

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
Российской академии наук

на правах рукописи

Алексеев Павел Сергеевич

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ
В НАНОСТРУКТУРАХ

Специальность:

1.3.3 - теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург

2021

Оглавление

Введение	3
1 Гидродинамика двумерных электронов	16
1.1 Обзор литературы	16
1.2 Гигантское отрицательное магнетосопротивление	22
1.3 Вязкоупругий резонанс	38
1.4 Поперечные магнитозвуковые волны	45
1.5 Спиновый резонанс в гидродинамической компоненте течения	56
2 Микроскопическая теория гидродинамического транспорта	63
2.1 Обзор литературы	63
2.2 Гидродинамика сильно неидеальной электронной ферми-жидкости	66
2.3 Вязкость электронного ферми-газа	78
3 Гидродинамика электрон-дырочных систем	87
3.1 Обзор литературы	87
3.2 Линейное магнетосопротивление за счёт рекомбинации	92
3.3 Магнетосопротивление за счёт термоэлектрического эффекта	114
3.4 Магнетосопротивление за счёт вязкости и рекомбинации	123
4 Формирование гидродинамического режима	135
4.1 Обзор литературы	135
4.2 Взаимодействующие электроны в баллистических образцах	141
4.3 Баллистическое течение в очень малых магнитных полях	153
4.4 Баллистическое течение в умеренных магнитных полях	166
4.5 Фазовый переход от баллистики к гидродинамике	173

Список публикаций по теме диссертации	185
Заключение	187
Приложения	190
А Вязкие течения в реалистичных образцах с дефектами	191
В Высокочастотные вязкоупругие течения электронной жидкости	196
С Кинетика слабо взаимодействующих двумерных электронов	210
Д Транспорт в реалистичных электрон-дырочных системах	244
Е Электрон-дырочная система с неоднородной температурой	252
Ф Качественное рассмотрение баллистического течения	262
Г Переход между баллистическим и гидродинамическим течениями	268
Литература	283

Введение

Краткий обзор истории работ по теме диссертации. Актуальность темы диссертации. Идея о том, что состояние конденсированной среды при низких температурах описывается как система квазичастиц, которые могут формировать газ или жидкость, впервые была последовательно разработана, по-видимому, Л. Д. Ландау в работе [1]. В ней была построена теория сверхтекучести гелия ^4He , в котором квазичастицами являются фононы и ротоны. Такие квазичастицы являются бозонами, как и исходные частицы жидкости – атомы ^4He . Специфической особенностью гелия, обусловленной динамикой взаимодействующих фононов, является наличие двух типов звука: обычного (первого) звука и второго звука. Последний является звуком в газе фононов: он обусловлен частыми столкновениями фононов друг с другом с сохранением импульса. Иначе говоря, второй звук есть волны плотности обычного звука, поэтому при его распространении осциллируют температура и энтропия жидкости, а плотность жидкости остается невозмущенной. Такие волны были впервые обнаружены в жидком гелии ^4He в работе [2]. Затухание второго звука происходит за счёт диссипативных процессов в газе фононов: вязкости и теплопроводности.

Идея о возможности распространения второго звука в твёрдых диэлектриках была высказана в работах [2, 3] и разработана в статье [4]. Это явление впервые наблюдалось в твёрдом гелии [5], в котором достигается очень малая плотность дефектов [6]. В дальнейшем эти волны наблюдались в “обычных” твёрдых телах: Bi , Ge , графит [7]. Активно развивалась теория фононной гидродинамики, описывающей второй звук и родственные явления (см., например, работы [8]-[12] и монографию В. Л. Гуревича “Кинетика фононных систем” [13]).

В работах [14, 15] была построена теория ферми-жидкости, основанная на идеях работы [1] об описании движений квантовой жидкости с помощью квазичастиц. Ферми-жидкость является системой взаимодействующих ферми-частиц при низких температурах. Квазичастицы в ней также являются фермионами, во многом похожими на исходные частицы. Взаимодействие между квазичастицами вызывает как поправки к их энергетическому спектру при возмущении их распределения (упругая часть взаимодействия), так и рассеяние их друг на друге (диссипативная часть взаимодействия). Для свойств ферми-жидкости очень важно, имеют ли

исходные частицы электрический заряд. Важный пример ферми-жидкости из незаряженных фермионов представляет собой изотоп гелия ${}^3\text{He}$. Примеры заряженной ферми-жидкости – электроны проводимости в твёрдых телах при низких температурах.

В ферми-жидкости влияние возмущения распределения квазичастиц на их спектр приводит к возможности распространения высокочастотных упругих волн, называемых нулевыми звуками. Для ферми-жидкости из слабо взаимодействующих частиц упругие волны были открыты в работе [16] ещё до появления общей концепции ферми-жидкости в работах [14, 15]. При сколь угодно малой силе отталкивающего взаимодействия квазичастиц и при достаточно низкой температуре всегда существует продольный нулевой звук [17]. С ростом силы взаимодействия появляются незатухающие моды поперечной и более сложных поляризации [17].

Нулевых звуков нет в почти идеальном газе исходных частиц при не слишком низких температурах, когда межчастичное взаимодействие приводит только к рассеянию при редких межчастичных столкновениях. При достаточно низких температурах и высоких частотах, когда нулевые звуки становятся возможны, столкновения квазичастиц приводят к их слабому затуханию. Нулевой звук в незаряженной ферми-жидкости наблюдался для ${}^3\text{He}$ [17]. В системе заряженных частиц при любой температуре всегда возможно распространение плазмонов – упругих волн, связанных с возмущением заряда и распространяющихся как в горячей, так и в холодной плазме (то есть, в заряженной ферми-жидкости).

С другой стороны, в работах Р. Н. Гуржи и соавторов была предложена и разработана идея о гидродинамическом транспорте в вязком газе из электронов проводимости, формирующемся за счёт частых межчастичных столкновений (см. работы [18]-[21] и обзор [22]). Такая система по своей природе аналогична газу фононов в фоновой гидродинамике. Рассматривались случаи объёмных металлов, в режиме, когда основную роль играют не собственно столкновения электронов друг с другом, а столкновения электронов с фононами с сохранением импульса, приводящие к формированию вязкого электрон-фононного газа. Из кинетического уравнения были получены транспортные уравнения типа Навье-Стокса для такого электрон-фононного газа. При этом, однако, даже для высокочастотных течений [20], не обсуждались ферми-жидкостные эффекты, связанные с возмущением спектра квазичастиц за счёт неравновесности функции распределения.

В статьях [18]-[21] изучен гидродинамический транспорт в очень чистых и достаточно узких образцах, течение электронной жидкости в которых аналогично течению обычных жидкостей по капиллярам. За счёт сдвиговой вязкости, неравновесный импульс электрон-фононной жидкости переносится из середины течения к краям образца, где релаксирует на шероховатостях

краёв. Возникает неоднородное по сечению течение.

С микроскопической точки зрения, ключевым фактором для проявления эффектов от сдвиговой вязкости в транспорте является сохранение импульса квазичастиц при их рассеянии друг на друге [22]. Для важной роли таких процессов, во-первых, требуется малая плотность дефектов, при рассеянии на которых квазичастицы теряют импульс, а также малая интенсивность межчастичных столкновений “с перебросом импульса”, которые также приводят к релаксации импульса [23]. Количественно это означает, что ширина образца должна быть меньше длины свободного пробега относительно релаксации импульса за счёт этих процессов в объёме образца. С другой стороны, ширина образцов должен быть не слишком малой, много больше длины свободного пробега относительно сохраняющих импульс столкновений (или диаметра циклотронной окружности). В узких образцах, не удовлетворяющих последнему условию, электроны чаще всего рассеиваются на краях и формируется баллистический режим транспорта.

По-видимому, в связи с этими требованиями на чистоту структур и размеры образцов, гидродинамический режим электронного транспорта не был реализован экспериментально вплоть до 1990-ых годов. В работе [24] было сообщено о нетривиальной зависимости дифференциального сопротивления узких образцов квантовых ям GaAs от тока, что было интерпретировано авторами как проявление баллистического и гидродинамического режимов транспорта. Однако, в работе [25] было показано, что одни только межэлектронные столкновения в вырожденном двумерном электронном газе не приводят к формированию гидродинамического режима в образцах с размерами, которые были у изученных в работе [24]. Последнее утверждение связано с большим различием в таких системах у скоростей релаксации чётных и нечетных гармоник функции распределения электронов по углу скорости электронов.

В последние 5 лет произошёл прорыв в экспериментальном изучении гидродинамических явлений в наноструктурах. А К. Геймом и его коллегами в работах [26]-[29] было экспериментально продемонстрировано, что в очень чистых образцах графена с умеренно малыми ширинами формируются течение вязкой электронной жидкости. Свидетельствами этого была зависимость тока от размера канала, характерная для вязкого течения, а также появление водоворотов в образцах сложной геометрии. Последние наблюдаются по противоположным направлениям тока и электрического поля между некоторыми из контактов (теория этого явления развита в работе [30]). Параллельно с обнаружением гидродинамического транспорта электронов в графене, аналогичный гидродинамический режим наблюдался в сверхчистых металлах: в слоистом квазидвумерном металле CoPdO_2 [31] и вейлевском полуметалле Wp_2 [32]. В недавних работах [33, 34] с помощью пространственно-разрешенных измерений электриче-

ского и магнитного полей удалось экспериментально наблюдать в длинных полосках графена профили распределения холловского поля и плотности тока по сечению полосок. Было продемонстрировано, что для электронной жидкости в изученных образцах реализовано течение Пуазейля с параболическим профилем.

В Физико-техническом институте им. А. Ф. Иоффе изучение гидродинамических явлений в электронных системах в твёрдых телах имеет давнюю историю. Например, в работе [35] М. И. Дьяконова и М. С. Шура была теоретически изучена гидродинамика электронов в канале полевого транзистора с затвором с учётом нелинейных эффектов в уравнениях непрерывности и Навье-Стокса. Было показано, что динамика электронной жидкости при наличии частых межчастичных столкновений и редких столкновений с дефектами похожа на гидродинамику одномерных течений на мелкой воде, в частности, могут распространяться волны, аналогичные гравитационным волнам на мелкой воде. Была предсказана нестабильность при асимметричных граничных условиях на двух концах канала.

Целью работ, изложенных в диссертации, является построение теории гидродинамического транспорта в двумерных электронных и электрон-дырочных системах в наноструктурах и объяснение экспериментов по магнетотранспорту в этих системах.

Квантовые ямы в гетеросистемах GaAs/AlGaAs с момента своего создания до настоящего времени являются одним из самых изученных и широко применяющихся в технике типов наноструктур. Для двумерных электронов в таких ямах при низких температурах были достигнуты наиболее высокие значения “номинальной” подвижности электронов $\mu_{exp} = \sigma/n_0$, равной отношению наблюдаемой удельной проводимости σ к плотности n_0 электронов [36]-[38]. Значения такой подвижности отвечают “номинальным” длинам свободного пробега l_{eff} , определяемым по формуле Друде $\mu_{exp} = el_{eff}/(mv_F)$, порядка сотен микрон, что сравнимо или больше размеров типичных образцов (здесь e – абсолютная величина заряда электрона, m и v_F – его эффективная масса и микроскопическая скорость). В этой связи, транспорт в таких структурах, по-видимому, не является омическим. Плавный и повторяющийся от образца к образцу характер зависимостей сопротивления от температуры, магнитного поля и других параметров говорит о том, что транспорт также не является баллистическим в значительной части образцов и диапазонов параметров. Поэтому логично ожидать, что в таких структурах при достаточно частых межэлектронных столкновениях и/или при достаточной большой силе упругих эффектов от межэлектронного взаимодействия может формироваться вязкая жидкость из двумерных электронов, течение которой в электрическом поле определяет перенос заряда и описывается гидродинамически, в духе идей работ [14, 15],[18]-[21].

Разработке теории гидродинамического магнетотранспорта в системах вырожденных двумерных электронов и анализу проявлений такого магнетотранспорта в экспериментах на квантовых ямах GaAs посвящена значительная часть диссертации. Во-первых, построена теория низкочастотных и высокочастотных вязких течений электронного газа или жидкости без учёта внутренних упругих напряжений (ферми-жидкостных эффектов), когда жидкость формируется только за счёт столкновений квазичастиц. Во-вторых, изучена динамика сильно неидеальной электронной жидкости, описываемой в рамках теории ферми-жидкости Ландау. В такой системе из-за межчастичного взаимодействия становятся также важны внутренние сдвиговые напряжения и возбуждаются поперечные сдвиговые волны. Такие волны являются признаком перехода жидкости в *сильно вязкое состояние*, промежуточное между обычной жидкостью, в которой сдвиговые напряжения быстро затухают, и аморфным твердым телом, в котором есть не только продольный, но и поперечные звуки с близкими скоростями.

Для сильно неидеальной электронной жидкости расчёт коэффициента вязкости был выполнен в работе [39]. Насколько известно автору, до недавнего времени в литературе отсутствовал расчёт вязкости для слабо неидеального двумерного вырожденного газа с реалистичным законом взаимодействия между квазичастицами (экранированный кулоновский потенциал). Для количественного сопоставления теории и экспериментов по гидродинамическому транспорту необходимо знать температурную зависимость вязкости при произвольной силе межчастичного взаимодействия, контролируемой плотностью двумерных электронов n_0 . В этой связи в диссертации выполнен микроскопический расчёт вязкости для случая слабого межчастичного взаимодействия и проведено количественное сопоставление этого результата и результата [39] с экспериментальными данными по вязкости, полученными из измерений магнетосопротивления в высокоподвижных квантовых ямах GaAs с разными концентрациями электронов n_0 .

Другой целью диссертации является построение теории гидродинамических эффектов в транспорте в двумерных системах, в которых, наряду с пространственной неоднородностью потоков частиц (и квазичастиц), важную роль играет неоднородное в пространстве возмущение какого-либо их дополнительного параметра. Диффузия этого параметра в перпендикулярном электрическому току направлении может сильно влиять на потоки носителей, в частности, приводить к возмущениям потоков около краёв образца. Такими дополнительными параметрами могут быть: спин электронов, их температура, возмущения плотностей носителей разных типов в несколько-компонентных жидкостях. С точки зрения итоговых феноменологических уравнений гидродинамики, все эти явления похожи на эффект второй (объёмной) вязкости в макроскопических жидкостях (последний состоит в появлении неравновесной и неоднородной

в пространстве поправки к давлению, пропорциональной дивергенции потока).

Гидродинамические явления типа второй вязкости, как и формирование пространственно-неоднородных течений за счёт сдвиговой вязкости, проявляются в некотором диапазоне промежуточных ширин образцов. Оказывается, что первые явления возможны как в совершенно чистых образцах, так и в не очень широких образцах с доминирующим рассеянием носителей на дефектах. Ниже будем называть такие образцы омическими, хотя в них возможны гидродинамические эффекты типа второй вязкости. В диссертации рассматриваются следующие явления этого типа: влияние возмущения спиновой плотности на высокочастотное магнетосопротивление двумерных электронов в омическом образце; магнетотранспорт за счёт рекомбинации, диффузии и/или теплопереноса в двухкомпонентной электрон-дырочной системе в омическом образце; магнетотранспорт в электрон-дырочной системе в чистом образце за счёт эффектов сдвиговой вязкости и рекомбинации.

Наконец, ещё одним направлением диссертации является изучение формирования вязкой жидкости из баллистических слабо взаимодействующих двумерных электронов. Во-первых, представляет интерес изучить влияние межчастичных столкновений на баллистический транспорт в этой системе в отсутствии магнитного поля и в слабых полях. Во-вторых, целью этого направления является построение теории перехода от баллистического течения к гидродинамическому, происходящего в рассматриваемой системе двумерных электронов с редкими межэлектронными столкновениями с ростом магнитного поля. Такая теория, в частности, должна дать объяснение недавним экспериментам по наблюдению формирования течения Пуазейля из двумерных электронов в чистых полосках графена и длинных образцах квантовых ям GaAs.

Научная новизна работы состоит в решении следующих задач:

1. Изучен магнетотранспорт в двумерной электронной жидкости в условиях формирования пространственно-неоднородного течения за счёт сдвиговой вязкости и релаксации импульса на неидеальностях краёв образца. На основе развитой теории дано объяснение эффекту гигантского отрицательного магнетосопротивления, наблюдавшемуся в высокоподвижных квантовых ямах GaAs и других наноструктурах. Последний результат свидетельствует о формировании в этих материалах вязкой электронной жидкости.

2. Предсказан резонанс в коэффициентах сдвиговой вязкости двумерных электронов при частоте течения, равной удвоенной циклотронной частоте электронов. Показано, что в чистых образцах этот резонанс должен проявляться в коэффициенте затухания магнитоплазмонов.

3. Изучены поперечные сдвиговые магнитозвуковые волны в системе сильно взаимодействующих вырожденных электронов. Рассчитан их закон дисперсии и их вклад в линейный

отклик жидкости на радиочастотное электрическое поле. Даны аргументы в пользу того, что возбуждение таких волн объясняет аномальный пик в фотосопротивлении наиболее качественных высокоподвижных квантовых ям GaAs.

4. Изучен гидродинамический вклад в высокочастотное сопротивление омических образцов, обусловленный формированием вблизи их краёв слоёв с возмущенной плотностью спина за счёт спинового эффекта Холла. Такой вклад в ток может позволить наблюдать спиновый резонанс в проводниках с большим спин-орбитальным взаимодействием по измерению высокочастотного сопротивления (импеданса) этих образцов.

5. Выполнен микроскопический вывод гидродинамических уравнений типа Навье-Стокса для сильно-неидеальной электронной ферми-жидкости. Показано, что циклотронная частота, входящая в коэффициенты вязкости такой жидкости, отличается от “обычной” циклотронной частоты, определяющей частоту циклотронного резонанса жидкости. Величина перенормировки циклотронной частоты может быть использована для определения квадрупольной константы F_2 функции Ландау, описывающей взаимодействия квазичастиц ферми-жидкости.

6. Выполнен микроскопический расчёт вязкости двумерного слабо-неидеального электронного ферми-газа с учётом реалистического потенциала взаимодействия электронов (экранированный кулоновский потенциал). Показано, что для вязкости основную роль играют встречные столкновения электронов с малым суммарным импульсом, приводящие к рассеянию на малые углы. Выполненный анализ экспериментальных данных по гидродинамическому магнетотранспорту показывает, что степень неидеальности системы вырожденных электронов может быть экспериментально определена по температурным зависимостям вязкости.

7. Изучены гидродинамические магнетотранспортные эффекты в электрон-дырочных системах в омических образцах в точке электронейтральности (концентрации электронов и дырок равны) и вне её. Предсказано линейное магнетосопротивление в точке электронейтральности в пределе классически больших магнитных полей, обусловленное формированием высокопроводящих приграничных каналов за счёт рекомбинации и диффузии носителей. Выполненный анализ экспериментальных данных по магнетосопротивлению и эффекту Холла в двухслойном графене и квантовых ямах HgTe/CdTe показывает, что предсказанный механизм магнетосопротивления может объяснить наблюдавшееся сильное линейное магнетосопротивление и необычные зависимости холловского сопротивления от магнитного поля.

8. Изучен магнетотранспорт в электрон-дырочных системах в омических образцах за счёт рекомбинации, термоэлектрического эффекта и теплообмена с фононами. Предсказано положительное магнетосопротивление с немонотонной скоростью роста, обусловленное формиро-

ванием прикраевых слоёв с возмущенными температурой и потоками электронов и дырок.

9. Изучен магнетотранспорт в электрон-дырочной жидкости со слабо взаимодействующими друг с другом электронной и дырочной компонентами в образцах без дефектов. Предсказано немонотонное магнетосопротивление за счёт формирования приграничных слоёв, в которых устанавливается баланс между процессами сдвиговой вязкости, диффузии и рекомбинации.

10. Построена теория баллистического транспорта взаимодействующих двумерных электронов в слабом магнитном поле. Показано, что магнетосопротивление и эффект Холла сильно зависят от конкретной геометрии образца. Для коротких образцов (с длиной того же порядка величины, что их ширина) или образцов, которые можно рассматривать как набор коротких образцов, магнетосопротивление оказывается отрицательным и не зависящим от температуры. Проведенный анализ экспериментов свидетельствует, что такое магнетосопротивление наблюдалось на многих образцах высокоподвижных квантовых ям GaAs.

11. Показано, что для длинных баллистических образцов с прямыми шероховатыми краями течение двумерных электронов в слабом магнитном поле является неоднородным в пространстве за счёт появления групп электронов с качественно различными типами траекторий: пересекающих и не пересекающих образец. Такое течение приводит к положительному “неаналитическому” магнетосопротивлению и аномально большому холловскому сопротивлению.

12. Изучен переход между баллистическим и гидродинамическим режимами течения двумерных электронов в длинных чистых образцах, происходящий с ростом магнитного поля. Переход контролируется баллистическими размерными эффектами и межчастичными столкновениями, оказывается резким и проявляется в изломах у зависимостей сопротивлений от магнитного поля. Анализ экспериментальных данных свидетельствует, что это явление наблюдалось в длинных образцах графена и высокоподвижных квантовых ям GaAs.

Научная и практическая значимость работы. Анализ экспериментальных данных по гигантскому отрицательному температурно-зависимому магнетосопротивлению на основе развитой в диссертации теории позволил впервые сделать вывод о формировании вязкой электронной жидкости и реализации гидродинамического режима транспорта в высокоподвижных квантовых ямах GaAs, изученных в работах [40]-[45].

На основе развитой в диссертации теории, независимо от автора диссертации, был выполнен анализ экспериментов [46]-[48], и было сделано заключение о формировании вязкой электронной жидкости в изученных в них квантовых ямах GaAs. В этих работах также наблюдались дополнительные яркие признаки наличия вязкой электронной жидкости, в частности, сильное падение сопротивления с температурой (называемое эффектом Гуржи). Аналогичное

сильное отрицательное магнетосопротивление недавно наблюдалось также в графене [28] и вейлевском полуметалле $W\text{P}_2$ [32], для которых до этого были получены независимые свидетельства формирования вязкой жидкости из электронов проводимости.

Таким образом, предложен метод обнаружения вязкой электронной жидкости в наноструктурах по гигантскому отрицательному температурно-зависимому магнетосопротивлению.

Предсказан новый тип магнитного резонанса в газе и жидкости из двумерных электронов. Резонанс возникает в высокочастотных вязких течениях с частотами вблизи удвоенной гармоники циклотронного резонанса, при этом другие гармоники циклотронного резонанса отсутствуют. Линейный отклик газа или жидкости на радиочастотное поле с таким резонансом является отличительным признаком высокочастотного вязкого течения электронов. В сильно вязкой электронной жидкости резонанс проявляется в её линейном отклике через формирование поперечных магнитозвуковых (сдвиговых) волн. По-видимому, предсказанный резонанс наблюдался на квантовых ямах GaAs с рекордной подвижностью как гигантский пик в фотосопротивлении [49, 50] и характерная особенность в фотовольтаическом эффекте [51]. Предложен способ экспериментального определения квадрупольной константы Ландау F_2 по сдвигу частоты этого пика относительно точного удвоенного значения “обычной” циклотронной частоты, наблюдаемой по циклотронному резонансу.

Предложен метод наблюдения спинового резонанса в омических образцах двумерных и объёмных проводников с сильным спин-орбитальным взаимодействием по поправке к высокочастотному току от приграничных слоёв с возмущённой спиновой плотностью.

Для слабо неидеального двумерного ферми-газа рассчитано время релаксации сдвиговых напряжений, определяющее коэффициенты вязкости. Этот результат необходим для количественного анализа экспериментов по гидродинамическому транспорту в двумерных системах.

Изучены механизмы магнетотransпорта в электрон-дырочных двумерных системах, обусловленные эффектами диффузии, рекомбинации, термоэлектрическим эффектом, а также сдвиговой вязкостью. Полученные результаты могут быть полезны для диагностики материалов и конкретных образцов с двумя типами носителей.

Изучен переход между баллистическим и гидродинамическим режимами транспорта двумерных электронов с ростом магнитного поля. Показано, что в длинных образцах высокого качества он является фазовым переходом. Выполнен анализ экспериментальных данных по магнетотransпорту в длинных образцах графена и квантовых ям GaAs. Анализ свидетельствует, что в этих системах был реализован описанный в теории переход. Наблюдение такого перехода может быть использовано для диагностики наноструктур очень высокого качества.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Сильное отрицательное температурно-зависимое магнетосопротивление, наблюдаемое в квантовых ямах GaAs очень высокого качества, объясняется в гидродинамической модели электронного транспорта и свидетельствует о формировании вязкой жидкости из двумерных электронов.

2. Высокочастотные коэффициенты вязкости электронной жидкости в магнитном поле имеют резонанс на удвоенной циклотронной частоте, который проявляется в отклике жидкости на радиочастотное излучение; такой резонанс при отсутствии резонансов на других гармониках является признаком гидродинамического высокочастотного транспорта.

3. При колебаниях сильно неидеальной двумерной электронной жидкости возбуждаются поперечные магнитозвуковые волны сдвиговой деформации, закон дисперсии которых отражает резонанс в коэффициентах вязкости; возбуждение этих волн объясняет появление гигантского пика в фотосопротивлении квантовых ям GaAs рекордного качества.

4. Кинетическое уравнение для высокочастотной динамики электронной жидкости в пределе большой величины межчастичного взаимодействия сводится к гидродинамическим уравнениям; циклотронная частота, входящая в высокочастотную вязкость в этих уравнениях, перенормируется межчастичным взаимодействием и становится отличной от “обычной” циклотронной частоты, определяющей циклотронный резонанс.

5. В двумерных электрон-дырочных системах в образцах с беспорядком в классически большом магнитном поле около краёв образца формируются слои, потоки носителей в которых контролируется рекомбинацией и диффузией; при равных концентрациях электронов и дырок такое течение приводит к большому положительному магнетосопротивлению, линейно растущему с магнитным полем.

6. Слабо взаимодействующие двумерные электроны в длинных баллистических образцах в слабых магнитных полях формируют пространственно неоднородные течения из-за наличия двух типов траекторий электронов: пересекающих и не пересекающих образец; в связи с этим продольное и холловское сопротивления в слабых полях резко зависят от соотношений между геометрическими параметрами образца и скоростью межчастичных столкновений.

7. Переход между баллистическим и гидродинамическим режимами транспорта в двумерных электронных системах, происходящий в чистых длинных образцах при приложении магнитного поля, является фазовым переходом; такой переход контролируется баллистическими размерными эффектами и межчастичными столкновениями; он наблюдался в экспериментах на чистых образцах графена и квантовых ям GaAs.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на XII, XIII и XIV Российских конференциях по физике полупроводников (Звенигород, 2015; Екатеринбург, 2017; Новосибирск, 2019); на Совещании по теории полупроводников (Санкт-Петербург, 2016); на Совещании по теории твёрдого тела (Санкт-Петербург, 2021); на XIX и XX Всероссийских конференциях “Проблемы физики твёрдого тела и высоких давлений” (Сочи, 2020; 2021); на 24-ом международном симпозиуме “Наноструктуры: Физика и технологии” (Санкт-Петербург, 2016); на 34-ой международной конференции по физике полупроводников (Монпелье, Франция, 2018); на III конференции “Квантовый транспорт в 2D системах” (Люшон, Франция, 2019); на конференции “Транспорт и спектроскопия двумерных систем” (Черноголовка, 2021). Результаты, изложенные в диссертации, также докладывались и обсуждались на семинарах секторов Физико-технического института им. А. Ф. Иоффе, на семинаре Лаборатории теории конденсированного состояния Института технологии Карлсруэ (Карлсруэ, Германия), на семинаре Лаборатории низких температур Университета Аалто (Финляндия, Хельсинки), на семинаре Отдела физики конденсированного состояния Института сложных систем Общества Макса Планка (Дрезден, Германия).

Публикации. По результатам исследований, проведенных в диссертации, опубликовано 19 публикаций, из них 16 статей в рецензируемых журналах (список приведен после основного текста диссертации).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, семи приложений и списка литературы. Диссертация содержит 293 страницы текста, включая 53 рисунка и две таблицы. Список цитируемой литературы содержит 211 публикаций.

Первая глава “Гидродинамика двумерных электронов” посвящена построению теории гидродинамического магнетотransпорта в системе двумерных вырожденных электронов. Изучен стационарный магнетотransпорт вязких газа и жидкости из двумерных электронов. Развита теория высокочастотного магнетотransпорта в этих системах, а также теория сдвиговых волн в сильно неидеальной двумерной электронной жидкости. В главе также решена задача о высокочастотном магнетосопротивлении гидродинамического типа, обусловленном спиновым эффектом Холла, для случая двумерных и трёхмерных омических проводников.

Во Второй главе “Микроскопическая теория гидродинамического транспорта”, во-первых, для сильно неидеальной двумерной электронной ферми-жидкости выполнен вывод гидродинамических уравнений типа Навье-Стокса в рамках теории ферми-жидкости Ландау из кинетического уравнения для квазичастиц ферми-жидкости. Во-вторых, выполнен микроскопический расчёт вязкости слабо неидеального ферми-газа с реалистичным законом взаи-

модействия между частицами (экранированный кулоновский потенциал).

Третья глава “Гидродинамика электрон-дырочных систем” посвящена изучению стационарного магнетотранспорта в двухкомпонентных электрон-дырочных системах за счёт формирования пространственно-неоднородных течений. Во-первых, изучен магнетотранспорт в различных режимах для двухкомпонентных систем в омических образцах. В частности, предсказан и подробно исследован эффект линейного магнетосопротивления, определяемый формированием прикраевых слоёв в двухкомпонентной системе в точке электронейтральности за счёт диффузии и рекомбинации носителей. Во-вторых, изучен магнетотранспорт в электрон-дырочных системах в чистых образцах. В этом случае неоднородное течение определяется балансом между эффектами сдвиговой вязкости, рекомбинации и диффузии и приводит к нетривиальному немонотонному магнетосопротивлению.

Четвертая глава “Формирование гидродинамического режима” посвящена изучению перехода между баллистическим и гидродинамическим режимами транспорта, происходящего в системе двумерных электронов в длинных чистых образцах с ростом магнитного поля. Изучены предвестники гидродинамического течения в баллистическом течении взаимодействующих двумерных электронов в отсутствие магнитного поля, а также баллистические течения таких электронов в слабом и умеренном магнитных полях. Показано, что в окрестности критического магнитного поля, при котором диаметр циклотронной орбиты электрона равен ширине образца, происходит фазовый переход от баллистического к гидродинамическому течению.

В каждой главе приводятся недавние экспериментальные результаты по транспортным эффектам, которым посвящена глава, и выполняется сопоставление экспериментальных результатов с предсказаниями развитой в диссертации теории.

В **Заключении** сформулированы задачи, непосредственно примыкающие к полученным в диссертации результатам.

В **Приложении А** “Вязкие течения в реалистичных образцах с дефектами” качественно изучено влияние крупномасштабных непроницаемых дефектов на вязкое течение двумерных электронов в высокоподвижных квантовых ямах, а также обсуждается роль слабых дефектов в области течения в гидродинамическом транспорте в этих структурах.

В **Приложении В** “Высокочастотные вязкоупругие течения электронной жидкости” проводится расчёт линейного отклика сильно вязкой электронной жидкости в магнитном поле на высокочастотное электрическое поле в длинных образцах разных с шероховатыми краями. Подробно обсуждается характер течения при различных соотношениях между шириной образца и микроскопическими длинами.

В Приложении С “Кинетика слабо взаимодействующих двумерных электронов” исследован вид оператора столкновений электронов в слабо неидеальном двумерном ферми-газе для реалистичного потенциала межчастичного взаимодействия (экранированный кулоновский потенциал). Изучена математическая структура интегрального уравнения с таким оператором столкновений для задачи описания вязкого транспорта. Показано, что для решения этой задачи необходимо учитывать только одно главное слагаемое в разложении в ряд энергетической части неравновесной функции распределения. Этот результат является обоснованием применимости “ τ -приближения” для задач вязкости, которое было использовано в Главе 1. Получено аналитическое выражение для скорости релаксации второй угловой гармоники функции распределения, определяющей коэффициенты вязкости.

В Приложении D “Транспорт в реалистичных электрон-дырочных системах” построена микроскопическая теория гидродинамического магнетотранспорта в различных двумерных электрон-дырочных системах в омических образцах конечного размера. Рассмотрены случаи симметричных электрон-дырочных систем с непараболическими спектрами носителей в точке электронейтральности, а также асимметричных электрон-дырочных систем с квадратичными спектрами носителей в точке электронейтральности и при отклонении от неё.

Приложении E “Электрон-дырочная система с неоднородной температурой” посвящено выводу балансовых уравнений гидродинамического типа, описывающих потоки частиц и тепла, из кинетического уравнения для электрон-дырочной системы в точке электронейтральности. В кинетическом уравнении учитываются рассеяние носителей на дефектах, друг на друге, рекомбинация, а также теплообмен с фононами.

В Приложении F “Качественное рассмотрение баллистического течения” выполнен наглядный расчёт тока и холловского поля для двумерных электронов в длинном чистом образце в слабом магнитном поле с помощью рассмотрения траекторий отдельных электронов.

В Приложении G “Переход между баллистическим и гидродинамическим течениями” приведено подробное описание теории переходов между баллистическим и гидродинамическим, а также между баллистическим и омическим режимами, происходящих с ростом магнитного поля в системе двумерных слабо взаимодействующих электронов в длинных образцах с шероховатыми краями. Для первого перехода развита теория среднего поля, которая даёт аналитические выражения для тока и холловского поля в окрестности критического поля.

Формулы, рисунки и таблицы нумеруются по главам и по приложениям, нумерация литературы единая для всего текста.

Глава 1

Гидродинамика двумерных электронов

1.1 Обзор литературы

1.1.1 Стационарные течения вязкой электронной жидкости

В современных высокоподвижных квантовых ямах с низкотемпературными “номинальными” подвижностями, оцениваемыми по формуле Друде и равными $10^6 - 10^7$ см²/В·с, соответствующая “номинальная” длина свободного пробега двумерных электронов может быть порядка и больше размера образца W . В этом случае транспорт электронов не является объёмным омическим, и сильно зависит от характера рассеяния электронов на краях образца. Если это рассеяние зеркальное и образец близок по форме к длинному прямоугольнику (холловский образец), то после нескольких рассеяний на краях, электрон рано или поздно рассеется на дефекте или фононе. Последние процессы приведут к друдевскому сопротивлению $\rho_D = m/(e^2 n_0 \tau)$, $\tau = l/v_F$, равному сопротивлению больших объёмных образцов, в которых $l \ll W$. Здесь l — длина свободного пробега относительно релаксации импульса за счёт рассеяния на дефектах и фононах, n_0 — двумерная концентрация электронов, e и m — заряд и масса электрона, v_F — фермиевская скорость вырожденных электронов.

Если же рассеяние на краях образца полностью или частично диффузное, электронный транспорт будет контролироваться соотношением между длиной релаксации импульса l , длиной свободного пробега относительно межэлектронных столкновений l_{ee} , и шириной образца W . Когда $l, l_{ee} \gg W$, доминирует рассеяние электронов на краях и длина свободного пробега становится порядка W . Соответствующее баллистическое эффективное удельное сопротивление есть $\rho = m/(e^2 n_0 \tau_{ball})$, где $\tau_{ball} \sim W/v_F$. В противоположном случае, $l_{ee} \ll W \ll l$, устанавливается неоднородное по сечению образца вязкое течение за счёт передачи импульса при межэлектронных столкновениях от середины к краям образца, где импульс релаксирует при рассеянии электронов на шероховатостях края. Такая картина напоминает течение Пуазейля в гидродинамике обычных жидкостей и соответствует величине усреднённого по образцу

сопротивления ρ , определяемого вязкостью электронов: $\eta \sim v_F l_{ee}$. Эта идея была предложена в 1960-е году для трёхмерных металлов Р. Н. Гуржи с соавторами [18, 21, 22], и относительно недавно начала разрабатываться для различных режимов транспорта двумерных электронов [24, 25],[52]-[56]. Совсем недавно, в связи с открытием материалов с гидродинамическим режимом электронного транспорта в новых высокподвижных материалах: квазидвумерном слоистом металле PdCoO₂ [31], трёхмерном вейлевском полуметалле WP₂ [32], графене [26]-[28], произошло бурное развитие теории такого режима транспорта [30],[57]-[67].

Если образец помещён в магнитное поле \mathbf{B} и циклотронный радиус электрона R_c много меньше ширины образца W , гидродинамический режим может быть реализован даже когда $l_{ee} > W$ [21]. При этом, как и при $B = 0$, предполагается, что в объёме доминирует межэлектронное рассеяние $l_{ee} \ll l$. Действительно, в двумерном слое, перпендикулярном полю \mathbf{B} , электрон на траектории, близкой к циклотронной окружности радиуса $R_c \ll W$, не рассеивается на краях образца, но рассеивается на соседних электронах. За счёт передачи импульса при межэлектронных столкновениях от середины к краям образца устанавливается неоднородный профиль течения. При этом электронная вязкость, как и остальные кинетические коэффициенты, становится тензором, сильно зависящим от магнитного поля [68, 69].

Другой тип двумерных электронных систем, где возможен гидродинамический транспорт, был впервые рассмотрен в работе [56]. Изучалось течение двумерных электронов в образце со случайно расположенными локализованными дефектами, находящимися один от другого на расстояниях порядка $d \gg l_{ee}$. Если при этом доминирует межэлектронное рассеяние, то формируется вязкое течение в областях между дефектами и усреднённое удельное сопротивление системы ρ также определяется величиной вязкости электронов η .

В настоящей главе развивается гидродинамический подход к транспорту двумерных электронов в магнитном поле. Во-первых, рассчитан тензор вязкости электронов по упрощённому способу, аналогичному элементарному выводу тензора друдевской проводимости в магнитном поле. Убывание диагональной вязкости η_{xx} с магнитным полем приводит к механизму большого отрицательного магнетосопротивления, которое зависит от температуры и ширины образца. Впервые о возможности гидродинамического механизма отрицательного магнетосопротивления для двумерных электронов упоминалось в работе [25]. Однако авторы [25] считали, что реализация такого механизма маловероятна для квантовых ям из-за микроскопических особенностей межэлектронного рассеяния для вырожденных двумерных электронов (см. подробности в Главе 2), и поэтому не изучали этот механизм. В настоящей главе и в Главе 2 приводятся аргументы в пользу того, что даже в очень чистых образцах, наряду с межэлек-

тронными столкновения, по-видимому, существенную роль играет рассеяние электронов на дефектах, что приводит к возможности реализации гидродинамического течения электронов (и, следовательно, к появлению большого отрицательного магнетосопротивления) несмотря на ограничения, изученные в работе [25].

Температурно-зависимое гигантское отрицательное магнетосопротивление двумерных электронов в высококачественных квантовых ямах GaAs при низких температурах и умеренных магнитных полях, наблюдавшееся в экспериментах [40]-[44], как отмечали авторы работ [40, 44], не объясняется теориями отрицательного магнетосопротивления [70]-[72] за счёт эффектов памяти в динамике невзаимодействующих электронов (в частности, в связи с тем, что магнетосопротивление работ [70]-[72] не зависит от температуры и имеет профиль, отличный от наблюдавшегося в [40]-[44]). Развитая в диссертации теория объясняет существование пика магнетосопротивления, его форму и его эволюцию с температурой. Тем самым, эксперименты [40]-[44] и теория [A1]-[A4] свидетельствуют о формировании вязкой двумерной электронной жидкости. Другие существующие механизмы сильного отрицательного магнетосопротивления [73, 74] также не могут объяснить наблюдавшийся пик и его эволюцию с температурой. Развитый в них механизм отрицательного магнетосопротивления, возникающего за счёт эффекта киральной аномалии для некоторых трёхмерных проводников [73, 74], предполагает параллельную ориентацию магнитного и электрического поля и поэтому не может объяснить эксперименты [40]-[44].

Также в диссертации качественно показано, что гидродинамическое отрицательное магнетосопротивление возникает в высокподвижных двумерных системах и других типов, в частности, в образцах, содержащих дефекты большого радиуса. Гидродинамический транспорт в электронных системах такого типа без магнитного поля был теоретически изучен в работе [56]. Об обнаружении макроскопических овальных дефектов в некоторых высокподвижных квантовых ямах GaAs сообщалось в работе [45]. В диссертации показано, что в таких системах замедление потока происходит из-за вязкой передачи компоненты импульса жидкости вдоль потока в направлении поперёк потока: от областей между дефектами к областям непосредственно перед дефектами, где компонента гидродинамической скорости, перпендикулярная к краю дефекта, равна нулю. В результате сопротивление ρ снова определяется вязкостью η .

Из сравнения экспериментов [40]-[44] с развитой теорией в диссертации делается вывод о том, что электроны в чистых квантовых ямах GaAs формируют вязкую жидкость [A1-A4].

После публикации работы [A4], аналогичное отрицательное магнетосопротивление наблюдалось в образцах квантовых ямах GaAs, изготовленных по несколько другой техноло-

гии [46, 47, 48, 75], в вейлевском полуметалле $W\text{P}_2$ [32], в графене [28], в квантовых ямах HgTe [76]. При этом для образцов графена и металла $W\text{P}_2$ были параллельно получены другие свидетельства формирования гидродинамического течения (характерная зависимость сопротивления от ширины образца; формирование водоворотов). Все эти наблюдения усиливают надёжность интерпретации сильного отрицательного магнетосопротивления в умеренных магнитных полях как признака формирования вязкой электронной жидкости.

1.1.2 Высокочастотные течения вязкой электронной жидкости

В этой главе также разработана теория высокочастотного гидродинамического транспорта в вязкой двумерной электронной жидкости в магнитном поле [A5]. Выведено уравнение Навье-Стокса для нестационарного вязкого течения с учётом временной дисперсии вязкости. Аналогичные уравнения гидродинамики двумерной электронной жидкости в магнитном поле были получены почти одновременно в работах [60, 64]. Полученные частотно-зависимые коэффициенты вязкости имеют резонанс на частоте, равной удвоенной циклотронной частоте электронов, $\omega = 2\omega_c$. Хотя уравнения работы [60] содержат этот резонанс, его физическая природа и роль в транспортных явлениях в работе [60] не обсуждалась. Изученный [A5] в резонанс представляет собой особый тип циклотронного резонанса старшего порядка: в отклике замагниченной электронной жидкости на высокочастотное электрическое поле возникает вторая гармоника циклотронного резонанса, но первая и высшие гармоники могут отсутствовать. Резонанс имеет следующую природу: тензор сдвиговых напряжений при вязком течении изменяется как произведение двух компонент скорости электрона, поэтому для электрически заряженной жидкости в магнитном поле он осциллирует с удвоенной циклотронной частотой.

Показано, что изученный *вязкоупругий резонанс* проявляется в затухании магнитоплазмонных в образцах с малым числом дефектов [A5]. Это открывает возможность наблюдать его в поглощении излучения электронной жидкостью по ширине плазмонных резонансов.

В ферми-жидкостях при достаточно сильном взаимодействии между квазичастицами могут распространяться сдвиговые волны с колебаниями квазичастиц перпендикулярно направлению распространения волны [17]. История работ по теоретическому изучению таких волн в электронной ферми-жидкости, по-видимому, начинается со статьи [77]. В ней была теоретически рассмотрена высокочастотная динамика жидкости в отсутствие магнитного поля в рамках теории ферми-жидкости Ландау. Было показано, что в области частот ω и волновых векторов q , удовлетворяющих неравенству $\omega \gg v_F q$, динамика жидкости описывается классическими уравнениями вязкоупругого движения. Высокочастотное течение вязкой двумерной

электронной жидкости в длинном образце в нулевом магнитном поле теоретически изучалось в работах [62, 66]. Было показано, что поток жидкости состоит из компоненты, образованной плазмонами, и вязкоупругой компоненты, образованной поперечным нулевым звуком.

В диссертации изучены поперечные сдвиговые упругие волны (нулевой звук) в сильно неидеальной двумерной электронной жидкости в магнитном поле [А6]. Такие волны возможны при достаточно большом значении параметра r_s , описывающего силу взаимодействия исходных электронов. Большое значение r_s приводит к большим значениям параметров Ландау F_m , определяющих взаимодействие квазичастиц ферми-жидкости. Скорость столкновений квазичастиц, в основном, пропорциональна квадрату температуры [17, 39, 78], поэтому, как известно, скорость затухания квазичастиц и многочастичных возбуждений (нулевых звуков различных типов) является слабой при низких температурах, даже при очень сильном межквазичастичном взаимодействии.

Поперечные волны связаны с возмущениями тензора сдвиговых напряжений ферми-жидкости в магнитном поле, поэтому по своей природе они аналогичны поперечному звуку в твердых телах. Для расчёта закона дисперсии поперечного магнитозвука и линейного отклика жидкости на переменное электрическое поле используется гидродинамический подход, справедливый при достаточно сильном межчастичном взаимодействии (последний факт строго доказан в Главе 2). Дисперсия таких волн отражает наличие в резонанса в коэффициентах вязкости при $\omega = 2\omega_c$ [А6]. В отклике широких образцов на радиочастотное излучение доминирующую роль играют стоячие магнитоплазмоны. В достаточно узких образцах при частотах $\omega > 2\omega_c$ отклик формируется преимущественно стоячими волнами поперечного магнитозвука. Такой отклик проявляет вязкоупругий резонанс.

В главе обсуждаются гигантский пик фотосопротивления и особенности фотовольтаического эффекта, которые недавно наблюдались в квантовых ямах GaAs со сверхвысокой подвижностью на частотах около $\omega = 2\omega_c$ [49]-[51]. Объяснение работ [А1]-[А4] гигантского отрицательного магнетосопротивления, обнаруженного в подобных квантовых ямах GaAs [40]-[48], свидетельствует, что двумерные электроны в таких структурах образуют вязкую жидкость. В работе [А6] приводятся аргументы в пользу того, что особенности высокочастотного магнетотранспорта, наблюдавшиеся в работах [49]-[51] вблизи частоты $\omega = 2\omega_c$, объясняются возбуждением поперечных магнитозвуковых волн и вязкоупругим резонансом.

1.1.3 Спиновый резонанс в неоднородном течении двумерных электронов

Существует большая группа транспортных явлений гидродинамического характера, в кото-

рых, наряду с переносом заряда, важную роль в формировании течения играет перенос ещё какой-либо дополнительной величины, отличной от плотности частиц, гидродинамической скорости и сдвиговых напряжений. Такие явления могут возникать не только в чистых образцах, но также в образцах, в которых доминирует рассеяние носителей на дефектах. Эти явления описываются балансовыми уравнениями гидродинамического типа, в которых перенос дополнительной величины приводит к слагаемым типа объёмной вязкости.

Одним из таких явлений является спиновый эффект Холла. В работах [79, 80] было предсказано, что спин-орбитальное взаимодействие в проводниках приводит к взаимосвязи между электрическим и спиновым токами: электрический ток вызывает появление поперечного спинового тока и наоборот. Это приводит, соответственно, к прямому и обратному спиновым эффектам Холла. Следуя методу, предложенному в работе [81], обратный спиновый эффект Холла был экспериментально обнаружен в работе [82]. Двадцать лет спустя в работах [83, 84] был экспериментально обнаружен прямой спиновый эффект Холла. С тех пор эта тема стала предметом очень широкого интереса (см., например, обзор в книге [85]).

Из-за взаимосвязи между потоками спина и заряда, перенос электронных спинов влияет на потоки заряда электронов, то есть приводит к изменениям электрического сопротивления. Величина последнего может быть измерена с очень высокой точностью. Примером такой связи спина и заряда может служить спин-холловское магнетосопротивление, предсказанное в работе [86]. Его причиной является деполяризация спинов, накопленных в приграничных слоях образца, за счёт приложения магнитного поля. Этот эффект наблюдался на платине в работе [87]. В работе [86] рассматривался двумерный проводник однако полученные в ней результаты применимы и для трехмерного проводника в связи с отсутствием зависимости у тока и спиновой плотности от третьей координаты в образце в форме пластины с взаимно перпендикулярными гранями.

Эффект, аналогичный изученному в работах [86, 87], также был обнаружен и изучен в слоистых структурах ферромагнетик-нормальный (немагнитный) металл [88]. Намагниченность в ферромагнетике поворачивалась под действием приложенного магнитного поля, что приводит к изменению удельного сопротивления нормального металла в соседнем слое.

В последние годы активно изучался высокочастотный спиновый эффект Холла в структурах ферромагнетика и нормальных металлов как экспериментально [89]-[92], так и теоретически [93]-[96]. Прецессия намагниченности в ферромагнетике приводит к изменяющейся во времени инжекции спина в нормальный металл. Из-за обратного спинового эффекта Холла результирующий спиновый ток в нормальном металле генерирует электрический высокоча-

стотный ток. Наблюдаемое высокочастотное напряжение резонансно зависит от ларморовской частоты в ферромагнетике и частоты внешнего высокочастотного магнитного поля, которое вызывает прецессию намагниченности. Таким образом, с помощью спинового эффекта Холла в нормальном металле ферромагнитный резонанс в ферромагнетике наблюдался с помощью одних только электрических измерений в нормальном металле.

