x - 1 | i \frac{2}{\sqrt{3}} k_0 x | v_x \rangle = i \frac{2}{\sqrt{3}} k_0 \sqrt{\frac{\hbar v_x}{2m_A \Omega_\perp}} = i \frac{2}{\sqrt{3}} \eta_\perp \sqrt{v_x} \quad (\text{B.2})$$

где

$$\eta_\perp = k_0 x_0 = k_0 \sqrt{\frac{\hbar}{2m_A \Omega_\perp}} \quad (\text{B.3})$$

есть так называемый параметр Лэмба-Дике, $x_0 = \sqrt{\hbar/2m_A \Omega_\perp}$ – размах волновой функции основного состояния гармонического осциллятора, а m_A – атомная масса. В вычислениях выше мы предполагали, что $\eta_\perp \sqrt{v_x} \ll 1$. В противном случае потребовалась бы точная оценка матричных элементов выше, см. [129]. Тем не менее, справедливость такого сильного неравенства является ключевым требованием для применимости самого RSC-протокола. Напомним, что на стадии протокола оптической накачки крайне важно, чтобы атом сохранял свою колебательную моду, что обеспечивается малым значением параметра Лэмба-Дике.

Матричный элемент в (4.23), ответственный за обратный процесс переселения атома в зеemanовские состояния верхнего сверхтонкого подуровня основного состояния, можно выразить аналогичным образом

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\Omega_{bn}^{(0)} \Omega_{nm}^{(1)}}{4\Delta_n} &= \sum_{FM} \frac{1}{\hbar^2 \Delta_F} \sum_{w_x, w_y, w_z} \langle F_+ M_+; v_x, v_y, v_z | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0^*) e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} | FM; w_x, w_y, w_z \rangle \times \\ &\langle FM; w_x, w_y, w_z | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_1) e^{+i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} | F_- M_-; v_x - 1, v_y, v_z \rangle = \\ \sum_{FM} \frac{\langle F_+ M_+ | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0^*) | FM \rangle \langle FM | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_1) | F_- M_- \rangle}{\hbar^2 \Delta_F} &\langle v_x | \exp \left[-i \frac{2}{\sqrt{3}} k_0 x \right] | v_x - 1 \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

где

$$\begin{aligned} \langle v_x | \exp \left[-i \frac{2}{\sqrt{3}} k_0 x \right] | v_x - 1 \rangle &\approx -\langle v_x | i \frac{2}{\sqrt{3}} k_0 x | v_x - 1 \rangle = \\ &- i \frac{2}{\sqrt{3}} k_0 \sqrt{\frac{\hbar v_x}{2m_A \Omega_\perp}} = -i \frac{2}{\sqrt{3}} \eta_\perp \sqrt{v_x} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Другие слагаемые для подавления колебательного движения вдоль y и z направлений могут быть прямо получены из верхних уравнений подстановкой модовых индексов $1 \rightarrow 2, 3$, колебательных квантовых чисел $v_x \rightarrow v_y, v_z$ и осцилляторных частот $\Omega_\perp \rightarrow \Omega_\perp, \Omega_\parallel$ и соответствующих параметров Лэмба-Дике $\eta_\perp \rightarrow \eta_\perp, \eta_\parallel$.

Другие члены в правой части системы (4.23) и (4.24) содержат коэффициенты, которые являются диагональными в базисе состояний осциллятора и не зависят от колебательных квантовых чисел. Взаимодействие исключительно с переселяющей модой выражено следующими коэффициентами

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{|\Omega_{nb}^{(0)}|^2}{4\Delta_n} &= \sum_{FM} \frac{1}{\hbar^2 \Delta_F} \sum_{w_x, w_y, w_z} \langle F_+ M_+; v_x, v_y, v_z | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0^*) e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} | FM; w_x, w_y, w_z \rangle \times \\ &\langle FM; w_x, w_y, w_z | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0) e^{+i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} | F_+ M_+; v_x, v_y, v_z \rangle = \\ &\sum_{FM} \frac{\langle F_+ M_+ | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0^*) | FM \rangle \langle FM | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0) | F_+ M_+ \rangle}{\hbar^2 \Delta_F} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

и

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{|\Omega_{nm}^{(0)}|^2}{4(\Delta_n - \Delta_{\text{hpf}})} &= \sum_{FM} \frac{1}{\hbar^2 (\Delta_F - \Delta_{\text{hpf}})} \times \\ &\sum_{w_x, w_y, w_z} \langle F_- M_-; \dots, v_\mu 1, \dots | (\mathbf{d} \mathbf{E}_0^*) e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} | FM; w_x, w_y, w_z \rangle \times \\ &\langle FM; w_x, w_y, w_z | (\mathbf{d} \mathbf{E}_0) e^{+i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} | F_- M_-; \dots, v_\mu - 1, \dots \rangle = \\ &\sum_{FM} \frac{\langle F_- M_- | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0^*) | FM \rangle \langle FM | (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0) | F_- M_- \rangle}{\hbar^2 (\Delta_F - \Delta_{\text{hpf}})} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

которые оба нечувствительны к колебательному движению.