Хотя эти исследования очень важны для достижения их декларируемой конечной цели – переключения магнитных доменов в магнетиках за счёт переноса спина для разработки новых устройств хранения информации (см. обзоры [97, 98]), – физика слоистых магнитных структур довольно сложна, что затрудняет построение точной теории и количественный анализ экспериментальных данных.

В этой связи, в настоящей главе развивается простая теория высокочастотного магнетотранспорта электронов, управляемого прямым и обратным спиновыми эффектами Холла в немагнитных двумерных и объёмных проводниках. Теория является развитием работы [86] и основана на феноменологических уравнениях переноса [79, 80, 85], описывающих взаимосвязь между спиновым и зарядовым токами. Показано, что спиновой резонанс в образце немагнитного проводника можно наблюдать с помощью чисто электрических измерений магнетоимпеданса того же образца.

1.2 Гигантское отрицательное магнетосопротивление

1.2.1 Гидродинамика в отсутствии магнитного поля

Напомним, как описывается транспорт в полностью гидродинамическом режиме, когда характерная длина свободного пробега относительно межэлектронных столкновений l_{ee} много меньше ширины двумерного образца W , в то время как характерная длина свободного пробега относительно рассеяния на фононах и статических дефектах l много больше W . Длина образца L считается много большей W . Гидродинамическая скорость электронного газа или жидкости $V(y)$, направленная вдоль оси x (см. Рис. 1.1), удовлетворяет уравнению Навье-Стокса:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{e}{m} E_0, \quad (1.1)$$

где $\eta = v_F l_{ee}/4$ – вязкость вырожденных двумерных электронов, E_0 – постоянное электрическое поле вдоль оси x . В настоящей Главе 1 и в Главе 2 величина e обозначает заряд электрона с учётом знака: $e < 0$. В уравнении (1.1) пренебрегается сжимаемостью электронного газа или жидкости.

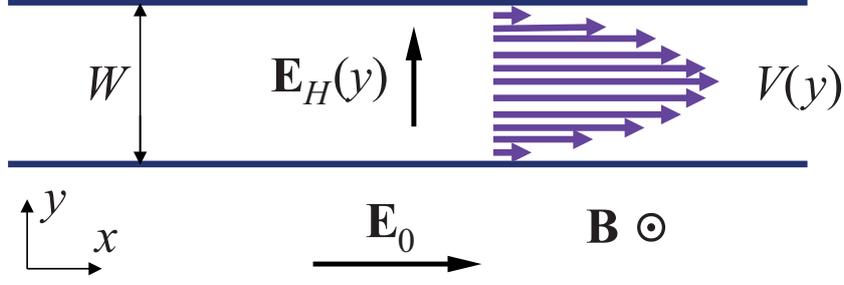


Рис. 1.1: Течение Пуазейля двумерной электронной жидкости в длинном образце с шероховатыми границами. Электрическая сила eE_0n_0 от приложенного вдоль оси x напряжения, действующая на каждый элемент объёма жидкости, уравнивается вязкостным потоком импульса жидкости из объёма к стенкам Π_{xy} , где происходит потеря импульса при рассеянии электронов на шероховатостях края. Приложение магнитного поля приводит к изменению величины Π_{xy} и появлению неоднородного холловского поля $E_H(y)$, которое уравнивает силу Лоренца.

Для образца с шероховатыми краями простейшие граничные условия на гидродинамическую скорость имеют вид: $V(y) = 0$ при $y = \pm W/2$ (см. Рис. 1.1). Они предполагают полностью диффузное рассеяние электронов на краях. Отметим, что такое рассеяние также может модельно учесть сложную геометрию проводящей области образца: сложную форму её краёв и/или наличие макроскопических дефектов (см. подробности в Приложении А). В стационарном режиме решение уравнения (1.1) даёт параболический профиль скорости $V(y)$:

$$V(y) = \frac{eE_0}{2m\eta} \left[\left(\frac{W}{2} \right)^2 - y^2 \right]. \quad (1.2)$$

Интегрирование плотности тока $j(y) = en_0V(y)$ по y даёт следующий результат для среднего удельного сопротивления $\rho = E_0 / [\int_{-W/2}^{W/2} j(y) dy / W]$:

$$\rho = \frac{m}{e^2n_0\tau^*}, \quad \tau^* = \frac{W^2}{12\eta}. \quad (1.3)$$

Здесь τ^* – это время релаксации импульса в течении Пуазейля, которое заменяет собою время релаксации импульса при рассеянии на дефектах в объёме τ в формуле Друде $\rho_D = m/(e^2n_0\tau)$.

Под длиной рассеяния относительно электрон-электронных столкновений l_{ee} , введённой выше, нужно понимать длину, связанную с временем релаксации $\tau_{ee} = l_{ee}/v_F$ сдвиговых напряжений $\sigma_{ij} = -\Pi'_{ij}$. Неравновесная часть потока импульса Π'_{ij} пропорциональна вторым гармоникам ($\sim e^{im\varphi}$ при $m = \pm 2$) функции распределения $f(y, \varphi)$ по углу скорости электрона φ . Время τ_{ee} для идеального ферми-газа с кулоновским взаимодействием между электронами рассчитано в настоящей диссертации. Было получено (см. подробности в Главе 2):

$$\frac{\hbar}{\tau_{2,ee}(T)} = A_{ee} \frac{T^2}{E_F}, \quad (1.4)$$

где T – температура, $E_F = mv_F^2/2$ – энергия Ферми, A_{ee} – множитель, зависящий от параметра взаимодействия $r_s = E_C/E_F = 1/(\sqrt{\pi n_0} a_B)$, равного отношению энергии кулоновского

взаимодействия электронов E_C к их кинетической энергии E_B [здесь a_B – боровский радиус электронов в квантовой яме]. Результат (1.4) соответствует малому параметру r_s : по крайней мере, должно быть выполнено $r_s \ll 1$.

В типичных образцах квантовых ям GaAs параметр r_s обычно бывает сравним с единицей, меньше её или больше её всего в 1.5-2 раза. Расчёт времени $\tau_{2,ee}$ для системы сильно взаимодействующих электронов (то есть ферми-жидкости с сильным взаимодействием между квазичастицами) – это сложная задача, в которой можно получить только температурную зависимость $\tau_{2,ee}$, но не его абсолютную величину. Такой расчёт был выполнен в работе [39] (см. подробности в следующей Главе 2 и Приложении С), он приводит к зависимости, отличающейся от зависимости (1.4) медленно зависящим от температуры логарифмическим множителем $\ln(E_F/T)^{-2}$:

$$\frac{1}{\tau_{2,ee}(T)} = A_{ee}^{Fl} \frac{T^2}{[\ln(E_F/T)]^2}. \quad (1.5)$$

Здесь коэффициент A_{ee}^{Fl} выражается через параметры Ландау, которые определяются параметром r_s , но их зависимость от r_s к настоящему времени не рассчитана при $r_s \gtrsim 1$.

Таким образом, признаками гидродинамического транспорта электронов (в отсутствии магнитного поля) являются: (i) обратная зависимость усредненного удельного сопротивления образца от ширины образца, $\rho \sim 1/W^2$; (ii) обратная зависимость сопротивления от температуры, $\rho \sim \eta \sim \tau_{2,ee} \sim 1/T^2$.

Такое убывание сопротивления с температурой и его важность для идентификации гидродинамического режима были выявлены в работах Р. Н. Гуржи и его соавторов в 1960-годах, поэтому сейчас такая зависимость сопротивления от температуры называется эффект Гуржи. Намёк на такое поведение зависимости сопротивления от температуры наблюдался в работе [44] в ограниченном диапазоне температур от 0 до 5 К. В работе [46] и последующих работах Г. М. Гусева и его соавторов эффект Гуржи впервые наблюдался в хорошо проявленном виде в очень качественных квантовых ямах GaAs, в которых, по-видимому, течение электронов близко по форме к идеальному течению Пуазейля.

Важным является то, что вязкость электронных жидкости или газа не обязательно связана именно с электрон-электронными столкновениями. Любой процесс, обеспечивающий релаксацию второй угловой гармоники функция распределения электронов (например, рассеяние на статических дефектах или фононах), влияет на величину вязкости. Поэтому коэффициент вязкости η пропорционален времени релаксации τ_2 , содержащему вклады как от электрон-

электронного рассеяния, так и от рассеяния электронов дефектах:

$$\eta = \frac{1}{4} v_F^2 \tau_2, \quad \frac{1}{\tau_2(T)} = \frac{1}{\tau_{2,ee}(T)} + \frac{1}{\tau_{2,0}}. \quad (1.6)$$

Здесь $\tau_{2,ee}$ определяется формулами (1.4) или (1.5), тогда как остаточное время релаксации $\tau_{2,0}$ (то есть, остающиеся при $T \rightarrow 0$) зависит от силы и типа беспорядка. В Главе 2 вопрос о различных вкладах в $1/\tau_2$ обсуждается более подробно.

Результат (1.3) для вязкостного сопротивления меняется простым образом, если существенную роль играет релаксация импульса электронов в объёме образца за счёт их рассеяния на дефектах или фононах. Последнее рассеяние становится заметным, когда время объёмной релаксации импульса τ становится сравнимым с характерным временем релаксации импульса в идеальном течении Пуазейля τ^* . В этом случае в правую часть уравнения Навье-Стокса (1.1) нужно добавить объёмное релаксационное слагаемое $-V/\tau$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{V}{\tau} + \frac{e}{m} E_0. \quad (1.7)$$

Решение этого уравнения приводит к следующему профилю гидродинамической скорости $V(y)$:

$$V(y) = \frac{eE\tau}{m} \left\{ 1 - \frac{\cosh(y/l_G)}{\cosh[W/(2l_G)]} \right\}, \quad (1.8)$$

где $l_G = \sqrt{\eta\tau}$ – характерная длина диффузии импульса при наличии вязкости и объёмной релаксации импульса (длина Гуржи). При $\tau \gg \tau^*$ получаем неравенство $l_G \gg W$ и поэтому объёмное рассеяние слабо меняет идеальное течение Пуазейля. При $\tau \ll \tau^*$ получается неравенство: $l_G \ll W$. В этом случае течение в центральной части образца, $W/2 - |y| \gg l_G$ является омическим и однородным по сечению, а эффект вязкости определяет течение в прикраевых областях образца $W/2 - |y| \lesssim l_G$. Соответствующие профили скорости $V(y)$ построены на Рис. 1.2 для различных значений $\omega_c\tau_2$ и отвечающих им значений l_G/W .

Интегрирование скорости $V(y)$ (1.8) по всем y в сечении образца дает следующее выражение для усредненного удельного сопротивления [21, 22]:

$$\rho = \frac{m}{e^2 n_0 \tau} \frac{1}{1 - \tanh(\xi)/\xi}, \quad \xi = \sqrt{\frac{3\tau^*}{\tau}}. \quad (1.9)$$

При $\tau \gg \tau^*$ применима асимптотика $\tanh \xi \approx \xi - \xi^3/3$ поэтому выражение для сопротивления (1.9) превращается в результат (1.3) для чистого течения Пуазейля. В противоположном случае $\tau \ll \tau^*$ применима асимптотика $\tanh \xi \approx 1 \ll \xi$, поэтому получается обычное друксовское удельное сопротивление $\rho_D = m/(e^2 n \tau)$, определяемое только объёмным временем релаксации импульса τ .

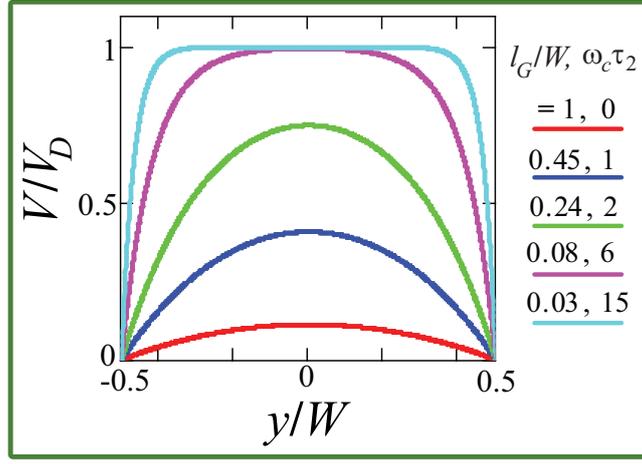


Рис. 1.2: Профили течения электронной жидкости в длинном образце с шероховатыми краями при наличии умеренного рассеяния электронов на дефектах в объёме образца. Расчёты приведены для нескольких возрастающих магнитных полей (см. значения параметра $\omega_c \tau_2$ на рисунке). С ростом магнитного поля сокращается длина Гуржи $l_G(\omega_c) = \sqrt{\eta_{xx}(\omega_c)}\tau$, что приводит к сокращению ширины приграничных слоёв течения, в которых течение является гидродинамическим. В нулевом магнитном поле длина Гуржи $l_G|_{B=0} = \sqrt{\eta}\tau$ выбрана равной ширине образца, профиль течения при этом мало отличим от параболического течения Пуазейля, отвечающего пределу $W \ll l_G$. В больших магнитных полях, когда $l_G \ll W$, величина скорости равна друдевской $V_D = eE_0\tau/m$ всюду за исключением прикраевых областей образца, $W/2 - |y| \lesssim l_G$.

Анализ показывает, что следующая простая интерполяционная формула:

$$\rho = \frac{m}{n_0 e^2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^*} \right), \quad (1.10)$$

воспроизводит выражение (1.9) для любого значения τ^*/τ с точностью лучше 11 %. Таким образом, эффект электронной вязкости можно рассматривать как *параллельный* канал релаксации импульса электронов.

Значения времени релаксации импульса τ_{ph} при рассеянии двумерных электронов на акустических фононах в квантовых ямах GaAs рассчитывались с использованием результатов работ [100, 101]. Согласно этим статьям, скорость релаксации импульса пропорциональна первой степени температуры:

$$\frac{1}{\tau_{ph}(T)} = A_{ph} T, \quad (1.11)$$

при $T \gtrsim 4$ К и более высоким степеням температуры при $T \lesssim 4$ К (для гетроструктуры, изученной в работе [44]). Неопределённость в расчёте τ_{ph} преимущественно возникает из-за неизвестной точно формы потенциала квантовой ямы $U(z)$. Таким образом, в объёмной скорости релаксации импульса есть два вклада:

$$\frac{1}{\tau(T)} = \frac{1}{\tau_{ph}(T)} + \frac{1}{\tau_0}, \quad (1.12)$$

где слагаемое $1/\tau_0$ является “остаточной” скоростью релаксации импульса. Оно не зависит от температуры и возникает за счёт рассеяния электронов на беспорядке.

Предполагаем, что времена релаксации при нулевой температуре τ_0 и $\tau_{2,0}$, связанные с рассеянием электронов на беспорядке, не зависят от магнитного поля. Например, это верно для рассеяния электронов на изолированных статических дефектах с малым размером. Однако для многих типов беспорядка и интервалов магнитного поля кинетика двумерных электронов может определяться эффектами памяти. В этом случае, например, тензор объемной проводимости даже в неквантующих магнитных полях, $\hbar\omega_c \ll T$, может не определяться формулами Друде [72, 102, 103, 117]. Уравнения движения, заменяющие уравнение (1.1), должны выводиться из классического или квантового уравнения Лиувилля. В получающихся обобщенных гидродинамических уравнениях зависимости кинетических коэффициентов (аналогичных η и $1/\tau_0$) от магнитного поля будут определяться типом беспорядка и могут привести к изменению результатов по магнетотранспорту вязкой электронной жидкости, изложенным ниже.

1.2.2 Гидродинамика в магнитном поле

В настоящем разделе изучим влияние магнитного поля на течение вязкой электронной жидкости. Получим выражение для тензора вязкости жидкости η_{ij} в магнитном поле и уравнение движения на гидродинамическую скорость $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ путём упрощённого расчёта, похожего на вывод формул Друде для проводимости электронов в образце с дефектами в магнитном поле. Такой вывод уравнений гидродинамики полностью эквивалентен их выводу из классического кинетического уравнения, однако является гораздо более наглядным. Вывод из кинетического уравнения, включающий необходимые обоснования, дан в Главе 2 и Приложении С.

Примеры решение кинетического уравнения для функции распределения электронов при наличии внешних полей \mathbf{E}_0 и \mathbf{B} и пространственно-зависимой гидродинамической скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ приведены, например, в статьях [69, 104] и книге [68]. Используемый ниже упрощённый метод аналогичен подходу Друде к переносу электронов, в котором основным релаксационным параметром является время релаксации импульса τ на дефектах в объёме образца. В рассматриваемой задаче основным параметром будет время τ_2 релаксации второго момента функции распределения (то есть, тензора вязких напряжений) за счет электрон-электронного рассеяния и рассеяния на дефектах. Такой упрощённый вывод уравнений гидродинамики в магнитном поле, по-видимому, впервые был сформулирован в работе [108] для описания плазмы в макроскопических системах. Заметим, что важным преимуществом подхода с использованием кинетических уравнений по сравнению с используемым здесь “друдеским” подходом является то, что с помощью кинетического уравнения времена релаксации, а также коэффициенты вязкости η_{ij} вычисляются с точными значениями численных коэффициентов.

Вязкостные слагаемые в уравнении гидродинамики выражаются через неравновесную часть Π'_{ij} тензора потока импульса, $\Pi_{ij} = m\langle v_i v_j \rangle$, пропорциональную тензору вязких напряжений $\sigma_{ij} = -\Pi'_{ij}$. Здесь $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ – двумерная скорость одиночного электрона, а угловые скобки означают усреднение по распределению электронов по скоростям в данной точке $\mathbf{r} = (x, y)$. Так определённое выражение Π_{ij} даёт средний поток импульса в расчете на одну частицу. Уравнение движения для гидродинамической скорости $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v} \rangle$ в отсутствие магнитного поля имеет вид:

$$m \frac{\partial V_i}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} - \frac{m V_i}{\tau} + e E_i. \quad (1.13)$$

Здесь и ниже предполагается суммирование по повторяющимся индексам $i = x, y, j = x, y$. На временном масштабе много больше времени релаксации τ_2 , выражение для Π'_{ij} (ниже обозначаем его просто как Π_{ij}) имеет вид [107]:

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{(0)} = -m \eta V_{ij}, \quad V_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}. \quad (1.14)$$

Используя уравнения (1.13) и (1.14) и принимая во внимание, что электронная жидкость считается несжимаемой в настоящем разделе ($\text{div} \mathbf{V} = 0$), получаем уравнение Навье-Стокса (1.7) со слагаемым объемной релаксации $-V/\tau$.

Значение потока импульса $\Pi_{ij}^{(0)}$, даваемое уравнением (1.14) достигается за время τ_2 . Поэтому для производной по времени от Π_{ij} :

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial t} = - \frac{\Pi_{ij} - \Pi_{ij}^{(0)}}{\tau_2}. \quad (1.15)$$

Это уравнение описывает высокочастотную часть Π_{ij} .

В присутствии магнитного поля в уравнениях для $\partial V_i / \partial t$ и $\partial \Pi_{ij} / \partial t$ появляются дополнительные слагаемые, поскольку теперь величины $\langle v_i \rangle$ и $\langle v_i v_j \rangle$ изменяются во времени не только из-за столкновений и электрического поля, но и из-за магнитной части силы Лоренца: $(\partial v_i / \partial t)_{mag} = \omega_c \epsilon_{zik} v_k$. Здесь $\omega_c = |e|B / (mc)$ – циклотронная частота электронов, ϵ_{lik} – единичный антисимметричный тензор, магнитное поле направлено против оси z : $\mathbf{B} = -B \mathbf{e}_z$. Таким образом, для дополнительных “магнитных” слагаемых в уравнениях движения получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} \right)_{mag} &= \omega_c \epsilon_{zik} \langle v_k \rangle, \\ \left(\frac{\partial \langle v_i v_j \rangle}{\partial t} \right)_{mag} &= \omega_c \left(\epsilon_{zik} \langle v_k v_j \rangle + \epsilon_{zjk} \langle v_i v_k \rangle \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Слагаемые (1.16) должны быть добавлены в правой части уравнений (1.13) и (1.15).

Для медленных течений (с характерными частотами $\omega \ll 1/\tau_2$) из уравнений (1.15) и (1.16) получаем следующее соотношение:

$$\Pi_{ij} - \omega_c \tau_2 (\epsilon_{zik} \Pi_{kj} + \epsilon_{zjk} \Pi_{ik}) = \Pi_{ij}^{(0)}. \quad (1.17)$$

Оно позволяет найти компоненты тензора Π_{ij} :

$$\begin{aligned} \Pi_{xx} = -\Pi_{yy} &= \frac{1}{1 + \beta^2} \Pi_{xx}^{(0)} + \frac{\beta}{1 + \beta^2} \Pi_{xy}^{(0)}, \\ \Pi_{xy} = \Pi_{yx} &= \frac{1}{1 + \beta^2} \Pi_{xy}^{(0)} - \frac{\beta}{1 + \beta^2} \Pi_{xx}^{(0)}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $\beta = 2\omega_c \tau_2$ и было использовано соотношение $\Pi_{ii} = 0$, которое следует из условия несжимаемости $\text{div } \mathbf{V} = 0$ и уравнения (1.17). Компоненты тензора вязкости определяются как коэффициенты в линейной связи между тензорами Π_{ij} и V_{ij} (см. книгу [68]). Поэтому из уравнений (1.14) и (1.18) получаем:

$$\Pi_{ij} = -m (\eta_{xx} V_{ij} + \eta_{xy} \epsilon_{zik} V_{kj}). \quad (1.19)$$

С помощью уравнений (1.14) и (1.18), а также условия $\text{div } \mathbf{V} = 0$ приходим к следующим выражениям для тензора вязкости:

$$\eta_{xx} = \frac{\eta}{1 + (2\omega_c \tau_2)^2}, \quad \eta_{xy} = \frac{2\omega_c \tau_2 \eta}{1 + (2\omega_c \tau_2)^2}, \quad (1.20)$$

где η – введённый в прошлом разделе коэффициент вязкости электронов в отсутствии магнитного поля. Диссипация энергии в вязкой жидкости пропорциональна коэффициенту η_{xx} . Коэффициент вязкости η_{xy} не связан с диссипацией энергии, аналогично тому, как это имеет место для внедиагонального коэффициента проводимости σ_{xy} в магнитном поле.

Был также выполнен расчёт коэффициентов вязкости в рамках классического кинетического уравнения по методу, изложенному в работе [69] и книге [68] для случая трёхмерной плазмы (см. подробности в Главе 2 и Приложении С). Этот метод даёт такие же результаты для зависимости коэффициентов вязкости от магнитного поля, что и приведённый выше простой вывод. Расчёт в рамках кинетического уравнения также позволяет определить точный коэффициент $1/4$ для коэффициента вязкости в нулевом магнитном поле: $\eta = v_F^2 \tau_2 / 4$ [39].

На Рис. 1.3 проиллюстрировано происхождение зависимости (1.20) коэффициента вязкости η_{xx} от магнитного поля. Внутреннее трение между двумя слоями электронной жидкости, движущейся с разными скоростями, появляется из-за обмена электронами между этими слоями. При отсутствии магнитного поля электроны из одного слоя проникают в другой на расстояния порядка длины пробега l_2 , что определяет вязкость η . В магнитном поле расстояние, на

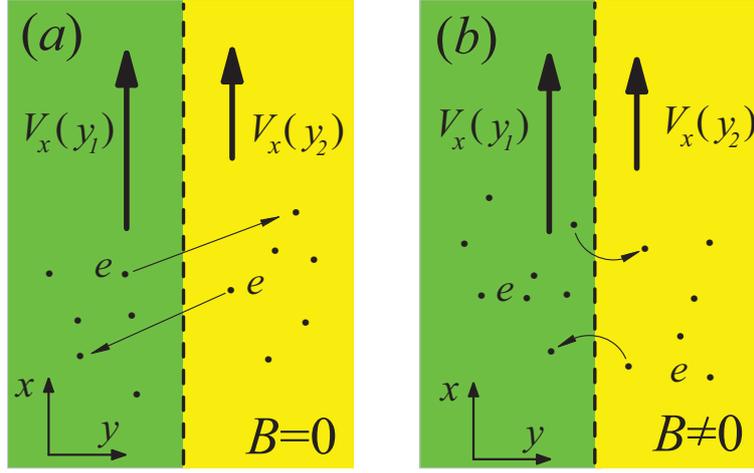


Рис. 1.3: Физическая причина уменьшения электронной вязкости в магнитном поле (схематично). Два соседних слоя электронной жидкости движутся с разными скоростями $V_x(y_1)$ и $V_x(y_2)$. Вязкое трение происходит из-за межслоевого проникновения электронов. Без магнитного поля (a) длина проникновения (определяющая вязкость) имеет порядок l_2 . В сильном магнитном поле $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ (b) эта длина ограничена циклотронным радиусом $R_c \ll l_2$.

которое электроны переносят импульс при переходе между слоями - эта величина порядка циклотронного радиуса R_c . Поэтому в сильном магнитном поле вязкость η_{xx} должна сильно убывать с ростом поля.

Для гидродинамической скорости медленного, $\omega\tau_2 \ll 1$, течения в магнитном поле из уравнений (1.13)-(1.34) получается следующее уравнение движения жидкости, которое представляет собой обобщение “немагнитного” уравнения Навье-Стокса (1.1):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \eta_{xx} \Delta \mathbf{V} + [(\eta_{xy} \Delta \mathbf{V} + \omega_c \mathbf{V}) \times \mathbf{e}_z] + \frac{e}{m} \mathbf{E} - \frac{\mathbf{V}}{\tau}. \quad (1.21)$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ - дифференциальный оператор Лапласа. Для рассматриваемых медленных течений пренебрегается сжимаемостью, поэтому уравнение (1.21) необходимо дополнить условием несжимаемости $\text{div} \mathbf{V} = 0$.

В стационарном режиме для длинного образца поток электронов в холловском направлении отсутствует, $V_y \equiv 0$, поэтому уравнения (1.21) приобретают простой вид:

$$\eta_{xx} \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{e}{m} E_x - \frac{V}{\tau} = 0, \quad (1.22)$$

$$-\eta_{xy} \frac{d^2 V}{dy^2} - \omega_c V + \frac{e}{m} E_y = 0. \quad (1.23)$$

Здесь введено упрощённое обозначения $V = V_x$. Поле $E_x \equiv E_0 = \text{const}(y)$ - электрическое поле от приложенного вдоль образца напряжения, а $E_y = E_y(y)$ - холловское поле возникающее в связи с условием отсутствия тока перпендикулярно образцу, $V_y \equiv 0$.

Полученное уравнение (1.22) совпадает со стационарной версией уравнения (1.7), если заменить в нём немагнитный коэффициент вязкости η на магнитный η_{xx} . Поэтому среднее удельное

сопротивление ρ будет описываться тем же выражением (1.9), в котором параметр $\xi = \xi(B)$ включает в себя множитель с магнитным полем:

$$\xi = \sqrt{\frac{3\tau^*}{\tau} [1 + (2\omega_c\tau_2)^2]} . \quad (1.24)$$

Графики такого магнетосопротивления построены на Рис. 1.4. Оно с хорошей точностью описывается следующей интерполяционной формулой, аналогичной формуле (1.10):

$$\rho = \frac{m}{e^2 n_0} \left[\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^*} \frac{1}{1 + (2\omega_c\tau_2)^2} \right] . \quad (1.25)$$

Из уравнения (1.25) видно, что уменьшение τ_2 с ростом температуры и увеличение скорости релаксации $1/\tau$ с температурой приводят к уширению и смещению вверх кривых магнетосопротивления (см. Рис. 1.4). Увеличение τ^* с температурой приводит к увеличению роли рассеяния в объёме и постепенному исчезновению отрицательного магнетосопротивления. При низких температурах и сильных магнитных полях, $\omega_c\tau_2 \gg 1$, уравнения (1.12) и (1.25) дают конечное значение сопротивления, $m/(e^2 n_0 \tau_0)$. Такое сопротивление связано только с релаксацией импульса электронов при их рассеянии беспорядке в объёме образца.

Гидродинамический механизм отрицательного магнетосопротивления, аналогичный тому, который описан выше, был впервые предложен и изучен, по-видимому, в работе [21] для пуазейлевского течения электрон-фононной жидкости в объёмных образцах чистых металлов с сильным электрон-фононным взаимодействием. Вязкость трёхмерной электронной жидкости в магнитном поле за счёт рассеяния электронов на фононах, аналогичная вязкости двумерных электронов (1.20), была впервые рассчитана в работе [104] для объёмных металлов.

Холловское напряжение между продольными краями образца $U_H = -\int_{-W/2}^{W/2} dy E_y(y)$ находится путём интегрирования уравнения (1.23) по переменной y (ниже будем обозначать через U_H абсолютное значение холловского напряжения):

$$U_H = \frac{B}{c} \frac{I}{en_0} + \frac{m\eta_{xy}}{e} \frac{dV}{dy} \Big|_{-W/2}^{W/2} . \quad (1.26)$$

Здесь $I = en_0 \int_{-W/2}^{W/2} dy V(y)$ – полный ток через образец. Второе слагаемое в правой части этого уравнения пропорционально внедиагональному “холловскому” коэффициенту вязкости η_{xy} . Оно имеет порядок величины $(B/c)(l_2/W)^2 VW$ при $\omega_c\tau_2 \ll 1$ или $(B/c)(R_c/W)^2 VW$ при $\omega_c\tau_2 \gg 1$, тогда как первое “стандартное холловское” имеет порядок величины $BI/(n_0 ec) \sim (B/c)VW$ [здесь V – типичное значение скорости в середине образца].

Таким образом, первое слагаемое в формуле (1.26) оказывается много больше второго. Так как в эту оценку входят малые параметры l_2/W или R_c/W , логично ожидать, что поправки

в U_H тех же порядков $[(B/c)(l_2/W)^2VW$ или $(B/c)(R_c/W)^2VW]$ могут возникать не только от объёмного эффекта внедиагональной вязкости η_{xy} в гидродинамическом уравнении (1.23), но также и от вкладов течений в приграничных слоях $W/2 - |y| \lesssim l_2$ (или $W/2 - |y| \lesssim R_c$), где динамика электронов отчасти является баллистической за счёт рассеяния электронов на краях образца.

Полная величина холловского сопротивления в гидродинамическом режиме была найдена численно в работе [61] путём решения на сетке кинетического уравнения (см. подробности в Главе 4). Аналитическое решение этой проблемы о поправках в эффекте Холла в гидродинамическом режиме выполняется с участием автора диссертации в настоящее время.

Таким образом, при вычислении холловского поля и холловского напряжения в рамках гидродинамики с допускаемой её уравнениями точностью невозможно учесть поправки, пропорциональные малому параметру применимости гидродинамики $l_{micr}/W \ll 1$ (здесь $l_{micr} = l_2$ или $l_{micr} = R_c$) и необходимо ограничиться только главным “кинематическим” вкладом $BI/(n_0ec)$ в холловское напряжение (1.26):

$$\varrho_{xy}^{(0)} = \frac{B}{n_0ec} . \quad (1.27)$$

Напомним, что такое сопротивление отвечает константе Холла $R_H = U_H/(BI) = 1/(n_0ec)$.

1.2.3 Сопоставление с экспериментами

Обсудим результаты работ [40]-[44],[46],[49] по наблюдению гигантского отрицательного магнетосопротивления двумерных электронов с высокими подвижностями. В этих работах измерялось магнетосопротивление квантовых ям в гетероструктурах GaAs/AlGaAs очень высокого качества. Концентрации двумерных электронов n_0 находились в диапазоне от 2 до $9 \cdot 10^{11}$ см⁻². “Номинальные” подвижности электронов μ_{exp}^D , получаемые по формуле Друде:

$$R = \frac{L}{W} \frac{1}{n_0 e \mu_{exp}^D} , \quad (1.28)$$

из измеряемого сопротивления образца R при $B = 0$ были очень высокими: от 10^6 до $3 \cdot 10^7$ см²/В·с. Как видно из работ [40]-[44],[46],[49], в структурах такого качества сопротивление образцов $R(B)$ сильно падает при изменении магнитных полей B от 0 до 1-3 кГс. Эти поля для изучаемых образцов являются классически сильными и неквантуемыми. Величина падения сопротивления $R(B)$ варьировалась от десятков процентов до десятков раз.

Обсудим сначала более подробно результаты работы [44]. Панель (а) Рисунка 1.4 цитирует полученные в этом эксперименте кривые магнетосопротивления для высокоподвижной квантовой ямы GaAs для широкого диапазона температур. В работе [A4] для тех же самых

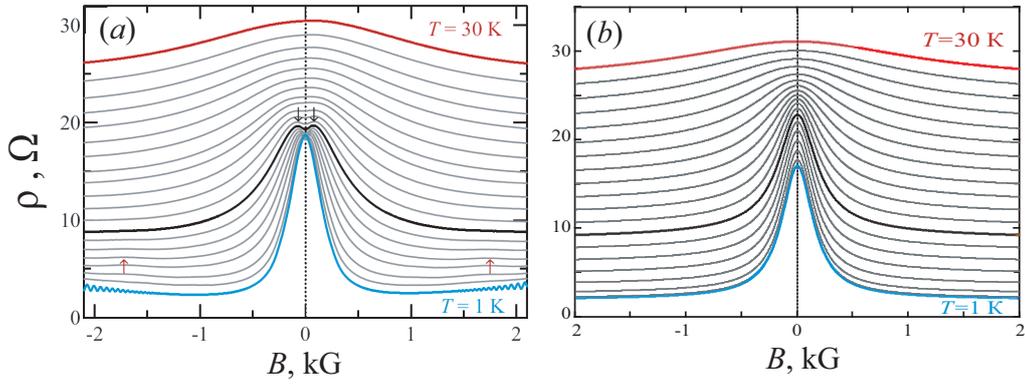


Рис. 1.4: Температурно-зависимое магнетосопротивление высокоподвижных двумерных электронов в квантовых ямах GaAs, экспериментально изученных в работе [44]. Для изученного образца “номинальная” друдевская подвижность и плотность электронов были равны: $\mu_{exp}^D = 1.0 \cdot 10^6$ см²/В·с и $n_0 = 2.8 \cdot 10^{11}$ см⁻² (что соответствует $r_s \approx 1$). Панель (a) представляет экспериментальные данные работы [44]. Панель (b) представляет результаты теории; кривые на ней построены по формулам (1.9), (1.24), (1.5) и (1.11) с численными значениями параметров, представленными в тексте.

температур и магнитных полей было рассчитано магнетосопротивление для параметров изученного в [44] образца по формулам (1.6), (1.9), (1.12) и (1.24) {впервые об этом расчёте было сообщено в докладах [A1]-[A3]}. Результат представлен на панели (b) Рисунка 1.4. Времена релаксации на беспорядке τ_0 и $\tau_{2,0}$, а также амплитуды A_{ph} и A_{ee}^{FL} в температурных зависимостях электрон-электронных и электрон-фононных времен $\tau_{0,ph}$ (1.11) и $\tau_{2,ee}$ (1.5) считались подгоночными параметрами.

Хотя при соответствующем выборе подгоночных параметров возможно очень хорошо воспроизвести форму экспериментальных кривых и их эволюцию с температурой, оказывается невозможным получить с помощью такой процедуры абсолютные значения сопротивления образца, наблюдаемые в эксперименте [44]. Измеренные значения среднего удельного сопротивления ρ в развитой теории, однако, можно получить, заменив в формулах ширину образца W на меньшую некоторую “эфффективную” ширину $W_{eff} < W$ [A4]. Такое уменьшение ширины может быть связано со следующим обстоятельством. Изученный образец может содержать неоднородности, которые приводят к образованию течения сложной формы, в котором формируются проводящие каналы с эфффективной шириной W_{eff} , существенно меньшей ширины образца W .

Действительно, ранее сообщалось [45, 105], что в образцах, где наблюдался эффект гигантского отрицательного магнетосопротивления, часто наблюдаются овальные дефекты большого радиуса, возникающие в процессе роста гетероструктур. Расстояние d между дефектами варьируется в пределах 20–100 мкм, а их радиусы составляют порядка 10–20 мкм. Очевидно, что такие дефекты приводят к искажению формы течения, приводя к уменьшению его “эфффективной” ширины (по сравнению с неискажённым течением Пуазейля в том же образце).

В окрестностях дефектов гидродинамическая скорость $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ не может иметь составляющую в направлении, перпендикулярном краю дефекта. Замедление потока происходит из-за вязкостного переноса (в направлении y) x -компоненты импульса электрона из областей между дефектами в области, которые находятся непосредственно перед дефектами (в направлении x). Таким образом, дефекты большого радиуса приводят к релаксации импульса по механизму, аналогичному диффузионному рассеянию на шероховатых границах образца в течении Пуазейля, а также к образованию проводящих каналов с шириной, значительно меньшей W .

На пространственных масштабах порядка d такая картина течения имеет значительное сходство с течением Пуазейля в прямоугольном образце с шириной $W_{eff} \sim d$ (см. подробности в Приложении А). Конкретное распределение гидродинамической скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ может быть весьма сложным, однако соотношение для усредненного удельного сопротивления образца:

$$\varrho \sim \frac{1}{\tau} + \frac{\eta_{xx}}{d^2}, \quad (1.29)$$

аналогичное интерполяционной формуле (1.25) для течения Пуазейля, по-видимому, сохраняется [см. Приложение А, в котором дан качественный вывод формулы (1.29)].

Кривые магнетосопротивления, построенные на Рис. 1.4(b), соответствуют следующим подгоночным параметрам: $\tau_0 = 4.5 \cdot 10^{-10}$ с, $\tau_{2,0} = 1.1 \cdot 10^{-11}$ с, $A_{ph} = 10^9$ с $^{-1}$ ·К $^{-1}$, $A_{ee}^{Fl} = 1.3 \cdot 10^9$ с $^{-1}$ ·К $^{-2}$ и $W_{eff} = 10$ мкм. Величина полученной константы A_{ph} по порядку величины соответствует результату её микроскопического расчета по формулам статьи [100] с параметрами трёхмерных фононов в GaAs и параметрами вырожденных двумерных электронов в квантовой яме, изученной в работе [44]. Величины полученных констант A_{ee} и A_{ee}^{FL} и другие особенности экспериментальных данных подробно обсуждаются в Главе 2.

На Рисунке 1.5 приведены температурные зависимости длин свободного пробега $l_2 = v_F \tau_2$ и $l = v_F \tau$, полученных при подгонке экспериментальных данных работы [44]. Кривые на Рис. 1.5 построены по формулам (1.6), (1.12) с параметрами $\tau_{2,0}$, A_{ph} , τ_0 , A_{ee}^{Fl} , которые отвечают “наилучшим” теоретическим кривым, показанным на Рис. 1.4(b). Видно, что для образца, изученного в [44], при всех температурах выполнено простейшее условие применимости гидродинамического описания: $l_2 \ll W_{eff}$.

В работе [A4] из описанного выше сопоставления результатов эксперимента [44] и других аналогичных экспериментов [40]-[42] с предсказаниями гидродинамической теории был сделан следующий вывод. Температурно-зависимое гигантское отрицательное магнетосопротивление, наблюдаемое в высокоподвижных гетероструктурах GaAs/AlGaAs, свидетельствует о формировании в этих системах вязкой двумерной электронной жидкости.

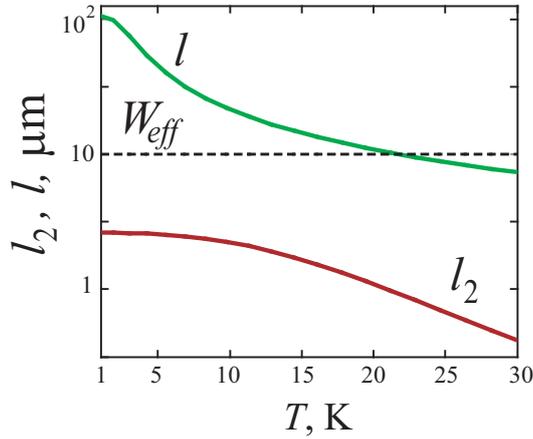


Рис. 1.5: Длины свободного пробега относительно релаксации импульса $l(T)$ и сдвиговых напряжений $l_2(T)$ для двумерной электронной жидкости в квантовой яме GaAs, исследованной в работе [44]. Данные получены в процедуре подгонки, результаты которой представлены на Рис. 1.4(b).

В работах [40]-[42],[46],[49] в аналогичных GaAs квантовых ямах наблюдалось гигантское отрицательное магнетосопротивление с очень похожими свойствами (см. Рис. 1.6).

В этой связи, во-первых, важно отметить, что в ряде работ на фоне температурно-зависимого широкого пика магнетосопротивления, обсужденного выше, наблюдалось температурно-независимое отрицательное магнетосопротивление в форме узкого пика [см. Рис. 1.6(a,c)]. Анализ показывает, что маленький пик, по-видимому, обусловлен наличием в течении электронов баллистической компоненты и возникает за счёт баллистических размерных эффектов в режиме, когда длина свободного пробега и циклотронный радиус больше ширины проводящего канала. Этот механизм магнетотранспорта будет теоретически изучен в Главе 4.

Во-вторых, примечательно, что на образцах, изучавшихся в работах [46]-[48], наблюдалось описанное в Разделе 1.2.1 уменьшение сопротивления с температурой при нулевом магнитном поле, связанное с температурной зависимостью вязкости [см. Рис. 1.6(d)]. Сильное падение сопротивления с температурой, называемое эффектом Гуржи, является дополнительным сильным свидетельством гидродинамической природы магнетотранспорта в высококачественных квантовых ямах GaAs. Отметим, что в работах [46]-[48] при анализе экспериментальных данных по описанной выше процедуре, амплитуда наблюдавшегося в [46] сопротивления хорошо воспроизводилась при подстановке в формулы полной ширины образца W (а не меньшей “эффективной” ширины $W_{eff} < W$). Более того, в работе [106] для аналогичных образцов GaAs квантовых ям наблюдался значительный эффект на гидродинамическое течение электронов от добавления одного макроскопического дефекта в середине образца.

Последние два эффекта, по-видимому, указывает на б'ольшую однородность образцов, изучавшихся в работах [46]-[48],[106] в группе Г. М. Гусева, чем образцов, изучавшихся другими

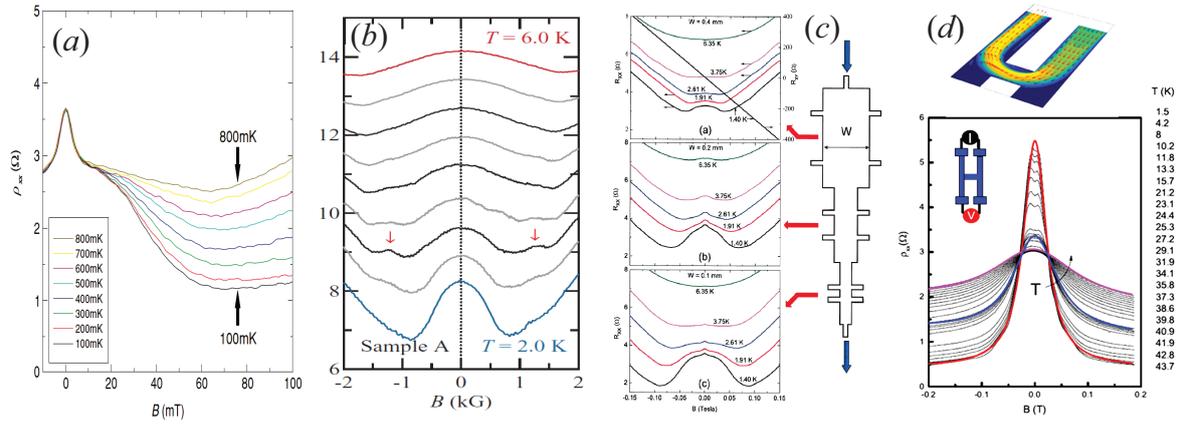


Рис. 1.6: Гигантское отрицательное магнетосопротивление, наблюдавшееся в высокоподвижных квантовых ямах GaAs в работах [42] (a), [41] (b), [40] (c) и [46] (d). Концентрации двумерных электронов и “номинальные” друдевские подвижности в изученных образцах были равными: $n_0 = 2.27, 2.29, 1.6, 9.1 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ и $\mu_{exp}^D = 11.9, 7.59, 5.4, 2.0 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ для панелей (a)-(d).

экспериментальными группами [40]-[42],[49], и на реализацию в первых режима магнетотранспорта, ближе соответствующего течению Пуазейля (см. Рис. 1.1).

Отметим, что в недавней работе [75] был изучен магнетотранспорт в высокоподвижных квантовых ямах GaAs, в которых искусственно создавалось большое контролируемое число макроскопических точечных дефектов, по-видимому, аналогичных овальным дефектам, описанным в работе [45]. Хотя авторы [75] работы считают, что их результаты объясняются в рамках модели невзаимодействующих электронов, схожесть образцов, изученных в работе [75] и в работах [40]-[44],[49],[46], а также схожесть наблюдавшегося сильного отрицательного магнетосопротивления склоняет думать, что формирование гидродинамической компоненты течения даёт существенный вклад в температурно-зависимую часть магнетосопротивления, наблюдавшегося в работе [75].

Аналогичное сильное отрицательное магнетосопротивление недавно наблюдалось также в других материалах: вейлевском полуметалле WP_2 , графене и квантовых ямах HgTe (см. Рис. 1.7). В первых двух материалах гидродинамический режим транспорта первоначально был обнаружен на основании наблюдения других эффектов: по специфической зависимости сопротивления образца от его ширины, отражающей формирование пространственно неоднородного течения типа Пуазейля [см. формулу (1.3)], а также по появлению водоворотов в течении электронной жидкости, приводящим к противоположным направлениям тока и напряжения на контактах в области вихря [30]. Примечательно, что и для квантовых ям GaAs был обнаружен эффект “абсолютного отрицательного сопротивления” за счёт водоворотов (в работе [47], вышедшей после наблюдения гигантского отрицательного магнетосопротивления в тех же структурах [46]). В графене и WP_2 гигантское отрицательное магнетосопротивление

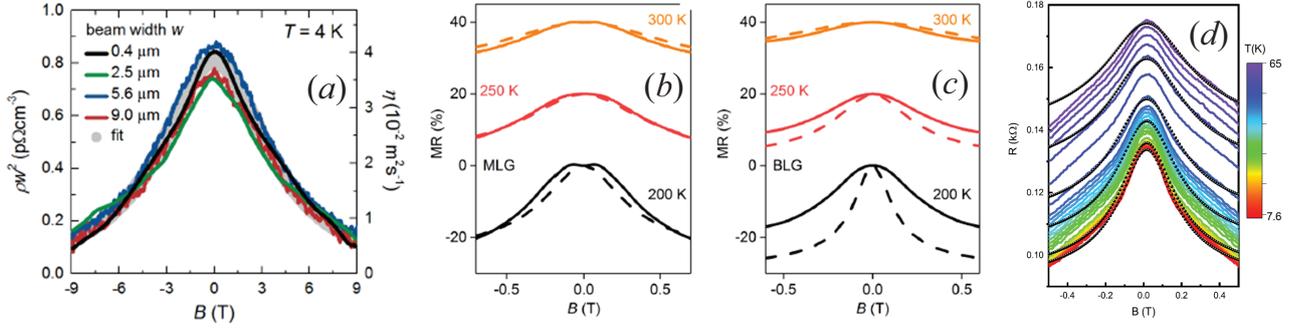


Рис. 1.7: Гигантское отрицательное магнетосопротивление, наблюдавшееся в высокоподвижных двумерных материалах, отличных от квантовых ям GaAs. (a): Результаты работ [32] для вейлевского полуметалла WP_2 . Серая теоретическая кривая построена по формулам (1.9), (1.24), (1.25). (b,c): Результаты работы [28] для однослойного и двухслойного графена. Кривые при разных температурах сдвинуты на 20 процентов [цветные кривые – эксперимент, кривые из точек – подгонка по формуле (1.25)]. (d): Результаты работ [76] для квантовых ям HgTe [цветные кривые – эксперимент, кривые из точек – подгонка по формуле (1.25)].

было объяснено авторами как следствие формирования вязкой электронной жидкости. Отметим, что в графене такое магнетосопротивление хотя не является большим по абсолютной величине, но наблюдается вплоть до комнатных температур [см. Рис. 1.7(b,c)].

Отрицательное магнетосопротивление, наблюдавшееся в работе [76] в квантовых ямах HgTe, имеет умеренную амплитуду, аналогично случаю графена [см. Рис. 1.7(b-d)]. Однако оно, как и в квантовых ямах GaAs, имеет с лоренцевский профиль и аналогичным образом зависит от температуры. Поэтому авторами работы [76] обнаруженное магнетосопротивление также было интерпретировано как наличие в течении электронов в яме значительной гидродинамической компоненты.

Действительно, в соответствии с формулой (1.25) и описанным выше анализом экспериментов, относительная амплитуда падения гигантского отрицательного магнетосопротивления $h = [\varrho(0) - \varrho(\infty)]/\varrho(0)$, по крайней мере, для некоторых типов образцов, может считаться характеристикой “степени гидродинамичности” течения: чем больше h , тем больший вклад в ток даёт гидродинамическая часть потока, и тем меньшую роль играет рассеяние электронов на дефектах в объёме.

Был выполнен оценочный расчёт зависимости плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ от магнитного поля для течения, существенно неоднородного по сечению образца с характерным масштабом неоднородности W , близким к длинам свободного пробега l_2 и/или l . Эта оценка основана на разложении функции распределения электронов $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ в ряд по углу \mathbf{v} скорости электронов. Она показывает, что умеренное отрицательное магнетосопротивление, отвечающее $h \sim 1$, возникает для такого течения в длинном образце в режиме, промежуточном между гидродинамическим и омическим: $W \sim l_2 \sim l$. Количественное описание такого течения требует численных расчё-

тов, однако появление отрицательного магнетосопротивления с амплитудой $h \sim 1$ следует из выполненной оценки.

1.3 Вязкоупругий резонанс

1.3.1 Низкочастотное сжимаемое вязкое течение в магнитном поле

В настоящем разделе рассматриваются быстрые гидродинамические течения двумерных электронов в магнитном поле, а именно: их характерная частота течения ω сравнима или много больше частоты столкновений $1/\tau_{ee}$, приводящих к релаксации сдвиговых напряжений. Соотношение между ω и циклотронной частотой ω_c электронов может быть произвольным.

Если электроны слабо взаимодействуют между собой и могут рассматриваться как почти идеальный ферми-газ, гидродинамический подход может быть использован в следующих случаях. “Обычное” квазиравновесное гидродинамическое течение характеризуется почти равновесным распределением электронов по скоростям \mathbf{v} в системах координат, движущихся со скоростями $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$. Такой поток описывается уравнением Навье-Стокса и формируется при условии, что длина межчастичного рассеяния $l_{ee} = v_F \tau_{ee}$ является кратчайшим пространственным масштабом, в частности, много меньше характерного масштаба неоднородности течения Δx . Гидродинамическое описание с помощью уравнений, аналогичных уравнению Навье-Стокса, однако, может быть также справедливым и в сильно неравновесном режиме, когда поток жидкости возникает за счет воздействия высокочастотного электрического поля с частотами $\omega \gg 1/\tau_{ee}$ и квазиравновесное распределение электронов в движущейся системе отсчета не успевает сформироваться. Говоря точно, последний режим описывается следующим образом. Если характерный масштаб неоднородностей потока Δ намного больше, чем циклотронный радиус, $R_c = v_F/\omega_c$ или путь, который проходит свободный электрон за период $\mathbf{E}_0(t)$, $l_\omega = v_F/\omega$, первая и вторая угловые гармоники доминируют в распределении электронов по направлениям скоростей \mathbf{v} , поток становится возможным описать средними значениями гидродинамической скорости $\mathbf{V} = \langle v_i \rangle$ и плотности потока импульса $\Pi_{ij} = m \langle v_i v_j \rangle$, и поэтому становятся применимы то же уравнение Навье-Стокса (1.41) и (1.42) [см. более подробное обсуждение Приложение С).

В уравнении эволюции гидродинамической скорости (1.21) электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ может включать в себя вклады от падающего излучения и от возмущения плотности заряда двумерных электронов. Тензор плотности потока импульса Π_{ij} имеет общий вид: $\Pi_{ij} = P \delta_{ij} - \sigma_{ij}$, где P – давление в жидкости, δ_{ij} – символ Кронекера, а σ_{ij} – тензор вязких напряжений [107].

Первый вклад $P \delta_{ij}$ является равновесным (или квазиравновесным для быстрого течения), а второй вклад, $-\sigma_{ij}$, является неравновесным и описывает процессы диссипации

Для медленных течений, характерная частота которых много меньше частоты столкновений, приводящих к релаксации σ_{ij} , $\omega \ll 1/\tau_{ee}$, тензор Π_{ij} в отсутствие магнитного поля с учётом сжимаемости жидкости даётся выражением [107]:

$$\Pi_{ij}^{(0,c)} = P \delta_{ij} - m \left[\eta \left(V_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} V_{kk} \right) + \frac{\zeta}{2} \delta_{ij} V_{kk} \right], \quad (1.30)$$

где $V_{ij} = \partial V_i / \partial x_j + \partial V_j / \partial x_i$ – симметризованный тензор градиентов скорости, η и ζ – коэффициенты сдвиговой и объёмной (второй) вязкости. Для ферми-газа и ферми-жидкости коэффициент объёмной вязкости обычно относительно мал по сравнению со сдвиговой вязкостью. Он выражается через зависимости эффективной массы квазичастиц и функции Ландау от энергии квазичастиц или же, если эти зависимости пренебрежимо малы, даётся оценкой $\zeta \sim (T/\varepsilon_F)^2 \eta$ [109, 119]. Поэтому будем пренебрегать эффектом “обычной” второй вязкости электронов, связанным с релаксацией энергии квазичастиц и аналогичным второй вязкости макроскопических газов и жидкостей. Как отмечалось во Введении, возмущение спиновой поляризации и других степеней свободы носителей заряда в проводниках может приводить к эффектам, аналогичным эффекту второй вязкости ζ . Эффекты, обусловленные второй вязкостью других типов, будут рассмотрены ниже как для омических образцов с дефектами, так и для чистых образцов (см. Раздел 1.5 и Главу 3).

Используя уравнения (1.13) и (1.30), можно получить уравнение Навье-Стокса в линейном режиме по \mathbf{V} с учётом сжимаемости:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{V} - \frac{\mathbf{V}}{\tau} + \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \nabla P. \quad (1.31)$$

Заметим, что в двумерном случае, который только рассматривается в настоящей диссертации, даже для сжимаемых течений с существенной величиной $\text{div} \mathbf{V}$, в уравнении (1.31) отсутствует слагаемое пропорциональное $\text{div} \mathbf{V}$, если пренебрегается слагаемыми, пропорциональными малой объёмной вязкости ζ .

Уравнение (1.31) необходимо дополнить уравнением состояния газа $P = P(n)$ (здесь n – плотность электронов) и уравнением неразрывности. Последнее в линейном режиме имеет вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \text{div} \mathbf{V} = 0, \quad (1.32)$$

где n_0 – невозмущенная плотность электронов.

Квазиравновесные значения тензора $\Pi_{ij}^{(0,c)}$, даваемые формулой (1.30), достигаются за время τ_{ee} , в соответствии с релаксационным уравнением (1.15). Уравнения (1.15), (1.31) и (1.32)

и составляют полную систему уравнений, описывающих медленные нестационарные потоки в отсутствие магнитного поля.

Теперь рассмотрим нестационарный вязкий поток электронов в магнитном поле \mathbf{V} , перпендикулярном двумерному слою. Будет рассмотрен режим умеренных магнитных полей, $\hbar\omega_c \ll T \ll \varepsilon_F$, когда квантовые эффекты не играют существенной роли в движении отдельных электронов и электронной жидкости в целом. При этом соотношение между параметрами ω_c , ω и τ_{ee} может быть произвольным.

Как было описано в прошлом разделе, в присутствии магнитного поля в уравнениях эволюции для величин $\partial V_i/\partial t = \partial \langle v_i \rangle / \partial t$ и $\partial \Pi_{ij}/\partial t = m \partial \langle v_i v_j \rangle / \partial t$ появляются дополнительные слагаемые, связанные с действием магнитной силы Лоренца на отдельные электроны. В итоге уравнения эволюции приобретают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} &= -\frac{V_i}{\tau} - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{e}{m} E_i(\mathbf{r}, t) + \omega_c \epsilon_{ikz} V_k, \\ \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial t} &= -\frac{\Pi_{ij} - \Pi_{ij}^{(0,c)}}{\tau_{ee}} + \omega_c (\epsilon_{ikz} \Pi_{kj} + \epsilon_{jkz} \Pi_{ik}). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Во втором уравнении (1.33) предполагаем, что сила электрического поля намного меньше силы магнитного поля, как это обычно имеет место в экспериментах с магнетотранспортом.

Как и в случае нулевого магнитного поля, сначала рассмотрим случай медленных течений, когда характерные частоты ω поля скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ малы по сравнению с ω_c и $1/\tau_{ee}$. Полагая $\partial \Pi_{ij}/\partial t = 0$, находим из уравнений (1.30) и (1.33) значения Π_{ij} как линейные комбинация значений $\Pi_{ij}^{(0)}$ и, следовательно, P и V_{ij} :

$$\Pi_{ij} = P \delta_{ij} - \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} = m \left[\eta_{xx} \left(V_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} V_{kk} \right) + \eta_{xy} \epsilon_{ikz} V_{kj} \right], \quad (1.34)$$

где η_{xx} и η_{xy} – стационарные коэффициенты вязкости (1.20).

Из уравнений (1.33) и (1.34) выводится уравнение Навье-Стокса для гидродинамической скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ сжимаемой жидкости в магнитном поле при низких частотах:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \eta_{xx} \Delta \mathbf{V} + [(\omega_c \mathbf{V} + \eta_{xy} \Delta \mathbf{V}) \times \mathbf{e}_z] + \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{\mathbf{V}}{\tau} - \frac{\nabla P}{m}. \quad (1.35)$$

Это уравнение отличается от уравнения (1.31) заменой коэффициента вязкости η на диагональный коэффициент $\eta_{xx} = \eta_{xx}(B)$ и появлением двух магнитных слагаемых $\omega_c [\mathbf{V} \times \mathbf{e}_z]$ (магнитная сила Лоренца) и $\eta_{xy} [\Delta \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z]$ (слагаемое холловской вязкости).

1.3.2 Высокочастотное сжимаемое вязкое течение в магнитном поле

Сначала рассмотрим высокочастотное двумерных вырожденных электронов (с частотой ω

сравнимыми или много больше частоты межчастичных столкновений $1/\tau_{ee}$) в отсутствии магнитного поля.

В таком течение связь между величинами $\Pi_{ik}(\mathbf{r}, t)$ и $V_{ik}(\mathbf{r}, t)$ нелокальна по времени. Благодаря линейности всех уравнения можно разложить все величины в разложение Фурье по временным гармоникам, пропорциональным $e^{-i\omega t}$. Для каждой пары гармоник $\mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t}$ и $\Pi_{ij}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t}$ из уравнений (1.13), (1.30) и (1.15) можно получить соотношения между амплитудами $\mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega)$ и $\Pi_{ij}(\mathbf{r}, \omega)$:

$$\begin{aligned}\Pi_{ij}(\omega) &= P(\omega) \delta_{ij} - \sigma_{ij}(\omega), \\ \sigma_{ij}(\omega) &= m \eta(\omega) \left[V_{ij}(\omega) - \frac{1}{2} \delta_{ij} V_{kk}(\omega) \right].\end{aligned}\tag{1.36}$$

Эти соотношения имеют ту же форму, что и формулы (1.30) и (1.31), однако содержат амплитуду $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ гармоники электрического поля вместо среднего значения поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и высокочастотный коэффициент вязкости:

$$\eta(\omega) = \frac{\eta}{1 - i\omega\tau_{ee}},\tag{1.37}$$

вместо низкочастотного коэффициента η . Уравнение Навье-Стокса для гидродинамической скорости приобретает вид:

$$-i\omega\mathbf{V} = \eta(\omega) \Delta\mathbf{V} - \frac{\mathbf{V}}{\tau} + \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\nabla P(\omega)}{m}.\tag{1.38}$$

Это уравнение должно быть дополнено уравнение непрерывности для гармоник скорости и возмущения плотности:

$$-i\omega\delta n + n_0 \operatorname{div}\mathbf{V} = 0.\tag{1.39}$$

Теперь получим уравнения высокочастотного течения в магнитном поле, когда частота ω сравнима или много больше частот ω_c и $1/\tau_{ee}$. Как и в случае нулевого магнитного поля, раскладываем функции $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ и $\Pi_{ij}(\mathbf{r}, t)$ по временным гармоникам, пропорциональным $e^{-i\omega t}$. Из общих уравнений (1.33) получаем выражение для амплитуды гармоники тензора вязких напряжений в первой из формул (1.40):

$$\sigma_{ij}(\omega) = m \left\{ \eta_{xx}(\omega) \left[V_{ij}(\omega) - \frac{1}{2} \delta_{ij} V_{kk}(\omega) \right] + \eta_{xy}(\omega) \epsilon_{ikz} V_{kj}(\omega) \right\},\tag{1.40}$$

и уравнение Навье-Стокса для амплитуды гармоники скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega)$:

$$-i\omega\mathbf{V} = \eta_{xx}(\omega) \Delta\mathbf{V} + [(\omega_c \mathbf{V} + \eta_{xy}(\omega) \Delta\mathbf{V}) \times \mathbf{e}_z] - \frac{\mathbf{V}}{\tau} + \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\nabla P}{m}.\tag{1.41}$$

Здесь введены высокочастотные коэффициенты вязкости $\eta_{xx}(\omega)$ и $\eta_{xy}(\omega)$, которые зависят как

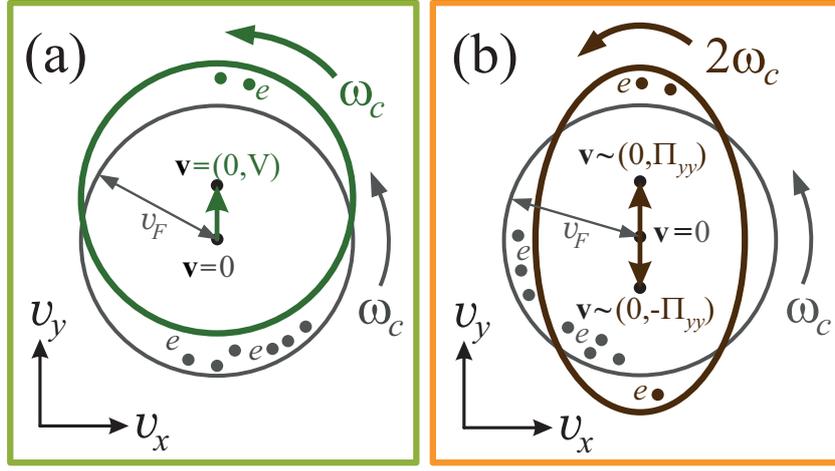


Рис. 1.8: Схематическое изображение двух распределений $f(\mathbf{v})$ двумерных электронов по их скоростям $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$. Равновесные распределения Ферми $f_F(\mathbf{v})$ показаны серым цветом на обеих панелях (a) и (b). Квазиравновесное распределение $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = f_F(\mathbf{v} - \mathbf{V})$ со средней гидродинамической скоростью $\mathbf{V} = (0, V)$ показано зелёным цветом на панели (a). В магнитном поле такая функция распределения, вместе с каждым отдельным электроном, вращается с частотой ω_c . Неравновесное распределение $f_{\Pi}(\mathbf{v}) = f_F(\mathbf{v}) + f_2(\mathbf{v})$ с нулевой средней скоростью и ненулевой второй гармоникой $f_2(\mathbf{v})$, соответствующее ненулевой компоненте Π_{yy} тензора плотности потока импульса Π_{ij} , показано коричневым цветом на панели (b). Вращение отдельных электронов с частотой ω_c приводит к вращению такой функции распределения f_{Π} с частотой $2\omega_c$.

от частоты потока, так и от магнитного поля:

$$\eta_{xx}(\omega) = \eta \frac{1 - i\omega\tau_{ee}}{1 + (-\omega^2 + 4\omega_c^2)\tau_{ee}^2 - 2i\omega\tau_{ee}}, \quad (1.42)$$

$$\eta_{xy}(\omega) = \eta \frac{2\omega_c\tau_{ee}}{1 + (-\omega^2 + 4\omega_c^2)\tau_{ee}^2 - 2i\omega\tau_{ee}}.$$

Видно, что при $\omega_c \gg 1/\tau_{ee}$ коэффициенты вязкости $\eta_{xx}(\omega)$ и $\eta_{xy}(\omega)$ имеют резонанс при $\omega = 2\omega_c$. Действительно, собственная частота вращения значения $\Pi_{ij} = m\langle v_i v_j \rangle$ – это удвоенная циклотронная частота $2\omega_c$ (см. Рис. 1.8). Таким образом, когда частота изменения потока ω близка к внутренней частоте $2\omega_c$, возникает резонанс. Отметим, что этот эффект есть не вторая гармоника одночастичного циклотронного резонанса независимых электронов, а коллективный резонанс, связанный с движением вязкого потока импульса системы взаимодействующих электронов (газы или жидкости).

Если взаимодействие между двумерными электронами сильное (кинетическая энергия электрона того же порядка, что кулоновская энергия взаимодействия с другими электронами), их следует рассматривать как ферми-жидкость. Анализ кинетического уравнения для квазичастиц ферми-жидкости, выполненный в Главе 2, показывает, что при достаточно большом значении взаимодействия между квазичастицами ферми-жидкости (что отвечает сильному взаимодействию между исходными электронами) кинетическое уравнение для квазичастиц сводится к уравнению Навье-Стокса для сильно вязкой электронной жидкости. Коэффициенты вязкости η , η_{xx} и η_{xy} при этом перенормируются: они становятся много больше, чем

их значения для ферми-газа с теми же параметрами v_F и τ_2 . В частности, уравнения (1.41) и (1.42) становятся применимы даже для достаточно коротких масштабов неоднородностей течения, $\Delta x \sim \sqrt{\eta/\tau_2}/\omega$ [в случае ферми-газа для таких Δx гидродинамическое описание неприменимо].

1.3.3 Затухание магнитоплазмонов

Временная дисперсия вязкости может проявляться в затухании магнитоплазмонов. Вычислим их коэффициент затухания, связанный с вязкостью, используя уравнения (1.32), (1.41) и (1.42). Не будем рассматривать эффекты запаздывания, которые могут быть важны в области малых волновых векторов в некоторых структурах (см. работы [110, 111]).

Для описания волн в отсутствие внешних переменных полей, электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ в уравнении (1.41) появляется за счёт возмущения плотности двумерных электронов $\delta n(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) - n_0$. В медленном режиме электрическое поле имеет вид: $\mathbf{E} = -\nabla\delta\varphi$, где потенциал $\delta\varphi(\mathbf{r}, t)$ связан с $\delta n(\mathbf{r}, t)$ уравнениями электростатики. В этом случае для структур с металлическим затвором, расположенным на расстоянии d от слоя электронов, имеем:

$$\delta\varphi = \frac{4\pi ed}{\kappa} \delta n, \quad (1.43)$$

где κ – это диэлектрическая константа материала гетероструктуры. Для структур без затвора соотношение между $\delta\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\delta n(\mathbf{r}, t)$ даётся просто законом Кулона в интегральной форме с плотностью заряда $\varrho(\mathbf{r}, z) = e \delta n(\mathbf{r}) \delta(z)$, где дельта-функция $\delta(z)$ показывает положение слоя двумерных электронов.

Для расчёта спектра и коэффициента затухания магнитоплазмонов необходимо совместно решить уравнения (1.32), (1.41) и (1.43) [или другое электростатическое уравнение, связывающее δn и $\delta\varphi$]. При этом профиль решения нужно считать плоской волной: $\delta n(\mathbf{r}, t)$, $\delta\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \sim e^{-i\omega t + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$. Отношение слагаемых давления $-\nabla P/m$ и внутреннего поля $e\mathbf{E}/m$ в уравнении (1.41) оценивается величиной a_B/d для структуры с затвором и величиной $a_B q$ для структуры без затвора (здесь a_B – боровский радиус двумерных электронов). Эти величины должны быть малы по сравнению с единицей для того, чтобы двумерные электростатические уравнения типа (1.43) были применимы.

Пренебрегая всеми релаксационными слагаемыми в уравнении (1.41), из него и из уравнений (1.32) и (1.43) получается обычный закон дисперсии магнитоплазмонов:

$$\omega_{0,q} = \sqrt{\omega_c^2 + s^2 q^2}, \quad (1.44)$$

где $s = \sqrt{4\pi e^2 n_0 d / m \kappa}$ – скорость плазмонов в отсутствии магнитного поля. Второе слагаемое

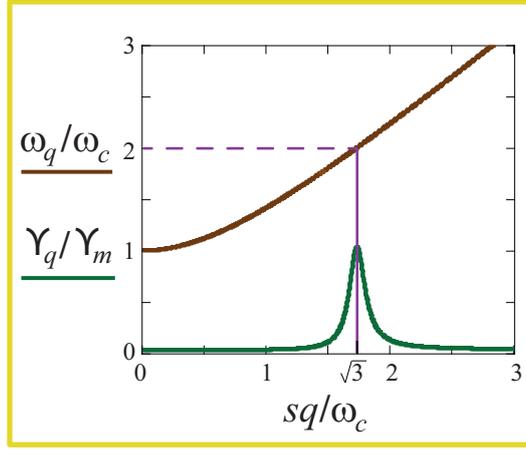


Рис. 1.9: Невозмущённый закон дисперсии магнитоплазмонов $\omega_{0,q}$ и их коэффициент затухания Υ_q . Расчёт выполнен по формулам (1.44) и (1.48) для структуры с затвором. Максимальное значение коэффициента затухания, $\Upsilon_m = 5/(8\tau) + 27\eta\omega_c^2/(8s^2)$, достигается на волновом векторе $q_m = \sqrt{3}\omega_c/s$, соответствующем положению резонанса $\omega_{0,q} = 2\omega_c$.

под квадратным корнем в формуле (1.44), s^2q^2 , равно квадрату частоты плазмонов в отсутствии магнитного поля. Для структур без затвора оно заменяется на величину $2\pi e^2 n_0 q / m\kappa$.

Вязкостные слагаемые и слагаемое, описывающее рассеяние на дефектах, приводят к малой поправке к невозмущенной частоте магнитоплазмонов (1.44) и к их затуханию:

$$\omega_p(q) = \omega_{0,q} + \Delta\omega_q - i\Upsilon_q. \quad (1.45)$$

Коэффициент затухания Υ_q имеет вид:

$$\Upsilon_q = \frac{\omega_c^2 + \omega_{0,q}^2}{2\omega_{0,q}^2} \left(\frac{1}{\tau} + \text{Re} \eta_{xx}|_{\omega=\omega_{0,q}} q^2 \right) + \frac{\omega_c}{\omega_{0,q}} \text{Im} \eta_{xy}|_{\omega=\omega_{0,q}} q^2, \quad (1.46)$$

В этой формуле коэффициенты вязкости $\eta_{xx} = \eta_{xx}(\omega)$ и $\eta_{xy} = \eta_{xy}(\omega)$ вычисляются на невозмущенной частоте магнитоплазмона $\omega = \omega_{0,q}$ (1.44).

При высоких частотах и сильных магнитных полях, когда $\omega, \omega_c \gg 1/\tau_{ee}$, из уравнений (1.42) и (1.46) получается явная формула:

$$\Upsilon_q = \frac{1}{\tau} \frac{w^2 + 1}{2w^2} + \frac{\eta q^2}{w^2} \frac{w^4 + 13w^2 + 4}{4w^2 + \beta^2(w^2 - 4)^2}, \quad (1.47)$$

где введены обозначения $\beta = \omega_c \tau_{ee} \gg 1$ и $w = w(q) = \omega_{0,q}/\omega_c$. Около резонанса в коэффициентах сдвиговой вязкости (в окрестности точки $w = 2$) коэффициент затухания принимает вид:

$$\Upsilon_q = \frac{5}{8\tau} + \frac{9\eta q^2}{8(1 + u^2\beta^2)}. \quad (1.48)$$

где $u = u(q) = w(q) - 2$ – это малое отклонение ($u \ll 1$) от безразмерной резонансной частоты $w = 2$. В высокоподвижных структурах при низких температурах объёмная релаксация импульса может быть достаточно медленной: $1/\tau \lesssim \eta q^2/\beta^2$. При таком условии коэффициент затухания Υ_q магнитоплазмонов определяется вязкостью во всей окрестности резонанса

$w = 2$. Из уравнения (1.48) следует, что его величина Υ_q в точке резонанса оказывается в $\beta^2 \gg 1$ раз больше, чем в дальней окрестности резонанса, $1/\beta \ll u \ll 1$ (см. Рис. 1.9).

1.4 Поперечные магнитозвуковые волны

1.4.1 Гидродинамика сильно неидеальной двумерной ферми-жидкости

В предыдущем разделе было показано, что линеаризованные уравнения высокочастотной динамики каждой гармоники $\mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t}$ течения электронной жидкости имеют вид (1.39), (1.41) и (1.42), причём для чистых образцов в структурах с затвором гидростатическим слагаемым с давлением, $-\nabla P/m$, и слагаемым релаксации импульса в объёме, $-\mathbf{V}/\tau$ можно пренебречь. В настоящем разделе будет показано, что эти уравнения, при условии на достаточно большую степень неидеальности жидкости, приводят к появлению собственной моды, дополнительной к магнитоплазмонам, – поперечных магнитозвуковых волн, обусловленных колебаниями сдвиговых напряжений без возбуждения заряда. Такие волны аналогичны поперечному звуку в аморфных твёрдых телах.

При облучении структуры радиочастотным полем, электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, действующее на электроны, состоит из однородного поля падающего излучения $\mathbf{E}_0(t)$ и внутреннего поля $\mathbf{E}_{int}(\mathbf{r}, t)$, созданного перераспределением двумерных электронов и связанного с плотностью заряда $e \delta n(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(t) + \mathbf{E}_{int}(\mathbf{r}, t). \quad (1.49)$$

Как обсуждалось выше, для относительно медленных течений (например, когда скорость плазмонов s мала по сравнению со скоростью света c) поле \mathbf{E}_{int} определяется электростатическими соотношениями: $\mathbf{E}_{int} = -\nabla \delta \varphi$, потенциал $\delta \varphi$ имеет вид (1.43) [для структур с металлическим затвором]. В диссертации рассмотрен только случай структур с затвором в связи с тем, что основные результаты по вязкой (точнее, вязкоупругой) компоненте течения, по-видимому, не зависят от конкретной формы электростатических соотношений, но расчёт плазмонной компоненты течения для структур без затвора оказываются гораздо сложнее из-за нелокальности по \mathbf{r} связи $\delta \varphi$ и δn в том случае.

Если взаимодействие между электронами слабое и электроны можно рассматривать как почти идеальный ферми-газ, поперечные звуковые волны, в которых $\mathbf{V} \perp \mathbf{q}$, распространяться не могут [107, 118].

Возбуждение поперечного нулевого звука становится возможным, если межчастичное взаимодействие достаточно сильное и двумерные электроны образуют сильно неидеальную ферми-

жидкость [17, 118]. Динамика электронной ферми-жидкости в отсутствие магнитного поля теоретически изучалась в работе [77]. Было показано, что собственные моды ферми-жидкости, в частности поперечный нулевой звук, допускают гидродинамическое описание при условии $l_\omega \ll \Delta x$. Это неравенство наверняка реализуется для поперечного нулевого звука в сильно неидеальной электронной жидкости, в которой параметр r_s , характеризующий силу кулоновского взаимодействия, много больше единицы [77].

Анализ, основанный на работах [77, 109, 119], показывает, что в магнитном поле сильное взаимодействие между квазичастицами также даёт возможность применять гидродинамику для описания поперечных волн. Ниже в Разделе 2.1 уравнение (1.41) последовательно выводится из кинетического уравнения для сильно взаимодействующих квазичастиц ферми-жидкости, в которой параметры взаимодействия Ландау F_0 и F_1 много больше единицы. При этом значение коэффициента вязкости η_0 оказывается пропорциональным $(1 + F_0)(1 + F_1)$, поэтому параметр

$$v_F^\eta = 2\sqrt{\eta_0/\tau_{ee}} \quad (1.50)$$

становится много больше скорости Ферми v_F : $v_F^\eta \gg v_F$.

Для структур, исследованных в работах [49]-[51], параметр r_s , характеризующий силу кулоновского взаимодействия в двумерной электронной системе, меняется в диапазоне от 0.5 до 1.5. Недавние эксперименты [120]-[123] свидетельствуют о том, что эффективная масса двумерных электронов в аналогичных высокоподвижных квантовых ямах GaAs существенно перенормирована из-за межчастичного взаимодействия. Таким образом, условия $F_{0,1,2} \gtrsim 1$ или даже $F_{0,1,2} \gg 1$, по-видимому, выполняются для электронов в структурах, изученных в работах [49]-[51]. Параметры Ландау являются некоторыми (по-видимому, монотонно растущими) функциями параметра r_s . Однако, в настоящее время, к сожалению, нет надёжного расчёта зависимости параметров Ландау от параметра r_s , то есть от плотности электронов n_0 .

В работе [66] был вычислен закон дисперсии поперечного звука в нулевом магнитном поле при $F_{0,1} \sim 1$ и получен точный критерий существования таких волн: $F_1 > F_1^{crit}$. Получение в рамках кинетического уравнения аналогичных результатов для поперечного звука в жидкости в магнитном поле при умеренной степени её неидеальности, $F_{0,1,2} \sim 1$, представляется проблемой, решаемой в рамках феноменологической теории ферми-жидкости и важной для количественного описания экспериментов [49]-[51]. Однако, на основе сопоставления результатов работ [66] и [77], в которых были изучены поперечные волны в ферми-жидкости в рамках гидродинамических уравнений и в рамках кинетического уравнения для квазичастиц, соответственно, разумно думать, что и при наличии магнитного поля, гидродинамическая и

Таблица 1.1. Условия на параметры системы и режим течения	
Жёсткий спектр плазмонов	$\frac{s}{v_F^\eta} \gg \omega \tau_{ee}$
сильное межчастичное взаимодействие	$v_F^\eta \gg v_F$
высокочастотный режим	$\omega_c \sim \omega \gg 1/\tau_{ee}$
широкие образцы	$W \gg \omega/v_F$
слабое рассеяние в объёме	$\frac{\gamma}{\omega} \ll \frac{(v_F^\eta/s)^2}{\omega \tau_{ee}}$

кинетическая теории при параметрах $F_{0,1,2} \sim 1$, отвечающих существованию поперечного звука, дают качественно близкие результаты для свойств сформированного им течения.

1.4.2 Формирование линейного отклика

Во-первых, изучим собственные моды гидродинамических уравнений (1.39), (1.41) и (1.42) в отсутствии внешнего поля $\mathbf{E}_0(t)$. Здесь и ниже будем считать, что параметры системы удовлетворяют условиям, представленным в Таблице 1. Как будет показано ниже, эти условия обеспечивают хорошее разделение (по частотам и в пространстве) омической, плазменной и вязкоупругой компонент высокочастотного течения электронной жидкости. Такие условия, по видимому, могут быть выполнены для двумерных электронов в высокоподвижных квантовых ямах достаточно высокого качества.

Подстановка течения с профилем плоской волны $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_0 e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ и $\delta n(\mathbf{r}) = \delta n_0 e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ в уравнения (1.39) и (1.41) приводит к алгебраическим уравнениям на амплитуды \mathbf{V}_0 и δn_0 и на собственные числа $\omega_{1,2}(q)$ (см. Приложение В). Больше, $\omega_p(q)$, по модулю из чисел, $\omega_{1,2}(q)$, отвечает магнитоплазонам с законом дисперсии (1.44) и коэффициентом затухания (1.46).

Меньшее, $\omega_s(q)$, из собственных чисел $\omega_{1,2}(q)$ отвечает магнитозвуковым волнам, для которых амплитуда \mathbf{V}_0 перпендикулярна волновому вектору \mathbf{q} . Такие поперечные волны нулевого звука сформированы возмущением сдвиговых напряжений и аналогичны поперечным волнами в аморфных твёрдых телах. В отличие от магнитоплазмонов, распространение поперечного магнитозвука не приводит к возмущению плотности заряда. Действительно, соотношение $\mathbf{V}_0 \perp \mathbf{q}$, описывающее поперечный характер волн, соответствует $\text{div } \mathbf{V} = 0$ и поэтому $\delta n = 0$ в силу уравнения (1.39).

Закон дисперсии магнитозвука $\omega_s(q)$ и его коэффициент затухания $\Upsilon_s(q)$ обусловлены временной дисперсией диагонального коэффициента вязкости $\eta_{xx}(\omega)$. При высоких частотах,

$\omega_c, \omega \gg 1/\tau_{ee}$, получаем (см. подробности вывода в Приложении В):

$$\omega_s(q) = \sqrt{4\omega_c^2 + \frac{(v_F^\eta)^2 q^2}{4}}, \quad \Upsilon_s(q) = \frac{4\omega_c^2 + \omega_s^2}{2\omega_s^2 \tau_{ee}}. \quad (1.51)$$

Закон дисперсии $\omega_p(q)$ и $\omega_s(q)$ схематически нарисованы на Рис. 1.10(a). Как обсуждалось в прошлом Разделе 1.4.1, для применимости развиваемого гидродинамического подхода нужно $v_F^\eta \gg v_F$. Поэтому длина волны магнитозвука, имеющая порядок величины $l_s = v_F^\eta/\omega$ при $\omega_c \sim \omega$, много больше, чем характерная длина пути, который проходит квазичастицей за один период изменения внешнего поля, $l_\omega = v_F/\omega$. Поэтому развиваемый подход позволяет рассматривать потоки с минимальным пространственным масштабом Δx , лежащем в диапазоне:

$$v_F/\omega \ll \Delta x \ll v_F^\eta/\omega. \quad (1.52)$$

Для того, чтобы изучить, как могут возбуждаться магнитозвуковые волны, необходимо рассмотреть пространственно неоднородное течение, которое возникает за счёт однородного поля падающего излучения $\mathbf{E}_0(t)$ в образце конечного размера. Конечный размер системы важен в связи с тем, что возбуждение сдвиговых напряжений связано с градиентом гидродинамической скорости, который возникает вблизи границ образца при падении однородного поля, но не возникает внутри объема большого образца.

В этой связи, рассчитаем линейный отклик жидкости в длинном образце на циркулярно-поляризованное поле $\mathbf{E}_0(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + c.c.$ [Рис. 1.10(b)]. Здесь $E_{0,x} = E_0/2$, $E_{0,y} = \mp i E_0/2$, и знаки “−” и “+” отвечают правой и левой циркулярным поляризациям. Предполагаем, что продольные края образца являются шероховатыми *to be rough* так что выполнены диффузные граничные условия: $\mathbf{V}(y = \pm W/2) = 0$.

Из уравнений (1.41), (1.39), (1.43) и (1.51) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений на комплексную амплитуду скорости $\mathbf{V}(y) = [V_x(y), V_y(y)]$ (см. явный вид уравнений в Приложении В). В главном порядке по параметру $v_F^\eta/s \ll 1$ решение этой системы имеет вид:

$$\mathbf{V}(y) = \frac{eE_0}{2m} [\mathbf{A}_0^\pm + h(\lambda_p, y) \mathbf{A}_p^\pm + h(\lambda_s, y) \mathbf{A}_s], \quad (1.53)$$

где первое слагаемое $\mathbf{A}_0^\pm = [i, \pm 1]/(\tilde{\omega} \pm \omega_c)$ описывает друдевский вклад за счет рассеяния на дефектах в объёме, второе и третье слагаемые с амплитудами $\mathbf{A}_p^\pm = \pm[i\omega_c/\omega, -1]/(\tilde{\omega} \pm \omega_c)$ и $\mathbf{A}_s = [-i, 0]/\omega$ есть плазменная и вязкоупругая компоненты, “исправленная частота” $\tilde{\omega} = \omega + i\gamma$ учитывает слабое рассеяние на дефектах в объёме, функция $h(\lambda, y) = \cosh(\lambda y)/\cosh(\lambda W/2)$

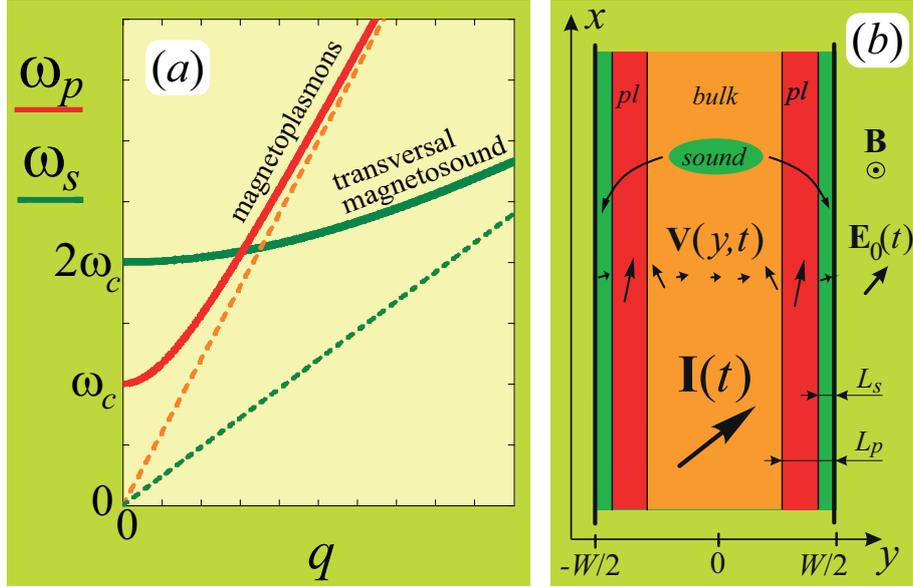


Рис. 1.10: (а): Законы дисперсии магнитоплазмонов и поперечного нулевого звука. Штрихованные линии показывают законы дисперсии в отсутствии магнитного поля: $\omega_p(q) = sq$ и $\omega_s(q) = v_F^\eta q/2$ (здесь $s \gg v_F^\eta$; см. Таблицу 1.1). При $q \rightarrow 0$ частота волн $\omega_s(0) = 2\omega_c$ отвечает собственному вращению тензора сдвиговых напряжений в магнитном поле. (б): Длинный образец во внешних полях $\mathbf{E}_0(t)$ и \mathbf{B} в высокочастотном режиме $\omega > 2\omega_c \gg 1/\tau_{ee}$. Для показанного на рисунке широкого образца, $W \gg L_p, L_s$, формируются три области: центральная область (оранжевая), течение контролируется рассеянием частиц на дефектах в объёме образца; прикраевые области (тёмно-зелёные) с ширинами L_s , в которых течение контролируется вязкостью; и промежуточные области $L_s < |y - W/2| < L_p$ (красные), где доминирует вклад от магнитоплазмонов.

описывает профиль течения. Первое собственное число λ_p в формуле (1.53),

$$\lambda_p \approx i q_p - \omega \frac{\Upsilon_p}{q_p s^2}, \quad (1.54)$$

отвечает магнитоплазонам. В нём величина $q_p = \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}/s$ есть волновой вектора магнито-плазмонов, а коэффициент затухания $\Upsilon_p = \Upsilon_p(q_p)$ даётся формулой (1.46). Второе собственное число в уравнении (1.53):

$$\lambda_s = \sqrt{-\frac{i\omega}{\eta_{xx}}}, \quad (1.55)$$

отвечает поперечным волнам нулевого магнитозвука. Они имеют дисперсию $\omega_s = \omega_s(q_s)$ и коэффициент затухания $\Upsilon_s = \Upsilon_s(q_s)$, даваемые формулами (1.51). При этом волновой вектор магнитозвука имеет вид: $q_s = 2\sqrt{4\omega^2 - \omega_c^2}/v_F^\eta$.

Полученные уравнения движения электронной жидкости и полученные результаты по линейному отклику могут быть переформулированы в представлении Фурье как возбуждение двух типов нормальных мод: магнитоплазмонов и поперечного нулевого магнитозвука. Взаимодействие этих мод пропорционально малому параметру:

$$\varepsilon = \frac{\omega_c \eta_{xx} - i\omega \eta_{xy}}{s^2} \sim \left(\frac{v_F^\eta}{s}\right)^2 \quad (1.56)$$

и может быть изучено с помощью более точного решения уравнений (1.39), (1.41) и (1.43), чем решение (1.53). В Приложение В выполнено построение такого решения в первом порядке по параметру ε . При квантовом рассмотрении, магнитоплазмоны и поперечного магнитозвук отвечают двум видам акустических фононов, которые могут возбуждаться в сильно вязкой ферми-жидкости.

Если параметры системы удовлетворяют условиям, приведённым в Таблице 1.1, то слои, сформированные магнитоплазмонами и магнитозвуком разделены в пространстве и имеют ширины $L_p = 1/|\text{Re } \lambda_p|$ и $L_s = 1/|\text{Re } \lambda_s|$, при этом $L_p \gg L_s$ [см. формулу (1.53) и Рис. 1.10(b)].

Важно отметить, что вязкоупругая часть отклика (1.53) не зависит от знака циркулярной поляризации падающего излучения. Действительно, в вязкоупругой части течения, в отличие от плазмонной, сжимаемость электронной жидкости подавлена. Поэтому скорость $\mathbf{V}(y, t)$ направлена вдоль краёв, а высокочастотная компонента силы Лоренца, действующей на жидкость в направлении к краям, скомпенсирована высокочастотной компонентой холловского электрического поля $\mathbf{E}_H(y, t)$. Тем самым, на жидкость действует только компонента электрического поля вдоль края и направление вращения циркулярно-поляризованного излучения становится несущественным.

Полученная форма течения также позволяет сделать такой вывод: если гидродинамическая часть высокочастотного течения доминирует, то все величины, связанные с ней (поглощаемая мощность, фотосоппротивление, фотовольтаический эффект) должны не зависеть от знака циркулярной поляризации излучения. Поэтому мера зависимости этих экспериментальных величин от знака циркулярной поляризации может рассматриваться как непрямая характеристика величины плазмонного и омического вкладов.

Путём интегрирования формулы (1.53) по сечению образца легко получается результат для комплексной амплитуды

$$\mathbf{I} = en_0 \int_{-W/2}^{W/2} \mathbf{V}(y) dy \quad (1.57)$$

полного тока $\mathbf{I}(t)$:

$$\mathbf{I} = \frac{e^2 n_0 E_0 W}{2m} (\mathbf{A}_0^\pm + f_p \mathbf{A}_p^\pm + f_s \mathbf{A}_s) . \quad (1.58)$$

Здесь введены величины $f_{p,s} = \tanh(\lambda_{p,s} W/2)/(\lambda_{p,s} W/2)$. Простейший эффект, который определяется рассчитанным линейным откликом, – это поглощение энергии от высокочастотного поля. Поглощаемая мощность даётся выражением: $\mathcal{W} = 2\text{Re}(\mathbf{E}_0^* \mathbf{I})$.

1.4.3 Свойства линейного отклика

Сформулируем свойства рассчитанного выше линейного отклика для систем, параметры ко-

торых удовлетворяют условиям Таблицы 2.1. Подробности получения этих свойств приведены в Приложении В. Ключевым для их вывода является соотношение между шириной образца и величинами вещественных и мнимых частей собственных чисел λ_p и λ_s . Зависимость их от магнитного поля при фиксированной частоте ω приведена на Рис. 1.11(a).

Уравнения (1.53) и (1.58) показывают, что друдевская часть отклика доминирует в очень широких образцах:

$$W \gg L_p. \quad (1.59)$$

Магнитоплазменная часть отклика даёт главный вклад в ток \mathbf{I} в умеренно широких образцах:

$$l_p \ll W \ll L_p. \quad (1.60)$$

Здесь $l_p = s/\omega$ – это характерная длина волны магнитоплазмонов. В этом случае стоячие волны магнитоплазмонов формируются в направлении y , и вязкоупругий резонанс проявляет себя по ширине магнитоплазменных резонансов [см. уравнение (1.46) и подробности в Приложение В].

Основной интерес для диссертации представляют случаи средних и узких образцов, $W \ll l_p$, где вязкоупругая компонента течения даёт существенный или главный вклад в линейный отклик.

В образцах средней ширины:

$$L_s \ll W \ll l_p, \quad (1.61)$$

при частотах выше резонанса, $\omega > 2\omega_c$, собственное число λ_s преимущественно мнимое. Поэтому профиль течения $\mathbf{V}(y)$ в прикраевых областях, $W/2 - |y| \lesssim L_s$, представляет собой стоячие волны поперечного магнитозвука. Ниже резонанса, $\omega < 2\omega_c$, собственное число λ_s становится преимущественно вещественным. Поэтому вязкоупругая часть отклика приобретает экспоненциальный профиль и локализована в более узких прикраевых слоях толщиной $W/2 - |y| \lesssim l_s$, [здесь $l_s \sim v_F^2/\omega \ll L_s$ – характерная дина волны магнитозвука]. В связи с такой перестройкой течения, зависимость $\mathbf{I}(\omega_c)$ сильно меняется при $\omega_c = \omega/2$ и в этой точке появляется вязкоупругий резонанс. Поглощаемая мощность $\mathcal{W}(\omega_c)$ проявляет пик, асимметричный относительно точки $\omega_c = \omega/2$ (см. Рис. 1.12):

$$\mathcal{W}(\omega_c) \propto \text{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{i - (2\omega_c - \omega)\tau_{ee}}} \right]. \quad (1.62)$$

В узких образцах:

$$l_s \ll W \ll L_s, \quad (1.63)$$

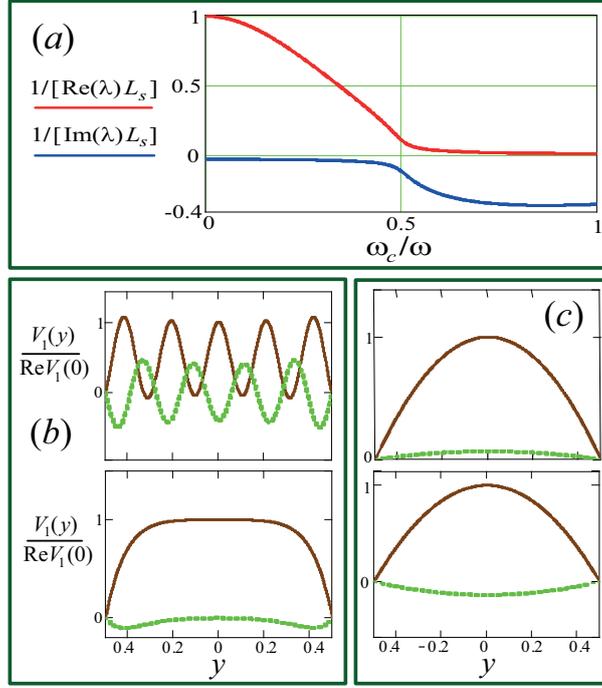


Рис. 1.11: (а): Обратные значения вещественной и мнимой частей вязкоупругого собственного числа $\lambda = \lambda_s$ как функции магнитного поля при фиксированной частоте течения, $\omega\tau_2 = 20$. Эти величины описывают длину затухания и длину волны поперечных магнитозвуковых волн. (b,c): Профили комплексной амплитуды высокочастотной скорости $V_1(y)$. Коричневые линии отвечают $\text{Re} V_1(y)$; зелёные линии отвечают $\text{Im} V_1(y)$. Все кривые построены для частоты течения $\omega\tau_2 = 40$. На панели (b) представлены результаты для относительно широкого образца, $W/L_s = 1$, в магнитных полях $\omega_c\tau_2 = 0.34$ (верхняя часть панели) и $\omega_c\tau_2 = 0.52$ (нижняя часть панели). При магнитном поле $\omega_c\tau_2 = 0.34$ система находится выше частоты вязкоупругого резонанса и соответствующие длина волны и длина затухания волн описываются соотношениями: $2\pi/(L_s\text{Im}\lambda) = 0.21$ и $1/(L_s\text{Re}\lambda) = 1.004$. При магнитном поле $\omega_c\tau_2 = 0.52$ система находится ниже вязкоупругого резонанса, при этом длина затухания волн описывается равенством $1/(L_s\text{Re}\lambda) = 0.031$. На панели (c) представлены результаты для узкого образца, $W/L_s = 0.01$, в магнитных полях $\omega_c\tau_2 = 0.34$ [верхняя часть панели; система выше резонанса, величины $\text{Im}\lambda$ и $\text{Re}\lambda$ такие же, как для верхних частей панели (b)] и в полях $\omega_c\tau_2 = 0.6$ [нижняя часть панели; система ниже резонанса; длина затухания волн даётся соотношением $1/(L_s\text{Re}\lambda) = 0.038$].

стоячие волны поперечного магнитозвука формируются по всему сечению образца при частотах $\omega > 2\omega_c$ [см. Рис. 1.11(b,c)]. Плазменная часть отклика в этом случае сильно подавлена.

Когда ширина образца становится равной полуволне числу длин волн магнитозвука:

$$W = \frac{(2m + 1)\pi}{q_s(\omega_c)}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.64)$$

резонансы, связанные с усилением стоячих магнитозвуковых волн, появляются в зависимости поглощаемой мощности от циклотронной частоты $\mathcal{W}(\omega_c)$ при частотах $\omega_c = \omega_c^{s,m}$, отвечающих уравнению (1.64) [см. формулу (1.58) и Рис. 1.12].

В наиболее узких образцах:

$$W \ll l_s, \quad (1.65)$$

амплитуда скорости $\mathbf{V}(y)$ имеет параболический профиль во всём образце [см. формулу (1.53)].