Каждая амплитуда \mathbf{E}_0 и \mathbf{E}_j может быть факторизована в виде $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}^{(0)}\mathcal{E}_0$ и $\mathbf{E}_j = \mathbf{e}^{(j)}\mathcal{E}_j$ (без суммы), что даёт нам набор единичных векторов поляризации, отделенных от скалярной части амплитуд комплексного поля. Для нахождения вышеуказанных коэффициентов в замкнутом виде, мы должны оценить матричный элемент для произведения $\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}$, где \mathbf{e} может быть любым из векторов поляризации мод. Хитрость заключается в том, что в приведенных выше уравнениях все компоненты вектора определены относительно системы отсчета, связанной с переселяющим лучом. Так что проекции $\mathbf{e}^{(0)}$ и $\mathbf{e}^{(j)}$ должны быть точно определены и связаны с рассматриваемой экспериментальной геометрией, показанной на диаграммах Рис. 4.2 и 4.4.

Атомный дипольный момент является физической наблюдаемой величиной и реальным вектором, но эту величину удобно выразить в комплексном циркулярном базисе, орты которого определяются как

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_{\pm 1} &= \mp(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Тогда сферические компоненты дипольного оператора задаются его проекциями на эти векторы

$$\begin{aligned} d_q &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_q \\ d_0 &= d_z \\ d_{\pm 1} &= \mp(d_x \pm id_y)/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

и их угловая зависимость пропорциональна сферическим функциям $Y_{1q}(\theta, \varphi)$.

Основной матричный элемент дипольных операторов недиагональный в базисе основного и возбужденного атомных состояний, определяемых квантовыми числами полного углового момента и его проекции

$$(\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_q)_{nm} \equiv \langle F, M | d_q | F_0, M_0 \rangle \quad (\text{B.10})$$

Матричный элемент оператора дипольного момента атома может быть оценен с помощью теоремы Вигнера-Эккарта и факторизован следующим образом

$$\langle F, M | d_q | F_0, M_0 \rangle = \frac{\langle F || d || F_0 \rangle}{\sqrt{2F+1}} C_{F_0 M_0 1 q}^{F M} \quad (\text{B.11})$$

где $C_{F_0 M_0 1 q}^{FM}$ - коэффициенты Клебша-Гордона и $\langle F \| d \| F_0 \rangle$ – приведённый матричный элемент оператора дипольного момента, см..

Квантовые числа F, M and F_0, M_0 – полные угловые моменты атома, в котором электронные (орбитальные и спиновые) и ядерные (спиновые) состояния объединены в связанное сверхтонкое состояние. В расцепленном базисе электронных и ядерных спиновых подсистем дипольный оператор не влияет на ядерную подсистему. В этом случае удобно исключать ядерную подсистему ввиду слабости сверхтонкого взаимодействия относительно спин-орбитального взаимодействия. Опуская детали вывода, мы воспроизводим здесь конечный результат. Приведённый матричный элемент дипольного оператора можно разложить следующим образом

$$\langle F \| d \| F_0 \rangle = (-)^{F_0+J+I-1} [(2F+1)(2F_0+1)]^{1/2} \left\{ \begin{array}{ccc} S & I & F_0 \\ F & 1 & J \end{array} \right\} \langle J \| d \| S \rangle \quad (\text{B.12})$$

где $\langle J \| d \| S \rangle$ – приведенный матричный элемент, когда ядерная подсистема полностью игнорируется. Здесь J - полный (спиновый и орбитальный) угловой момент возбужденного состояния, а $S \equiv J_0 = 1/2$ - электронный спин, совпадающий с полным угловым моментом основного состояния. Величина в фигурных скобках есть $6j$ -символ, возникающий вследствие разложения связанного состояния в базисе электронных и ядерных спиновых подсистем, см. [130].

Выполненная факторизация матричного элемента для атомного дипольного оператора позволяет выразить его через экспериментально измеряемый параметр – скорость спонтанного распада, которая определяется

$$\gamma_J = \frac{4\omega_{J_0}^3}{3\hbar c^3} \frac{|\langle J \| d \| S \rangle|^2}{2J+1} \sim \gamma \quad (\text{B.13})$$

где ω_{J_0} - частота перехода для $J = 1/2$ (D_1 -линия) или $J = 3/2$ (D_2 -линия). В действительности скорость спонтанного распада γ_J слабо чувствительна к расщеплению тонкой структуры в верхнем состоянии, так что она практически одинакова для обеих линий. Таким образом, выражения (??)-(??) позволяют масштабировать весь набор матричных элементов перехода для атомного диполя через один и хорошо известный экспериментальный параметр $\sqrt{\Gamma}$. Но в случае уравнений (4.23) и (4.24) представляется более естественным объединить приведённый дипольный момент и полевые амплитуды в набор приведенных частот Раби, определяемых

$$\begin{aligned}\Omega^{(0)} &= 2|\langle J \parallel d \parallel S \rangle| \mathcal{E}_0 \\ \Omega^{(j)} &= 2|\langle J \parallel d \parallel S \rangle| \mathcal{E}_j\end{aligned}\tag{B.14}$$

в масштабе скорости распада γ .