Этот режим может быть назван высокочастотным течением Пуазейля в магнитном поле. Вяз-

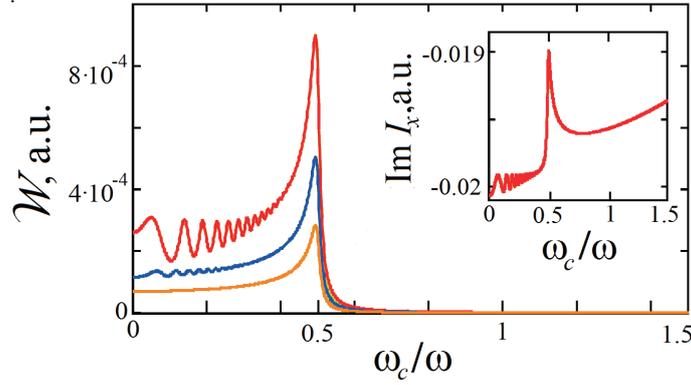


Рис. 1.12: Поглощаемая мощность \mathcal{W} как функция циклотронной частоты ω_c при фиксированной частоте течения ω для средних и узких образцов: $W/l_{ee} = 5.7, 3.2, 1.8$ для оранжевой, синей и красной кривых. Другие параметры течения равны: $\omega\tau_{ee} = 50$ и $s/v_F^\eta = 300$. Вставка показывает мнимую часть амплитуды высокочастотного тока $I_x(\omega_c)$ для образца средней ширины ($W/l_{ee} = 1.8$). Хорошо виден вязкоупругий резонанс при $\omega_c = \omega/2$ для всех кривых и резонансы от стоячих магнитозвуковых волн для при $\omega_c = \omega_c^{s,m}$ красных кривых.

коупругий резонанс проявляет себя не в токе, а в импедансе $Z = E_0/I_x$. Около резонанса уравнение (1.58) даёт лоренцевский профиль у вещественной части импеданса:

$$\text{Re } Z(\omega_c) \propto \frac{1}{1 + (2\omega_c - \omega)^2 \tau_{ee}^2}. \quad (1.66)$$

При частотах $\omega\tau_{ee} \gg 1$ мнимая часть тока I_x (1.58) не зависит от релаксационных характеристик (см. Приложение В). Это означает, что жидкость испытывает почти упругие осцилляции, вызванные внешним высокочастотным полем, оставаясь прикреплённой к краям в точках $y = \pm W/2$ за счёт диффузных граничных условий. Такое поведение напоминает осциллирующую динамику желе или мёда, лежащих на неподвижной липкой поверхности.

1.4.4 Сопоставление с экспериментами

В нелинейном транспорте в высокоподвижных квантовых ямах GaAs на частотах вблизи удвоенной циклотронной частоты $\omega = 2\omega_c$ наблюдался большой пик в фотосопротивлении [49, 50] (см. Рис. 1.13) и особенность в фотовольтаическом эффекте [51]. Ниже приводятся качественные аргументы в пользу того, что эти эффекты обусловлены формированием вязкой жидкости из двумерных электронов и вязкоупругим резонансом в ней.

Во-первых, отметим, что в работе [49] было обнаружено, что гигантский пик в фотосопротивлении (“шип”) и сильное гигантское отрицательное магнетосопротивление наблюдаются в одних и тех же GaAs структурах наивысшего качества и не наблюдаются в структурах умеренного качества. В Разделе 1.2.3 гигантское отрицательное магнетосопротивление объясняется как формирование вязкого течения электронной жидкости. В такой жидкости вязкоупругий резонанс, по-видимому, неизбежно должен каким-либо образом появляться в высокочастотных

транспортных эффектах при частотах вблизи $\omega = 2\omega_c$, В связи с этим логично заключить, что наблюдавшиеся в работах [49]-[51] особенности в фотосоппротивлении и фотовольтаическом эффекте при $\omega \approx 2\omega_c$ обусловлены сдвиговыми магнитозвуковыми волнами и вязкоупругим резонансом.

Во-вторых, важную роль играет следующая особенность эксперимента [51]. В этой работе фотовольтаический эффект был измерен на нескольких структурах GaAs с квантовыми ямами различной геометрии. На всех исследованных структурах в сигнале фотоэдс наблюдались многочисленные магнитоплазмонные резонансы. Особенность при $\omega = 2\omega_c$ на фоне “леса” плазмонных резонансов гораздо лучше наблюдалась в образце, имеющем затвор в форме меандра, по сравнению с образцами без затвора и с однородным затвором. Видимо, затвор в виде меандра приводит к неоднородным возмущениям электронного потока, поэтому в образце с таким затвором вязкоупругая компонента течения была больше, чем в остальных образцах. Соответственно, в нём наблюдалась более выраженная особенность на удвоенной циклотронной частоте за счёт вязкоупругого резонанса.

В-третьих, отметим следующее обстоятельство. Могут существовать различные версии гидродинамических теорий фотосоппротивления и фотоэлектрических эффектов, в которых нелинейный отклик на постоянное и радиочастотное электрические поля возникает благодаря тем или иным нелинейным слагаемым, добавляемым в уравнение (1.41). Однако, в любом варианте теории нелинейный отклик содержит линейный отклик в виде блока, поэтому первый, как и второй, должен проявлять пик или другую особенность на частоте вязкоупругого резонанса, $\omega \approx 2\omega_c$. В предыдущем Разделе 1.4.3 показано, что пик вязкоупругого резонанса в линейном отклике может быть как асимметричным, так и симметричным, в зависимости от ширины образца. По-видимому, обе эти две формы пика наблюдались в фотосоппротивлении в работах [49, 50].

В работах [112, 113] экспериментально показано, что фотосоппротивление, в частности, микроволновые осцилляции сопротивления (эффект MIRO) в высокоподвижных квантовых ямах GaAs не зависят от знака циркулярной поляризации излучения в интервале магнитных полей $\omega_c \lesssim \omega$. В то же время, при низких температурах на образце, исследованном в работах [112, 113], наблюдалось умеренное отрицательное магнетосоппротивление [113] (при более высоких температурах магнетосоппротивление становится положительным). С увеличением частоты профиль осцилляций MIRO в области $\omega_c \approx \omega/2$ становится более нерегулярным (не синусоидальным) и имеет небольшой пик около $\omega_c \approx \omega/2$, похожий на отчётливый большой пик, наблюдавшийся в работе [50].

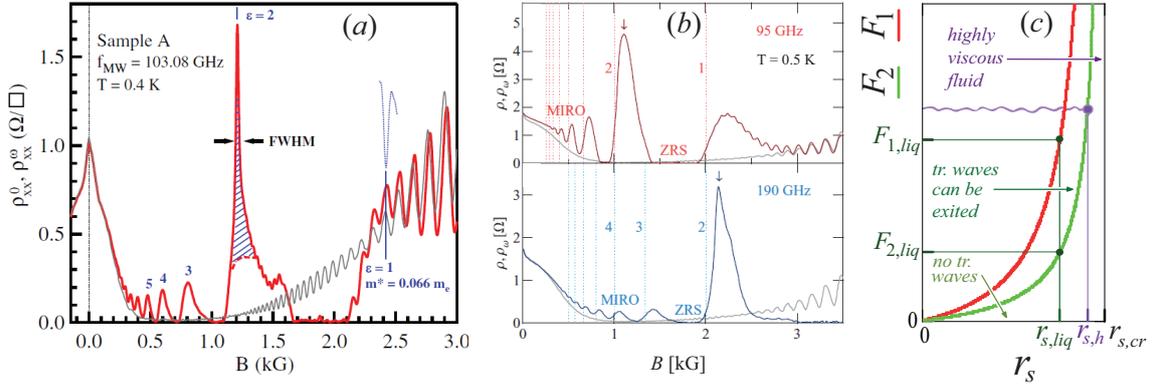


Рис. 1.13: (a,b): Фотосопротивление как функция магнитного поля на частоте вблизи удвоенной циклотронной частоты электронов: $\omega \approx 2\omega_c$, измеренное на высокоподвижных квантовых ямах GaAs в работе [49] [панель (a)] и в работе [50] [панель (b)]. Концентрации двумерных электронов в изученных образцах и экспериментальные друдевские подвижности были равными: $n_0 = 2.9 \cdot 10^{11}$ cm^{-2} , $\mu_{exp}^D = 3 \cdot 10^7$ $\text{cm}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ (a) и $n_0 = 3.3 \cdot 10^{11}$ cm^{-2} , $\mu_{exp}^D = 1.1 \cdot 10^7$ $\text{cm}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ (b). Вертикальные линии показывают целые значения отношения ω/ω_c . (c): Ожидаемая зависимость параметров функции Ландау от микроскопического параметра силы взаимодействия r_s . Выше некоторого критического значения параметра $r_{s,liq}$, отвечающего $F_{1,liq}$ и $F_{2,liq}$, становится возможным существование поперечных волн сдвиговой деформации. При очень больших значениях параметров Ландау F_1 и F_2 , соответствующих параметру r_s в интервале $r_{s,h} < r_s < r_{s,cr}$ [$r_{s,cr}$ отвечает переходу электронной жидкости в вигнеровский кристалл], жидкость является сильно вязкой и для описания сдвиговых волн в ней становится применимо гидродинамическое описание, развитое в настоящей главе.

Таким образом, в работах [112, 113], по-видимому, обнаружена корреляция между появлением пика в фотосопротивлении вблизи $\omega_c \approx \omega/2$ и независимостью фотосопротивления от знака циркулярной поляризации излучения. Выше было показано, что вязкоупругая часть линейного отклика не зависит от знака циркулярной поляризации в рамках гидродинамической теории. Это соответствие дополнительно говорит в пользу того, что наблюдавшийся пик обусловлен возбуждением сдвиговых магнитозвуковых волн и вязкоупругим резонансом.

В таком объяснении аномальных особенностей в фотосопротивлении и фотовольтаическом эффекте в квантовых ямах GaAs остаётся ряд открытых вопросов.

Один из таких вопросов – это умеренная степень неидеальности электронной жидкости в изучавшихся квантовых ямах GaAs. В изучавшихся в работах [49]-[51],[112, 113] образцах параметр силы межэлектронного взаимодействия r_s меняется от 0.5 до 1.5 (см. подробности в Главе 2). Поэтому, во-первых, необходимым условием для объяснения пика в фотосопротивлении возбуждением сдвиговых волн является достижение параметром r_s и параметрами Ландау $F_{1,2}$ критических значений, выше которых такие волны могут возбуждаться [см. Рис. 1.13(c)]. Такие критически значения параметров Ландау в отсутствии магнитного поля, $F_{1,liq}$, $F_{2,liq}$, были рассчитаны в рамках феноменологической теории ферми-жидкости в работе [66]. Однако, к настоящему моменту остаются неизвестными величины $F_{1,liq}$, $F_{2,liq}$ в магнитном поле, а также связь величин $F_{1,2}$ и r_s в квантовых ямах. На Рис. 1.13(c) схематически нарисован

ожидаемый возможный вид этой связи. Выше некоторого значения $r_{s,liq} \sim 1$ становится возможным возбуждение поперечных волн. В интервале $r_{s,h} \lesssim r_s < r_{s,cr}$, вблизи критического значения $r_{s,cr}$, отвечающего переходу жидкости в вигнеровский кристалл, жидкость становится сильно вязкой, то есть становятся применимы макроскопические вязкоупругие уравнения Навье-Стокса, использованные в настоящем разделе и выведенные в следующей Главе 2.

Таким образом, для обоснования предложенного объяснение пика важно рассчитать критические значения параметров Ландау $F_{1,liq}$, $F_{2,liq}$ в магнитном поле и зависимости $F_{1,2}(r_s)$.

Другой остающийся пока открытым вопрос – это определение конкретного нелинейного эффекта, ответственного за появление фотосопротивления в GaAs квантовых ямах. В таком эффекте комбинируются линейные отклики на постоянное \mathbf{E}_0 и переменное $\mathbf{E}_0^{ac}(t)$ электрические поля, вызывая магнетосопротивление $\delta\rho_\omega \sim (E_0^{ac})^2$. Существуют различные кандидаты на роль такого эффекта. Одним из них являются эффекты памяти при рассеянии квазичастиц друг на друге, похожие на эффекты памяти при рассеянии невзаимодействующих электронов на дефектах [71, 103]. В настоящее время с участием автора ведётся работа над построением теории высокочастотного магнетотранспорта и подробного объяснения пика в фотосопротивлении на основе этой гипотезы.

В недавней работе [116] пик в фотосопротивлении двумерных электронов вблизи удвоенной циклотронной частоты, аналогичный пику, наблюдавшемуся в работах [49, 50] на квантовых ямах, наблюдался в высокоподвижных образцах графена. Хотя авторы работы [116] придерживаются другой интерпретации, по свойствам этот пик очень похож на пик, обнаруженный в фотосопротивлении квантовых ям. В частности, он наблюдается в же тех образцах, в которых наблюдается ярко выраженное гигантское температурно-зависимое магнетосопротивление.

Таким образом, в настоящем разделе показано, что поперечные магнитозвуковые волны, сопровождающиеся вязкоупругим резонансом, могут возбуждаться в сильно вязкой электронной жидкости. Даны аргументы в пользу того, что такие волны объясняют гигантский пик в фотосопротивлении квантовых ям GaAs и особенности в фотовольтаическом эффекте [49]-[51].

1.5 Спиновый резонанс в гидродинамической компоненте течения

1.5.1 Балансовые уравнения на потоки и средний спин

Рассмотрим омический двумерный или объёмный проводник во внешнем электрическом поле $\mathbf{E}(t) \sim \cos(\omega t)$ и параллельном ему магнитном поле \mathbf{B} , см. Рис. 1.14. Предполагаем, что частота

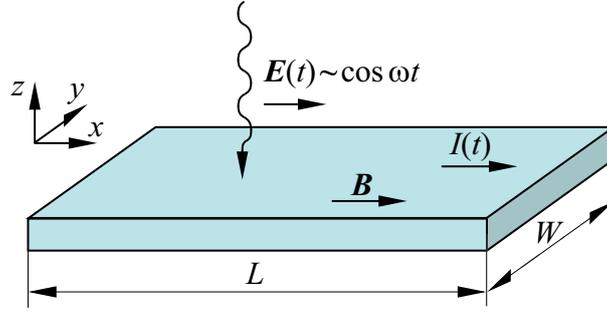


Рис. 1.14: Образец металла или полупроводника в магнитном поле \mathbf{B} и высокочастотном электрическом поле $\mathbf{E}(t)$. Длина образца L намного больше его ширины W . Предполагается, что высокочастотное электрическое поле полностью проникает в образец. При этом проводник и его электроны проводимости в нём могут быть либо двумерными, либо трехмерными, с толщиной меньше глубины скин-слоя.

переменного поля ω много меньше циклотронной частоты электронов ω_c , а также что $\omega\tau \ll 1$, где τ – время релаксации импульса электронов за счет рассеяния электронов на дефектах в объёме. При этом ларморовская частота прецессии спинов Ω и время спиновой релаксации $\tau_s \gg \tau$ сравнимы с частотой ω : $\omega \sim \Omega \sim 1/\tau_s$.

В таком диапазоне частот, балансовые уравнения для потока плотности электронов $\mathbf{q} = \mathbf{j}/e$, тензора потока спина q_{ij} , и спиновой плотности \mathbf{P} имеют вид [85]:

$$\mathbf{q} = \mu n_0 \mathbf{E} + \gamma D \operatorname{rot} \mathbf{P}, \quad (1.67)$$

$$q_{ij} = -D \frac{\partial P_j}{\partial x_i} + \gamma \mu n_0 \epsilon_{ijk} E_k, \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} + \frac{\partial q_{ij}}{\partial x_i} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}]_j + \frac{P_j}{\tau_s} = 0, \quad (1.69)$$

где $\mu = e\tau/m$ – подвижность электронов, $D = -$ коэффициент диффузии, $\gamma \ll 1$ – безразмерный параметр, пропорциональный силе спин-орбитального взаимодействия и описывающий взаимосвязь между потоками частиц и спиновыми потоками, ϵ_{ijk} – единичный антисимметричный тензор, вектор $\boldsymbol{\Omega}$ направлен вдоль приложенного магнитного поля, Ω – ларморовская частота электронов, τ_s – время спиновой релаксации.

Уравнение (1.67) описывает омический вклад в поток частиц и спин-орбитальную поправку к нему за счёт обратного спинового эффекта Холла. Уравнение (1.68) описывает два вклада в плотность спинового тока q_{ij} : первый обусловлен диффузией спин-поляризованных электронов, а второй – преобразованием тока частиц в спиновый ток за счёт прямого спинового эффекта Холла. Уравнение (1.69) представляет собой уравнение непрерывности для спиновой плотности, учитывающее спиновую диффузию, вращение спина в магнитном поле и спиновую релаксацию.

Следует отметить, что при отсутствии у проводника симметрии относительно центра инверсии в балансовых уравнениях могут возникать дополнительные слагаемые, описывающие

спин-зарядовую связь. В частности, имеется спиновый ток, индуцированный неравновесной пространственно-однородной спиновой поляризацией, а также однородная спиновая поляризация, создаваемая электрическим током. В этом случае становится возможным прямое возбуждение спинового резонанса переменным электрическим полем (эффект электрически-дипольного спинового резонанса [124]). В диссертации эффекты такого типа не рассматриваются.

В геометрии Рис. 1.14 и частицы, и спиновые потоки зависят только от координаты y . Как следует из уравнений (1.68), две ненулевые компоненты тензора спинового тока имеют вид:

$$q_{yy} = -D \frac{dP_y}{dy}, \quad q_{yz} = -D \frac{dP_z}{dy} + \gamma \mu n E \cos \omega t. \quad (1.70)$$

Для непроводящих продольных краёв образца граничные условия на них имеют обычный вид: $q_{yy} = 0$ и $q_{yz} = 0$ при $y = \pm W/2$.

1.5.2 Решение балансовых уравнений

Запишем ненулевые компоненты спиновой плотности \mathbf{P} в комплексной форме: $P_y(y, t) = [P_y(y)e^{-i\omega t} + c.c.]/2$, и аналогично для $P_z(y, t)$. Из уравнений (1.69) и (1.70) получим систему связанных уравнений для величин $P_y(y)$ и $P_z(y)$:

$$\begin{aligned} D \frac{d^2 P_y}{dy^2} &= \left(-i\omega + \frac{1}{\tau_s} \right) P_y + \Omega P_z, \\ D \frac{d^2 P_z}{dy^2} &= \left(-i\omega + \frac{1}{\tau_s} \right) P_z - \Omega P_y. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Из условий обнуления компонент спинового тока на границах получаем граничные условия для плотности спина:

$$\left. \frac{dP_y}{dy} \right|_{y=\pm W/2} = 0, \quad \left. \frac{dP_z}{dy} \right|_{y=\pm W/2} = \gamma \frac{\mu n E}{D}. \quad (1.72)$$

Решение уравнений (1.71) с граничными условиями (1.72) даёт профиль спиновой плотности:

$$P_y(y) = -i\gamma \frac{\mu n E}{2D} [F_+(y) - F_-(y)], \quad P_z(y) = \gamma \frac{\mu n E}{2D} [F_+(y) + F_-(y)], \quad (1.73)$$

где

$$F_{\pm}(y) = \frac{\sinh(\lambda_{\pm} y)}{\lambda_{\pm} \cosh(\lambda_{\pm} W/2)}, \quad (1.74)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{\sqrt{1 + i(-\omega \pm \Omega)\tau_s}}{L_{sp}}, \quad (1.75)$$

и $L_{sp} = \sqrt{D\tau_s}$ – длина спиновой диффузии.

Таким образом, для узких образцов, $\min(\text{Re}\lambda_{\pm}, \text{Im}\lambda_{\pm})W \ll 1$, спиновая плотность \mathbf{P} линейно зависит от координаты y , а для широких образцов $\max(\text{Re}\lambda_{\pm}, \text{Im}\lambda_{\pm})W \gg 1$, спиновая

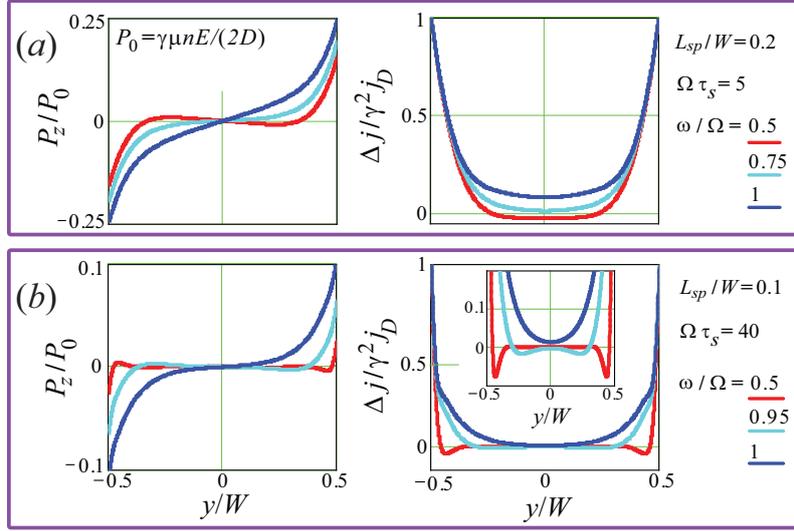


Рис. 1.15: Спиновая плотность $P_z(y)$ и поправка к плотности электрического тока $\Delta j(y)$ при различных частотах для большего () и меньшего () соотношений длины образца L к длине спиновой диффузии. На вкладке показан тот же график $\Delta j(y)$, что и на основной панели, в большем масштабе по вертикальной оси. Видны быстро затухающие осцилляции $\Delta j(y)$ в направлениях от краёв образца.

плотность \mathbf{P} сосредоточена вблизи краев образца. В последнем случае, а также для образцов с промежуточными ширинами, при $\omega \approx \pm\Omega$ и $\omega\tau_s \gtrsim 1$ в течении может возникать спиновой резонанс. Знаки \pm соответствуют вкладкам в течение от компонент поля $\mathbf{E}(t)$ с правой и с левой циркулярными поляризациями.

Плотность тока $j_x = eq_x$ вычисляется по формуле (1.67). Расчёт на основе формул (1.73)-(1.75): $j_x = e\mu nE \cos \omega t + \Delta j(y, t)$, где первое слагаемое – это обычный друдевский вклад (в пределе $\omega\tau \ll 1$), а второе слагаемое представляет собой спиновую поправку второго порядка по спин-орбитальному взаимодействию: $\Delta j(y, t) = [\Delta j(y)e^{-i\omega t} + c.c.]/2$,

$$\Delta j(y) = \gamma^2 \frac{e\mu nE}{2} \left[\frac{dF_+(y)}{dy} + \frac{dF_-(y)}{dy} \right]. \quad (1.76)$$

Для широких образцов, $|\lambda_{\pm}|W \gg 1$, такая поправка к плотности тока, как и поправка к спиновой плотности, возникает от прикраевых областей течения.

На Рис. 1.15 построены полученные зависимости спиновой плотности $P_z(y)$ (1.73) и поправки к плотности тока $\Delta j(y)$ (1.76). Видно, что для широких образцов образцов, $L_{sp} \ll W$, при относительно малых частотах внешнего поля и ларморовской частоте [панель(а)] спиновая плотность и поправка к току являются максимальными в резонансе, $\omega = \Omega$, и при этом отличны от нуля во всём образце, а с ростом частот эти две величины становятся локализованы около краёв образца [панель(б)]. При этом поправка к плотности тока $\Delta j(y)$ как функция координаты вдоль сечения образца может менять знак. Длина затухания колебаний $\Delta j(y)$ и период осцилляций – величины одного порядка [см. Рис. 1.15(б) и формулу (1.75)].

Спин-орбитальная поправка ΔI к основной друдевской части полного тока, $I_0 = e\mu n_0 EW$,

рассчитывается с помощью уравнения (1.76):

$$\Delta I = \int_{-W/2}^{W/2} \Delta j(y) dy. \quad (1.77)$$

Получаем окончательный результат для поправки к импедансу, $\Delta Z(\omega, \Omega) = E/(I_0 + \Delta I) - Z_0$, вызванной спин-орбитальным взаимодействием и неоднородным распределением токов:

$$\frac{\Delta Z}{Z_0} = -\gamma^2 \left[\frac{\tanh(\lambda_+ W/2)}{\lambda_+ W} + \frac{\tanh(\lambda_- W/2)}{\lambda_- W} \right], \quad (1.78)$$

где $Z_0 = E/I_0$ и собственные числа λ_{\pm} даются формулами (1.75).

1.5.3 Результаты и обсуждения

Обсудим свойства результата (1.78) для некоторых предельных случаев.

(i) *Низкие частоты:* $\omega\tau_s \ll 1$. В этом случае полученные формулы дают слабое магнетосопротивление $\Delta\rho(B) \sim \gamma^2$ за счёт спинового эффекта Холла, предсказанное в работе [86].

(ii) *Нулевое магнитное поле,* $B = 0$. Отношение $\rho(\omega) = \text{Re}[\Delta Z(\omega, 0)]/\Delta Z_0$ вещественной части спин-орбитальной поправки ΔZ (1.78) к импедансу к её величине при нулевой частоте, $\Delta Z_0 = \Delta Z(0, 0)$, в этом случае имеет монотонно падающее поведение как функция параметра $\omega\tau^*$, почти совпадающее при различных значениях отношения W/L_{sp} [см. Рис. 1.16(a)]. Здесь эффективное время релаксации $\tau^* = \tau^*(W)$ даётся формулой:

$$\frac{1}{\tau^*} = \frac{1}{\tau_s} + \frac{1}{\tau_d}, \quad (1.79)$$

где τ_s – введённое выше время спиновой релаксации, а величина $1/\tau_d = 4D/W^2$ – это скорость диффузии пространственных неоднородностей в распределении спина. Такое квазиуниверсальное поведение величины $\rho(\omega)$ аналогично поведению магнетосопротивления $\Delta\rho(\omega_c)$ при $\omega = 0$ как функции $\omega_c\tau^*$ (см. работу [86]).

Таким образом, в рассматриваемой системе существенны два релаксационных процесса, которые действуют приблизительно аддитивно: объёмная спиновая релаксация со скоростью $1/\tau_s$ и распад неоднородностей спиновой плотности из-за диффузии спин-поляризованных электронов. Два таких вклада в релаксацию неоднородностей спина аналогичны двум приблизительно аддитивным вкладам в релаксацию импульса в гидродинамическом течении: объёмной релаксации импульса при рассеянии электронов на дефектах и релаксации импульса за счёт вязкостного переноса импульса к шероховатым стенкам [см. формулу (1.25)].

(iii) *Высокие частоты:* $\omega\tau_s \gg 1$. Для узких образцов ($W \ll L_{sp}/\sqrt{\omega\tau_s}$) поправка ΔZ не зависит ни от частоты, ни от магнитного поля в главном порядке по параметру $W/L_{sp} \ll 1$ (при

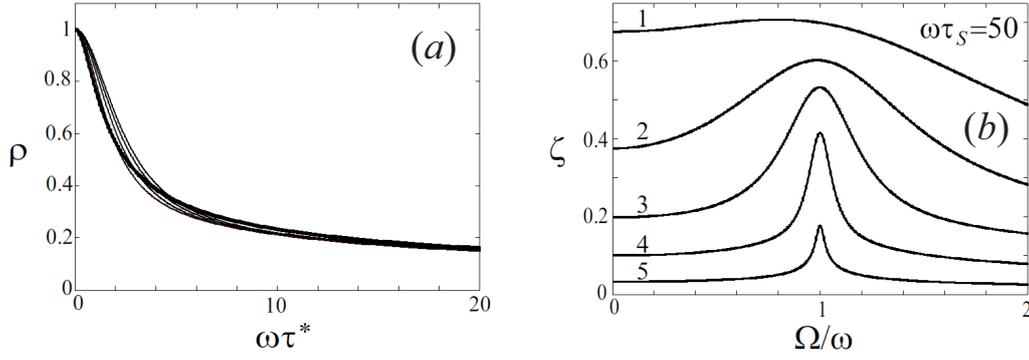


Рис. 1.16: (а): Отношение ρ вещественной части спин-орбитальной поправки $\text{Re}\Delta Z(\omega, \Omega = 0)$ к импедансу при нулевом магнитном поле к величине этой поправки при $\omega = 0$, $\Delta Z_0 = \Delta Z(0, 0)$, для образцов с ширинами $W/L_{sp} = 0.2, 0.8, 1.3, 2$ (тонкие линии) и предельного случая $W/L_{sp} \gg 1$ (толстая линия). Видно, что все кривые почти совпадают. (б): Вещественная часть относительной поправки к импедансу $\zeta = \text{Re} \Delta Z / (-\gamma^2 Z_0)$ как функция ларморовской частоты Ω при фиксированной частоте ω . Показаны результаты для образцов средней и большой ширины: для кривых 1-5 параметр W/L_{sp} равен 0.4, 0.6, 1, 2, 6, соответственно.

не очень высоких частотах, пока $\Omega \lesssim \omega$). Для импеданса с учётом малой поправки порядка порядка $(W/L_{sp})^2$ получаем:

$$\frac{\Delta Z}{Z_0} = -\gamma^2 \left(1 - \frac{1 - i\omega\tau_s W^2}{24 L_{sp}^2} \right). \quad (1.80)$$

Для широких образцов ($W \gg L_{sp}$) уравнение (1.78) приводит к формуле:

$$\frac{\Delta Z}{Z_0} = -\gamma^2 \frac{L_{sp}}{W} \sum_{\pm} \frac{1}{\sqrt{1 + i(-\omega \pm \Omega) \tau_s}}, \quad (1.81)$$

описывающей спиновый резонанс при $\omega = \pm\Omega$ с шириной пика $1/\tau_s$.

Общая формула (1.78) нужна для описания поправки к току в образцах средних ширин ($L_{sp}/\sqrt{\omega\tau_s} \ll W \ll L_{sp}$). В этом случае уравнение (1.78) описывает переход между резонансной зависимостью величины ΔZ от ларморовской частоты Ω для широких образцов [уравнение (1.81)] и нерезонансной зависимостью ΔZ от Ω для узких образцов [см. уравнение (1.80)].

На Рис. 1.16(b) построен график отношения $\zeta = \text{Re} \Delta Z / (-\gamma^2 Z_0)$, даваемого формулой (1.78), как функции ларморовской частоты Ω при фиксированной частоте течения ω для нескольких ширин образца W . В пределе узких образцов, когда $W \ll L_{sp}$, это отношение близко к единице, см. формулу (1.80). Хорошо виден переход величины $\zeta(\Omega)$ от нерезонансного к резонансному поведению с увеличением ширины образца W . Уравнение (1.81) и Рисунок 1.16(b) показывают, что чем шире образец, тем меньше становятся как ширина, так и амплитуда резонансного пика.

Интересно проследить за поведением нормированного высокочастотного магнетосопротивления:

$$\varrho_\omega(\Omega) = \frac{\text{Re} \Delta Z(\omega, \Omega)}{\text{Re} \Delta Z(\omega, \Omega = \omega)}. \quad (1.82)$$

Анализ, аналогичный проведенному выше для зависимости $\varrho(\omega)$ в нулевом магнитном поле [см. Рис. 1.16(a)], показывает, что величины $\varrho_\omega(\Omega)$ имеет квазиуниверсальное поведение как функция параметра $(\Omega - \omega)\tau^*$ при $|\Omega| > \omega$, аналогичное поведению величины $\varrho(\omega)$. Однако зависимости $\varrho_\omega(\Omega)$ при $|\Omega| < \omega$, как видно из Рис. 1.16(b), качественно различаются для широких и узких образцов. Такое поведение отвечает наличию резонанса при $W \gg L_{sp}$ и его исчезновение при $W \lesssim L_{sp}$.

Таким образом, показано, что комбинация прямого и обратного спиновых эффектов Холла в немагнитных проводниках открывают возможность наблюдения высокочастотных спиновых явлений, в частности, спинового резонанса с помощью чисто электрических измерений.

Глава 2

Микроскопическая теория гидродинамического транспорта

2.1 Обзор литературы

2.1.1 Гидродинамика сильно неидеальной электронной ферми-жидкости

В зависимости от силы межчастичного взаимодействия, вырожденные электроны в гидродинамическом режиме с точки зрения их коллективной динамики нужно рассматривать как вязкий газ или вязкую жидкость. Возможность распространения поперечных звуковых волн, сформированных сдвиговой деформацией, разумно считать характеристическим свойством, отличающим эти случаи. В ферми-жидкости поперечные волны возможны при достаточно больших параметрах взаимодействия Ландау [17]. Для электронной ферми-жидкости это соответствует относительно низким концентрациям электронов.

Высокочастотный транспорт в вязкой электронной жидкости теоретически рассматривался в ряде недавних публикаций. Переменное течение жидкости в длинном образце в нулевом магнитном поле в рамках гидродинамического подхода было изучено в статьях [62, 63]. В работе [66] были рассмотрены поперечный нулевой звук и плазмоны в двумерной сильно неидеальной ферми-жидкости в отсутствие магнитного поля. Поперечные волны нулевого звука в двумерных электронных и электрон-дырочных жидкостях в отсутствие магнитного поля изучались в работах [125, 126].

В Главе 1 изучались высокочастотные течения вязких электронных ферми-газа и ферми-жидкости в магнитном поле. Было показано, что коэффициенты вязкости двумерных электронов имеют резонанс на частоте ω , равной удвоенной циклотронной частоте электронов $2\omega_c$. В рамках феноменологических уравнений гидродинамики было предсказано, что в сильно вязкой электронной жидкости при достаточно высоких частотах могут возбуждаться поперечные магнитозвуковые волны. Такие волны аналогичны поперечному звуку в аморфных твердых телах. Было показано, что в образце малого размера предсказанные волны приводят к асим-

метричному резонансу в отклике жидкости на радиочастотное поле на удвоенной циклотронной частоте $\omega = 2\omega_c$. Установлено, что необходимым условием распространения поперечных магнитозвуковых волн является высокая степень ее неидеальности, выражающаяся в том, что коэффициенты вязкости жидкости много больше их значений для идеального ферми-газа.

Первая часть настоящей главы посвящена построению микроскопической теории магнитозвуковых волн в системе двумерных электронов в рамках теории ферми-жидкости Ландау. Будет показано, что кинетическое уравнение для квазичастиц ферми-жидкости переходит в гидродинамическое уравнение Навье-Стокса для случая сильного взаимодействия квазичастиц (большие амплитуда и анизотропия функции Ландау). Это подтверждает сделанное в Главе 1 заключение о возможности гидродинамического рассмотрения поперечных магнитозвуковых волн в сильно-неидеальной жидкости. В настоящей главе выведены формулы для законов дисперсии поперечного и продольного нулевого звука в магнитном поле, в явном виде содержащие параметры ферми-жидкости F_1, F_2, v_F [тем самым, получено выражение для использованного в Главе 1 параметра v_F^η в коэффициенте вязкости сильно неидеальной жидкости $\eta_0 = (v_F^\eta)^2 \tau_2/4$]. Показано, что циклотронная частота, входящая в коэффициенты вязкости в магнитном поле и, следовательно, в закон дисперсии поперечного звука, перенормируется. При наиболее вероятном соотношении между амплитудами гармоник функции Ландау “вязкостная” циклотронная частота $\omega_c^{(2)}$ уменьшается по сравнению с “обычной” циклотронной частотой $\omega_c^{(0)}$ невзаимодействующих электронов, определяющей по теореме Кона [127] циклотронный резонанс ферми-жидкости. Этот результат представляется вероятным объяснением того, что в эксперименте [50] резонанс наблюдался на частоте ω несколько меньшей, чем удвоенное значение частоты циклотронного резонанса $2\omega_c^{(0)}$ [см. Рис. 1.13(b)].

2.1.2 Гидродинамика почти идеального ферми-газа из двумерных электронов

В диссипативных гидродинамических явлениях ключевым физическим процессом, контролирующим величину вязкости, является релаксация сдвиговых напряжений жидкости. Для электронов при низких температурах в материалах с малым числом дефектов этот процесс обусловлен электрон-электронными столкновениями, скорость которых контролируются, в первую очередь, ферми-статистикой, а именно: числом заполненных и пустых состояний. Поэтому для времени релаксации сдвиговых напряжений $\tau_{ee,2}$ двумерных электронов разумно ожидать, что $\hbar/\tau_{ee,2} \sim T^2/\varepsilon_F$, как и для времён релаксации в трехмерных ферми-системах [68, 17] (здесь T – температура, $\varepsilon_F \gg T$ – энергия Ферми). Однако, фактические времена релаксации двумерных электронов могут значительно отклоняться от этой оценки из-за кинематических

ограничений при столкновениях двумерных частиц с ферми-статистикой, а также из-за резкой угловой зависимости вероятности рассеяния [25, 39, 129, 130].

Эффект вязкости в сильно неидеальной двумерной ферми-жидкости теоретически изучен в работе [39]. Было показано, что основной вклад в релаксацию сдвиговых напряжений вносят столкновения пар квазичастиц с полным импульсом, близким к нулю (встречные столкновения). На вероятность таких столкновений в ферми-жидкости сильно влияет куперонное спаривание (которое отвечает за сверхпроводимость в случае притягивающего межчастичного взаимодействия). Результирующая скорость релаксации напряжений существенно отличается от T^2 -зависимости: $1/\tau_{ee,2} \propto T^2/\ln^2(\varepsilon_F/T)$.

Релаксация различных типов возмущений в двумерном ферми-газе теоретически исследовалась в работах [128]-[130]. Было показано, что встречные столкновения также играют основную роль в релаксации сдвиговых напряжений. Однако в работах [129, 130] было сделано сильное упрощение формы потенциала межэлектронного взаимодействия, что не позволило правильно найти скорости релаксации возмущений для двумерных электронов, взаимодействующих по реалистичному закону (экранированный кулоновский потенциал).

Вязкость двумерных электронов с дираковским спектром в графене теоретически исследовалась в работе [131]. Были выведены уравнения гидродинамики исходя из функций отклика “ток-ток”. В частности, было получено, что скорость релаксации вязких напряжений в пределе низких температур пропорциональна квадрату температуры. В работе [132] была рассчитана теплопроводность двумерных электронов с дираковским и квадратичным спектрами.

В настоящей главе развита микроскопическая теория гидродинамического транспорта в слабо неидеальном двумерном ферми-газе из электронов с квадратичным спектром и экранированным кулоновским потенциалом взаимодействия. Показано, что, в отличие от трехмерных ферми-систем [109, 133], энергетическая часть функции распределения электронов, описывающая вязкое течение, имеет простую структуру, соответствующую приближению времени релаксации для межэлектронного интеграла столкновений. На основе этого результата вычисляется время релаксации сдвиговых напряжений $\tau_{ee,2}$, определяющее вязкость $\eta_0 = v_F^2 \tau_{ee,2}/4$. Результат расчёта можно представить в следующем виде: $\hbar/\tau_{ee,2} = (T^2/\varepsilon_F) r_s^2 \Lambda$, где $\Lambda = (8\pi/3) \ln[1/(\zeta + r_s)]$ – кулоновский логарифм, $\zeta = T/\varepsilon_F$ – безразмерная температура, $r_s = 1/(\sqrt{\pi n_0} a_B)$ – параметр, характеризующий относительную величину взаимодействия электронов, который мал по сравнению с единицей для ферми-газа, n_0 – плотность электронов и a_B – боровский радиус двумерных электронов. Такая скорость релаксации $1/\tau_{ee,2}$ зависит от температуры как $\sim T^2$ при очень низких температурах, $\zeta \ll r_s$, и как $\sim T^2 \ln(\varepsilon_F/T)$

при умеренно низких температурах, $r_s \ll \zeta \ll 1$. Полученный результат отражает характер межчастичного рассеяния в двумерном электронном ферми-газе и существенно отличается от приведенного выше результата для ферми-жидкости.

В настоящей Главе также выполнен анализ температурных зависимостей вязкости двумерных электронов, которые получены из экспериментальных данных по гигантскому отрицательному магнетосопротивлению в высокоподвижных квантовых ямах GaAs [40]-[44],[46] по методике, описанной в Главе 1. Показано, что экспериментальные температурные зависимости времени релаксации сдвиговых напряжений τ_2 хорошо описываются приведенными выше законами для ферми-газа или для ферми-жидкости, в зависимости от силы межчастичного взаимодействия, определяемого плотностью n_0 . На основе проведенного анализа делается вывод о том, что измерение температурных зависимостей вязкости позволяет различать гидродинамические режимы транспорта в ферми-газе и в ферми-жидкости.

2.2 Гидродинамика сильно неидеальной электронной ферми-жидкости

2.2.1 Кинетическое уравнение и потоковые величины

Из-за межэлектронного взаимодействия электроны проводимости в двумерных проводниках, вообще говоря, представляют собой ферми-жидкость, хотя часто в реальных системах межэлектронное взаимодействие можно не учитывать. Состояние заряженной ферми-жидкости определяется квазичастицами похожими на электроны и дырки вырожденного ферми-газа, находящиеся над и под ферми-поверхностью [17, 118]. Одним из способов описания таких частиц является использование функции распределения “квазичастиц в заполненных состояниях” типа функции распределения частиц ферми-газа.

В случае слабого отклонения от равновесия функция распределения квазичастиц может быть представлена в виде:

$$f_{\mathbf{p}} = f_F(\varepsilon_p^0) + \delta f_{\mathbf{p}}, \quad (2.1)$$

где $f_F(E) = 1/[1 + e^{(E-\mu)/T}]$ – фермиевская функция, $\delta f_{\mathbf{p}}$ – малая поправка к ней, T – равновесная температура, μ – равновесный химический потенциал, $\varepsilon_p^0 = p^2/(2m)$ – энергетический спектр квазичастицы при отсутствии других квазичастиц. По смыслу квазичастиц как низко-возбужденных состояний жидкости, $f_{\mathbf{p}}$ определена только при импульсах \mathbf{p} , лежащих около поверхности Ферми $|\mathbf{p}| = p_F$. Соотношением $\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = \partial \varepsilon_p^0 / \partial \mathbf{p}$ определяется скорость квазичастицы при отсутствии других квазичастиц. Отметим, что в формуле (2.1) $f_F(\varepsilon_p^0)$ не есть равновесная

часть функции распределения $f_{\mathbf{p}}$, так как ε_p^0 отвечает отсутствию квазичастиц при $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$.

Ключевым в теории ферми-жидкости является учет зависимости энергии квазичастиц от функции распределения квазичастиц:

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \varepsilon_p^0 + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta f_{\mathbf{p}'}, \quad (2.2)$$

где $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ – функция Ландау, описывающая взаимодействие квазичастиц. В формуле (2.2) опущены спиновые переменные, так как в настоящей главе не будет изучаться спин-зависимых явлений. В случае зависимости $\delta f_{\mathbf{p}}$ от координат и от времени, энергия квазичастиц в силу (2.2) также становится нелокальной по времени и пространству. Учёту взаимодействия квазичастиц согласно (2.2) соответствует возмущенная скорость квазичастиц $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{p}} = \partial \varepsilon_{\mathbf{p}} / \partial \mathbf{p}$. Равновесная часть функции распределения $f_{\mathbf{p}}$ вида (2.1) приобретает вид $f_F(\varepsilon_{\mathbf{p}})$, поэтому можно найти неравновесную часть функции $f_{\mathbf{p}}$ по формуле:

$$\delta \tilde{f}_{\mathbf{p}} = f_{\mathbf{p}} - f_F(\varepsilon_{\mathbf{p}}). \quad (2.3)$$

Заметим, что возмущение скорости квазичастиц за счет взаимодействия мало: $|\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{p}} - \mathbf{v}_{\mathbf{p}}| \ll v_F$ ($v_F = p_F/m$), но поправка к функции распределения $\delta f_{\mathbf{p}}$, определенная без учета взаимодействия, и истинная неравновесная поправка $\delta \tilde{f}_{\mathbf{p}}$ – величины одного порядка:

$$|\delta f_{\mathbf{p}} - \delta \tilde{f}_{\mathbf{p}}| \sim |\delta f_{\mathbf{p}}|, \quad (2.4)$$

связь между которыми дается формулой:

$$\delta \tilde{f}_{\mathbf{p}} = \delta f_{\mathbf{p}} - f'_F(\varepsilon_p^0) \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta f_{\mathbf{p}'}. \quad (2.5)$$

Динамика заряженных квазичастиц во внешних электрическом и магнитном полях \mathbf{E}_0 и \mathbf{B} при условии, что не важны эффекты электромагнитного запаздывания, описывается кинетическим уравнением [68, 118]:

$$\frac{\partial \delta f_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \delta \tilde{f}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\mathbf{p}} \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial \delta \tilde{f}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} + e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} f'_F(\varepsilon_p^0) = \text{St}[\delta \tilde{f}_{\mathbf{p}}], \quad (2.6)$$

где электрическое поле состоит из внешнего поля \mathbf{E}_0 и внутреннего “власовского” квазистатического поля, связанного с возмущением плотности квазичастиц соотношениями электростатики. Для случая двумерных электронов в системе с затвором они имеют вид:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi e d}{\kappa} \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}}, \quad \delta n = \sum_{\mathbf{p}'} \delta f_{\mathbf{p}'}. \quad (2.7)$$

В последнюю формулу входит именно $\delta f_{\mathbf{p}}$, а не $\delta \tilde{f}_{\mathbf{p}} = f_{\mathbf{p}} - f_F(\varepsilon_{\mathbf{p}})$, так как в силу (2.2) величина $f_F(\varepsilon_{\mathbf{p}})$ зависит от координаты и даёт свой вклад во внутреннее электрическое поле. В формулах (2.6) и (2.7) учитывается, что квазичастицы имеют заряд e , как и исходные электроны. Напомним, что величина

$$n_0 = \sum_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} - \delta n \quad (2.8)$$

не имеет прямого физического смысла, но при нулевой температур равна концентрации исходных электронов [17]. Важно, что в уравнении (2.6) в динамические слагаемые с градиентом функции распределения, с внешним магнитным полем и в интеграл столкновений за счет межчастичных столкновений $\text{St}[\delta \tilde{f}_{\mathbf{p}}]$ входит неравновесная часть функции распределения $\delta \tilde{f}_{\mathbf{p}}$, а в слагаемые с производной по времени и с внутренним электрическим полем входит нелокальная часть функции распределения $\delta f_{\mathbf{p}}$. Уравнение (2.6) описывает эффекты в области образца, где возмущения величин: температуры, потока и плотности частиц, – линейны по какому-либо малому внешнему параметру, например, по внешнему полю \mathbf{E}_0 . По последней причине в (2.6) всюду входит скорость без учета взаимодействия, $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$. Напомним, что интеграл St сохраняет число квазичастиц, импульс и энергию, но не сохраняет плотность потока импульса.

Выражение для плотности потока частиц квазичастиц выводится из суммирования (2.6) по импульсам и выделения из полученного уравнения непрерывности величин, соответствующих плотности потока. В результате получается:

$$\mathbf{j} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \delta \tilde{f}_{\mathbf{p}}. \quad (2.9)$$

Выражение для плотности потока импульса квазичастиц получается аналогичным образом: умножением (2.6) на p_i , суммирования по импульсам, и выделением из полученного уравнения сохранения импульса соответствующих слагаемых:

$$\Pi_{ij} = \sum_{\mathbf{p}} p_i v_{\mathbf{p}j} \delta \tilde{f}_{\mathbf{p}}. \quad (2.10)$$

Эта величина может быть разделена на часть, связанную с возмущением всестороннего сжатия (то есть, давления P), и на часть, связанную с вязкими напряжениями: $\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{\delta P} + \Pi'_{ij}$. Первая из них определяется выражением:

$$\Pi_{ij}^{\delta P} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_{\mathbf{p}} p v_{\mathbf{p}} \delta \tilde{f}_{\mathbf{p}}. \quad (2.11)$$

Видно, что эта величина пропорциональна плотности энергии квазичастиц:

$$\delta \epsilon = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 \delta \tilde{f}_{\mathbf{p}} \approx \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} \delta \tilde{f}_{\mathbf{p}}. \quad (2.12)$$

Вязкостная часть плотности потока импульса Π_{ij} приобретает вид:

$$\Pi'_{ij} = \sum_{\mathbf{p}} \left[p_i v_{\mathbf{p}j} - \delta_{ij} \frac{p v_p}{2} \right] \delta \tilde{f}_{\mathbf{p}} . \quad (2.13)$$

Для вывода уравнений гидродинамики удобно ввести также величину, описывающую поток плотности потока импульса:

$$\Pi_{ijk} = \sum_{\mathbf{p}} p_i v_{\mathbf{p}j} v_{\mathbf{p}k} \delta \tilde{f}_{\mathbf{p}} . \quad (2.14)$$

Подобно плотности потока импульса, введенная величина содержит две части разной природы:

$$\Pi_{ijk} = \Pi_{ijk}^J + \Pi_{ijk}'' . \quad (2.15)$$

Вторая из них Π_{ijk}'' пропорциональна третьей угловой гармонике функции распределения, которая в гидродинамическом режиме считается пренебрежимо малой. Слагаемое Π_{ijk}^J , подобное части $\Pi_{ij}^{\delta P}$ плотности потока импульса, пропорционально первой гармонике функции распределения:

$$\Pi_{ijk}^J = \sum_{\mathbf{p}} p_i v_{\mathbf{p}j} v_{\mathbf{p}k} (\delta \tilde{f}_{\mathbf{p}})_{m=1} , \quad (2.16)$$

то есть потоку квазичастиц \mathbf{j} . В следующем разделе будет установлена конкретная связь между компонентами Π_{ijk}^J и j_i .

2.2.2 Уравнение для волн

Будем изучать решения кинетического уравнения в приближении простейшей зависимости функций распределения от энергии:

$$\delta f_{\mathbf{p}} = -f'_F(\varepsilon_p^0) \Phi(\varphi), \quad \delta \tilde{f}_{\mathbf{p}} = -f'_F(\varepsilon_p^0) \tilde{\Phi}(\varphi), \quad (2.17)$$

где φ – полярный угол вектора \mathbf{p} . Неучёт в функциях Φ и $\tilde{\Phi}$ зависимости от энергии означает, что эффекты типа теплопроводности и объёмной вязкости, связанные с изменением энергии квазичастиц при их рассеянии, не рассматриваются. Функции Φ и $\tilde{\Phi}$ такого вида описывают в нулевом приближении по T/μ эффекты, связанные с возмущением плотности, с циклотронным действием магнитного поля и с изменением направления квазиимпульсов при рассеянии. Например, такими эффектами являются плазменные волны, звуковые волны и сдвиговая вязкость.

В связи с выбранным анзацем (2.17) используем функцию Ландау $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$, не зависящую от модулей импульсов и обычным образом обезразмеренную: $F(\varphi - \varphi') = \nu_F f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$, где $\nu_F = m/(2\pi\hbar^2)$ – плотность состояний. Получим следующую связь функций (2.17):

$$\tilde{\Phi}(\varphi) = \Phi(\varphi) + \int \frac{d\varphi'}{2\pi} F(\varphi - \varphi') \Phi(\varphi') \quad (2.18)$$

и следующую форму кинетического уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_F \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{r}} - \omega_c \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \varphi} + \frac{2s^2}{v_F} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \int \frac{d\varphi'}{2\pi} \frac{\partial \Phi(\varphi')}{\partial \mathbf{r}} - \\ - e \mathbf{E}_0 \cdot v_F \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \text{St}[\tilde{\Phi}], \end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$s^2 = \frac{4\pi e^2 d v_F^2}{\kappa} \nu_F = \frac{4\pi e^2 d n_0}{m \kappa} \quad (2.20)$$

– величина, равная квадрату скорости плазмона при отсутствии магнитного поля и взаимодействия. Считаем, что, как обычно, $s \gg v_F$. Величина $\text{St}[\tilde{\Phi}]$ представляет собой среднее значение по модулю импульса $p = |\mathbf{p}|$ от оператора $\text{St}[\delta \tilde{f}_{\mathbf{p}'}]_{\mathbf{p}}$. При этом игнорируется различие в зависимости от p для левой и правой части кинетического уравнения при подстановке в него $\delta \tilde{f}_{\mathbf{p}'}$ вида (2.17). Это приближение дает ошибку, пропорциональную T/ε_F , и соответствует использованию анзаца (2.17).

С помощью полученного уравнения (2.19) можно, во-первых изучить волны, возможные в системе. Выберем функции распределения в виде:

$$\Phi(\varphi, \mathbf{r}, t) = A(\varphi) e^{-i\omega t + i q x}, \quad \tilde{\Phi}(\varphi, \mathbf{r}, t) = \tilde{A}(\varphi) e^{-i\omega t + i q x}. \quad (2.21)$$

Без учета процессов релаксации система уравнений для амплитуд волн приобретает вид:

$$\begin{cases} -i\omega A(\varphi) + v_F \cos \varphi i q \tilde{A}(\varphi) - \omega_c \frac{d\tilde{A}}{d\varphi} + \frac{2s^2}{v_F} i q \int \frac{d\varphi'}{2\pi} A(\varphi') = 0 \\ \tilde{A}(\varphi) = A(\varphi) + \int \frac{d\varphi'}{2\pi} F(\varphi - \varphi') A(\varphi') \end{cases}. \quad (2.22)$$

Эти уравнения являются задачей на собственные функции $A(\varphi)$ и собственные значения ω с интегро-дифференциальным оператором. Из полученной системы, например, сразу легко показать, что для простейшего случая, когда отсутствует взаимодействие ($F = 0$) и рассматриваются большие длины волн ($q v_F \ll \omega$ или $q v_F \ll \omega_c$), получается обычный спектр магнетоплазмонов: $\omega_q = \sqrt{\omega_c^2 + s^2 q^2}$.

Полученная система уравнений (2.22) есть обобщение приведенных в книгах [17, 118] уравнений, описывающих нулевой звук в заряженной ферми-жидкости, на случай наличия магнитного поля. Уравнения (2.22) позволяют, во-первых, изучить влияние ферми-жидкостных эффектов на плазменные волны, и, во-вторых, изучить остальные типы волн нулевого звука при произвольных амплитуде и профиле функции Ландау $F(\varphi)$ и при произвольных длинах волн и соотношениях между частотами ω и ω_c .

Ниже будет показано, при функции $F(\varphi)$, достаточно большой по абсолютной величине и анизотропии, кинетическое уравнение (2.19) сводится к уравнениям гидродинамики. На основе

последних будут изучены поперечные и продольные магнитозвуковые волны в длинноволновом пределе. Задача изучения магнитозвуковых и магнитоплазменных волн при произвольной силе взаимодействия с помощью (2.22) может быть актуальной, в частности, для количественного анализа экспериментальных данных в системах с умеренными значениями $F(\varphi)$, в которых наблюдаются описанные в Главе 1 высокочастотные гидродинамические явления.

2.2.3 Уравнения гидродинамики

Выведем уравнения гидродинамики заряженной ферми-жидкости в магнитном поле из кинетического уравнения (2.19). Уравнения гидродинамики ферми-жидкости без магнитного поля впервые были получены в работе [109] и затем более подробно изучены в работе [119].

Разложим на угловые моменты функцию Ландау и функции распределения:

$$\begin{pmatrix} F(\varphi) \\ \Phi(\varphi) \\ \tilde{\Phi}(\varphi) \end{pmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} F_m \\ \Phi_m \\ \tilde{\Phi}_m \end{pmatrix} e^{im\varphi}. \quad (2.23)$$

Параметры F_m вещественны и $F_m = F_{-m}$ силу симметричности функции Ландау при изменении φ на $-\varphi$. Для сокращения записи формул, здесь использованы величины F_m отличаются от обычно используемых параметров разложения на множитель 2. Связь (2.18) между Φ и $\tilde{\Phi}$ выразится соотношениями:

$$\tilde{\Phi}_m = (1 + F_m) \Phi_m. \quad (2.24)$$

Как обсуждалось в прошлой главе, гидродинамическое приближение работает в ситуации, когда форма потока является достаточно плавной, а именно: характерная длина волны много больше одной из внутренних характерных длин: ω/v_F , ω_c/v_F либо длины релаксации. Как известно, такому течению соответствует малость гармоник функции распределения, старших второй, по сравнению с гармониками Φ_0 , $\Phi_{\pm 1}$, $\Phi_{\pm 2}$. Из кинетического уравнения (2.19) и соотношений (2.24) можно получить критерий на параметры функции Ландау, когда реализуется это соотношение между гармониками (при условии что характерная длина волны определяется внутренними свойствами жидкости, а не внешними условиями, например, размером образца). Анализ показывает, что для этого необходимы следующие неравенства:

$$1 + F_m \ll F_1, \quad \sqrt{F_1(1 + F_2)} \quad (2.25)$$

при всех $m \geq 3$. При выполнении неравенств (2.25) открывается возможность получить замкнутое уравнение для младших гармоник, то есть для пропорциональных им потоковых величин \mathbf{j} , Π_{ij} и возмущения концентрации δn .

Для вывода уравнений эволюции плотности квазичастиц, плотности потока и плотности потока импульса необходимы явные выражения для этих величин через функции распределения (2.17) в нулевом порядке по T/ε_F . Для возмущения плотности и плотности потока получаем:

$$\delta n = \nu_F \int \frac{d\varphi}{2\pi} \Phi(\varphi), \quad \mathbf{j} = \nu_F v_F \int \frac{d\varphi}{2\pi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \tilde{\Phi}(\varphi). \quad (2.26)$$

Для части плотности потока импульса, связанной с неоднородностью давления, имеем:

$$\Pi_{ij}^{\delta P} = \nu_F \frac{mv_F^2}{2} \int \frac{d\varphi}{2\pi} \tilde{\Phi}(\varphi), \quad (2.27)$$

что можно записать как:

$$\Pi_{ij}^{\delta P} = \frac{mv_F^2}{2} \delta \tilde{n}, \quad \delta \tilde{n} = \nu_F \int \frac{d\varphi}{2\pi} \tilde{\Phi}(\varphi). \quad (2.28)$$

Для вязкостной части плотности потока импульса получается выражение:

$$\begin{pmatrix} \Pi'_{xx} \\ \Pi'_{yy} \\ \Pi'_{xy} \end{pmatrix} = \nu_F m v_F^2 \int \frac{d\varphi}{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi - 1/2 \\ \sin^2 \varphi - 1/2 \\ \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} \tilde{\Phi}(\varphi). \quad (2.29)$$

Видно, что последняя величина пропорциональна второй гармонике функции распределения: $\Pi'_{ij} \sim \tilde{\Phi}_{m=\pm 2}$, в то время как часть от неоднородности давления пропорциональна нулевой гармонике, то есть возмущению плотности: $\delta \tilde{n} = (1 + F_0) \delta n$.

Как обсуждалось выше, одна из частей введенной величины Π_{ijk} , описывающая поток плотности потока импульса, пропорциональна третьей гармонике функции распределения: $\Pi''_{ijk} \sim \tilde{\Phi}_{m=\pm 3}$. Такая величина в гидродинамическом пределе, который реализуется при выполнении неравенств (2.25), является пренебрежимо малой. Для токовой части Π_{ijk} из формул (2.9) и (2.16) можно получить соотношение:

$$\Pi_{ijk}^J = \frac{mv_F^2}{4} (\delta_{ik} j_j + \delta_{jk} j_i - \delta_{ij} j_k). \quad (2.30)$$

Далее необходимо умножить кинетическое уравнение (2.19) последовательно на 1, v_i и $p_i v_j$, просуммировать по импульсам и преобразовать, используя выражения для величин (2.26)-(2.29). Не приводя подробностей вычислений, приведем получающийся результат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{1}{1 + F_1} \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} + s^2 \frac{\partial \delta n}{\partial x_i} - \frac{en_0 E_{0i}}{m} - \omega_c \epsilon_{ijz} j_j = 0 \\ \frac{1}{1 + F_2} \frac{\partial \Pi'_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ijk}}{\partial x_k} - \omega_c (\epsilon_{jkz} \Pi'_{ik} + \epsilon_{ikz} \Pi'_{kj}) = -\frac{\Pi'_{ij}}{\tau_2} \end{array} \right. , \quad (2.31)$$

где ϵ_{ijl} - абсолютно антисимметричный тензор третьего ранга. В последнем уравнении слагаемое $-\Pi'_{ij}/\tau_2$ описывает релаксацию второй гармоники функции распределения за счет $\text{St}[\tilde{\Phi}]$. Гидродинамическое приближение состоит в замене в полученных уравнениях величины Π_{ijk} на Π^J_{ijk} , что отвечает возможности пренебречь малыми третьей и старших гармониками функции распределения.

После этой замены, используя (2.28) и (2.30), последние два уравнения в (2.31) можно преобразовать к виду, похожему на вид аналогичных по смыслу уравнений для ферми-газа, полученных в Главе 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial j_i}{\partial t} + s_0^2 \frac{\partial \delta n}{\partial x_i} - \frac{en_0 E_{0i}}{m_0} - \omega_c^{(0)} \epsilon_{ijz} j_j + \\ \quad + (1 + F_1)(1 + F_0) \frac{v_F^2}{2} \frac{\partial \delta n}{\partial x_i} + \frac{1 + F_1}{m} \frac{\partial \Pi'_{ij}}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \Pi'_{ij}}{\partial t} - \omega_c^{(2)} (\epsilon_{jkz} \Pi'_{ik} + \epsilon_{ikz} \Pi'_{kj}) + \\ \quad + (1 + F_2) \frac{mv_F^2}{4} \left[\frac{\partial j_i}{\partial x_j} + \frac{\partial j_j}{\partial x_i} - \text{div} \mathbf{j} \right] = -\frac{\Pi'_{ij}}{\tau_2^{(2)}} \end{array} \right. . \quad (2.32)$$

В этих уравнениях введены перенормированные параметры:

$$\begin{aligned} \tau_2^{(2)} &= \frac{\tau_2}{1 + F_2}, & m_0 &= \frac{m}{1 + F_1}, & s_0^2 &= (1 + F_1) s^2 = \frac{e^2 4\pi d n_0}{m_0 \kappa}, \\ \omega_c^{(0)} &= (1 + F_1) \omega_c = \frac{eB}{m_0 c}, & \omega_c^{(2)} &= (1 + F_2) \omega_c = \frac{eB}{m_0 c} \frac{1 + F_2}{1 + F_1}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Полученные перенормированные масса “голого” электрона m_0 , истинная скорость плазмонов s_0 при наличии ферми-жидкостного взаимодействия и “обычная” циклотронная частота $\omega_c^{(0)}$ соответствуют приведенным в литературе величинам [17, 118]. Как известно [17], полученная масса m_0 есть масса электрона без учета взаимодействия. Такая перенормировка массы m отвечает факту тому, что частота циклотронного резонанса $\omega_c^{(0)}$ не меняется при учёте межэлектронного взаимодействия (теорема Кона) [127].

По-видимому, неизвестным ранее результатом является следующий из формул (2.33) вывод о наличии двух циклотронных частот в уравнениях гидродинамики заряженной ферми-жидкости: одна из них – это “обычная” циклотронная частота $\omega_c^{(0)}$, входящая в закон дисперсии магнетоплазмонов, вторая – это частота $\omega_c^{(2)}$, входящая в уравнение эволюции тензора вязких напряжений жидкости в магнитном поле $\sigma'_{ij} = -\Pi'_{ij}$. Последняя определяет частоту вязкоупругого резонанса $\omega = 2\omega_c^{(2)}$.

Для вывода уравнения гидродинамики, содержащего только плотность потока квазичастиц \mathbf{j} (уравнение Навье-Стокса заряженной ферми-жидкости), необходимо второе из уравне-

ний (2.32) подставить в первое при фиксированной частоте течения. После преобразований, аналогичных проведенным в Главе 1 для случая ферми-газа, получим:

$$-i\omega\mathbf{j} = \frac{en_0}{m_0}\mathbf{E}_0(\omega) - (s_0^2 + c_s^2)\nabla\delta n + \omega_c^{(0)}[\mathbf{j} \times \mathbf{e}_z] + \eta_{xx}\Delta\mathbf{j} + \eta_{xy}[\Delta\mathbf{j} \times \mathbf{e}_z], \quad (2.34)$$

где $c_s^2 = (v_F^2/2)(1 + F_0)(1 + F_1)$ – известная из литературы перенормированная скорость первого (термодинамического) звука в ферми-жидкости [17], а высокочастотные коэффициенты вязкости $\eta_{xx} = \eta_{xx}(\omega)$ и $\eta_{xy} = \eta_{xy}(\omega)$ с перенормированными параметрами приобретают вид:

$$\begin{aligned} \eta_{xx}(\omega) &= \eta_0^{(2)} \frac{1 - i\omega\tau_2^{(2)}}{1 + [-\omega^2 + (\omega_c^{(2)})^2](\tau_2^{(2)})^2 - 2i\omega\tau_2^{(2)}} \\ \eta_{xy}(\omega) &= \eta_0^{(2)} \frac{2\omega_c^{(2)}\tau_2^{(2)}}{1 + [-\omega^2 + (\omega_c^{(2)})^2](\tau_2^{(2)})^2 - 2i\omega\tau_2^{(2)}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь $\eta_0^{(2)} = (1 + F_1)(1 + F_2)v_F^2\tau_2^{(2)}/4$ – перенормированный коэффициент вязкости в нулевом магнитном поле на нулевой частоте. Видно, что полученные коэффициенты сдвиговой вязкости имеют резонанс при $\omega = 2\omega_c^{(2)}$. В рассматриваемом приближении (2.17), когда не учитываются подробности релаксация квазичастиц по энергии, в рамках сформулированных уравнений получается, что коэффициент объёмной вязкости ζ , связанный с релаксацией энергии квазичастиц, равен нулю.

2.2.4 Вязкоупругий переход и магнитозвуковые волны

В пределе большой частоты, $\omega \gg 1/\tau_2^{(2)}$, при нулевом магнитном поле диагональный коэффициент вязкости принимает вид:

$$\text{Im } \eta_{xx} = (1 + F_1)(1 + F_2)\frac{v_F^2}{4}\frac{1}{\omega}, \quad \text{Re } \eta_{xx} \ll \text{Im } \eta_{xx}. \quad (2.36)$$

Последнее неравенство означает малую роль диссипативных процессов по сравнению с упругими процессами (деформация сжатия и возбуждение плазмонов, а также деформация сдвига). В этом пределе уравнение Навье-Стокса (2.34) переходит в уравнение колебаний упругой среды:

$$-\omega^2\varrho_0\mathbf{u} = K\text{grad div } \mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{F}_0, \quad (2.37)$$

где \mathbf{u} – вектор сдвига упругой среды, связанный с плотностью потока как $\mathbf{j} = n_0\partial\mathbf{u}/\partial t$; $\varrho_0 = m_0n_0$ – плотность среды; $\mathbf{F}_0 = n_0\mathbf{E}_0$ – сила, действующая на единицу объема; K – модуль всестороннего сжатия; μ – модуль сдвига. При нулевом магнитном поле упругие модули связаны с коэффициентами выведенного выше уравнения Навье-Стокса следующим образом:

$$K = \varrho_0(s_0^2 + c_s^2), \quad \mu = -i\omega\varrho_0\eta_{xx}. \quad (2.38)$$

Таким образом, при $\omega \ll 1/\tau_2^{(2)}$ эффект вязкости приводит только к процессам релаксации (например, к затуханию плазмонов), а при $\omega \gg 1/\tau_2^{(2)}$ коэффициент вязкости превращается в упругую константу, сохраняя малую вещественную часть, что означает возможность существования упругих сдвиговых (поперечных) волн. Электронная жидкость по своим свойствам становится близка к аморфному твердому телу.

Впервые описанный вязкоупругий переход для электронной ферми-жидкости в отсутствие магнитного поля был рассмотрен в работе [77]. Полученное выражение (2.36) совпадает с полученным в [77] результатом.

В Разделе 1.4 был изучен вязкоупругий переход в двумерной электронной жидкости в магнитном поле в рамках гидродинамической модели. Было показано, что временная дисперсия коэффициентов вязкости [формулы типа (2.35)] приводит при $\omega \gg 1/\tau_2$ к появлению поперечных магнитозвуковых волн. За счет возбуждения таких волн, в отклике достаточно узкого образца на переменное электрическое поле может возникать вязкоупругий резонанс. В Разделе 1.4 было также установлено, что необходимым условием существования поперечных магнитозвуковых волн является сильная неидеальность электронной жидкости, которая выражается в сильном увеличении коэффициента вязкости жидкости по сравнению со случаем идеального ферми-газа:

$$\eta_0 \gg v_F^2 \tau_2^{(2)}, \quad (2.39)$$

где η_0 – коэффициент вязкости жидкости при $\omega = 0$ и $B = 0$, v_F – скорость Ферми квазичастиц, $\tau_2^{(2)}$ – время релаксации Π'_{ij} .

Полученный в настоящей работе в модели сильно неидеальной ферми-жидкости результат для $\eta_0 = \eta_0^{(2)}$ позволяет дать явное выражение для критерия (2.39):

$$(1 + F_1)(1 + F_2) \gg 1. \quad (2.40)$$

Это неравенство реализуется при выполнении полученного выше критерия (2.25) применимости гидродинамического описания волн в ферми-жидкости.

Таким образом, для возможности гидродинамического описания поперечных магнитозвуковых волн необходимо, чтобы, по крайней мере, параметр Ландау F_1 был велик по сравнению с единицей и параметрами Ландау старше второго.

В Разделе 1.4 был получен закон дисперсии поперечных магнитозвуковых волн в виде выражения, содержащего макроскопический параметр η_0 . С помощью уравнений для коэффициентов вязкости (2.35) с учётом перенормировок можно получить явное выражение для дисперсии этих волн, содержащее величины $\omega_c^{(2)}$, $\eta_0^{(2)}$, $\tau_2^{(2)}$ (которые, в свою очередь, выража-

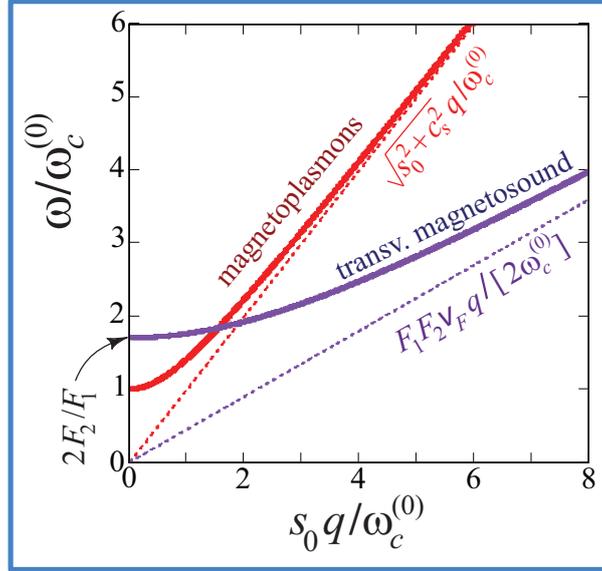


Рис. 2.1: Перенормированные законы дисперсии продольных волн (продольные магнитоплазменные волны с сильным влиянием упругости) и поперечных магнитозвуковых волн, связанных с возмущением сдвиговых напряжений, в пределе $F_1, F_2 \gg 1$. Рисунок является аналогом Рис. 1.10(a), уточняющим влияние межчастичного взаимодействия на спектр продольных и поперечных волн.

ются через параметры Ландау F_1 и F_2):

$$\omega_s(q) = \sqrt{4[\omega_c^{(2)}]^2 + [\eta_0^{(2)}/\tau_2^{(2)}]q^2}. \quad (2.41)$$

При больших значениях F_1 и F_2 из формулы (2.41) получаем:

$$\omega_s(q) = \frac{F_2}{F_1} \sqrt{4[\omega_c^{(0)}]^2 + \frac{F_1^3}{F_2} \frac{v_F^2}{4} q^2}. \quad (2.42)$$

Из формулы (2.42) видно, что при $\omega \sim \omega_c$ длина волны поперечного нулевого звука есть величина порядка:

$$l_s \sim \sqrt{F_1 F_2} v_F / \omega. \quad (2.43)$$

При $F_{1,2} \gg 1$ эта величина много больше расстояния $l_\omega \sim v_F / \omega$, проходимого квазичастицей за один период изменения внешнего поля: $l_\omega \ll l_s$. Таким образом, сформулированный в Главе 1 наглядный критерий применимости гидродинамического приближения действительно выполнен.

Из уравнения (2.34) легко также получить, что спектр продольных волн, связанных с возмущением плотности, в сильно неидеальной ферми-жидкости будет определяться формулой:

$$\omega_p(q) = \sqrt{[\omega_c^{(0)}]^2 + (s_0^2 + c_s^2)q^2}. \quad (2.44)$$

Отсюда и из (2.33) видно, что при достаточно больших значениях параметров F_0 и F_1 скорость плазмонов s_0 может сравниться с перенормированной скоростью звука c_s . Следовательно такие волны не будут иметь чисто электрическую природу, как магнитоплазмоны, а будут од-

новременно связаны как с возбуждением объёмного заряда (и соответствующего внутреннего электрического поля), так и с возникновением неоднородного давления.

Законы дисперсии продольных $\omega_p(q)$ и поперечных $\omega_s(q)$ волн построены на Рис. 2.1.

2.2.5 Обсуждение возможной связи с экспериментальными данными

Как обсуждалось в Главе 1, в экспериментах [49, 50] наблюдался гигантский пик в фотосопротивлении квантовых ям GaAs вблизи удвоенной циклотронной частоты, который, по видимому, обусловлен сдвиговыми магнитозвуковыми волнами и вязкоупругим резонансом в системе двумерных электронов в яме. Только что выполненный вывод уравнений гидродинамики в рамках теории ферми-жидкости показывает, что частота вязкоупругого резонанса $2\omega_c^{(2)}$ (2.33) перенормируется межэлектронным взаимодействием и может значительно отличаться от удвоенной частоты $\omega_c^{(0)}$, определяющей циклотронный резонанс.

На Рис. 1.13(b) видно, что частота пика фотосопротивления сдвигается в сторону магнитных полей, больших, чем половина $B^{(0)}/2$ магнитного поля, соответствующего циклотронному резонансу:

$$B^{(0)} = \frac{m_0 c}{e} \omega. \quad (2.45)$$

Магнитное поле, отвечающее вязкоупругому резонансу в соответствии с формулой (2.33) имеет вид:

$$B^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{m_0 c}{e} \frac{1 + F_1}{1 + F_2} \omega. \quad (2.46)$$

Для периодических функций типичным является монотонное убывание модуля их коэффициентов Фурье с ростом номера коэффициента. Если считать, что это свойство выполнено для функции взаимодействия Ландау $F(\varphi)$, то $F_1 > F_2$ и величина $B^{(2)}$ больше, чем $B^{(0)}/2$. Это соответствует сдвигу частоты резонанса относительно $B^{(0)}/2$, который виден на Рис. 1.13(b).

Заметим также, что само вязкое течение жидкости может изменять величину межчастичного взаимодействия, описываемого в рамках теории ферми-жидкости в гидродинамическом режиме константами F_1 и F_2 . Действительно, наличие неравновесной функции распределения меняет расстояния между частицами и поэтому и энергию всей жидкости, в частности, соотношение Ландау (2.2) связи между возмущением энергии квазичастиц и заселённостью состояний квазичастиц. Это должно привести к тому, что коэффициенты Ландау F_1 , F_2 и перенормированные параметры уравнений гидродинамики будут зависеть от характеристик течения $\partial j_i(\mathbf{r}, t)/\partial x_k$ и $\Pi_{ik}(\mathbf{r}, t)$. В настоящее время ведётся работа с участием автора диссертации над теорией нелинейного высокочастотного транспорта в сильно вязкой жидкости, учитывающей этот эффект. Ожидается, что учёт такого эффекта, а также эффектов памяти

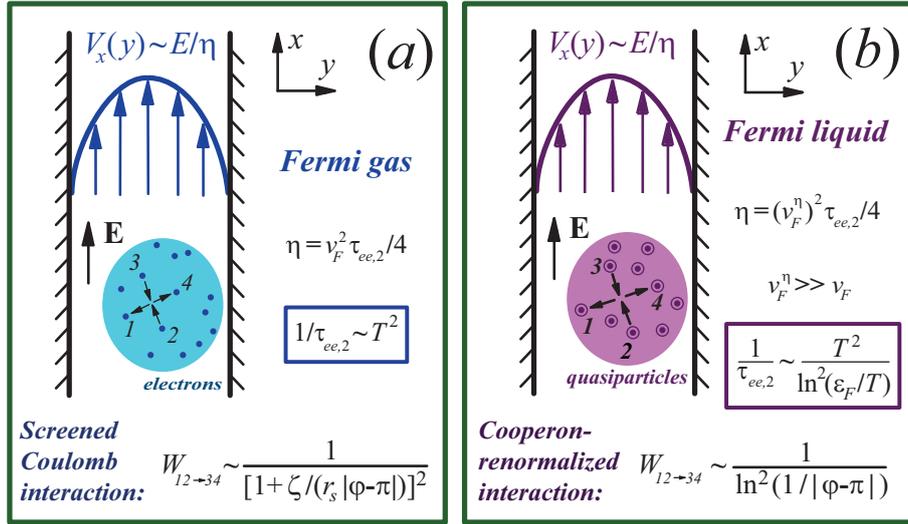


Рис. 2.2: Течение Пуазейля ферми-газа (а) и ферми-жидкости (б) из двумерных электронов. В ферми-жидкости вязкость $\eta = (v_F^1)^2 \tau_{ee,2} / 4$ сильно перенормируется из-за взаимодействия между квазичастицами, что описывается неравенством $v_F^1 \gg v_F$.

при столкновениях квазичастиц в магнитном поле может привести к построению последовательной теории фотосопротивления вязкой электронной жидкости.

2.3 Вязкость электронного ферми-газа

2.3.1 Интеграл столкновений

В этом разделе выполнен расчёт вязкости вырожденного электронного газа с учётом реалистичного взаимодействия между электронами. Взаимодействие считается слабым, а именно: средняя кинетическая энергия электронов много больше их средней кулоновской энергии, что соответствует малым значениям параметра взаимодействия r_s . В таком режиме оказывается возможным построить строгое решение кинетического уравнения с электрон-электронным интегралом столкновений. Подробности вывода изложены в Приложении С. Ниже в этом разделе приводятся базовые уравнения, основные идеи расчёта и результаты. Кроме того, в конце этого раздела полученное время релаксации сдвигового напряжения, определяющие вязкость, а также аналогичное время для сильно неидеальной ферми-жидкости, полученное в работе [39] (см. Рис. 2.2), сравниваются с экспериментальными величинами для этого времени для GaAs квантовых ям. Последние величины извлекаются из данных по гигантскому отрицательному магнетосопротивлению по методу, изложенному выше в Разделе 1.2.3.

Рассмотрим рассеяние друг на друге двух двумерных электронов с начальными импульсами \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и конечными импульсами \mathbf{p}_3 , \mathbf{p}_4 , которые характеризуются углами α , φ , θ и ψ как показано на Рис. 2.3(а). Законы сохранения момента импульса и энергии для рассеивающих

частиц имеют обычный вид: $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$. Энергетический спектр двумерных электронов считается квадратичным: $\varepsilon_i = mv_i^2/2$ и $\mathbf{p}_i = m\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Будем изучать малые медленные возмущения электронного ферми-газа, которые описываются функцией распределения: $f_{\mathbf{p}} = f_F(\varepsilon) + \delta f_{\mathbf{p}}$, где f_F функция Ферми и поправка к ней имеет вид $\delta f_{\mathbf{p}} = -f'_F(\varepsilon) \Psi(\varepsilon, \alpha)$. Функция Ψ состоит из квазиравновесной части, обусловленной медленным изменением средней скорости или температуры в пространстве, и неравновесной части, описывающей, например, сдвиговые напряжения или поток тепла.

Релаксация возмущений $\delta f_{\mathbf{p}}$ описывается линеаризованным интегралом межчастичных столкновений [39, 68, 109, 129, 133]:

$$\begin{aligned} \text{St}[\Psi](\varepsilon_1, \alpha) = & -\frac{f_F(\varepsilon_1)}{T} \frac{m^2}{(2\pi\hbar)^4} \int \int d\varepsilon_2 d\varepsilon_3 f_F(\varepsilon_2)[1 - f_F(\varepsilon_3)][1 - f_F(\varepsilon_4)] \times \\ & \times \int \int d\varphi d\theta W [\Psi(\varepsilon_1, \alpha) + \Psi(\varepsilon_2, \alpha + \varphi) - \Psi(\varepsilon_3, \alpha + \theta) - \Psi(\varepsilon_4, \alpha + \psi)] , \end{aligned} \quad (2.47)$$

где $\varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\check{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, угол рассеяния электрона “2” $\psi = \psi(\varphi, \theta; \check{\varepsilon})$ вычисляется с помощью закона сохранения импульса (точную форму для ψ , см. в Приложение С) и $W = W(\varphi, \theta; \check{\varepsilon})$ – вероятность рассеяния:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} M^2 \delta \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \frac{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)^2}{2m} \right]. \quad (2.48)$$

Дельта-функция в этой формуле, учитывающая закон сохранения энергии, приводит к формуле для угла рассеяния $\theta = \theta(\varphi, \check{\varepsilon})$ (см. её явный вид в Приложении С). Квадрат матричного элемента $M^2 = M^2(\varphi, \theta; \check{\varepsilon})$ в уравнении (2.48) для неполяризованных по спину электронов при достаточно больших углах рассеяния, $\theta \gg \zeta$, $\psi \gg \zeta$, имеет вид [129]:

$$M^2 = 2 [V(q)^2 + V(w)^2 - V(q)V(w)]. \quad (2.49)$$

Здесь учтены процессы прямого рассеяния, $1, 2 \rightarrow 3, 4$, и рассеяния с обменом, $1, 2 \rightarrow 4, 3$, в которых происходит передача между электронами следующих величин импульса: $\mathbf{q} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ и $\mathbf{w} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2$. В задаче о расчёте вязкости потенциалом взаимодействия $V(q)$ в формуле (2.49) для всех существенных φ и θ является фурье-компонента статического экранированного кулоновского потенциала в приближении случайных фаз:

$$V(q) = \frac{2\pi e^2/\kappa}{q/\hbar + 2/a_B}, \quad (2.50)$$

где κ – диэлектрическая проницаемость окружения двумерного слоя. В Приложении С описаны случаи, когда при расчёте вероятности W нужно учитывать ядро оператора межэлектронного взаимодействия $V(q, \epsilon)$, зависящее от энергии $\epsilon = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$, переданной при столкновении.

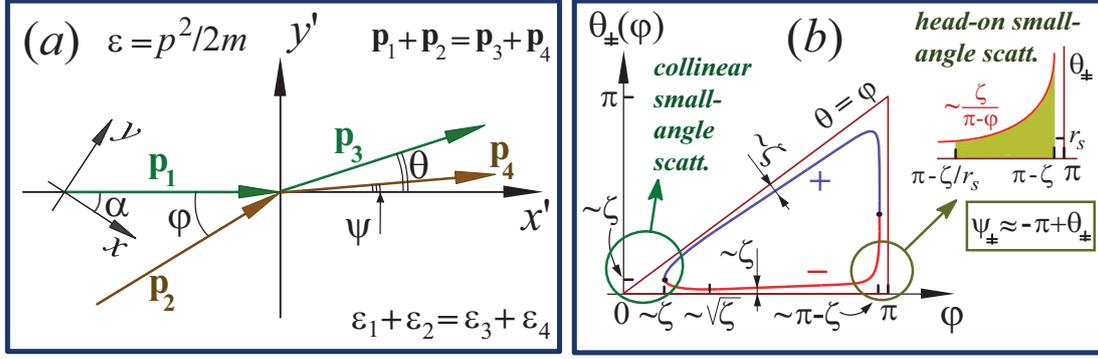


Рис. 2.3: (а): Начальные \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и конечные \mathbf{p}_3 , \mathbf{p}_4 импульсы двух сталкивающихся электронов в системе отсчета $x'y'$, связанной с направлением начального импульса \mathbf{p}_1 пробного электрона “1”. (б): Углы рассеяния $\theta_{\pm}(\varphi, \epsilon)$ электрона “1” как функции угла φ импульса \mathbf{p}_2 налетающего электрона “2”. Рисунок отвечает соотношениям между энергиями электронов $\epsilon_1 > \epsilon_2$, $\epsilon_3 > \epsilon_4$, и $\epsilon_3\epsilon_4 < \epsilon_1\epsilon_2$ и низким температурам: $\zeta \ll r_s \ll 1$. Вставка показывает функцию $\theta_{\pm}(\varphi, \epsilon)$ в окрестности точки $\varphi = \pi$, $\theta = 0$, дающей главный вклад в релаксацию сдвиговых напряжений при температурах $\zeta \ll r_s$.

Дальнейшее рассмотрение основано на малости двух параметров: безразмерной температуры $\zeta \ll 1$ и параметра взаимодействия $r_s \ll 1$. Приближение случайных фаз, в рамках которого получены формулы (2.47)-(2.50), применимо при $r_s \ll 1$ и при произвольном отношении ζ/r_s . В реалистичных квантовых ямах GaAs величина ζ обычно очень мала при типичных условиях эксперимента: например, $\zeta \sim 10^{-2}$ при $T = 1$ К и $n_0 = 10^{11}$ см $^{-2}$, а параметр r_s меньше единицы только при достаточно высоких концентрациях электронов: при $n_0 = 10^{11} - 10^{12}$ см $^{-2}$ величина r_s изменяется в интервале 1.7-0.55. Таким образом, при анализе экспериментов следует полагать, что параметр r_s не слишком мал, поэтому $\zeta/r_s \ll 1$.

Дельта-функция в уравнении (2.48) может быть записана как сумма двух выражений, отвечающих двум решениям $\theta_{\pm} = \theta_{\pm}(\varphi, \epsilon)$ уравнения, описывающего закон сохранения энергии:

$$\delta[\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)] = \sum_{\pm} \frac{\delta(\theta - \theta_{\pm})}{2\sqrt{\epsilon_3} |\sqrt{\epsilon_1} \sin(\theta_{\pm}) + \sqrt{\epsilon_2} \sin(\theta_{\pm} - \varphi)|}. \quad (2.51)$$

Проведенный анализ показывает (см. Приложение С) показывает, что после интегрирования по углу θ в интеграле столкновений (2.47), выражения (2.51) приобретают две сингулярности: при малых углах налетающего электрона, $\varphi \rightarrow 0$, и при направлениях, близких в встречным, $\varphi \rightarrow \pi$. В этих пределах выражения (2.51) становятся много большими значений этих выражений при “регулярных” величинах углов, $|\varphi| \sim 1$.

Сингулярность в выражениях (2.51) при $\varphi \rightarrow 0$ возникает за счёт столкновений пробного электрона с электронами с почти коллинеарными импульсами: $\mathbf{p}_1 \approx \mathbf{p}_2$. Формулы для углов рассеяния $\theta_{\pm} = \theta_{\pm}(\varphi, \epsilon)$ и $\psi_{\pm} = \psi[\varphi, \theta_{\pm}(\varphi, \epsilon), \epsilon]$ приводят к оценке: $\zeta \lesssim |\theta_{\pm}|, |\psi_{\pm}| \ll 1$ при малых углах падения электрона, $\zeta \lesssim |\varphi| \ll 1$ [см. Рис. 2.3(б) и подробности в Приложении С]. Таким образом, вклад особенности при $\varphi \rightarrow 0$ соответствует почти коллинеарному малоугловому рассеянию. В этом случае оказывается необходимым учитывать зависимость M^2 от

энергий частиц ϵ , которой пренебрегается в уравнении (2.49) (см. Приложение С).

Сингулярность в (2.51) при $\varphi \rightarrow \pi$ отвечает столкновениям электронов с почти противоположно направленными импульсами, $\mathbf{p}_1 \approx -\mathbf{p}_2$, вообще говоря, на произвольные углы, $0 < |\theta_{\pm}| < \pi$. Такие “встречные” столкновения наиболее важны для релаксации функции распределения, описывающей вязкое течение [128, 129]. Из-за формы матричного элемента (2.49) наиболее важными снова являются столкновения, в которых один из углов рассеяния мал: $\zeta \ll |\theta_{\pm}| \ll 1$ либо $\zeta \ll |\psi_{\pm}| \ll 1$ [см. Рис. 2.3(b)]. Для таких θ_{\pm} и ψ_{\pm} можно использовать статический матричный элемент (2.49) с опущенной зависимостью от энергий (см. обоснование этого в Приложении С).

2.3.2 Релаксация сдвиговых напряжений

Эффект сдвиговой вязкости с микроскопической точки зрения состоит в возникновении сдвиговых напряжений в газе или жидкости из-за наличия неоднородности гидродинамической скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r})$. Этот эффект описывается функцией распределения:

$$\Psi = \mathbf{p} \cdot \mathbf{V} + \Psi_s, \quad (2.52)$$

где $\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}$ – локально равновесная часть функции распределения, соответствующая гидродинамической скорости жидкости $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r})$, а Ψ_s – неравновесная часть, пропорциональная второй угловой гармонике \mathbf{p} и отвечающая наличию сдвиговых напряжений в жидкости:

$$\sigma_{ik} = - \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{2\pi^2 \hbar^2} [-f'_F(\epsilon)] \Psi_s(\epsilon, \alpha) p_i v_k. \quad (2.53)$$

Для несжимаемого потока, в котором $\text{div } \mathbf{V} = 0$, кинетическое уравнение $\mathbf{v} \cdot \partial f_{\mathbf{p}} / \partial \mathbf{r} = \text{St}[f_{\mathbf{p}}]$ приводит к следующему виду функции Ψ_s :

$$\Psi_s(\epsilon, \alpha) = \frac{mv_F^2}{4} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) F_{ik}, \quad (2.54)$$

где $F_{xx,yy} = \pm F(\epsilon) \cos(2\alpha)$, $F_{xy} = F(\epsilon) \sin(2\alpha)$. Оператор St диагонален по угловым гармоникам, в частности:

$$\text{St}[F_{xx}](\epsilon_1, \alpha) \propto \cos(2\alpha). \quad (2.55)$$

Поэтому кинетическое уравнение приводит к следующему интегральному уравнению для функции $F(\epsilon)$:

$$\text{St}[F(\epsilon) \cos(2\phi)] \Big|_{\alpha=0} = -f'_F(\epsilon_1). \quad (2.56)$$

Как обсуждалось в прошлом разделе, коэффициент вязкости η определяется как коэффициент пропорциональности между тензором сдвиговых напряжений $\sigma_{ik} = -\Pi'_{ik}$ и тензором

производных скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r})$:

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right), \quad \eta = \frac{1}{4} m n_0 v_F^2 \tau_{ee,2}, \quad (2.57)$$

где $\tau_{ee,2}$ – время релаксации сдвиговых напряжений. Из этой формулы для η , формулы (2.54), и формулы (2.53) для σ_{ik} получаем следующее выражение для времени релаксации:

$$\tau_{ee,2} = \int d\varepsilon f'_F(\varepsilon) F(\varepsilon). \quad (2.58)$$

При наличии магнитного поля, в кинетическом уравнении возникает также слагаемое $\omega_c \partial f_{\mathbf{p}} / \partial \alpha$. Оно приводит к появлению двух коэффициентов вязкости: диагонального, η_{xx} , и внедиагонального (холловского), η_{xy} , которые связывают тензора σ_{ik} и $\partial V_i / \partial x_k$ по формуле (1.34). Время релаксации $\tau_{ee,2}$ определяет амплитуду и зависимость от магнитного поля обоих этих коэффициентов по формулам (1.20).

В Приложении С показывается, что, в силу специфических свойств рассеяния двумерных электронов с потенциалом взаимодействия (2.50), интеграл столкновений St состоит из двух слагаемых. В первом из них интегральный оператор действует только на энергетическую переменную ε в функции $\Psi(\varepsilon, \alpha)$, а во втором, намного меньшем первом, оператор действует как на угловую, так и на энергетическую переменную функции $\Psi(\varepsilon, \alpha)$. Такая структура St приводит к тому, что энергетический множитель $F(\varepsilon)$ в $\Psi(\varepsilon, \alpha)$, получаемый из решения уравнения (2.56), оказывается в главном приближении пропорциональным константе:

$$F(\varepsilon) \approx const. \quad (2.59)$$

В трехмерных ферми-жидкости и ферми-газе интеграл столкновений не имеет сингулярностей при углах $\theta \approx \pi$, соответствующих “встречным” столкновениям, поэтому для них соотношение (2.59) не имеет места. Выполнение этого соотношения в двумерном ферми-газе из электронов, взаимодействующих по экранированному закону Кулона, резко упрощает решение задач о вязком транспорте.

Из определения (2.58) и соотношения (2.59) получаем формулу для скорости релаксации:

$$\frac{1}{\tau_{ee,2}} = - \int d\varepsilon_1 St[\cos(2\phi)] \Big|_{\alpha=0}, \quad (2.60)$$

что соответствует применимости приближения времени релаксации для интеграла столкновений в задаче о вязком транспорте. Формула (2.60) вместе с формулами (2.47)-(2.51) приводит к результату (ход расчётов см. в Приложении С):

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee,2}} = \frac{T^2}{\varepsilon_F} r_s^2 \Lambda, \quad \Lambda = \frac{8\pi}{3} \ln \left(\frac{1}{\zeta + r_s} \right). \quad (2.61)$$

Главный вклад в полученную скорость релаксации $1/\tau_{ee,2}$ (2.61) происходит от “встречных” столкновений, для которых $\varphi \approx \pi$. При этом один из углов рассеяния оказывается мал: $\theta \ll 1$ или $\psi \ll 1$. [см. Рис. 2.3(b)]. Такой малоугловой характер электрон-электронных столкновений приводит к появлению в формуле (2.61) кулоновского логарифма $\Lambda \gg 1$.

Для сильно неидеальной двумерной электронной ферми-жидкости с параметром взаимодействия $r_s \sim 1$ в работе [39] было получено:

$$\frac{1}{\tau_{ee,2}} \propto \frac{T^2}{\ln^2(\varepsilon_F/T)}. \quad (2.62)$$

Различие результатов (2.61) и (2.62) для двумерного ферми-газа и для двумерной ферми-жидкости связано с различной угловой зависимостью вероятностей рассеяния для слабо ($r_s \ll 1$) и сильно ($r_s \sim 1$) взаимодействующих электронов (см. Рис. 2.2 и подробности для ферми-жидкости в Приложении С). В Приложении С также показано, что полученный результат (2.61), основанный на применении теории возмущений для межэлектронного взаимодействия, справедлив при условии, что параметр r_s много меньше не только единицы, но и некоторого дополнительного порогового значения, $r_{s0} \ll 1$.

Была также выполнена оценка времён релаксации $\tau_{ee,m}$ функций распределения, пропорциональных высшим гармоникам по углу скорости электронов: $\Psi_m(\varepsilon, \phi) = \cos(m\phi)$, $m \geq 3$. В частности, для скоростей релаксации нечётных гармоник Ψ_m при $\zeta \ll r_s$ и $m \ll 1/r_s$ было получено:

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee,m}} \sim \frac{T^2}{\varepsilon_F} \zeta^2 \ln\left(\frac{r_s}{\zeta}\right) m^2. \quad (2.63)$$

Такие скорости релаксации отличаются от аналогичных величин, полученных в работе [129] для электронного ферми-газа с модельным потенциалом межэлектронного взаимодействия, на логарифмический множитель $\ln(r_s/\zeta)$. По-видимому, эта разница связана с резкой зависимостью экранированного кулоновского потенциала (2.50) от углов рассеяния.

Другой эффект в электронной жидкости, контролируемый рассеянием между частицами, – это теплоперенос. Тепловой поток описывается такими слагаемым в функции распределения:

$$\Psi = \frac{\varepsilon - \mu}{T^2} \delta T + \Psi_h, \quad \Psi_h(\alpha, \varepsilon) = G(\varepsilon) \mathbf{v} \cdot \nabla \delta T, \quad (2.64)$$

где δT – неоднородное в пространстве возмущение температуры T , $G(\varepsilon)$ – некоторая нечётная функция от разности $\varepsilon - \mu$. Такая Ψ_h описывает различие в направлениях средних скоростей “холодных” ($\varepsilon < \mu$) и “горячих” ($\varepsilon > \mu$) электронов. Решение кинетического уравнения для Ψ_h позволяет найти коэффициент теплопроводности κ , который связывает поток тепла и градиент температуры по закону Фурье: $\mathbf{q} = -\kappa \nabla \delta T$. Время релаксации потока тепла $\tau_{ee,h}$ определяется через величину коэффициента теплопроводности по формуле: $\kappa = T n_0 v_F^2 \tau_{ee,h}$.

В работе [A9] выполнена оценка величины κ для обсуждаемой системы слабо взаимодействующих вырожденных электронов. В диссертации не приводятся ход этого расчёта и подробности его результатов в связи с тем, что этот вопрос не имеет непосредственного отношения к чисто гидродинамическому транспорту. Отметим только, что итоговое время релаксации теплового потока $\tau_{ee,h}$ оказывается много короче, чем время релаксации сдвиговых напряжений $\tau_{ee,2}$, так релаксация потока тепла связана с передачей энергии электронов при столкновениях. Из вида оператора столкновений (2.47) следует, что за одно столкновение между электронами, в среднем, передаётся энергия порядка температуры, поэтому время $\tau_{ee,h}$ в типичном для квантовых ям режиме $\zeta \ll r_s$ является близким к уходящему времени $\tau_{ee,q}$ за счёт межчастичных столкновений.

2.3.3 Сопоставление с экспериментами

При реализации гидродинамического режима транспорта в двумерных электронных газе или жидкости, зависимость сопротивления от магнитного поля $\varrho(B)$ возникает за счёт зависимости коэффициента вязкости η_{xx} от магнитного поля (см. Раздел 1.2.2):

$$\varrho(B) - \varrho(\infty) \propto \eta_{xx}(B) = \frac{\eta}{1 + (2\omega_c\tau_2)^2}. \quad (2.65)$$

Ширина этой лоренцевой кривой контролируется временем релаксации сдвиговых напряжений τ_2 .

В работе [25] было показано, что в двумерном ферми-газе в совершенно бездефектном образце времена релаксации нечётных гармоник $\tau_{ee,3}$, $\tau_{ee,5}$, и так далее, очень велики [см. например, формулу (2.63)], что приводит к формированию специфических негидродинамических течений. В Разделе 1.2 и в Приложении А обсуждается роль рассеяния электронов на дефектах в объёме образца в области течения. В частности, даются аргументы в пользу того, что в типичных образцах квантовых ям рассеяние на дефектах, по-видимому, приводит к скоростям релаксации нечётных гармоник, сравнимым со скоростями релаксации чётных гармоник [тем самым, много большим, чем электрон-электронные скорости (2.63)]. В свете результатов работы [25], такой вклад рассеяния на дефектах в величины $1/\tau_{ee,m}$, $m = 3, 5, \dots$ должен играть решающую роль для формирования вязкого течения электронов в реальных образцах.

Сравним результат (2.61) для времени межчастичного рассеяния $\tau_{ee,2}$ с имеющимися экспериментальными данными по магнетотранспорту в высокоподвижных квантовых ямах GaAs (см. Раздел 1.2.3). Как только что говорилось, в реальных образцах скорость релаксации, в

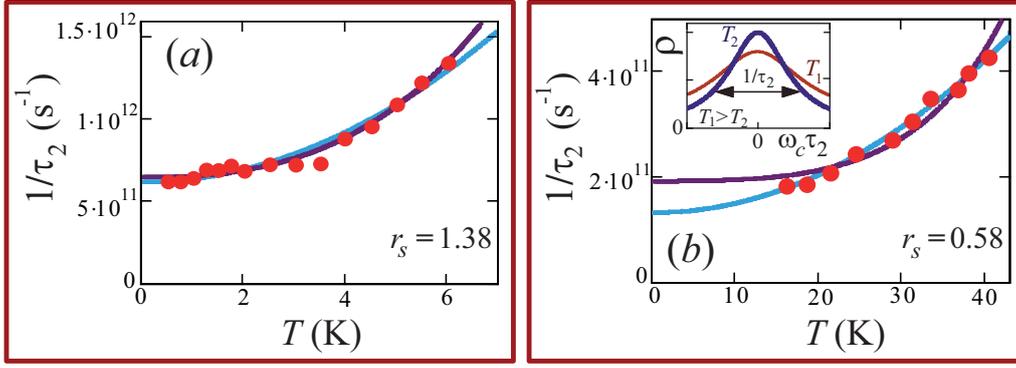


Рис. 2.4: Скорость релаксации сдвиговых напряжений как функция температуры для двух квантовых ям GaAs, исследованных в работах [40] (а) и [48] (b). Красные точки – экспериментальные данные. Кривые построены по формуле (2.66) с функциями $\tau_{ee,2}(T)$, для сильно неидеальной ферми-жидкости [фиолетовые кривые, формула (2.62)] и для почти идеального ферми-газа [голубые кривые, формула (2.61)]. На вставке к панели (b) схематично показаны кривые лоренцевского магнетосопротивления $\varrho(B)$, из которых были извлечены данные по $\tau_2(T)$.

частности, сдвиговых напряжений $1/\tau_2$ содержит два вклада:

$$\frac{1}{\tau_2(T)} = \frac{1}{\tau_{imp,2}} + \frac{1}{\tau_{ee,2}(T)}. \quad (2.66)$$

Первое слагаемое представляет собой “остаточную” скорость релаксации сдвиговых напряжений при $T \rightarrow 0$ за счёт рассеяния электронов на дефектах, а второе слагаемое, являющееся скоростью межэлектронной релаксации, определяет температурная зависимость $1/\tau_2$.

Наблюдавшиеся в работах [40, 44, 48] кривые гигантского отрицательного магнетосопротивления $\varrho(B)$ анализировались путём наложения на них лоренцевских профилей, соответствующих формуле (2.65). Экспериментальные величины $1/\tau_2(T)$ извлекались из ширин кривых магнетосопротивления $\varrho(B)$ при разных температурах T . На Рис. 2.4 приводятся полученные зависимости $1/\tau_2(T)$ для двух электронных систем с максимальной и минимальной плотностями электронов: $n_0 = 1.6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ для одного из образцов, изученных в работе [40] (образец А) и $n_0 = 9.1 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ для одного из образцов, изученных в работе [48] (образец В). Для таких плотностей параметр r_s равен 1.38 и 0.58.

На Рис. 2.4 приводятся экспериментальные данные для образцов А и В вместе с теоретическими кривыми, даваемыми формулой (2.66), в которой

$$\frac{1}{\tau_{ee,2}^{liq}(T)} = A^{liq} \frac{T^2}{\ln(\varepsilon_F/T)^2}, \quad (2.67)$$

для случая сильно-неидеальной ферми-жидкости [уравнение (2.62)], или же

$$\frac{1}{\tau_{ee,2}^{gas}(T)} = A^{gas} T^2, \quad (2.68)$$

для случая почти идеального ферми-газа при низкой температуре $\zeta \ll r_s$ [уравнение (2.61)].

Величины $\tau_{imp,2}$, A^{gas} , A^{liq} считались подгоночными параметрами, выбираемыми для наилучшего согласия экспериментальных данных с теоретическими зависимостями.

Из Рис. 2.4 видно, что зависимость $1/\tau_{ee,2}^{gas}(T)$ лучше описывает экспериментальные данные, чем зависимость $1/\tau_{ee,2}^{liq}(T)$ для образца В с высокой плотностью электронов, для которого параметр взаимодействия r_s относительно мал. Для образца А с низкой плотностью, для которого r_s относительно велик, наоборот, экспериментальные точки лучше соответствуют кривой $1/\tau_{ee,2}^{liq}(T)$, чем кривой $1/\tau_{ee,2}^{gas}(T)$.

Сравниваем амплитуду A^{gas} , извлеченную в описанной процедуре подгонки для образца В, с теоретическим результатом (2.61). Подгонка даёт $C = 4.0$ для числового множителя C , определенного следующим образом [см. уравнение (2.61)]:

$$C = \frac{\hbar \varepsilon_F A^{gas}}{r_s^2 \ln(1/r_s)}. \quad (2.69)$$

Это значение C по порядку величины совпадает с результатом расчёта $C = 8\pi/3 = 8.4$ [последнее значение C отвечает уравнению (2.61)]. Полученное соотношение теоретического и экспериментального C разумно соответствует не очень малой величине r_s для образца В: $r_s = 0.58$.

Заметим, что процедура подгонки магнетосопротивления, описанная в Разделе 1.2.3 при применении её к реальным данным имеет много неоднозначных мест: выбор диапазона магнитных полей, где магнетосопротивление нужно считать гидродинамическим; выбор наилучшей теоретической лоренцевской кривой при заданной экспериментальной. Поэтому приведённые на Рис. 2.4 экспериментальные точки могут содержать систематическую погрешность. Для прояснения этой неопределённости в обработке данных по времени $\tau_2(T)$, получаемых из экспериментальных зависимостей $\rho(\omega_c, T)$ необходимо привести более тщательный анализ наблюдавшихся зависимостей $\rho(\omega_c, T)$ на основе более точного знания структуры образца и более подробной теории, описывающей как гидродинамический, так и омический и баллистический вклады в течение. Анализ такого типа выполнен в Главе 4 для экспериментов на образцах, в которых, по-видимому, нет макроскопических дефектов, на основе построенной в Главе 4 теории магнетосопротивления с учётом баллистического вклада в течение.

Таким образом, в настоящем разделе было рассчитано время релаксации сдвиговых напряжений $\tau_{ee,2}$, которое определяет вязкость двумерного электронного ферми-газа. С помощью анализа экспериментальных данных по гигантскому отрицательному магнетосопротивлению в высокоподвижных квантовых ямах GaAs удалось различить температурные зависимости рассчитанного времени $\tau_{2,ee}$ и аналогичного времени для двумерной электронной ферми-жидкости в образцах с большей и с меньшей плотностью двумерных электронов.

Глава 3

Гидродинамика электрон-дырочных систем

3.1 Обзор литературы

3.1.1 Линейное магнетосопротивление в электрон-дырочных системах

Как хорошо известно, анализ экспериментов по магнетотранспорту в рамках стандартной теории Друде часто позволяет извлечь подвижность и объёмную плотность заряда носителей в изучаемом образце. Однако, эта процедура сильно усложняется или даже становится невозможной в материалах с более чем одним типом носителей заряда, например, в узкозонных полупроводниках и полуметаллах. Отметим, что ещё в 1928 году П. Л. Капицей наблюдалось весьма необычное “недрудевское” линейное магнетосопротивление в полуметаллических плёнках висмута [140]. Для объяснения этого эффекта оказались необходимы идеи, полностью выходящие за рамки подхода Друде.

Открытие графена, топологических изоляторов и вейлевских полуметаллов возродило интерес к явлениям магнетотранспорта в двухкомпонентных электрон-дырочных системах как в двух, так и в трёх измерениях. Эти материалы особенно активно изучаются вблизи так называемой “точки электронейтральности” (или “точки компенсации заряда”) – состояния электрон-дырочной системы, в котором количества электронных и дырочных квазичастиц одинаковы.

Во многих экспериментах по магнетотранспорту в графене и топологических изоляторах наблюдалась линейная зависимость сопротивления от магнитного поля в окрестности точки электронейтральности [141]-[148], похожая на результат работы [140]. За последние несколько лет был экспериментально обнаружен ряд новых полуметаллических соединений с гигантским магнетосопротивлением других типов. К ним относятся WTe [149, 150], NbP [151], LaBi [152, 153], ZrSiS [154, 155], многослойный графен [156]. Возможным следствием наличия нескольких типов носителей заряда может также оказаться отрицательное магнетосопротивление, наблюдаемое, например, в вейлевских полуметаллах и родственных материалах [157]-[164]. По край-

ней мере, в части из этих экспериментов отрицательное магнетосопротивление, по-видимому, объясняется эффектами в кинетике носителей от киральной аномалии, обусловленной сложной зонной структурой этих материалов. Описанные наблюдения линейного и отрицательного магнетосопротивления двухкомпонентных проводящих систем в точке электронейтральности резко расходятся с предсказаниями теории Друде для двухкомпонентных систем [165].

Квантовый механизм линейного магнетосопротивления в проводниках, в том числе в тех, носители в которых имеют дираковский спектр, был предложен А. А. Абрикосовым в работе 1969 года и работах последующих годов [166]-[168]. Этот механизм основан на характере рассеяния на примесях электронов на основном уровне Ландау и применим к трёхмерными системам в сильном магнитном поле $\hbar\omega_c \gg \varepsilon_F, T$. Однако ненасыщающееся линейное магнетосопротивление обычно наблюдается как в двумерных, так и в трёхмерных полуметаллах с различными спектрами вплоть до комнатных температур, начиная с достаточно слабых магнитных полей. Таким образом, квантовый механизм, развитый в статьях [166]-[168], не может объяснить линейное магнетосопротивление в большинстве цитированных экспериментов.

Механизм линейного магнетосопротивления для случая классической динамики носителей заряда был предложен А. М. Дыхне в работе 1971 года [169]. В ней источником эффекта являются возможные в достаточно грязных образцах сильные вариации локальной проводимости. Близкая модель случайных резисторов была предложена в работе [170] для объяснения линейного ненасыщающегося магнетосопротивления в сильно неоднородных или гранулированных материалах, таких как AgSe. Обе модели не различают одно-, двух- или многокомпонентные системы, в то время как линейное магнетосопротивление, наблюдаемое в упомянутых выше экспериментах, по-видимому, связано с зарядовой нейтральностью (в частности, появляется именно в точке электронейтральности). Кроме того, линейное поведение наблюдается в электрон-дырочных системах и в очень чистых однородных образцах, которые, вероятно, не отвечают условиям применимости моделей [169, 170].

Простой качественный анализ показывает (см. ниже), что при протекании тока в электрон-дырочной системе в магнитном поле в достаточно широком и длинном образце неизбежно возникают потоки суммарной плотности электронов и дырок в направлении от одного края образца к другому краю, перпендикулярно электрическому току. Около краёв такие потоки приводят к накоплению носителей и к их недостатку, что может сильно влиять на токи в прикраевых областях. В этой связи, разумно ожидать, что линейное магнетосопротивление в электрон-дырочных системах вблизи точки электронейтральности может быть обусловлено классическими гидродинамическими эффектами, учитывающими противоположные заряды

электронов и дырок, их взаимодействие между собой и формирование неоднородных течений.

3.1.2 Гидродинамическое линейное магнетосопротивление в электрон-дырочных системах

В настоящей главе развивается гидродинамическая теория линейного магнетосопротивления для электрон-дырочных систем в неупорядоченных образцах за счёт формирования неоднородного профиля течения [A10,A11]. Обнаружен и подробно изучен следующий механизм магнетотранспорта: в магнитном поле, перпендикулярном слою двумерных электронов, рекомбинация и диффузия приводят к формированию неоднородного течения следующего типа. У продольных краёв длинного образца возникают слои с возмущёнными плотностями носителей и с плотностью электрического тока, значительно большей, чем в объёме образца. Эти слои для образцов промежуточных ширин дают главный вклад в полный ток. Расчёты основаны на балансовых уравнениях гидродинамического типа для потоков и плотности частиц.

Этот эффект по своей физической природе похож на магнетосопротивление за счёт формирования неоднородной поправки к плотности тока, обусловленной спиновым эффектом Холла (Раздел 1.5). Роль дополнительной характеристики частиц, которая влияет на плотность тока, в изучаемой здесь системе играет суммарная концентрация электронов и дырок.

Отметим, что важность рекомбинации для магнетотранспорта в электрон-дырочных системах в узкозонных полупроводниках и полуметаллах была отмечена также в работе [171]. Отметим также, что аналогичные идеи о гидродинамическом транспорте в электрон-дырочной системе за счёт диффузии и рекомбинации использовались недавно для объяснения гигантского эффекта увлечения в магнитном поле в графене в работе [172].

Для обоснования использованных феноменологических балансовых уравнений для потоков частиц в двухкомпонентной системе развита микроскопическая теория [A11]. Исходя из уравнения Больцмана и уравнений электростатики (для случая образца с металлическим затвором) в настоящей главе выполнен вывод балансовых уравнений для простейшего случая симметричной электрон-дырочной системы в точке электронейтральности с квадратичными энергетическими спектрами носителей. В Приложении D аналогичный микроскопический вывод балансовых уравнений проделан для более сложных случаев: двухкомпонентных симметричных систем с неквадратичным энергетическим спектром носителей в точке электронейтральности, а также для несимметричных электрон-дырочных систем с квадратичными спектрами носителей вне точки электронейтральности.

На основе полученных теоретических результатов выполнен анализ экспериментальных

данных работы [A12] по наблюдению большого линейного магнетосопротивления в двухслойном графене. Анализ был выполнен в рамках простейшей модели двухкомпонентной системы с симметричными параболическими спектрами электронов и дырок в точке электронейтральности и вне её. Показано, что предложенный механизм может объяснять линейное магнетосопротивление, наблюдавшемуся в эксперименте [A12] (а также, возможно, в других экспериментах [141]-[148]). Обсуждается, какую роль может играть несимметричность свойств электронов и дырок в образцах, изученных в [A12], а также другие эффекты, влияющие на потоки носителей, в частности, теплоперенос и термоэлектрический эффект.

3.1.3 Магнетосопротивление в электрон-дырочных системах при наличии тепловых потоков

В связи с последним вопросом, в настоящей главе развита теория магнетотранспорта в двухкомпонентной системе в омическом образце с учётом термоэлектрических эффектов и теплопроводности [A13].

Эффекты такого типа достаточно активно изучались в недавние годы. В работе [175] было показано, что при протекании постоянного тока через образец с металлическими контактами термоэлектрический эффект приводит к возникновению возмущения температуры носителей, которое оказывается неоднородным по образцу и может давать существенный “неомический” вклад к наблюдаемой величине сопротивления. В работах [176]-[178] изучался электрический и тепловой транспорт в однослойном графене в рамках двухкомпонентной гидродинамической модели в условиях, когда доминируют процессы межчастичных столкновений. Были выведены балансовые уравнения для потоков частиц и тепла и с их помощью изучены различные термоэлектрические явления [176, 177] и волны зарядовой плотности [178].

В настоящей главе выполнено обобщение теории [A10,A11] магнетотранспорта в двухкомпонентной системе на случай, когда процессы теплообмена имеют конечную скорость и возмущения температуры могут сильно влиять на потоки частиц. Рассмотрена симметричная двухкомпонентная система с одинаковыми свойствами электронов и дырок в режиме электронейтральности. Как и в работах [A10,A11], считается, что наиболее интенсивным является рассеяние носителей на беспорядке. Для образца в форме длинной полосы в режиме, когда скорость рекомбинации много меньше скорости теплообмена, составлены и решены балансовые уравнения для потоков и возмущений плотности и температуры частиц [A13]. Рассчитаны распределения концентраций, температур и потоков носителей по ширине образца, а также результирующее магнетосопротивление. В достаточно широких образцах возмущение темпе-

ратуры почти не влияет на распределения потоков и концентраций частиц почти всюду в образце, поэтому возникает изученное в работах [A10,A11] линейное магнетосопротивление за счёт рекомбинации и диффузии в прикраевых сильно проводящих слоях. В достаточно узких образцах возникает магнетосопротивлению нового типа, связанное с формированием неоднородного распределения температуры носителей в прикраевых слоях, ширина которых определяются балансом между термоэлектрическим эффектом, теплопроводностью и диффузией. Градиент температуры вызывает дополнительные потоки частиц за счет термоэлектрического эффекта, что приводит к нетривиальному положительному магнетосопротивлению.

Микроскопический вывод уравнений баланса, описывающих перенос частиц и тепловой энергии, выполнен в Приложении Е в рамках модели, основанной на классическом кинетическом уравнении для электронов и дырок, взаимодействующих с акустическими фононами.

3.1.4 Магнетосопротивление в электрон-дырочных системах при наличии сдвиговой вязкости

В настоящей главе изучен магнетотранспорт в двухкомпонентной электрон-дырочной системе с частыми столкновениями между носителями одного и того же типа, но с относительно редкими столкновениями электронов с дырками и с дефектам [A14,A15]. В таких системах формируются относительно независимые электронные и дырочные компоненты вязкой жидкости. Хотя к настоящему моменту материалы с такими электрон-дырочными системами, в которых оказывается возможным одновременное проявления сдвиговой вязкости и рекомбинации, экспериментально не изучались, рассмотренная задача, по-видимому, представляет общий научный интерес и может привести к поиску и исследованию таких материалов.

В главе показано, что в системе электронов и дырок с быстрыми электрон-электронными и дырочно-дырочными столкновениями в перпендикулярном магнитном поле, во-первых, могут быть реализованы режимы, характерные для двухкомпонентной системы в неупорядоченных образцах: за счёт рекомбинации и диффузии в достаточно большом магнитном поле возникают прикраевые высокопроводящие каналы, обусловленные электрон-дырочными столкновениями, рекомбинацией и диффузией и приводящие к линейному положительному магнетосопротивлению. В достаточно узких образцах, напротив, могут формироваться независимые вязкие течения Пуазейля в электронной и в дырочной компонентах, приводящие к сильному отрицательному магнетосопротивлению. В настоящей главе также показано, что в достаточно чистых электрон-дырочных системах в образцах промежуточных ширин могут также формироваться нетривиальные режимы, связанные с установлением баланса между сдвиговой вязкостью,

рекомбинацией и диффузией.

Рассмотрение выполнено для случая электрон-дырочной системы в точке электронейтральности на основе балансовых уравнений гидродинамики, описывающих столкновения между частицами, их слабое рассеяние на беспорядке, а также эффекты рекомбинации и сдвиговой вязкости. Наряду с расчётом магнетосопротивления, уравнения приводят к следующему результату. При достаточно быстрой рекомбинации в образцах промежуточной ширины может формироваться своеобразный режим течения, в котором плотность тока осциллирует около края и в некоторых областях направлена против электрического поля.

Физическая природа этого явления такова. Если рассеянием на беспорядке можно пренебречь, то в центральной части образца движение электронов и дырок определяется бездиссипативным ЕН-дрейфом: их потоки приблизительно одинаковы, $\mathbf{j}_e \approx \mathbf{j}_h$, и равны стандартной величине $n_0 c (E_0/B) \mathbf{e}_y$ [внешнее электрическое поле $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_x$ направлено вдоль образца]. Соответственно, плотность электрического тока $\mathbf{J}(y) = -e(\mathbf{j}_e - \mathbf{j}_h)$ в этой области близка к нулю. Потоки электронов и дырок не могут выходить за края образца, $y = \pm W/2$, поэтому у краёв они “мнутся”: их направления начинают не совпадать и колебаться как функция расстояния до края $W/2 - |y|$. В связи с этим вблизи краёв возникает ненулевая плотность электрического тока $\mathbf{J}(y)$. Прикраевая область “смятого течения” разделяется на несколько полос, в половине из которых $\mathbf{J}(y)$ направлена противоположно полю \mathbf{E}_0 . Полный ток при этом, разумеется, направлен вдоль \mathbf{E}_0 . Макроскопическим проявлением такого течения является нетривиальное немонотонное магнетосопротивление. Для достаточно узких образцов ход магнетосопротивления следующий: линейное магнетосопротивление в области больших магнитных полей (область, когда доминирует вклад прикраевых слоев, сформированных диффузией и рекомбинацией), сильное отрицательное магнетосопротивление в области достаточно малых магнитных полей (когда возникают независимые течения Пуазейля электронов и дырок) и магнетосопротивление, пропорциональное магнитному полю в степени три вторых, в области промежуточных полей, отвечающих формированию “смятого” течения с “противотоками” [$\mathbf{J}(y)\mathbf{E}_0 < 0$ при некоторых y].

3.2 Линейное магнетосопротивление за счёт рекомбинации

3.2.1 Качественное описание эффекта

Рассмотрим качественную картину переноса заряда в электрон-дырочной системе конечных размеров в магнитном поле.

Если образец достаточно большой, электрическое поле \mathbf{E} и потоки электронов и дырок \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_h в его центральной объёмной части области однородны. Классическая теория Друде для однородной двухкомпонентной системы предсказывает соотношение $J_i = \sigma_{ik} E_k$ между электрическим полем \mathbf{E} и объёмной плотностью тока \mathbf{J} (σ_{ik} – тензор проводимости). Введём величину разности потоков электронов и дырок \mathbf{j} : $\mathbf{j} = \mathbf{j}_e - \mathbf{j}_h$. Тогда плотность тока заряда приобретает вид $\mathbf{J} = -e\mathbf{j}$ (в настоящей главе e обозначает абсолютную величину заряда электрона).

Друдевская проводимость двухкомпонентной системы σ_{ik} даётся суммой вкладов электронов и дырок: $\sigma_{ik} = \sigma_{e,ik} + \sigma_{h,ik}$. Соотношение $j_y = 0$, справедливое для длинного холловского образца, приводит к зависящему от магнитного поля удельному сопротивлению $\rho_{xx} = E_x/J_x$ [165]:

$$\rho_{xx} = \frac{1}{e\sigma_0} \frac{\sigma_0^2 + (\sigma'_0)^2 \mu_e \mu_h (B/c)^2}{\sigma_0^2 + (n_{0,e} - n_{0,h})^2 \mu_e^2 \mu_h^2 (B/c)^2}, \quad (3.1)$$

где $n_{0,\alpha}$ – равновесные плотности электронов и дырок, $\mu_\alpha = e\tau_\alpha/m_\alpha$ – подвижности электронов и дырок, τ_α и m_α – времена релаксации импульса и массы носителей, $\alpha = e, h$ – индекс типа частицы. В формуле (3.1) введены также следующие величины: $\sigma_0 = n_{0,e}\mu_e + n_{0,h}\mu_h$ и $\sigma'_0 = \sqrt{\mu_e \mu_h (n_{0,e}^2 + n_{0,h}^2) + n_{0,e} n_{0,h} (\mu_e^2 + \mu_h^2)}$. Для одинаковых подвижностей электронов и дырок, $\mu_e = \mu_h = \mu$, (“симметричная система”) уравнение (3.1) приобретает вид:

$$\rho_{xx} = \frac{\rho_0}{e\mu} \frac{1 + (\mu B/c)^2}{\rho_0^2 + n_0^2 (\mu B/c)^2}, \quad (3.2)$$

где $\rho_0 = n_{0,e} + n_{0,h}$ – полная плотность квазичастиц, $n_0 = n_{e,0} - n_{h,0}$ – величина, пропорциональная плотности заряда, $-en_0$. Уравнения (3.1) и (3.2) приводят к нулевому магнетосопротивлению вдали от точки электронейтральности, когда $n_0 = \rho_0 = n_{0,e}$, $n_{0,h} = 0$ (или $n_0 = \rho_0 = n_{0,h}$, $n_{0,e} = 0$), к квадратичному ненасыщающемуся магнетосопротивлению в точке электронейтральности, $n_0 = 0$, $n_{0,e} = n_{0,h}$, и к положительному насыщающемуся магнетосопротивлению для различных ненулевых плотностей электронов и дырок, $n_{0,e} \neq n_{0,h}$, $n_{0,e,h} \neq 0$.

Холловское сопротивление $\rho_{xy} = E_y/J_x$ длинного образца: в пределе малых магнитных полей, $\mu_\alpha B/c \ll 1$, описывается формулой [165]:

$$\rho_{xy} = \frac{B}{ec} \frac{n_{0,e}\mu_e^2 - n_{0,h}\mu_h^2}{(n_{0,e}\mu_e^2 + n_{0,h}\mu_h^2)} \quad (3.3)$$

Видно, что такое холловское сопротивление обращается в нуль при $n_{0,e} = n_{0,h}$ и $\mu_e = \mu_h$. Для симметричных параметров электронов и дырок, когда $\mu_e = \mu_h$ формула (3.3) принимает вид:

$$\rho_{xy} = \frac{B}{ec} \frac{n_0}{\rho_0^2}. \quad (3.4)$$

Примечательно, что в этом случае холловское сопротивление не зависит от релаксационных

характеристик, как и для однокомпонентной системы в омическом и гидродинамическом режимах, где холловское сопротивление равно: $\rho_{xy}^{(0)} = B/(\rho_0 ec)$ (см. Раздел 1.2.2)

Учтём влияние на потоки границ образца. Рассмотрим, как и в предыдущих Главах, длинный прямоугольный образец длиной L и шириной $W \ll L$. Покажем, что влияние границ может существенно изменить результаты для объёмного транспорта [уравнения (3.2) и (3.4)]. В этом разделе ограничимся рассмотрением электрон-дырочной системы, близкой к симметричной (с энергетическими спектрами электронов и дырок, подвижностями и другими параметрами одних порядков величин для электронов и дырок) в точке электронейтральности и вне её: при $n_{0,e} = n_{0,h}$ и при $n_{0,e} \neq n_{0,h}$.

Линии тока для симметричной и асимметричной систем в точке электронейтральности показаны на Рис. 3.1(a,b). Из рисунка видно, что в центральной области образца течёт однородный поток квазичастиц $\mathbf{P} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_h$. В силу непрозрачности краёв образца, y -компоненты потоков электронов и дырок \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_h (и, следовательно, и \mathbf{P}) исчезают на краях образца:

$$j_{\alpha,y}|_{y=\pm W/2} = 0, \quad \alpha = e, h. \quad (3.5)$$

Поэтому около одного из краёв электроны и дырки накапливаются и происходит их рекомбинация. Около противоположного края, наоборот, происходит рождение электрон-дырочных пар [см. Рис. 3.1(a,b)]. Таким образом, в окрестностях продольных границ образца появляются избыточные и недостаточные неравновесные плотности частиц δn_α , приводящие к пространственной неоднородности потоков $\mathbf{j}_\alpha(y)$, $\mathbf{P}(y)$, $\mathbf{j}(y)$. При условии, что подвижности и концентрации электронов и дырок – это величины одного порядка величины, ширина прикраевой области ℓ_R оценивается из условия баланса диффузионного притока частиц в приграничный слой толщиной ℓ_R в магнитном поле, $j_{\alpha,y} \sim D_{xx} \delta n_\alpha / \ell_R$, и скорости изменения их плотностей в этом слое за счёт рекомбинации, $\dot{N}_\alpha \sim \ell_R \delta n_\alpha / \tau_R$ (коэффициент диффузии в магнитном поле равен $D_{xx} = D/[1 + (\mu B/c)^2]$). В результате получается:

$$\ell_R = \frac{\ell_0}{\sqrt{1 + (\mu B/c)^2}}, \quad (3.6)$$

где μ - характерная величина подвижностей μ_α , длина рекомбинации в нулевом магнитном поле $\ell_0 = 2\sqrt{D\tau_R}$ определяется коэффициентом диффузии D при $B = 0$ и временем рекомбинации τ_R . Как и для подвижностей, считается, что последние два параметра оцениваются величинами D и τ_R как для электронов, так и для дырок.

Рассмотрим сначала случай достаточно широкого образца:

$$W \gg \ell_R, \quad (3.7)$$

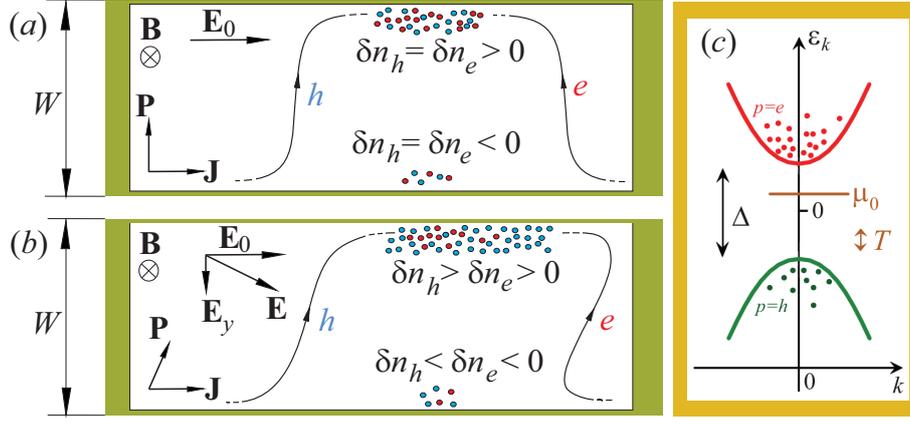


Рис. 3.1: (a,b): Линии тока электронов и дырок в электрон-дырочной симметричной (a) и асимметричной (b) системах в точке электронейтральности. В объёме образца в классически большом магнитном поле, $\mu B/c \gg 1$, потоки электронов и дырок $\mathbf{j}_{e,h}$ практически однородны и в первом приближении по параметру $\mu B/c \gg 1$ компенсируют друг друга. В приграничных слоях шириной порядка длины рекомбинации ℓ_R концентрации электронов и дырок возмущены, $n_\alpha = n_{0,\alpha} + \delta n_\alpha$, и потоки $\mathbf{j}_{e,h}$ много больших их величины в центральной области. (a): В симметричной системе концентрации неравновесных электронов и дырок $\delta n_{e,h}$ одинаковы на противоположных краях образца, холловское поле E_y отсутствует, а поток квазичастиц \mathbf{P} имеет только y -компоненту. (b): В асимметричной системе неравновесные концентрации $\delta n_{e,h}$ различны на верхнем и нижнем краях образца, холловское поле E_y отлично от нуля, а поток квазичастиц \mathbf{P} имеют ненулевые компоненты x и y . (c): Зонная диаграмма двухкомпонентной электрон-дырочной системы с квадратичными энергетическими спектрами, $\varepsilon_k^{e,h} = \pm[\Delta/2 + \hbar^2 k^2/(2m)]$ и невырожденными распределениями, отвечающими неравенству $\Delta \gg |\mu_0|, T$.

в котором приграничные рекомбинационные слои хорошо сформированы. Если магнитное поле велико, $\mu B/c \gg 1$, движение носителей в центральной области образца, $W/2 - |y| \gg \ell_R$, определяется преимущественно $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ -дрейфом. Это приводит к следующим величинам потоков электронов и дырок:

$$\mathbf{j}_\alpha \approx n_{0,\alpha} \mathbf{v}_{dr}, \quad \mathbf{v}_{dr} = c \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{B^2}. \quad (3.8)$$

Рассеяние на беспорядке даёт малые поправки к этим величинам, пропорциональные $1/(\mu B/c)$. В формулах (3.8) \mathbf{E} – это полное электрическое поле, состоявшее из внешнего поля $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_x$ и холловского поля $\mathbf{E}_H = E_y \mathbf{e}_y$ [см. Рис. 3.1(a,b)]. Из формулы (3.8) получаем, что в объёмной области текут однородные потоки заряда и квазичастиц:

$$\mathbf{J} \approx -e(n_{0,e} - n_{0,h}) \mathbf{v}_{dr}, \quad \mathbf{P} \approx (n_{0,e} + n_{0,h}) \mathbf{v}_{dr}. \quad (3.9)$$

В окрестностях краёв образца размером порядка ℓ_R потоки электронов и дырок \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_h становятся преимущественно направленными параллельно или антипараллельно потоку оси x из-за обращения в нуль их y -компоненты при $y = \pm W/2$ [см. уравнение (3.5) и Рис. 3.1(a,b)]. Считаем, что рекомбинация происходит много медленнее релаксации импульса: $\tau \ll \tau_R$. По этим двум причинам, в прикраевых слоях вклады в плотность тока $\mathbf{J} \approx J e_x$ от электронов и дырок оцениваются через значения потоков в отсутствии магнитного поля:

$$j_{\alpha,x} \sim \pm n_{0,\alpha} \mu_\alpha E_0. \quad (3.10)$$

Такая оценка основана на рассмотрении баланса сил, электрической силы $e_\alpha E_0$ и силы трения $-m_\alpha V_{\alpha,x}/\tau$, действующих в направлении x на частицы в элементе объёма жидкости в приграничном слое, движущемся со скоростями $\mathbf{V}_\alpha \sim \pm |V_{\alpha,x}| \mathbf{e}_x$.

Если равновесные концентрации электронов и дырок не близки друг к другу, $|n_{0,e} - n_{0,h}| \sim n_{0,e}$, то реализуется омический режим транспорта, на интегральные характеристики которого описанные выше неоднородности течения влияют слабо. Действительно, при $\mu_\alpha B/c \gg 1$ холловское поле в объёмной области велико по сравнению с продольным, $E_y \sim (\mu B/c) E_0$, поэтому потоки \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_h в объёме почти параллельны направлению образца. При этом оценка (3.8) для потоков в объёме и оценка (3.10) для потоков в приграничных областях совпадают (при $\mu_e \sim \mu_h$ плотности потоков в этих двух областях отличаются на числовой множитель). Поэтому доминирует объёмный вклад в полный ток, $I = \int_{-W/2}^{W/2} dy J(y)$, и наблюдается объёмное друдевское магнетосопротивление и эффект Холла [формулы (3.1)-(3.4)].

Если же условие электронейтральности выполнено, $n_{0,e} = n_{0,h}$, или почти выполнено, $|n_{0,e} - n_{0,h}| \ll n_{0,h}$, и параметры электронов и дырок симметричны, то $\mathbf{j}_e \approx \mathbf{j}_h$ в центральной части образца. При этом потоки \mathbf{j}_α направлены почти перпендикулярно краям образца, и поэтому вклад в полный ток I от центральной области, пропорциональный J_x из уравнений (3.9), является малым по сравнению со случаем $n_{0,e} \neq n_{0,h}$ [см. Рис. 3.1(a,b)]. Области около краёв образца, где плотность электрического тока \mathbf{J} направлена преимущественно вдоль оси x и даётся оценкой (3.10), могут давать главный вклад в полный ток I . Эти вклады пропорциональны ширине прикраевых областей (3.6): $I_{\text{edge}} \sim e \rho_0 \mu E_0 \ell_R$. При $\omega_c \tau \gg 1$, соответствующее сопротивление прикраевых слоёв $R_{\text{edge}} = E_0 L / I_{\text{edge}}$ даётся оценкой:

$$R_{\text{edge}} \sim \frac{L B}{e \rho_0 c \ell_0}. \quad (3.11)$$

Сопротивление центральной части образца даётся оценкой $R_{\text{bulk}} \approx (L/W) \rho_{xx}$, где удельное сопротивление ρ_{xx} описывается формулой (3.2), в которой $n_0 \ll \rho_0$. Усреднённое сопротивление образца $R_\square = E_0 / (I/W)$ можно оценить, рассматривая краевые слои и центральную часть образца как два параллельных резистора:

$$R_\square = \frac{W}{L} \frac{1}{R_{\text{bulk}}^{-1} + R_{\text{edge}}^{-1}}. \quad (3.12)$$

Из формул (3.11) и (3.12) видно, что, при достаточно больших магнитных полях доминирует R_{edge}^{-1} и реализуется линейное магнетосопротивление:

$$R_\square = \frac{1}{e \rho_0 c} \frac{W}{\ell_0} B, \quad \frac{\ell_0}{\mu B/c} \ll W \ll \ell_0 (\mu B/c). \quad (3.13)$$

Когда выполнено неравенство $W \gg \ell_0(\mu B/c)$, объёмный вклад в полный ток доминирует. При этом формула (3.12) переходит в друдевское квадратичное магнетосопротивление (3.2), отвечающее $n_{0,e} = n_{0,h}$.

Заметим, что при изучении двухкомпонентных систем умеренной ширины, $W \ll \ell_0\mu B$, вне точки электронейтральности, особенно, при слабом отклонении от неё, важную роль будут играть конкретные соотношения электростатики, связывающие возмущения плотности заряда $-e\delta n(y)$ и холловское поле $E_y(y)$. Однако, в настоящем вводном разделе обсуждаются только те свойства течений и результаты, для которых конкретный вид соотношений электростатики несущественен.

Из Рис. 3.1(a) также видно, что для симметричной системы в точке электронейтральности, $n_{0,e} = n_{0,h}$, сила Лоренца, действующая на электроны в объёмной части образца, направлена противоположно силе Лоренца, действующей на дырки. Поэтому для элемента объёма электрон-дырочной жидкости реализуется баланс сил в направлении y без появления холловского поля, $E_y = 0$. В связи с этим также не происходит возмущения плотности заряда: $\delta n = 0$.

Для асимметричной системы с несовпадающими параметрами электронов и дырок (в частности, при $\mu_e \neq \mu_h$), за счёт асимметрии плотностей токов электронов и дырок и отсутствия компенсации сил Лоренца (действующих на элемент электрон-дырочной жидкости) появляются неравновесные возмущения плотностей квазичастиц $\delta n_{e,h}(y)$. При этом их потоки $\mathbf{j}_{e,h}(y)$ имеют x и y компоненты в объёмной области даже при равных невозмущённых концентрациях электронов и дырок $n_{0,e} = n_{0,h}$ [см. Рис. 3.1(b)]. Соответственно, появляется ненулевая плотность заряда $-e\delta n(y) = -e[\delta n_e(y) - \delta n_h(y)]$ и холловское электрическое поле $\mathbf{E}_H(y) = E_y(y)\mathbf{e}_y$, связанное с δn . При этом, однако, форма течения является похожей [высокие плотности тока (3.10) в приграничных областях шириной $\sim \ell_0$ и относительно низкие в объёмной области], поэтому оценки (3.11) и (3.12) остаются справедливыми, и при достаточно больших B реализуется линейное магнетосопротивление (3.13) за счёт прикраевых областей.

На Рис. 3.2 и 3.3 представлены распределения характеристик течения для симметричной и асимметричной двухкомпонентных систем в точке электронейтральности. Для построения этих кривых были использованы точные формулы, полученные в следующем разделе и Приложение D, однако данное выше качественное описание объясняет общий ход кривых.

Кривые на Рис. 3.2 для симметричной двухкомпонентной системы в точке электронейтральности построены для нескольких значений магнитных полей: от случая образца средней ширины $\ell_R = \ell_0 = W$ при $B = 0$ происходит переход к случаю широкого образца $W \gg \ell_R$ при $\mu B/c \gg 1$. Видно, что плотность квазичастиц $\delta \rho(y)$ и плотность тока $J(y)$ с ростом B стано-

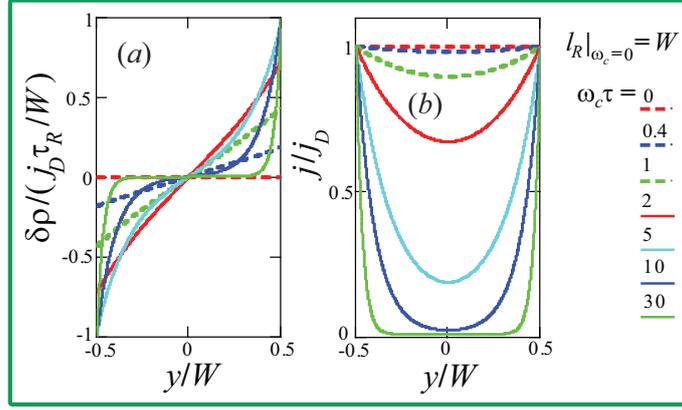


Рис. 3.2: Распределение полной плотности частиц $\delta\rho(y)$ и профиля электрического тока $j(y)$ для симметричной электрон-дырочной системы в точке электронейтральности, $n_0 = 0$. Спектр частиц считался квадратичным, а подвижность и время рекомбинации τ_R – не зависящими от энергии. Плотность тока построена в единицах друдевской плотности тока в нулевом магнитном поле $j_D = e\rho_0\mu E_0$. Плотность тока, описываемая зелёной кривой, в объёмной части образца очень мала, а именно: $\sigma_{xx,\alpha}E_0 \sim j_D/(\omega_c\tau)^2$.

вятся локализованы около краёв образца (см. Рис. 3.2). В объёмной части образца величина $J(y)$ определяется выражением $\sigma_{xx}E_0$ и поэтому является малой. Полный поток квазичастиц \mathbf{P} направлен вдоль оси y . Распределение $P_y(y)$ аналогично распределению этой величины в асимметричной системе, которое приведено на Рис. 3.3(d): функция $P_y(y)$ однородна в объёмной области и уменьшается до нуля в приграничных областях.

На Рис. 3.3 представлены распределения полной плотности квазичастиц $\delta\rho(y)$ (a), плотности заряда $\sim \delta n(y)$ (b), компонент потоков квазичастиц $P_{x,y}(y)$ (c,d), и плотности электрического тока $J_x(y)$ (c) для асимметричной системы в точке электронейтральности. Возмущение полной плотности частиц $\delta\rho(y)$, как и для симметричной системы, экспоненциально мало в объёме и возрастает по абсолютной величине вблизи краев образца. Наличие ненулевого холловского электрического поля $E_y(y)$ отвечает ненулевой плотности заряда $-e\delta n(y)$. Заметим, что амплитуда $\delta n(y)$ много меньше амплитуды полного возмущения плотности $\delta\rho(y)$. Ненулевой становится компонента $P_x(y)$ потока частиц. Плотность электрического поля \mathbf{J} направлена вдоль оси x , его профиль совпадает с $P_x(y)$, в частности они оба малы, но конечны в центральной области образца.

Из уравнений (3.2) и (3.12) для усреднённого сопротивления симметричной системы вне точки электронейтральности в достаточно широком образце, $W \gg \ell_R$ (3.7), получаем:

$$R_{\square} = \frac{1}{e\rho_0\mu} \frac{1}{\frac{n_0^2}{\rho_0^2} + \frac{1}{(\mu B/c)^2} + \frac{\ell_0}{W\mu B/c}}, \quad (3.14)$$

где магнитное поле считается классически большим $\mu B/c \gg 1$. Видно, что линейное магнетосопротивление (3.13) исчезает при нарушении зарядовой нейтральности при значениях

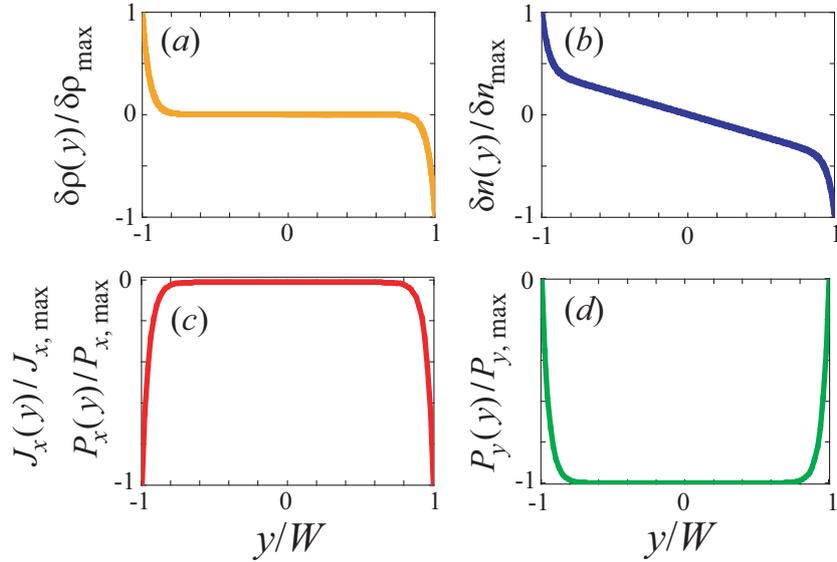


Рис. 3.3: Плотность квазичастиц $\delta\rho(y)$, плотность заряда $\delta n(y)$, а также компоненты потока квазичастиц $P_{x,y}(y)$ и плотность электрического тока $J_x(y)$, рассчитанные для двумерной асимметричной электрон-дырочной системы в длинном образце в точке электронейтральности, $n_0 = 0$. Параметры носителей и образца соответствуют типичным пленкам топологического изолятора на основе квантовых ям HgTe, изученных в работе [146]: подвижности электронов и дырок $\mu_e = 20\mu_h$, $\mu_h = 1 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$; зонные скорости $v_e = 10^6 \text{ м/с}$, $v_h = 0.5v_e$; Диэлектрическая проницаемость подложки $\epsilon = 5$, расстояние до затвора $d = 0.5 \mu \text{ мкм}$, ширина образца $W = 10 \mu \text{ мкм}$. Для расчёта концентраций электронов и дырок используется типичная двухзонная модель с запрещенной зоной $E_g = 4 \text{ мэВ}$ при комнатной температуре $T = 300 \text{ К}$ [см. Рис. 3.1(c)]. Длина рекомбинации в отсутствие магнитного поля выбрана равной $l_0 = 0.46 \mu \text{ мкм}$; магнитное поле равно 2 Т на всех панелях. Все распределения нормированы на максимумы их абсолютных значений, явные выражения для которых не приводятся из-за их громоздкости. Заметим только, что при $n_0 = 0$ амплитуда возмущений плотности заряда δn_{max} оказывается много меньше амплитуды возмущения полной плотности $\delta\rho_{max}$: $\delta n_{max} \ll \delta\rho_{max}$.

отношения n_0/ρ_0 порядка и больше величины $\sqrt{l_0/[W(\mu B/c)]}$.

В симметричной системе вне точки электронейтральности при не слишком малой разнице равновесных концентраций $n_0 = n_{0,e} - n_{0,h}$ усреднённое холловское поле $\bar{E}_y = \int_{-W/2}^{W/2} dy E_y(y)$, в широком образце может быть обусловлено преимущественно объёмной областью образца $W/2 - |y| \gg \ell_R$. Действительно, в этой области плотность частиц $\delta\rho$ почти однородна, поэтому диффузия почти отсутствует и силы Лоренца, действующие на электроны и дырки с неравными плотностями, может скомпенсировать только холловское поле E_y (в прикраевых слоях силу Лоренца дополнительно компенсирует градиент давления, пропорциональный величине $-\delta\rho'$). При этом основной вклад в ток I может быть связан с краевыми областями. В таком режиме в объёмной области основной вклад в плотность тока \mathbf{J} возникает за счет различия числа электронов и дырок, движение которых близко к ЕН-дрейфу (3.8). Для оценки $E_y(y)$ соответствующий ток \mathbf{J} (3.9) необходимо записать в явном виде через время релаксации и продольное электрическое поле E_0 . Для этого применим оценку типа (3.10) для баланса суммарных сил, действующих в направлении x на все частицы в малом элементе объёма жидкости.

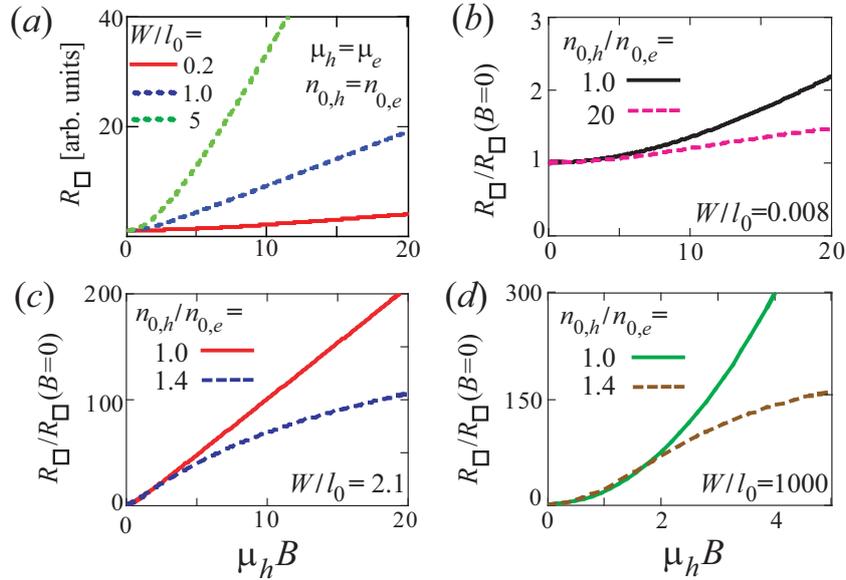


Рис. 3.4: Усреднённое сопротивление образца $R_{\square}(B)$ двумерных симметричной системы в точке электронейтральности (а), а также асимметричной системы в точке электронейтральности и вне её (b-d) для различных значений отношения W/l_0 . Значения параметров для панелей (b-d) отвечают топологическому изолятору на основе квантовых ям HgTe и такие же как в подписи Рис. 3.3, за исключением длины рекомбинации ℓ_0 , которая для настоящего рисунка считается равной 4.8 мкм.

Для плотности тока $\mathbf{J} \approx -e(j_{e,x} - j_{h,x})\mathbf{e}_x$ получим:

$$j \approx n_0 \mu E_0, \quad J = -e j. \quad (3.15)$$

Из условия баланса силы Лоренца JB/c , действующей на все частицы в элементе объема, и холловской электрической силы $eE_y \varrho_0$ получается выражение для холловского поля: $E_y \approx (n_0/\varrho_0)\mu B E_0$ и усреднённого холловского сопротивления образца $R_H = E_y/(I/W)$:

$$R_H \approx \frac{\mu B}{c} \frac{n_0}{\varrho_0} R_{\square}. \quad (3.16)$$

Как отмечалось выше, в настоящем разделе не используются конкретные уравнения электростатики, связывающие E_y с неравновесной плотностью заряда $-e \delta n$, поэтому конкретный критерий на допустимые значения параметров n_0 и $\mu B/c$, соответствующих применимости выполненного рассмотрения, пока не может быть установлен.

Для узких образцов:

$$W \lesssim \ell_R, \quad (3.17)$$

транспортный режим как для симметричных, так и для несимметричных двухкомпонентных систем в точке электронейтральности и вне её резко отличается от транспортных режимов в широких образцах. При выполнении (3.17) рекомбинация почти отсутствует, поэтому электроны и дырки формируют почти независимые подсистемы. Оба потока \mathbf{j}_{α} однородны по координате y и, из-за условия (3.5), направлены вдоль направления образца x . Магнитное поле не

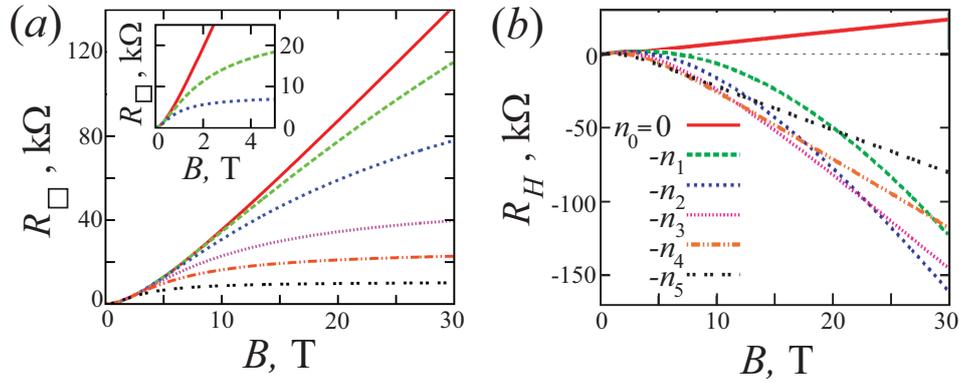


Рис. 3.5: Зависимость продольного (а) и холловского (б) сопротивлений асимметричной двухкомпонентной системы от магнитного поля, рассчитанные по формулам из Приложения D. Расчёт сделан для тех же параметров, типичных для топологического изолятора на основе квантовых ям HgTe, что и расчёты, представленный на Рис. 3.3 и 3.4, за исключением длины рекомбинации ℓ_0 , которая выбрана равной 0.37 мкм. Сплошные линии отвечают точке электронейтральности $n_0 = 0$, штриховые и пунктирные линии отвечают следующим значениям разности концентрации электронов и дырок $n_0 = -n_i$, где $n_i = 0.3, 0.5, 0.9, 1.3, 2.1 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$. Вставка на панели (а) показывает магнетосопротивление R_{\square} для симметричной электрон-дырочной системы с подвижностями $\mu_h = \mu_e = 20 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

влияет на их величины, которые оцениваются как $n_{0,\alpha}\mu E_0$ в соответствии с формулой (3.10). Это приводит к нулевому магнетосопротивлению (в главном порядке по параметру $W/\ell_R \ll 1$):

$$R_{\square} = \frac{1}{e \varrho_0 \mu} . \quad (3.18)$$

В несимметричных системах в таких узких образцах силы Лоренца, действующие на электроны и дырки, компенсируется силами давления и однородным холловским полем. Для симметричной системы в точке электронейтральности, как и для широких образцов, холловское поле исчезает из-за равенства сил Лоренца, действующих на электроны и на дырки.

На Рис. 3.4 приведены результаты расчёта усреднённого сопротивления R_{\square} для двухкомпонентных систем в точке электронейтральности и вне её. Показаны зависимости $R_{\square}(B)$ для обсуждавшихся в этом разделе случаев широкого, $W \gg \ell_0$, и узкого, $W \ll \ell_0$, и среднего, $W \sim \ell_0$, образцов. На панели (а) представлен результат расчёта для симметричной системы в точке электронейтральности; на панелях (b,c,d) показаны результаты для асимметричных систем в точке электронейтральности и вне её. Кривые построены для значений параметров электронов и дырок, типичных для двумерных топологических изоляторов на основе квантовых ям HgTe, которые изучались, например, в работе [146]. Для расчёта использованы точные формулы, полученные в следующем разделе и в Приложении D. Качественно, поведение магнетосопротивлений на Рис. 3.4 объясняется полученными выше соотношениями.

На Рис. 3.5 представлены результаты расчёты продольного R_{\square} и холловского R_H сопротивлений для асимметричной электрон-дырочной системы, соответствующей изученной в работе [146] для различных концентраций электронов и дырок. Параметры системы выбраны

такими же, как на Рис. 3.4. Видно, что поведение R_{\square} аналогично поведению продольного магнетосопротивления в симметричной системе: линейный рост с B в точке электронейтральности $n_0 = 0$ и рост до конечных значений вне точки электронейтральности $n_0 \neq 0$. Поведение холловского сопротивления R_H нетривиально: оно меняет знак при переходе от $n_0 = 0$ к $n_0 \neq 0$. Это связано с тем, что в точке электронейтральности $n_0 = 0$ холловское поле E_y в несимметричной системе определяется балансом во всём образце между величинами магнитных, электростатических и диффузионных сил при несимметричных потоках \mathbf{j}_e и \mathbf{j}_h , а при $n_0 \neq 0$ основной вклад в E_y типично связан с балансом между силой Лоренца и электрическими силами $e_{\alpha}E_y$ в объёмной части образца, как было описано выше для симметричной системы.

3.2.2 Кинетическое уравнение для двухкомпонентной системы

Построим микроскопическую теорию магнетотранспорта в двухкомпонентных системах, а именно: из кинетического уравнения Больцмана для электронов и дырок, рассеивающихся на беспорядке, фононах и рекомбинирующих друг с другом, выведем использованные выше балансовые уравнения для их потоков и плотностей. Для случая несимметричной электрон-дырочной системы в точке электронейтральности или отклонения системы от точки электронейтральности балансовые уравнения необходимо дополнить соотношением электростатики, связывающим возмущения плотности заряда с холловским электрическим полем.

В развиваемой теории предполагается, что движение каждого носителя описывается классической механикой. Стационарное кинетическое уравнение для функций распределения частиц $f_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f_{\alpha}(\varepsilon, \varphi, \mathbf{r})$ без учёта рекомбинации имеет вид [φ – угол вектора \mathbf{p} , $\varepsilon = \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p})$]:

$$\mathbf{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + e_{\alpha} (\mathbf{E} + [\mathbf{v}_{\alpha} \times \mathbf{B}]) \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = \text{St}[f_{\alpha}, f_{\bar{\alpha}}], \quad (3.19)$$

где индекс $\alpha = e, h$ нумерует электронные и дырочные вклады во всех величинах; $\bar{e} = h$ и $\bar{h} = e$; $\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p})$ – энергетический спектр частиц; $\mathbf{v}_{\alpha} = \partial \varepsilon_{\alpha} / \partial \mathbf{p}$ – скорости электронов и дырок; $e_h = -e_e = e$ – заряды частиц; \mathbf{E} и \mathbf{B} – электрическое и магнитное поля.

Интеграл столкновений в правой части уравнения (3.19) описывает рассеяние на примесях и фононах, а также электрон-электронное рассеяние. Рассматривается случай, когда примесное рассеяние преобладает над неупругой частью электрон-электронным и электрон-фононным рассеяниями:

$$\frac{1}{\tau_{imp}} \gg \frac{1}{\tau_{ee}}, \quad \frac{1}{\tau_{ph,inel}}. \quad (3.20)$$

Таким образом, релаксация импульса определяется рассеянием на примесях и фононах, а электрон-электронное и неупругая часть электрон-фононного рассеяния ответственны за тер-

мализацию системы и приводят к рекомбинации электрон-дырочных пар (см. Приложение Е).

Быстрое рассеяние носителей на примесях приводит к изотропизации функции распределения, поэтому решение кинетического уравнения (3.19) можно представить как сумму изотропных и анизотропных слагаемых:

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_{\alpha}^i(\mathbf{r}, \varepsilon) + f_{\alpha}^a(\mathbf{r}, \varepsilon, \hat{\mathbf{p}}), \quad (3.21)$$

где изотропная часть f_{α}^i функции распределения зависит только от энергии, а анизотропная часть f_{α}^a также ещё зависит от направления импульса $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$.

В режиме с преобладанием рассеяния на примесях и квазиупругого рассеяния на фононах анизотропная часть интеграла столкновений в уравнении (3.19) даётся выражением:

$$\text{St}[f_{\alpha}, f_{\bar{\alpha}}] \approx (\text{St}[f_{\alpha}])^a = -\frac{f_{\alpha}^a}{\tau_{\alpha}(\varepsilon)}, \quad (3.22)$$

где $1/\tau_{\alpha}(\varepsilon) = 1/\tau_{imp, \alpha}(\varepsilon) + 1/\tau_{ph, tr, \alpha}(\varepsilon)$. Для этого режима, для краткости, ниже используется термин “режим с преобладанием рассеяния на примесях”.

В Приложении Д с помощью описанного кинетического уравнения и уравнения электростатики для двумерного слоя с затвором составлены и решены балансовые уравнения для различных типов электрон-дырочных систем: система в точке электронейтральности с параболическими симметричными спектрами носителей; асимметричная система с параболическими спектрами носителей в точке электронейтральности и вне её. Для последнего случая там построено общее решения для всех несовпадающих параметрах электронов и дырок. Ниже в следующем разделе приведем вывод балансовых уравнений из кинетического уравнения и их решение для простейшего случая полностью симметричной системы с квадратичными спектрами носителей в точке электронейтральности.

3.2.3 Балансовые уравнения для симметричной электрон-дырочной системы с квадратичными спектрами носителей в точке электронейтральности

Рассмотрим простейший случай двухкомпонентной системы с одинаковыми энергетическими спектрами электронов и дырок: $\varepsilon_e(\mathbf{p}) = \varepsilon_h(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\mathbf{p}}$ и одинаковыми временами релаксации импульса электронов и дырок: $\tau_e(\varepsilon) = \tau_h(\varepsilon) = \tau(\varepsilon)$. То есть электроны и дырки различаются только знаком своего заряда.

Зоны электронов и дырок разделены энергетической щелью Δ , и энергия частиц отсчитывается от её середины $\Delta/2 < \varepsilon_{\mathbf{p}} < \infty$ [см. Рис. 3.1(с)]. В точке электронейтральности равновесный химический потенциал электронов и дырок равен нулю, соответствующая функции

распределения имеют вид $f_{\mathbf{p}}^F = [1 + e^{\varepsilon_{\mathbf{p}}/T}]^{-1}$ как для электронов, так и для дырок. Рассмотрим простейшую ситуацию, когда и электроны, и дырки имеют параболический спектр: $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \Delta/2 + p^2/(2m)$, в то время как времена релаксации импульса для электронов и дырок не зависят от энергии: $\tau_h(\varepsilon) = \tau_e(\varepsilon) = \tau$. Импульс и скорость связаны соотношением: $\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{p}_{\alpha}/m$.

Интегрируя уравнение (3.19) по двумерному импульсу \mathbf{p} , приходим к уравнениям неразрывности:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_e = -\frac{\delta n_h + \delta n_e}{2\tau_R}, \quad \operatorname{div} \mathbf{j}_h = -\frac{\delta n_e + \delta n_h}{2\tau_R}, \quad (3.23)$$

где введены неравновесные концентрации δn_{α} :

$$\delta n_{\alpha}(\mathbf{r}) = N_{deg} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) - \frac{\rho_0}{2} \quad (3.24)$$

и соответствующие плотности потока \mathbf{j}_{α} :

$$\mathbf{j}_{\alpha}(\mathbf{r}) = N_{deg} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (3.25)$$

Здесь τ_R – время рекомбинации, связанное с неупругой частью $\operatorname{St}[f_{\alpha}, f_{\bar{\alpha}}]$; N_{deg} – фактор вырождения состояний электронов и дырок. В уравнении (3.24) было использовано определение равновесной полной плотности квазичастиц:

$$\rho_0 = 2N_{deg} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} f_{\mathbf{p}}^F(\varepsilon), \quad (3.26)$$

Умножая уравнение (3.19) на скорость \mathbf{v}_{α} и интегрируя по импульсу, получаем уравнение:

$$\nabla \left[N_{deg} \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{v^2}{2} f_{\alpha}^i \right] - \frac{e_{\alpha} \mathbf{E} \rho_0}{2m} - [\mathbf{j}_{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}_{\alpha}] = -\frac{\mathbf{j}_{\alpha}}{\tau}, \quad (3.27)$$

где $\boldsymbol{\omega}_h = -\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega}_c = eB/(mc)$ – циклотронные частоты электронов и дырок.

В режиме, линейном по внешнему электрическому полю, изотропная часть f_{α}^i функции распределения слабо отклоняется от f_F . При быстрых межчастичных столкновениях, обеспечивающих термализацию, f_{α}^i может определяться отклонением температур носителей $\delta T_{\alpha}(\mathbf{r})$ от температуры решетки и отклонением их химических потенциалов $\delta\mu_{\alpha}(\mathbf{r})$ от равновесного значения $\mu = \mu_0$.

Температура системы определяется балансом между джоулевым нагревом, рекомбинацией и теплообменом с фононами. Поскольку джоулев нагрев пропорционален квадрату энергии, им можно пренебречь при изучении линейного отклика. Рекомбинация электронов и дырок не влияет на локальную температуру, если электрон-фононное рассеяние достаточно быстрое: $\tau_{ph,inel} \ll \tau_R$. Точное доказательство этого утверждения приведено в Приложении Е. Далее считается, что $\tau_{ph,inel} \ll \tau_R$, поэтому $\delta T(\mathbf{r}) \rightarrow 0$. В таком режиме вариация химического потенциала носителей $\delta\mu_{\alpha}$ – единственный параметр функции f_{α}^i .

При этих предположениях изотропная часть функции распределения принимает вид:

$$f_{\alpha}^i(\varepsilon) = f_F(\varepsilon) + \frac{\partial f_F(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \delta\mu_{\alpha}(\mathbf{r}). \quad (3.28)$$

Интегрируя уравнения (3.28) по импульсам, находим:

$$\nabla \delta n_{\alpha} = \langle 1 \rangle \nabla \delta\mu_{\alpha}, \quad (3.29)$$

где введена операция усреднения по энергии $\langle \dots \rangle$ для зависящих от энергии величин $A(\varepsilon)$: [см.

Рис. 3.1(с)]:

$$\langle A \rangle = \int_{\Delta/2}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) \left[-\frac{df_F(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right] A(\varepsilon). \quad (3.30)$$

Здесь $\nu(\varepsilon)$ – плотность состояний частиц.

С помощью уравнения (3.28) можно выразить интеграл, входящий в уравнение (3.27), в виде:

$$\nabla \left[\int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{v^2}{2} f_{\alpha}^i \right] = \left\langle \frac{v^2}{2} \right\rangle \nabla \delta\mu_{\alpha}. \quad (3.31)$$

Используя уравнение (3.29), переписываем уравнение (3.27) следующим образом:

$$D \nabla \delta n_{\alpha} - \frac{e_{\alpha} E \rho_0 \tau}{2m} - [\mathbf{j}_{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}_{\alpha}] \tau = -\mathbf{j}_{\alpha}. \quad (3.32)$$

где введен коэффициент диффузии (равный для электронов и дырок):

$$D = \langle v^2/2 \rangle \tau / \langle 1 \rangle. \quad (3.33)$$

Отметим, что для точки электронейтральности для системы, показанной на Рис. 3.1(с) прямое вычисление даёт: $D|_{\mu=0} = (T\tau/m) [1 + e^{-\Delta/(2T)}/2]$ (считая, что $\Delta \gg T$).

Таким образом, из кинетического уравнения (3.19) получены балансовые уравнения (3.23) и (3.32) гидродинамического типа для расчёта течений электронов и дырок. Отметим, что, хотя полученные уравнения предполагают классическую динамику частиц, учёт квантовых эффектов может сохранить ряд свойств течений электрон-дырочной жидкости, в частности, отсутствие холловского поля в точке электронейтральности.

3.2.4 Решение балансовых уравнений для системы с параболическим спектром частиц в точке электронейтральности

Для расчёта магнетосопротивления системы с одинаковым числом электронов и дырок, необходимо решить уравнения (3.23) и (3.32) для течения в заданном образце. Выберем длинный прямоугольный образец: $0 < x < L$, $-W/2 < y < W/2$, $W \ll L$, на продольных его краях

ставятся только граничные условия непроницаемости краёв: $j_{y,\alpha}|_{y=\pm W/2} = 0$. В силу неравенства $W \ll L$ все величины в такой геометрии однородны в направлении x . Краевые условия приводят к зависимости потоков от координаты y вдоль сечения образца.

Введём следующие обозначения для величин, описывающих свойства двухкомпонентной системы как целого: $\delta\rho = \delta n_e + \delta n_h$, $\delta n = \delta n_e - \delta n_h$, $\mathbf{P} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_h$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_e - \mathbf{j}_h$. Используя введённые величины, перепишем уравнения (3.23) и (3.32):

$$\begin{aligned} D\nabla\delta\rho + \mathbf{P} - \mathbf{j} \times \boldsymbol{\omega}_c\tau &= 0, \\ D\nabla\delta n + \mathbf{j} - e\mathbf{E}\rho_0\tau/m - \mathbf{P} \times \boldsymbol{\omega}_c\tau &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{P} = -\delta\rho/\tau_R, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Анализ этих уравнений показывает, что $\mathbf{P} = P(y)\mathbf{e}_y$, $\mathbf{j} = j(y)\mathbf{e}_x$, $\delta n = 0$. Такая форма течения является следствием геометрии образца, зарядовой нейтральности и симметрии характеристик электронов и дырок. Заметим, что в уравнения (3.34) не входит соотношение электростатики.

Для решения уравнений (3.34) выразим возмущение полной плотности квазичастиц из последней строки (3.34): $\delta\rho = -\tau_R dP/dy$. Затем перепишем первые два уравнения (3.34) следующим образом:

$$\begin{aligned} -D\tau_R \partial^2 P/\partial y^2 + P(y) + \omega_c\tau j(y) &= 0, \\ j(y) &= j_0 + \omega_c\tau P(y), \end{aligned} \quad (3.35)$$

где $j_0 = e\tau\rho_0 E_0/m$ – плотность тока в отсутствии магнитного поля. Подставим второе из уравнений (3.35) в первое и решим получившееся дифференциальное уравнение для $P(y)$ с граничным условием $P(\pm W/2) = 0$. Получим:

$$P(y) = j_0 \frac{\omega_c\tau}{1 + (\omega_c\tau)^2} \left[\frac{\cosh(2y/\ell_R)}{\cosh(W/\ell_R)} - 1 \right], \quad (3.36)$$

Здесь использована введённую выше длина рекомбинации в магнитном поле $\ell_R = \ell_0/\sqrt{1 + (\omega_c\tau)^2}$, $\ell_0 = 2\sqrt{D\tau_R}$ [формула (3.6); напомним, что $\omega_c\tau = \mu B/c$].

Из полученного выражения для суммарного потока частиц $P(y)$ (3.36) и второго из уравнений (3.35) получаем распределение плотности электрического тока: $J(y) = -ej(y)$, где

$$j(y) = \frac{j_0}{1 + (\omega_c\tau)^2} \left[1 + (\omega_c\tau)^2 \frac{\cosh(2y/\ell_R)}{\cosh(W/\ell_R)} \right]. \quad (3.37)$$

Это выражение показывает, что в больших магнитных полях, $\omega_c\tau \gg 1$, в объёмной части образца плотность тока является малой, $j(y) \approx j_0/(\omega_c\tau)^2$, отвечающей формуле Друде в магнитном поле в геометрии Корбино, $j = \sigma_{xx}E_0$, а у краёв образца она является большой, $j(y) \sim j_0$, соответствующей формуле Друде в отсутствие магнитного поля.

Пространственное изменение токов делает невозможным определение удельного сопротивления. Его роль играет усредненное сопротивление образца (эта величина уже упоминалась в

Разделе 3.2.1): $R_{\square} = E_0/\bar{J}$, где \bar{J} – средняя плотность тока $\bar{J} = I/W = \int_{-W/2}^{W/2} J(y) dy/W$. Из уравнения (3.37) получаем:

$$R_{\square} = \frac{m}{e^2\tau\rho_0} \frac{1 + (\omega_c\tau)^2}{1 + (\omega_c\tau)^2 F(W/\ell_R)}, \quad (3.38)$$

где $F(x) = \tanh(x)/x$.

Проанализируем уравнение (3.38) в трех различных режимах в зависимости от ширины системы. В классически сильных магнитных полях $\omega_c\tau \gg 1$ можно выделить три следующих режима. Для широких образцов возникает хорошо известное ненасыщающееся геометрическое магнетосопротивление, квадратичное по магнитному полю:

$$R_{\square} = \frac{m}{e^2\tau\rho_0} [1 + (\omega_c\tau)^2], \quad W \gg (\omega_c\tau)^2\ell_R. \quad (3.39)$$

Такой рост R_{\square} есть следствие искривления траекторий частиц силой Лоренца. При этом холловское напряжение отсутствует в силу симметричности траекторий электронов и дырок.

Для узких образцов магнетосопротивление отсутствует:

$$R_{\square} = \frac{m}{e^2\tau\rho_0}, \quad W \ll \ell_R. \quad (3.40)$$

В этом случае плотности токов $j_{e,h}$ текут вдоль оси x из-за отсутствия рекомбинации.

Для образцов промежуточных ширин магнетосопротивление (3.38) оказывается линейным:

$$R_{\square} = \frac{m}{e^2\tau\rho_0} \frac{W}{\ell_R} \sim B, \quad \ell_R \ll W \ll (\omega_c\tau)^2\ell_R, \quad (3.41)$$

Такое линейное магнетосопротивление является главным результатом настоящего раздела. В Разделе 3.2.1 оно было получено и объяснено с помощью качественного рассмотрения течения двухкомпонентной жидкости [см. формулу (3.13)].

Обсудим, как меняется магнетосопротивление данного образца с ростом магнитного поля. Из полученных формул видно, что для образцов, являющихся узкими при $B \rightarrow 0$: $W \ll \ell_0$, в малых магнитных полях $\omega_c\tau \ll \ell_0/W$ реализуется нулевое магнетосопротивление (3.40). С ростом магнитного поля, при $\omega_c\tau \gg \ell_0/W$, появляется линейное магнетосопротивление (3.41). Для образцов, являющихся широкими в пределе $B \rightarrow 0$: $W \gg \ell_0$, в магнитных полях $\omega_c\tau \ll W/\ell_0$ магнетосопротивление является друдевским квадратичным (3.39), а при полях $\omega_c\tau \gg W/\ell_0$, магнетосопротивление также становится линейным, даваемым формулой (3.41).

3.2.5 Сопоставление с экспериментами

В работе [A12] был экспериментально изучен магнетотранспорт в двухслойном графене в холловской геометрии.

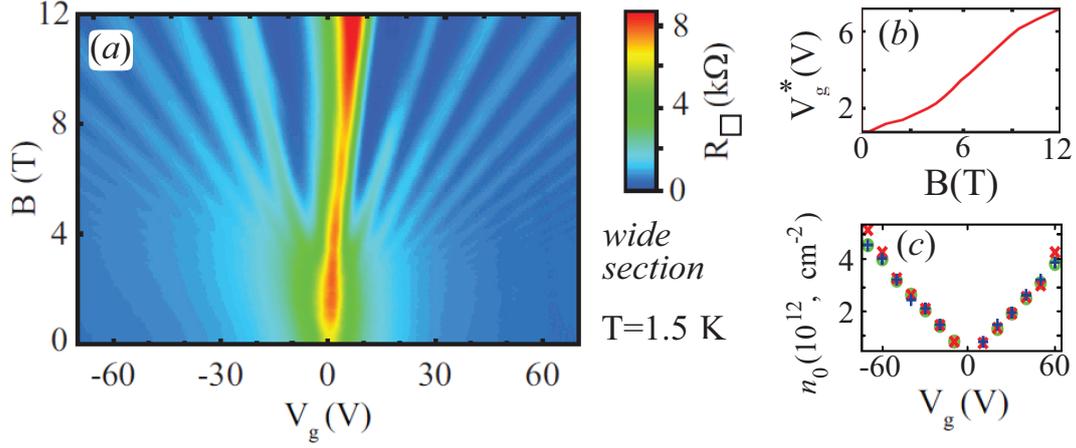


Рис. 3.6: (а): Цветовой график сопротивления $R_{\square}(V_g, B)$ в широкой секции образца как функция магнитного поля B и напряжения V_g на затворе. С ростом B видно появление слабых шубниковских осцилляций в зависимости R_{\square} от B за счёт формирования разделенных уровней Ландау. (b): Положение центрального пика в зависимости $R_{\square}(V_g, B)$, отвечающей точке электронейтральности. (c): Плотность заряда, полученная из измерения холловского напряжения (красные символы “×”) и из расчёта ёмкости системы, состоящей из образца и затвора (зелёные символы “○”), а также эффективная плотность электронов, полученная из анализа периодов шубниковских осцилляций (синие символы “+”).

Исследуемый образец двухслойного графена имел геометрию холловского мостика и состоял из трёх секций разной ширины: $W = 2, 0.95, 0.5$ мкм. Длина каждой из секций равна $L = 1.8$ мкм. К образцу были присоединены контакты на коротких краях образца и между каждыми парами секций. Образец был расположен на плёнке оксида кремния толщиной $d = 0.33$ мкм, которая находилась на подложке из сильно легированного кремния, служащего затвором. Приложением напряжения V_g к затвору можно было менять плотность электронов и дырок от минимальных одинаковых значений $n_{0,e} = n_{0,h} = \varrho_0/2$ до значений $n_{0,\alpha} \approx n_0 \approx \varrho_0 = 5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$. Таким образом, электрон-дырочная система в двухслойном графене могла находиться как в точке электронейтральности, так и вне её.

Измерялись продольное R_{\square} и холловское R_H сопротивления каждой из секций в диапазонах магнитных полей от 0 до 12 Тл, температур от 1.5 до 150 К при различных напряжениях на затворе V_g . Результаты измерений представлены на Рис. 3.6-3.8. При всех магнитных полях были определены значения напряжения $V_g^*(B)$, соответствующие максимуму сопротивления $R_{\square}(V_g)$ как функции V_g при фиксированном B [см. Рис. 3.6(a,b)]. В рамках современных представлений о свойствах графена считается хорошо установленным, что при таких V_g^* плотности электронов и дырок в графене на подложке с затвором являются минимальными и совпадающими, то есть эти V_g^* отвечают точке электронейтральности электрон-дырочной системы. Действительно, при заданной температуре наименьшее число носителей каждого из типов при их симметричных энергетических спектрах $\varepsilon_e(p) = \varepsilon_h(p)$ и, соответственно, наименьшая

проводимость и наибольшее сопротивление, наблюдаются при химическом потенциале, расположенном симметрично относительно спектров $\varepsilon_e(p)$ и $\varepsilon_h(p)$ [см. Рис. 3.1(с)], что соответствует наименьшим одинаковым концентрациям электронов и дырок. Химический потенциал в первом приближении пропорционален напряжению на затворе, коэффициент пропорциональности определяется соотношениями электростатики для структуры из образца и затвора.

Из измерения плотности заряда n_0 с помощью эффекта Холла в слабых магнитных полях, проверенного электростатическим расчётом n_0 для структуры с затвором [см. Рис. 3.6(с)], и из измеренной зависимости $R_{\square}(V_g)$ при $B = 0$ [см. Рис. 3.6(а)], по-видимому, следует, что энергетические спектры и подвижности электронов и дырок действительно близки друг к другу при симметричных отклонениях системы от точки электронейтральности. Полученные значения плотности заряда также были сопоставлены с эффективной концентрацией носителей, получаемой из измерения и анализа шубниковских осцилляций при достаточно больших отклонениях от точки электронейтральности, $V_g > V_g^*$ и $V_g < V_g^*$, когда $n_{0,\alpha} \approx n_0$ [см. Рис. 3.6(с)]. Для экспериментальных значений подвижностей при $B = 0$ с помощью формул Друде было получено: $2.2, 3, 4 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ для дырок и $2.6, 3, 3.8 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ для электронов в узкой, средней и широкой секциях образца.

В эксперименте наблюдалось, что с ростом магнитного поля положение максимума V_g^* функции $R_{\square}(V_g)$ сдвигается в сторону б'ольших V_g . Такой сдвиг $V_g^*(B)$ [см. Рис. 3.6(б)], по-видимому, означает нарушение электронейтральности с ростом B при фиксированном $V_g = V_g^*(0)$, то есть смещение с ростом B напряжения $V_g = V_g^*(B)$, отвечающего точке электронейтральности. Причина такого сдвига может состоять, в первую очередь, в изменении энергетического спектра и плотности состояний носителей в графене с ростом магнитном поля (в частности, за счёт квантования их движения).

На Рис. 3.7 приведены экспериментальные значения сопротивления $R_{\square}(B)$ при различных величинах напряжения на затворе V_g , равных или не равных значению $V_g^*(B = 0)$, отвечающему точке электронейтральности при $B = 0$. Видно, при $V_g = V_g^*$ функция $R_{\square}(B)$ является линейной, а при отклонении V_g от V_g^* становится насыщающейся функцией B . Изменение температуры качественно не меняет описанное поведение $R_{\square}(B, V_g)$.

Эти свойства магнетосопротивления в изученных в [A8] образцах говорят о том, что оно может быть обусловлено формированием описанных выше неоднородных течений в электрон-дырочной системе и появлением доминирующего вклада в ток от прикраевых слоёв. Ниже выполняется количественный анализ полученных экспериментальных результатов с помощью развитой теории. Такой анализ основан на: (i) качественном рассмотрении Раздела 3.2.1;

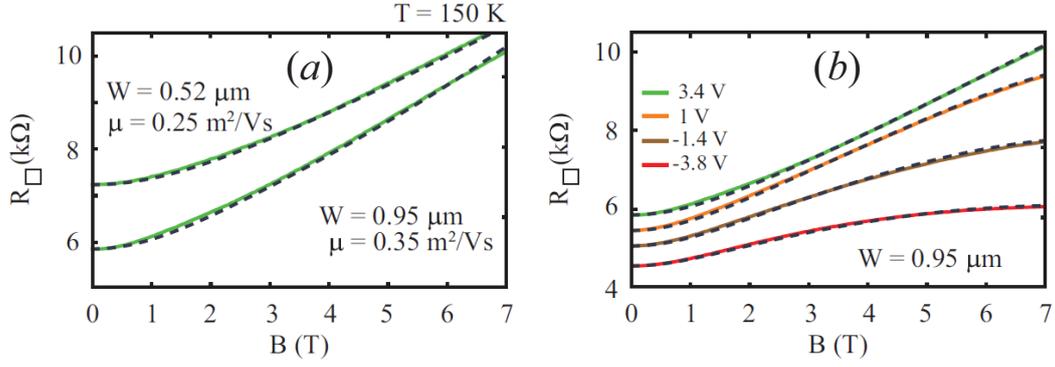


Рис. 3.7: (а): Магнетосопротивление узкой (верхние кривые) и средней (нижние кривые) секций образца при $T = 150$ К и напряжении на затворе, ближайшем к точке зарядовой нейтральности ($V_g = 8.2$ В и $V_g = 3.4$ В, соответственно). Сплошные зеленые отвечают экспериментальным данным; пунктирные синие линии – теоретическая зависимость (3.42) с параметрами, представленными в Таблице 3.1. (б): Магнетосопротивление средней части образца при 150 К для нескольких значений V_g , отвечающих точке электронейтральности ($V_g = 3.4$ В) и отклонению от неё.

(ii) расчёте Раздела 3.2.4; (iii) расчётах для более сложных случаев, представленных в Приложении D. Изучение роли квантования в предложенном рекомбинационном механизме магнетотранспорта также представляет значительный интерес и может быть важно для анализа эксперимента [A12], однако этот вопрос выходит за рамки диссертации.

Для симметричной системы с параболическими спектрами электронов и дырок при отклонении от точки электронейтральности расчёт, выполненный в Приложении D, даёт:

$$R_{\square} = R_0 \frac{1 + (\mu B/c)^2}{1 + \left(\frac{\mu B}{c}\right)^2 \left[F\left(\frac{W}{\ell_R}\right) \left(1 - \frac{n_0^2}{\varrho_0^2}\right) + \frac{n_0^2}{\varrho_0^2} \right]}, \quad (3.42)$$

где $F(\xi) = \tanh \xi/\xi$ и $R_0 = (L/W)[1/(e\varrho_0\mu)]$ – друдевское сопротивление в нулевом магнитном поле. Общая формула (3.42) соответствует качественному результату (3.14) для случая $\omega_c\tau \gg 1$. В Приложении D также показано, что при отклонении от точки электронейтральности возникает холловское сопротивление:

$$R_H = \frac{\mu B}{c} \frac{n_0}{\varrho_0} R_{\square}. \quad (3.43)$$

Эта формула соответствует выполненной в Разделе 3.2.1 оценке (3.16).

Анализ экспериментальных данных по магнетосопротивлению и холловскому сопротивлению при различных V_g показал, что они хорошо описываются формулами (3.42) и (3.43) [Рис. 3.7 и 3.8], если заменить в формуле для рекомбинационной длины $\ell_R(B)$ (3.6) подвижность μ на некоторую несколько меньшую величину $\tilde{\mu}$:

$$\ell_R = \frac{\ell_0}{\sqrt{1 + (\tilde{\mu} B/c)^2}} \quad (3.44)$$

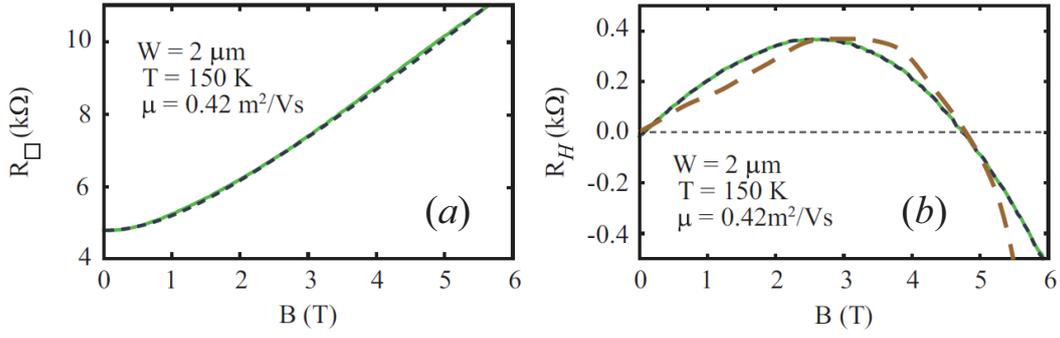


Рис. 3.8: (а): Магнетосопротивление широкой секции образца при $T = 150$ К и напряжении $V_g = 1$ В, ближайшем к точке электронейтральности. Сплошные зеленые линии – экспериментальные данные; пунктирные зелёные линии – теоретическая кривая (3.42) с параметрами из Таблице 3.1). (б): Холловское сопротивление широкой секции образца при $T = 150$ К и $V_g = 1$ В. Зелёная линия – экспериментальные данные; пунктирная синяя – теоретическая зависимость (3.43), для плотности заряда n_0 , полученной из экспериментального значения отношения $R_H/R_\square(B)$ и формулы (3.43). Коричневая кривая – теоретическая зависимость (3.43), для которой n_0 получена с помощью расчёта на основе фермиевской функции, спектра электронов в двухслойном графене и с наблюдаемой зависимости положения точки электронейтральности от магнитного поля (Рис. 3.6).

и учесть сдвиг точки электронейтральности $V_g^*(B)$ с ростом магнитного поля [см. Рис. 3.6(b)]. Заметим, что наблюдаемое ненулевое холловское сопротивление при напряжении V_g , отвечающем точке электронейтральности при $B = 0$ [см. Рис. 3.8(b)], может быть связано как с некоторой асимметрией свойств электронов [см. результат расчёта R_H на Рис. 3.5(b)], так и с экспериментальным сдвигом положения точки электронейтральности с ростом магнитного поля [см. Рис. 3.6(a,b)].

Введённая в формуле (3.44) величина $\tilde{\mu}$ в проведённом анализе экспериментальных данных является подгоночным параметром. Другими подгоночными параметрами будем считать подвижность μ , входящую в формулы (3.42) и (3.43) отдельно от величины ℓ_R , и полную плотность заряда ϱ_0 , определяющую сопротивление $R_0 = (L/W)[1/(e\varrho_0\mu)]$ при $B = 0$ и $n_0 = 0$. При подгонке использовались значения плотности заряда n_0 , полученные из измерений в нулевом магнитном поле и представленные на Рис. 3.6(c). Выбирая подходящие значения параметров, удалось хорошо описать полученные экспериментальные зависимости $R_\square(V_g, B)$ и $R_H(V_g, B)$ (см. Рис. 3.7 и 3.8).

На Рис. 3.8(b) штриховая коричневая кривая – результат расчёта по формуле (3.43) со значениями плотности заряда $n_0(B)$, которая была рассчитана на основе зависимости химического потенциала от магнитного поля, учитывающей экспериментально наблюдаемый сдвиг точки электронейтральности $V_g^*(B)$ [см. Рис. 3.6(a,b)]. Штриховая синяя кривая, почти совпадающая с зелёной экспериментальной, построена по формулам (3.42) и (3.43) с использованием в них величины $(\mu B/c)(n_0/\varrho_0)$, получаемой как отношение экспериментальных значений R_H/R_\square [см. формулу (3.43)]. Наблюдаемое почти полное совпадение зелёной теоретической

Таблица 3.1. Параметры электрон-дырочных систем, полученные в процедуре подгонки			
	Узкая секция	Средняя секция	Широкая секция
W	0.52 мкм	0.95 мкм	2 мкм
μ	$2.5 \cdot 10^3$ см ² /В·с	$3.5 \cdot 10^3$ см ² /В·с	$4.2 \cdot 10^3$ см ² /В·с
ℓ_0	0.43 мкм	0.79 мкм	1.2 мкм

и экспериментальной кривых, однако, является проявлением особенностей выбранной процедуры подгонки. По-видимому, именно для коричневой кривой, основанной на независимом определении $V_g^*(B)$ и $n_0(B)$ её степень близости с экспериментальной кривой более адекватно характеризует применимость предложенного механизма магнетотранспорта.

В Таблице 3.1 представлены подгоночные параметры, полученные для трёх секций образца. Полученные значения подвижностей близки к тем, что были получены из экспериментальных данных в нулевом магнитном поле, однако, не полностью совпадают с ними. Значения $\tilde{\mu}$ оказывались равными примерно одной второй от приведённых в Таблице 3.1 значений величины μ , входящей в формулы R_{\square} (3.42) и R_H (3.43) отдельно от величины ℓ_R . Из Таблицы 3.1 видно, что экспериментальные кривые отвечают случаю образцов средней ширины, $W \sim \ell_0$.

В Приложении D выведены балансовые уравнения и построено их решение для двухкомпонентных систем при наличии зависимости параметров частиц от энергии [в частности, для неквадратичного спектра $\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p})$] и при отклонении от точки электронейтральности, $n_{0,e} \neq n_{0,h}$, по методу, аналогичному изложенному выше в Разделах 3.2.2–3.2.4 для простейшей системы с квадратичным спектром. Это рассмотрение, во-первых, представляет обоснование результатов, полученных в Разделе 3.2.1 качественно. Там показано, что эффект линейного магнетосопротивления выживает для широкого класса двухкомпонентных систем в точке электронейтральности, $n_{0,e} = n_{0,h}$. В Приложении D также показано, что зависимость параметров частиц от их энергии меняет соотношения между коэффициентами в балансовых уравнениях и действительно может быть приближённо учтена путём замены в формуле (3.6) средней подвижности $\mu = \langle \mu(\varepsilon) \rangle$ на некоторую меньшую величину $\tilde{\mu}$ [см. (3.44)].

На Рис. 3.9 приведены экспериментальные результаты работы [146] по измерению магнетосопротивления в другой двухкомпонентной системе – квантовых ямах в гетороструктурах на основе полупроводников HgCdTe. При определенной ширине квантовой ямы в таких структурах формируется сложная зонная структура с нулевой или с “отрицательной” запрещённой зоной между состояниями электронов и дырок. В связи с этим, в квантовой яме могут од-

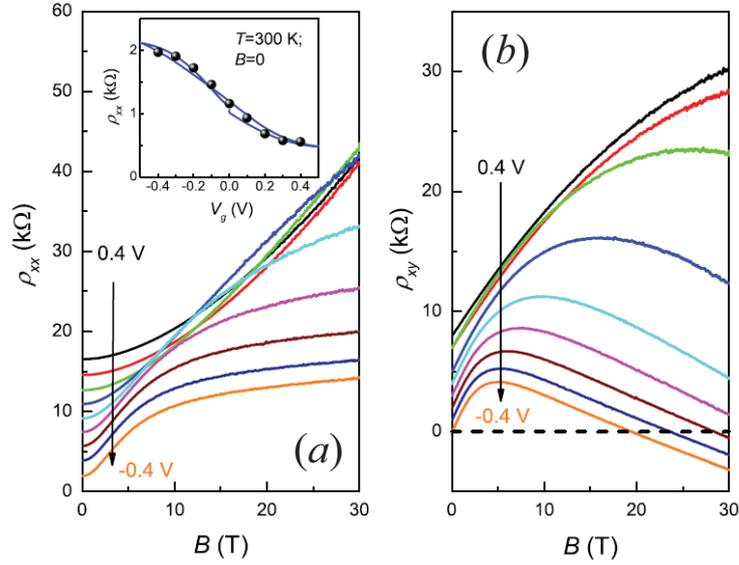


Рис. 3.9: Продольное (а) и холловское (b) сопротивления квантовых ям в гетероструктуре HgTe/CdTe при температуре $T = 300$ К и различных напряжениях на затворе V_g . Рисунок взят из работы [146]. Для наглядности, кривые на панели (а) сдвинуты относительно кривой при $V_g = -0.4$ В на 2 кΩ; а кривые на панели (b) - относительно кривой при $V_g = -0.4$ В на 1 кΩ. На вставке показана зависимость продольного сопротивления от V_g при $B = 0$.

новременно находиться электроны и дырки, аналогично тому, как это происходит в графене. На границах образца из двумерных состояний квантовой ямы формируются одномерные краевые состояния, транспорт по которым нечувствителен к дефектам в гетероструктуре. В связи с последним обстоятельством, такие системы называются топологическими изоляторами. Приложением напряжения на затворе можно менять концентрации двумерных электронов и дырок, в частности, сделать их одинаковыми.

Результаты работы [146] для продольного и холловского сопротивления [см. Рис. 3.9(a,b)] весьма похожи на обсуждавшиеся выше результаты работы [A12] для двухслойного графена, приведённые на Рис.3.7 и 3.8. При значении затворного напряжения $V_g = 0$ и температуре $T = 4.2$ К зонная структура инвертирована и двухкомпонентная электрон-дырочная система в яме обладает проводимостью n -типа и экспериментальными значениями эффективной общей плотности носителей $n_{0,e} = 3.7 \times 10^{11}$ см $^{-2}$ и подвижности $\mu = 5.6 \times 10^4$ см 2 /В·с. С ростом температуры инвертированная зонная структура переходит в нормальную, похожую на показанную на Рис. 3.1(c). При $T = 300$ К между зонами электронов и дырок имеется щель шириной порядка $\Delta \sim 30$ мэВ, поэтому химический потенциал $\mu = \mu(V_g)$ может лежать в области $\mu \sim T \sim \Delta$ [см. Рис. 3.1(c)]. При $\mu(V_g)$, отвечающем точке электронейтральности V_g^* , продольное сопротивление R_{\square} линейно зависит от магнитного поля B при достаточно больших B [см. Рис. 3.9(a)]. Величина изменения $R_{\square}(B)$ относительно велика: при изменении B от 0 до 30 Т она меняется примерно в 4 раза. При отклонении $\mu(V_g)$ от точки электронейтральности

функция $R_{\square}(B)$ становится насыщающейся при достаточно больших B . Холловское напряжение при V_g вблизи V_g^* немонотонно зависит от магнитного поля, как и на Рис. 3.8(b) для образца графена, изученного в работе [A12].

В наблюдаемых характеристиках течения электрон-дырочной жидкости могут быть важны квантование состояния частиц, а также другие явления переноса, например, теплоперенос. Последний эффект приводит к неоднородному распределению температур носителей и дополнительному вкладу в потоки носителей за счёт термоэлектрических эффектов. В следующем Разделе 3.3 и в Приложении E изучено влияние возмущения температуры на магнетотранспорт в электрон-дырочных системе.

Выполненный анализ экспериментальных данных, полученных в работах [A12] и [146], не позволяет уверенно заключить о наличии значительных вкладов от эффектов теплопереноса в наблюдаемые R_{\square} и R_H . Надёжные свидетельства влияния теплопереноса на магнетотранспорт (или их отсутствие), видимо, разумно ожидать в будущих экспериментах, в которых потоки тепла и распределения температур будут измеряться параллельно и независимо с измерениями сопротивлений R_{\square} и R_H . Отметим, что сейчас активно ведутся эксперименты по изучению теплопереноса в графене с целью разработки систем теплоотвода для электронных устройств (см. например, работу [173] и ссылки на неё), поэтому изучение магнетотранспорта в графене с учётом переноса тепла является актуальной задачей.

3.3 Магнетосопротивление за счёт термоэлектрического эффекта

3.3.1 Балансовые уравнения с учётом неоднородности плотностей частиц и температуры

В настоящем разделе обобщим развитую в Разделе 3.2 теорию гидродинамического магнетотранспорта в двухкомпонентной системе на случай, когда, наряду с рассеянием частиц на дефектах и рекомбинацией, становятся важными перенос тепловой энергии и формировании неоднородного распределения температуры. Как и выше, рассматривается длинный образец, так что неоднородное распределение всех величин существенно только по сечению образца [см. Рис. 3.1(a)]. Для расчёта магнетосопротивления найдём распределение потоков частиц $\mathbf{j}_{\alpha}(y)$, потоков тепла $\mathbf{q}_{\alpha}(y)$, переносимого частицами, а также возмущений температур $\delta T_{\alpha}(y)$ и плотностей частиц $\delta n_{\alpha}(y)$.

Ограничимся рассмотрением симметричной электрон-дырочной системы в точке электро-

нейтральности. При этом будем считать, что энергетический спектр носителей ε_p не обязательно является квадратичным и возможна нетривиальная зависимость всех микроскопических параметров частиц от энергии. В Приложении Е для такой системы из кинетического уравнения с учётом упругого рассеяния носителей на дефектах и неупругого рассеяния на фононах выводятся: (i) балансовые уравнения потоков \mathbf{j}_α и \mathbf{q}_α , в которых \mathbf{j}_α и \mathbf{q}_α выражены через электрическое поле \mathbf{E} и градиенты возмущений температуры и химического потенциала, $\nabla \delta T$ и $\nabla \delta \mu$, а также (ii) уравнения, описывающие баланс числа электронов и дырок и переносимой ими энергии. Первые уравнения связи описывают электропроводность, теплопроводность, диффузию и термоэлектрический эффект. Вторые уравнения описывают эволюцию возмущений химического потенциала и температуры и являются уравнениями типа диффузии, теплопроводности и термодиффузии. В силу симметричности свойств электронов и дырок, их распределения по энергии, а поэтому и значения $\delta T_\alpha(y)$ и $\delta n_\alpha(y)$, одинаковы для $\alpha = e$ и $\alpha = h$.

Первые из описанных уравнений имеют нижеследующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_\alpha &= \hat{\sigma}_\alpha (e_\alpha \mathbf{E} - \nabla \delta \mu) - \hat{\alpha}_\alpha \nabla \delta T, \\ \mathbf{q}_\alpha &= \hat{\beta}_\alpha (e_\alpha \mathbf{E} - \nabla \delta \mu) - \hat{\kappa}_\alpha \nabla \delta T.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Здесь введены обозначения для коэффициентов проводимости, термоэлектрических коэффициентов и коэффициентов теплопроводности:

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_\alpha \\ \hat{\alpha}_\alpha \\ \hat{\beta}_\alpha \\ \hat{\kappa}_\alpha \end{pmatrix} = \int d\varepsilon \nu(\varepsilon) \hat{\sigma}_\alpha(\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ (\varepsilon - \mu_0)/T_0 \\ \varepsilon - \mu_0 \\ (\varepsilon - \mu_0)^2/T_0 \end{pmatrix},\tag{3.46}$$

где тензор проводимости при данной энергии определён множителем e^2 :

$$\hat{\sigma}_\alpha(\varepsilon) = \frac{-f'_F(\varepsilon) \tau(\varepsilon)}{1 + \omega_c(\varepsilon)^2 \tau(\varepsilon)^2} \frac{v(\varepsilon)^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_{\alpha,c}(\varepsilon) \tau(\varepsilon) \\ -\omega_{\alpha,c}(\varepsilon) \tau(\varepsilon) & 1 \end{pmatrix},\tag{3.47}$$

$\nu(\varepsilon)$ – плотность состояний; μ_0 и T_0 – невозмущенные значения температуры и химического потенциала; $\tau(\varepsilon)$, $v(\varepsilon)$, $\omega_{\alpha,c}(\varepsilon)$ – зависящие от энергии время релаксации импульса, модуль скорости частиц и циклотронные частоты электронов и дырок. Видно, что тензоры прямого и обратного термоэлектрического эффекта $\hat{\alpha}_\alpha$ и $\hat{\beta}_\alpha$ связаны соотношениями Онсагера.

Система вторых уравнений для распределения возмущений химического потенциала и температуры, единых для электронов и дырок, приобретает вид:

$$\begin{cases} a_\mu \frac{\partial \delta \mu}{\partial t} + a_T \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \sigma_{xx} \Delta \delta \mu + \alpha_{xx} \Delta \delta T = R \delta \mu + R^\varepsilon \delta T \\ a^T \frac{\partial \delta \mu}{\partial t} + \tilde{a}_\varepsilon^T \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \alpha_{xx} \Delta \delta \mu + \tilde{\kappa}_{xx} \Delta \delta T = R^\varepsilon \delta \mu + \tilde{L} \delta T \end{cases},\tag{3.48}$$

где введены обозначения: $\tilde{a}_\varepsilon^T = a_\varepsilon^T/T_0$, $\tilde{\kappa}_{xx} = \kappa_{xx}/T_0$; кинетические коэффициенты без индекса α означают их величины для дырок; а коэффициенты a , a^T , a_ε^T связывают возмущения

концентраций и плотностей тепловых энергий частиц δn и δn_ε с величинами возмущений $\delta\mu$ и δT :

$$\begin{aligned}\delta n &= a \delta\mu + a^\varepsilon \delta T, \\ \delta n_\varepsilon &= T_0 a^\varepsilon \delta\mu + a^{\varepsilon\varepsilon} \delta T,\end{aligned}\tag{3.49}$$

При этом эти коэффициенты имеют следующий явный вид:

$$\begin{pmatrix} a \\ a^\varepsilon \\ a^{\varepsilon\varepsilon} \end{pmatrix} = - \int d\varepsilon \nu(\varepsilon) f'_F(\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ (\varepsilon - \mu_0)/T_0 \\ (\varepsilon - \mu_0)^2/T_0 \end{pmatrix}.\tag{3.50}$$

Величины R , R^ε , \tilde{L} есть усредненные значения интеграла электрон-фоонных столкновений с различными весовыми функциями (см. подробности в Приложении D).

Граничные условия на замкнутой (непрозрачной) части границы образца имеют простой вид: должны быть равны нулю компоненты всех потоков \mathbf{j}_α и \mathbf{q}_α вдоль нормали $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r})$ к границе. С учётом уравнений (3.45) эти условия можно переписать в виде:

$$\begin{cases} [\sigma_{xy} e \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} - (\sigma_{xx} \nabla \delta\mu + \alpha_{xx} \nabla \delta T) \cdot \mathbf{n}] |_{\partial G^c} = 0 \\ [\alpha_{xy} e \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} - (\alpha_{xx} \nabla \delta\mu + \tilde{\kappa}_{xx} \nabla \delta T) \cdot \mathbf{n}] |_{\partial G^c} = 0 \end{cases}.\tag{3.51}$$

где $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{r})$ – касательная к границе.

Сохранению зарядовой нейтральности отвечают такие распределения потоков, в которых градиенты величин $\delta\mu$ и δT , определяющих изотропную часть функции распределения, перпендикулярны внешнему полю \mathbf{E} всюду в образце:

$$\nabla \delta\mu \perp \mathbf{E}, \quad \nabla \delta T \perp \mathbf{E}.\tag{3.52}$$

Это условие отражает следующее обстоятельство. Если бы внешнее электрическое поле имело ненулевую составляющую вдоль направления, в котором меняются характеристики электронов и дырок $\delta\mu$ и δT , то такое поле привело бы к пространственному разделению электронов и дырок из-за разницы знаков заряда у электронов и дырок [см. формулы (3.45)]. Пространственное разделение электронов и дырок означало бы нарушение электронейтральности.

3.3.2 Распределения плотности, температуры и потоков

Решим уравнения (3.48) с граничными условиями (3.51) для образца, имеющего форму длинной полоски длиной L и шириной $W \ll L$ [см. Рис. 3.1(a)]. Будем считать боковые края образца, $y = \pm W/2$, непроницаемыми для частиц, а удаленные края, $x \rightarrow \pm\infty$, – открытыми. Внешнее электрическое поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ будем считать однородным и направленным вдоль образца. Рассмотрим стационарный режим. Все величины зависят только от координаты y , поэтому уравнения баланса являются одномерными и могут быть решены аналитически. В такой геометрии течения условие (3.52) выполняется тривиальным образом.

Важную роль играют характерная длина, на которой релаксирует возмущение температуры: $l_T = \sqrt{\sigma_{xx}/\tilde{L}}$ (тепловая длина) и характерная длина, на которой релаксирует возмущение концентрации: $l_R = \sqrt{\sigma_{xx}/R}$ (рекомбинационная длина). Введём также обозначения l_T^0 и l_R^0 для тепловой и рекомбинационной длины в нулевом магнитном поле.

В настоящем разделе приведём только окончательные результаты для частного, но важного случая, когда рекомбинация происходит много медленнее охлаждения, $\tilde{L} \gg R, R^\varepsilon$, что соответствует неравенству $l_T \ll l_R$. Получим в этом режиме формулы для распределений химического потенциала, температуры и плотности электрического тока, а также магнетосопротивления. Детальный анализ получающегося магнетосопротивления проводится ниже только для случая узкого (при $B = 0$) образца: $W \ll l_T^0$.

Соотношения (3.45) для потоков частиц и тепла приобретают вид:

$$\begin{aligned} j_{x,\alpha} &= \sigma_{xx} e_\alpha E_0 - \sigma_{xy,\alpha} \delta\mu' - \alpha_{xy,\alpha} \delta T', \\ j_{y,\alpha} &= -\sigma_{xy,\alpha} e E_0 - \sigma_{xx} \delta\mu' - \alpha_{xx} \delta T', \\ q_{y,\alpha} &= -T_0 \alpha_{xy,\alpha} e E_0 - T_0 \alpha_{xx} \delta\mu' - \kappa_{xx} \delta T'. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Уравнения баланса (3.48) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \delta\mu'' + \alpha_{xx} \delta T'' = R \delta\mu + R_T \delta T \\ \alpha_{xx} \delta\mu'' + \tilde{\kappa}_{xx} \delta T'' = R^\varepsilon \delta\mu + \tilde{L} \delta T \end{cases}, \quad (3.54)$$

а условия (3.51) на границах $y = \pm W/2$ имеют вид:

$$\begin{cases} [\sigma_{xx} \delta\mu' + \alpha_{xx} \delta T']|_{y=\pm W/2} = -\sigma_{xy} e E_0 \\ [\alpha_{xx} \delta\mu' + \tilde{\kappa}_{xx} \delta T']|_{y=\pm W/2} = -\alpha_{xy} e E_0 \end{cases}. \quad (3.55)$$

Из уравнений (3.53) видно, что плотность электрического тока $\mathbf{J} = e_e \mathbf{j}_e + e_h \mathbf{j}_h$ направлена вдоль канала, $\mathbf{J} = (J, 0)$, и определяется выражением:

$$J(y) = 2 [e^2 \sigma_{xx} E_0 - e \sigma_{xy} \delta\mu'(y) - e \alpha_{xy} \delta T'(y)]. \quad (3.56)$$

Экспериментально измеряемой величиной является усреднённое по ширине канала значение плотности тока: $\bar{J} = I/W = \int_{-W/2}^{W/2} dy J(y)/W$. Среднее сопротивление канала, как и в прошлом разделе, определяется формулой: $R_\square = E_0/\bar{J}$.

Решение уравнений (3.54) и (3.55) выполнено по методу, разработанному в работе [174], с использованием аппарата линейной алгебры (вычисление аналитических функций от матриц).

Полученные распределения химического потенциала, температуры и плотности электри-

ческого тока в режиме медленной рекомбинации R , $R^\varepsilon \ll \tilde{L}$, имеют вид:

$$\begin{aligned}\delta\mu(y) &= -eE_0 \left[l_R \beta^0 \frac{\sinh(y/l_R)}{\cosh(W/2l_R)} + l_T c^\varepsilon \frac{c^\varepsilon \beta^0 - \beta^\varepsilon}{c^{\varepsilon\varepsilon} - (c^\varepsilon)^2} \frac{\sinh(c'y/l_T)}{c' \cosh(c'W/2l_T)} \right], \\ \delta T(y) &= e E_0 l_T \frac{c^\varepsilon \beta^0 - \beta^\varepsilon}{c^{\varepsilon\varepsilon} - (c^\varepsilon)^2} \frac{\sinh(c'y/l_T)}{c' \cosh(c'W/2l_T)},\end{aligned}\quad (3.57)$$

$$J(y) = 2e^2 \sigma_{xx} E_0 \left[1 + (\beta^0)^2 \frac{\cosh(y/l_R)}{\cosh(W/2l_R)} + \frac{(c^\varepsilon \beta^0 - \beta^\varepsilon)^2}{c^{\varepsilon\varepsilon} - (c^\varepsilon)^2} \frac{\cosh(c'y/l_T)}{c' \cosh(c'W/2l_T)} \right],$$

где $\beta^0 = \sigma_{xy}/\sigma_{xx} \sim B$, $\beta^\varepsilon = \alpha_{xy}/\sigma_{xx} \sim B$, $c^\varepsilon = \alpha_{xx}/\sigma_{xx}$, $c^{\varepsilon\varepsilon} = \tilde{\kappa}_{xx}/\sigma_{xx}$, и $c' = [c^{\varepsilon\varepsilon} - (c^\varepsilon)^2]^{-1/2}$. Заметим, что в рассматриваемом приближении величина R^ε не вошла в результаты (3.57). С помощью формул, приведённых в Приложении D было показано, что величина $c^{\varepsilon\varepsilon} - (c^\varepsilon)^2$ всегда положительна, а величина $c^\varepsilon \beta^0 - \beta^\varepsilon$ положительна для случая $d\beta/d\varepsilon < 0$ и отрицательна при $d\beta/d\varepsilon > 0$ [здесь $\beta(\varepsilon) = \omega_c(\varepsilon)\tau(\varepsilon)$]. Будем считать, что $d\beta/d\varepsilon < 0$ и оба слагаемых в формуле (3.57) имеют одинаковый знак.

Рассмотрим случай, типичный для невырожденного полупроводника, когда величины c^ε , $c^{\varepsilon\varepsilon}$, c' порядка единицы, но не равны друг другу, и, аналогично, $\beta^0 \sim \beta^\varepsilon$, но $\beta^0 \neq \beta^\varepsilon$. Такая ситуация реализуется, например, для однослойного и двухслойного графена в точке электронной нейтральности при достаточно высокой температуре. Обозначим через β характерное значение параметра $\beta(\varepsilon)$ при $\varepsilon \sim \max(\mu_0, T_0)$. Так введенный параметр $\beta \sim B$ характеризует силу магнитного поля B ; он есть величина того же порядка, что β^0 и β^ε . Необходимо различать случаи широкого образца, $W \gg l_R$; образца средней ширины, $l_T \ll W \ll l_R$; и узкого образца, $W \ll l_T$.

Профили величин $\delta\mu(y)$, $\delta T(y)$ и $J(y)$, даваемых формулами (3.57), для всех таких образцов построены на Рис. 3.10.

Для широкого образца, $W \gg l_R, l_T$, обе функции $\delta\mu(y)$ и $\delta T(y)$ в центральной части образца экспоненциально малы. В окрестности краёв в слоях шириной l_T температура $\delta T(y)$ возрастает до значений $\pm eE_0 l_T \beta$. Распределение $\delta\mu(y)$ вблизи краев в слоях шириной l_R возрастает до значений $\pm eE_0 l_R \beta$.

Для образца средней ширины, $l_T \ll W \ll l_R$, распределение температуры такое же, как и для широкого образца. Распределение $\delta\mu(y)$ в объёме образца есть линейная функция, $eE_0 \beta y$. В узкой области вблизи краёв шириной порядка l_T функция $\delta\mu(y)$ слегка возрастает по модулю на величину $eE_0 \beta l_T \ll eE_0 \beta W/2$.

Для узкого образца температура и химический потенциал линейно зависят от координаты y , причем направления их изменения противоположны: $\delta\mu(y) \sim -eE_0 \beta y$, $\delta T(y) \sim eE_0 \beta y$.

Таким образом, только для узкого образца возмущения $\delta\mu$ и δT имеют один порядок вели-

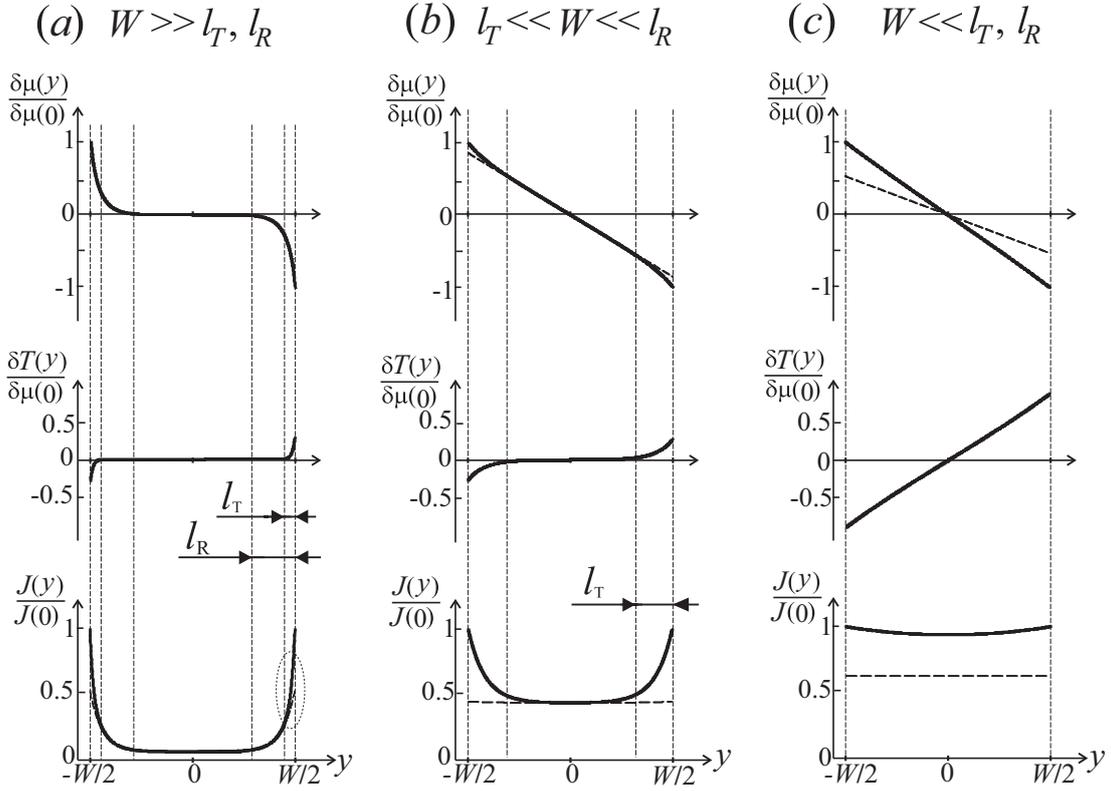


Рис. 3.10: Распределения химического потенциала, температуры и плотности электрического тока в широком образце [панель (a)], в образце средней ширины [панель (b)] и в узком образце [панель (c)] (сплошные жирные кривые). Штриховые кривые показывают результаты расчета химического потенциала и плотности электрического тока без учета потоков тепла (в рамках рассмотрения Раздела 3.2.4). На панели (a) прикраевая область, где результаты расчетов с учётом и без учёта потоков тепла различаются, выделена пунктирным эллипсом.

чины. В остальных случаях $\delta\mu \gg \delta T$. Для широкого и среднего образца, $W \gg l_T$, возмущения температуры существенны только вблизи краев в областях шириной порядка l_T .

В силу последнего из уравнений (3.57) распределение плотности электрического тока для узкого образца близко к однородному:

$$J(y) = 2e^2\sigma_{xx}E_0 \left[1 + (\beta^0)^2 + \frac{(c^\varepsilon\beta^0 - \beta^\varepsilon)^2}{c^{\varepsilon\varepsilon} - (c^\varepsilon)^2} \left(1 + \frac{c'}{2l_T^2} \left(y^2 - \frac{W^2}{4} \right) \right) \right]. \quad (3.58)$$

Малая поправка, пропорциональная y^2 , обусловлена термоэлектрическим эффектом. Для образца средней толщины распределение плотности тока внутри образца преимущественно однородно и имеет величину $2e^2\sigma_{xx}E_0[1 + \beta^2]$. Вблизи краев образца в слое толщиной порядка l_T плотность тока возрастает на величину порядка $2e^2\sigma_{xx}E_0\beta^2$. Для широкого образца в классически сильном магнитном поле, $\beta \gg 1$, ток внутри образца имеет значение $2e^2\sigma_{xx}E_0$, значительно меньшее его значений в приграничных областях, которые по порядку величины равны $2e^2\sigma_{xx}E_0\beta^2$.

3.3.3 Магнетосопротивление за счёт прикраевых слоёв с возмущенными температурой и плотностью

Рассчитаем магнетосопротивление, отвечающее полученному распределению плотности тока $J(y)$ (3.57). Для усредненного тока в размерных обозначениях получаем:

$$\bar{J} = 2e^2 E \sigma_{xx} \left\{ 1 + F\left(\frac{W}{2l_R}\right) \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}^2} + F\left(\frac{c' W}{2l_T}\right) \frac{[\sigma_{xy} \alpha_{xx} - \alpha_{xy} \sigma_{xx}]^2}{\sigma_{xx}^2 [\tilde{\kappa}_{xx} \sigma_{xx} - (\alpha_{xx})^2]} \right\}, \quad (3.59)$$

где $F(\xi) = \tanh(\xi)/\xi$ и $c' = \sigma_{xx}/\sqrt{\tilde{\kappa}_{xx}\sigma_{xx} - (\alpha_{xx})^2} \sim 1$. Проанализируем зависимость \bar{J} от магнитного поля B для образца, являющегося узким в отсутствие магнитного поля, то есть ширина которого удовлетворяет неравенству: $W \ll l_T^0 \ll l_R^0$.

В режиме малого магнитного поля, когда для всех частиц $\beta(\varepsilon) = \omega_c(\varepsilon)\tau(\varepsilon) \ll 1$, формула (3.59) приводит к малой отрицательной поправке к току, квадратичной по магнитному полю:

$$\bar{J} = J_0 \left[1 - \frac{\langle\langle \Delta x^2 \rangle\rangle \langle\langle \Delta \beta^2 \rangle\rangle - \langle\langle \Delta x \Delta \beta \rangle\rangle^2}{\langle\langle \Delta x^2 \rangle\rangle} \right], \quad (3.60)$$

где $\Delta \beta = \beta(\varepsilon) - \langle\langle \beta \rangle\rangle$; $\Delta x = x(\varepsilon) - \langle\langle x \rangle\rangle$; $x = (\varepsilon - \mu_0)/T_0$; $J_0 = 2e^2 E \sigma_0$ – ток в нулевом магнитном поле; $\sigma_0 = \int d\varepsilon \nu(\varepsilon) [-f'_F(\varepsilon)] [v(\varepsilon)^2/2] \tau(\varepsilon)$; скобки $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ означают операцию усреднения:

$$\langle\langle A(\varepsilon) \rangle\rangle = \frac{1}{\sigma_0} \int d\varepsilon \nu(\varepsilon) [-f'_F(\varepsilon)] \frac{v(\varepsilon)^2}{2} \tau(\varepsilon) A(\varepsilon). \quad (3.61)$$

В формуле (3.60) выражение в числителе дроби пропорционально B^2 и всегда неотрицательно в силу неравенства Коши-Буняковского, поэтому магнетосопротивление за счет термоэлектрического эффекта для обычной двухкомпонентной ферми-системы в малых полях всегда положительно или отсутствует.

Напомним, что нулевое магнетосопротивление реализуется, когда зависимость диагональных кинетических коэффициентов описывается друдевским фактором $[1 + \beta(\mu_0)^2]^{-1}$, а недиагональных – фактором $\beta(\mu_0)/[1 + \beta(\mu_0)^2]$. Это имеет место при вырождении электронов и дырок, когда $\mu_0 \neq 0$ и $T_0 \ll \mu_0$, а также при таких нетривиальных зависимостях циклотронной частоты и времени релаксации от энергии, что $\beta(\varepsilon) \equiv const$. Последнее имеет место, например, для однослойного графена с заряженными примесями.

В промежуточных магнитных полях, в которых при одних энергиях $\beta(\varepsilon) \gg 1$, а при других $\beta(\varepsilon) \ll 1$, зависимость $\bar{J}(B)$ (3.60) определяется конкретными особенностями спектра носителей ε_p . Например, для широкого образца однослойного графена, в котором основной вклад в ток происходит от центральной части образца и описывается объёмным тензором проводимости $\hat{\sigma}_\alpha$, результирующее магнетосопротивление в таком режиме оказывается корневым: $R_\square(B) - R_\square(0) \sim \sqrt{B}$ [179, 180].

Изучим зависимость $\bar{J}(B)$ в классически сильном магнитном поле, когда $\beta(\varepsilon) \gg 1$ при всех энергиях ε . В этом пределе кинетические коэффициенты и характерные длины имеют следующие асимптотики: $\sigma_{xx} \rightarrow S_{xx}/\beta^2$, $\alpha_{xx} \rightarrow A_{xx}/\beta^2$, $\tilde{\kappa}_{xx} \rightarrow K_{xx}/\beta^2$, $\sigma_{xy} \rightarrow S_{xy}/\beta$, $\alpha_{xy} \rightarrow A_{xy}/\beta$, $l_T \rightarrow L_T/\beta$, $l_R \rightarrow L_R/\beta$. Здесь величина $\beta = \langle \beta(x) \rangle \sim B$ имеет тот же смысл, что и ранее, и характеризует силу магнитного поля. Ниже снова будем обсуждать только случай невырожденной двумерной системы, $\mu_0 \ll T_0$, когда все коэффициенты S_{xx} , A_{xx} , K_{xx} , S_{xy} и A_{xy} – одного порядка величины. В этом пределе из формулы (3.59) получаем:

$$\bar{J}(\beta) = J_1 \left[F\left(\frac{\beta}{\beta_R}\right) + q F\left(\frac{\beta}{\beta_T}\right) \right]. \quad (3.62)$$

Здесь $J_1 = 2e^2 E S_{xy}^2 / S_{xx}$ – величина того же порядка, что и J_0 в формуле (3.60); $\beta_T = 2L_T / W c'_\infty \gg 1$ и $\beta_R = 2L_R / W \gg \beta_T$ – характерные значения параметра β , при которых происходит смена режимов в поведении $\bar{J}(\beta)$; коэффициенты $c'_\infty = S_{xx} / \sqrt{K_{xx} S_{xx} - A_{xx}^2}$ и $q = (A_{xx} S_{xy} - A_{xy} S_{xx})^2 / [(K_{xx} S_{xx} - A_{xx}^2) S_{xy}^2]$ – величины порядка единицы. Ниже будет использовано, что функция $F(\xi) = \tanh(\xi) / \xi$ имеет асимптотики:

$$F(\xi) = \begin{cases} 1 - \xi^2/3, & \xi \rightarrow 0 \\ 1/\xi, & \xi \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (3.63)$$

Из формулы (3.62) видно, что зависимость тока от магнитного поля различна в областях $1 \ll \beta \ll \beta_T$, $\beta_T \ll \beta \ll \beta_R$, $\beta \gg \beta_R$. В области $1 \ll \beta \ll \beta_T$ с учётом неравенства $L_T \ll L_R$ асимптотика (3.63) даёт:

$$\bar{J}(\beta) = J_1 \left(1 + q - \frac{q \beta^2}{3 \beta_T^2} \right). \quad (3.64)$$

В области $\beta_T \ll \beta \ll \beta_R$ асимптотика (3.63) даёт:

$$\bar{J}(\beta) = J_1 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\beta^2}{\beta_R^2} + \frac{q \beta_T}{\beta} \right). \quad (3.65)$$

Из этой формулы видно, что существует пограничное значение параметра β , $\beta_{TR} = \sqrt[3]{3q\beta_T\beta_R^2}$. В магнитных полях $\beta_T \ll \beta \ll \beta_{TR}$ зависимость тока от магнитного поля определяется преимущественно термоэлектрическим эффектом (слагаемое $q\beta_T/\beta$), в то время как в магнитных полях $\beta_{TR} \ll \beta \ll \beta_R$ поведение $\bar{J}(\beta)$ контролируется преимущественно процессами рекомбинации (слагаемое $-\beta^2/3\beta_R^2$). В области $\beta \gg \beta_R$ из формул (3.62) и (3.63) получаем:

$$\bar{J}(\beta) = J_1 \frac{\beta_R}{\beta}. \quad (3.66)$$

График сопротивления, $R_\square(\beta) = E/\bar{J}(\beta)$ от β , отвечающий только что описанной зависимости среднего тока $\bar{J}(\beta)$ от магнитного поля β , приведены на Рис. 3.11.

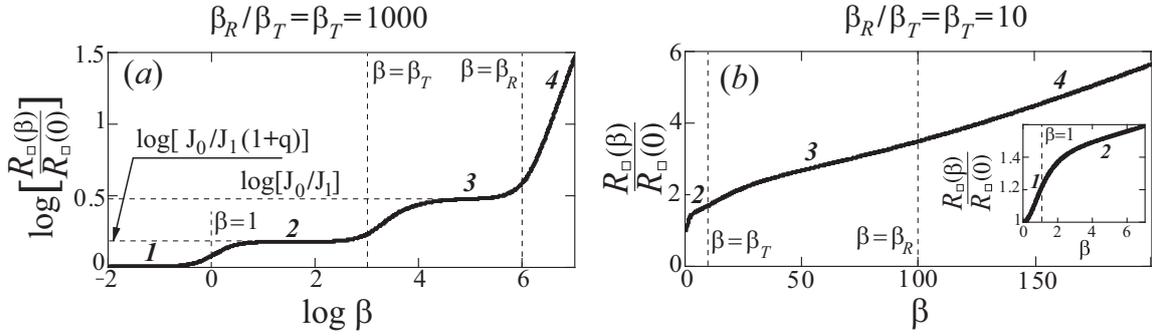


Рис. 3.11: Зависимость относительной величины сопротивления от магнитного поля для узкого образца при очень больших (а) и умеренно больших (б) значениях параметров β_R и β_T . Первый участок от плато “1” до плато “2” (переход при $\beta = 1$) отвечает магнетосопротивлению в однородной системе, связанному с отличием параметров у электронов с разными энергиями и термоэлектрическим эффектом; рассеяние с передачей энергии незначительно [начальный регион $\beta \ll 1$ описывается формулой (3.60)]. Второй участок от плато “2” до плато “3” (переход при $\beta = \beta_T$) соответствует магнетосопротивлению за счёт термоэлектрических эффектов, рассеянию на фононах с изменением энергии и формированию приграничных слоев с возмущенной температурой [электрическое поле вызывает тепловой поток, который влияет на электрический ток; R_\square описывается формулами (3.62), (3.64) и (3.65)]. Третий участок от плато “3” до участка “4” отвечает магнетосопротивлению за счёт рекомбинации и диффузии, описанному в Разделе 3.2 [описывается формулами (3.65) и (3.66)]. Такой ход магнетосопротивления хорошо проявляется для очень больших параметров β_R и β_T [панель (а)] и проявляется в сильно сглаженном виде для более реалистичного случая умеренно больших β_R и β_T [панель (б)].

Поведение магнетосопротивления в области полей $\beta \gg \beta_{TR}$ с точностью до величин порядка L_T/L_R оказывается таким же, как было получено в Разделе 3.2 для узкого образца без учёта возмущения температуры: очень медленный квадратичный рост $R_\square(\beta)$ при $\beta < \beta_R$ сменяется линейным ростом, $R_\square(\beta) \sim \beta$, при $\beta > \beta_R$ (см. Рис. 3.11).

В области полей $\beta \ll \beta_{TR}$ зависимость $R_\square(\beta)$ имеет нетривиальный характер. При классически слабых и умеренных магнитных полях, $\beta \sim 1$, сопротивление R_\square возрастает на величину порядка своего значения при $\beta = 0$, и насыщается при $\beta \gg 1$. При переходе параметром β значения β_T сопротивление R_\square ещё возрастает на величину порядка $R_\square(0)$, и затем снова насыщается при $\beta \gg \beta_T$.

Однако, такое ступенеобразное поведение магнетосопротивления $R_\square(B)$ реализуется только в случае, когда величины W , L_T и L_R имеют очень сильно различающиеся порядки величины [см. Рис. 3.11(а)]. Если порядки величин W , L_T и L_R относительно близки (хотя и выполнено неравенство $W \ll L_T \ll L_R$), поведение функции $R_\square(B)$ является более плавным: без участков насыщения, но с изменением характера кривизны графика $R_\square(B)$ на различных участках [см. Рис. 3.11(б)].

Таким образом, в случае, если рекомбинация электронов и дырок происходит значительно медленнее их теплообмена с фононами, в достаточно большом магнитном поле B , когда начинает выполняться неравенство $l_T \ll l_R \ll W$, потоки электронов и дырок почти всюду в образце определяются рассеянием носителей на дефектах, диффузией и рекомбинацией. При этом в

нулевом магнитном поле образец может быть как узким по сравнению с ширинами l_T^0 и l_R^0 , так и широким [последний случай явно не рассматривался выше, однако его рассмотрение может быть выполнено на основе общей формулы (3.59)]. В полях B , отвечающих промежуточным $l_T(B)$ и $l_R(B)$, $l_T \lesssim W \ll l_R$, реализуется режим, в котором определяющую роль играют процессы теплообмена. Существенный вклад в электрический ток дают неравновесные потоки электронов и дырок, связанные с градиентом температуры [сравните штриховые и сплошные кривые на Рис. 3.10(b,c)]. Величины таких потоков определяются балансом между термоэлектрическими эффектами, теплопроводностью и теплообменом с равновесными фононами.

3.4 Магнетосопротивление за счёт вязкости и рекомбинации

3.4.1 Балансовые уравнения на потоки электронов и дырок с учётом вязкости и рекомбинации

Рассмотрим двумерную двухкомпонентную электрон-дырочную проводящую систему с малой плотностью дефектов в точке электронейтральности, $n_{0,e} = n_{0,h}$. Будем изучать только такие течения, для которых возмущения плотности электронов и дырок одинаковы: $\delta n_e = \delta n_h$. Для простоты считаем, что все параметры электронов и дырок (кроме знака заряда) совпадают. Энергетический спектр носителей $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ предполагается параболическим: $\varepsilon_{\mathbf{p}} = p^2/2m$.

Гидродинамический подход предполагает, что наиболее быстрым релаксационным процессом является термализация функций распределения носителей за счёт столкновений носителей каждого типа между собой. В частности, это означает, что время релаксации второй угловой гармоники функции распределения носителей τ_{ee} намного меньше времени электрон-дырочной рекомбинации τ_R , времен релаксации импульсов носителей заряда при их рассеянии на дефектах τ , а также на носителях другого типа, τ_{eh} : $\tau_{ee} \ll \tau_R, \tau, \tau_{eh}$.

Уравнения неразрывности для электрон-дырочной системы в точке зарядовой нейтральности имеют вид:

$$\frac{\partial \delta n_{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\alpha} = -\frac{\delta n_{\alpha} + \delta n_{\bar{\alpha}}}{2\tau_R}, \quad (3.67)$$

где индекс α , как и в прошлых разделах, означает тип частиц, а линия над индексом α означает противоположный тип частиц: $\bar{\alpha} = e$ для $\alpha = h$ и $\bar{\alpha} = h$ для $\alpha = e$. Правые части уравнений (3.67) описывают рекомбинацию и приводят к ненулевому значению дивергенции потоков.

Балансовые уравнения для потоков носителей \mathbf{j}_{α} с учётом эффектов вязкости, рекомбина-

ции и диффузии имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{j}_\alpha}{\partial t} = & \frac{e_\alpha n_0}{m} \mathbf{E} + \omega_{c,\alpha} [\mathbf{j}_\alpha \times \mathbf{e}_z] - \frac{\langle v^2 \rangle}{2} \frac{1}{\nu_0} \nabla \delta n_\alpha, - \frac{\mathbf{j}_\alpha}{\tau} - \frac{\mathbf{j}_\alpha - \mathbf{j}_{\bar{\alpha}}}{2\tau_{eh}} + \\ & + \eta_{xx} \Delta \mathbf{j}_\alpha + \eta_{xy,\alpha} [\mathbf{e}_z \times \Delta \mathbf{j}_\alpha] + \zeta \nabla \operatorname{div} \mathbf{j}_\alpha, \end{aligned} \quad (3.68)$$

Магнитное поле \mathbf{B} , как всюду в этой главе, направлено вдоль нормали к двумерному слою \mathbf{e}_z , $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Циклотронная частота имеет вид: $\omega_{c,\alpha} = e_\alpha B/mc = (e_\alpha/e)\omega_c$. Средние значения по энергии $\nu_0 = \langle 1 \rangle$ и $\langle v^2 \rangle = (2/m)\langle \varepsilon \rangle$ определены формулой (3.30). Для квадратичного спектра носителей плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ не зависит от энергии: $\nu(\varepsilon) = N_{deg}m/(2\pi\hbar^2)$ [N_{deg} – фактор вырождения зонных состояний носителей]. Величины η_{xx} $\eta_{xy,\alpha}$ – сдвиговые вязкости, определяемые формулами (1.20). Величина ζ – объёмный коэффициент вязкости.

В уравнении (3.68), во-первых, учитывается гидростатическая сила давления, пропорциональная градиенту давления жидкости [слагаемое $-\langle v^2 \rangle \nabla \delta n^\alpha / 2\nu_0$] и сила Лоренца от внешних электрических и магнитных полей. Также учитываются релаксация импульса носителей заряда из-за рассеяния носителей на беспорядке (слагаемые $-\mathbf{j}_\alpha/\tau$) и на носителях противоположного знака заряда [слагаемые $-(\mathbf{j}_\alpha - \mathbf{j}_{\bar{\alpha}})/(2\tau_{eh})$]. В уравнении (3.68) учитываются как сдвиговые вязкости, так и объёмная вязкость. Последний эффект может быть важен в рассматриваемой задаче, так как рекомбинация электронов и дырок приводит к ненулевому значению дивергенции $\operatorname{div} \mathbf{j}_\alpha$. Выполненный анализ, аналогичный расчёту коэффициентов сдвиговой вязкости в Разделе 1.2.2, показывает что коэффициент ζ не зависит от магнитного поля.

Для течения общего вида вектор $\Delta \mathbf{j}_\alpha$, вообще говоря, не сонаправлен с направлением потоков \mathbf{j}_α . Поэтому вектор $\Delta \mathbf{j}_\alpha$ можно разделить на две составляющие: направленные вдоль и перпендикулярно \mathbf{j}_α : $\Delta \mathbf{j}_\alpha = (\Delta \mathbf{j}_\alpha)_{||} + (\Delta \mathbf{j}_\alpha)_{\perp}$. Это разложение очень важно для слагаемого в уравнении (3.68) с недиагональным коэффициентом сдвиговой вязкости, $\eta_{xy,\alpha}[\mathbf{e}_z \times \Delta \mathbf{j}_\alpha]$. В этом слагаемом его часть, соответствующая параллельной составляющей вектора $\Delta \mathbf{j}_\alpha$, $\eta_{xy,\alpha}[\mathbf{e}_z \times (\Delta \mathbf{j}_\alpha)_{||}]$, сонаправлена с силой Лоренца $\omega_{c,\alpha}[\mathbf{e}_z \times \mathbf{j}_\alpha]$. Отношение недиагонального слагаемого вязкости и слагаемого $\omega_{c,\alpha}[\mathbf{e}_z \times \mathbf{j}_\alpha]$ оценивается величиной $\tau_{ee}\eta_{xx}/\Delta x^2$, где Δx – характерный размер неоднородности течения. В малых магнитных полях, $\omega_c\tau_{ee} \ll 1$, это отношение оценивается величиной $\sim l_{ee}^2/\Delta x^2$, которая должна быть много меньше единицы для применимости гидродинамического подхода. В больших полях, $\omega_c\tau_{ee} \gg 1$, отношение $\tau_{ee}\eta_{xx}/\Delta x^2$ оценивается как $\sim R_c^2/\Delta x^2$, что тоже должно быть много меньше единицы для применимости гидродинамики. Это указывает на то, что следует пренебречь вкладом $\eta_{xy,\alpha}[\mathbf{e}_z \times (\Delta \mathbf{j}_\alpha)_{||}]$ по сравнению со слагаемым от силы Лоренца $\omega_{c,\alpha}[\mathbf{e}_z \times \mathbf{j}_\alpha]$ и оставить толь-

ко вклад $\eta_{xy,\alpha}[\mathbf{e}_z \times (\Delta \mathbf{j}_\alpha)_\perp]$, содержащий холловскую вязкость.

Граничные условия для случая шероховатых продольных краев образца ∂G , отвечающие диффузному рассеянию на них электронов и дырок, имеют вид: $\mathbf{j}_\alpha|_{\partial G} = 0$.

Введём обозначения, аналогичные обозначениям в прошлых разделах этой главы: $\varrho_0 = 2n_0$ – полная плотность частиц, $\delta\varrho = 2\delta n_e = 2\delta n_h$ – её возмущение, $\mathbf{P} = \mathbf{j}_h + \mathbf{j}_e$ – полный поток частиц, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_h - \mathbf{j}_e$ – величина, пропорциональная плотности электрического тока, $\mathbf{j} = \mathbf{J}/(-e)$. Складывая и вычитая друг из друга уравнения (3.67) и (3.68), получим уравнения непрерывности на величины $\delta\varrho$ и $\delta n \equiv 0$:

$$\frac{\partial \delta\varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{\delta\varrho}{\tau_R}, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (3.69)$$

и гидродинамические уравнения Навье-Стокса на потоки \mathbf{j} и \mathbf{P} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} &= \omega_c[\mathbf{e}_z \times \mathbf{j}] - \frac{\langle v^2 \rangle}{2\nu_0} \nabla \delta\varrho - \frac{\mathbf{P}}{\tau} + \eta_{xx} \Delta \mathbf{P} + \eta_{xy}[\mathbf{e}_z \times \Delta \mathbf{j}_\perp \mathbf{j}] + \zeta \nabla \operatorname{div} \mathbf{P}, \\ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} &= \frac{e\varrho_0}{m} \mathbf{E} + \omega_c[\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}] - \frac{\mathbf{j}}{\tau} - \frac{\mathbf{j}}{\tau_{eh}} + \eta_{xx} \Delta \mathbf{j} + \eta_{xy}[\mathbf{e}_z \times \Delta \mathbf{P}_\perp \mathbf{P}] + \zeta \nabla \operatorname{div} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Здесь индексы “ $\perp \mathbf{j}$ ” и “ $\perp \mathbf{P}$ ” обозначают компоненты вектора, перпендикулярные направлениям векторов \mathbf{j} и \mathbf{P} в данной точке.

Как и в задаче о гидродинамическом течении в неупорядоченной системе с учётом потоков тепла, для сохранения зарядовой нейтральности необходимо наложить ограничение типа (3.52) на форму потоков. Для задачи настоящего раздела о гидродинамическом течении двухкомпонентной вязкой жидкости нужно потребовать, чтобы градиент полной плотности частиц, $\nabla \delta\varrho$, был перпендикулярен электрическому полю $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ всюду в образце.

3.4.2 Решение балансовых уравнений

Как и в прошлом разделе, изучим течение электрон-дырочной жидкости для простейшей геометрии Пуазейля. А именно, рассмотрим длинный образец с шероховатыми краями с шириной W и длиной $L \gg W$. Как обычно, выбираем координату x вдоль образца, а координату y – вдоль поперечного сечения образца. Электрическое поле от приложенного внешнего напряжения имеет вид $\mathbf{E} = (E_0, 0)$. В такой геометрии все величины зависят только от координаты y . Уравнения (3.70) для такой геометрии приводят к следующей геометрии течений: полный поток квазичастиц \mathbf{P} направлен вдоль оси y , а поток \mathbf{j} направлен вдоль оси x : $\mathbf{P}(\mathbf{r}) = [0, P(y)]$, $\mathbf{j} = [j(y), 0]$.

Для стационарного течения в описанной геометрии балансовые гидродинамические урав-

нения приобретают вид:

$$\begin{cases} \omega_c j - \frac{\langle v^2 \rangle}{2} \frac{1}{\nu_0} \delta \varrho' - \frac{P}{\tau} + (\eta_{xx} + \zeta) P'' + \eta_{xy} j'' = 0 \\ \frac{e \varrho_0}{m} E_0 - \omega_c P - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{eh}} \right) j + \eta_{xx} j'' - \eta_{xy} P'' = 0 \\ P' = -\frac{\delta \varrho}{\tau_R} \end{cases} \quad (3.71)$$

На продольных краях образца граничные условия $\mathbf{j}_\alpha|_{\partial G} = 0$, описывающие диффузное рассеяние частиц, дают:

$$j|_{y=\pm W/2} = 0, \quad P|_{y=\pm W/2} = 0. \quad (3.72)$$

Для удобства, введём в уравнении (3.71) следующие дополнительные обозначения: $j_0 = (e \varrho_0 \tau_{eh} / m) E_0$, $\beta_{eh} = \omega_c \tau_{eh}$, $l_0 = \sqrt{\langle v^2 \rangle \tau_{eh} \tau_R / 2 \nu_0}$, $l_G = \sqrt{\tau_{eh} \eta_{xx}}$, $\tilde{l}_G = \sqrt{\tau_{eh} (\eta_{xx} + \zeta)}$, $\beta_{ee} = 2 \omega_c \tau_{ee}$, $\gamma = \tau_{eh} / \tau$. В этих обозначениях имеем: $\beta_{ee} l_G^2 = \tau_{eh} \eta_{xy}$. Балансовые уравнения (3.71) принимают вид:

$$\begin{cases} \beta_{eh} j + l_0^2 P'' - \gamma P + (\tilde{l}_G)^2 P'' + \beta_{ee} l_G^2 j'' = 0 \\ j_0 - \beta_{eh} P - (\gamma + 1) j + l_G^2 j'' - \beta_{ee} l_G^2 P'' = 0 \end{cases} \quad (3.73)$$

В данном разделе электрон-электронные и дырочно-дырочные столкновения являются самым быстрым процессом, поэтому $\tau_{ee} \ll \tau_R$, τ_{eh} и $l_0 \gg l_G, \tilde{l}_G$. Благодаря последним неравенствам, слагаемым $(\tilde{l}_G)^2 P''$ в уравнении (3.73) можно пренебречь по сравнению со слагаемым $l_0^2 P''$. В силу плоской геометрии течения имеем: $\Delta \mathbf{j} \parallel \mathbf{j}$ и $\Delta \mathbf{P} \parallel \mathbf{P}$. Поэтому в соответствии с обсуждением слагаемого с недиагональной вязкостью в прошлом разделе, пренебрегаем слагаемыми $\beta_{ee} l_G^2 j''$ и $-\beta_{ee} l_G^2 P''$ по сравнению со слагаемыми от силы Лоренца $\beta_{eh} j$ и $-\beta_{eh} P$. Будем дополнительно предполагать, что рассеяние каждого типа носителей на беспорядке – это более медленный процесс, чем рассеяние электронов на дырках: $\tau_{eh} \ll \tau$ ($\gamma \ll 1$).

Благодаря таким упрощениям, система балансовых уравнений (3.73) упрощается:

$$\begin{cases} \beta_{eh} j + l_0^2 P'' - \gamma P = 0 \\ j_0 - \beta_{eh} P + l_G^2 j'' - j = 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

Эти уравнения можно переписать в матричном виде следующим образом:

$$X'' = A(X - b), \quad (3.75)$$

$$X = \begin{pmatrix} P \\ j \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \gamma / l_0^2 & \beta_{eh} / l_0^2 \\ -\beta_{eh} / l_G^2 & 1 / l_G^2 \end{pmatrix}, \quad b = \frac{j_0}{\gamma + \beta_{eh}^2} \begin{pmatrix} -\beta_{eh} \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (3.75) тоже выражается в матричном виде через функцию гиперболический косинус от матрицы. С учётом граничных условия (3.72) получаем:

$$X(y) = \left[\hat{I} - \cosh \left(A^{1/2} y \right) \cosh^{-1} \left(A^{1/2} W / 2 \right) \right] b, \quad (3.76)$$

где \hat{I} – единичная матрица 2×2 .

Корни секулярного уравнения для матрицы A имеют вид:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{l_0^2} + \frac{1}{l_G^2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\gamma}{l_0^2} - \frac{1}{l_G^2} \right)^2 - \frac{\beta_{eh}^2}{l_0^2 l_G^2}}. \quad (3.77)$$

В зависимости от соотношений между параметрами τ_R , τ_{ee} и τ_{eh} и величиной магнитного поля, корни этого уравнения являются комплексными сопряжёнными числами или вещественными числами.

Используя формулы Сильвестра для функции от матрицы [181] и решение (3.76), получаем выражение для полного тока $I = e \int_{-W/2}^{W/2} dy j(y)$:

$$I = ej_0 W \left[\frac{\gamma}{\gamma + \beta_{eh}^2} + \frac{F(\lambda_+, \lambda_-) - F(\lambda_-, \lambda_+)}{\lambda_+ - \lambda_-} \right], \quad (3.78)$$

$$F(\lambda', \lambda'') = f \left(\frac{\sqrt{\lambda'} W}{2} \right) \left[\lambda'' \frac{\gamma}{\gamma + \beta_{eh}^2} - \frac{1}{l_G^2} \right].$$

Напомним, что введенная выше функция $F(\xi) = \tanh(\xi)/\xi$ имеет асимптоты (3.63). Если корни λ_{\pm} имеют ненулевые мнимые части, $\lambda_{\pm} = \text{Re } \lambda_+ \pm i \text{Im } \lambda_+$, формула (3.78) может быть записана в виде:

$$I = ej_0 W \left[\frac{\gamma}{\gamma + \beta_{eh}^2} + \frac{\text{Im } F(\lambda_+, \lambda_+^*)}{\text{Im } \lambda_+} \right]. \quad (3.79)$$

3.4.3 Результаты для случая медленной рекомбинации

Будем считать, что температура двухкомпонентной системы являются низкой и поэтому равновесное распределения носителей вырожденное. Это предположение не является принципиальным для решаемой задачи, оно вводится для удобства проведения оценок.

Рассмотрим случай, когда рекомбинация является достаточно медленной:

$$\tau_R \gg \frac{\tau_{eh}^2}{\tau_{ee}}. \quad (3.80)$$

При таком неравенстве длина релаксации импульса при электрон-дырочных столкновениях, $l_{eh} = v_F \tau_{eh}$, много меньше, чем рекомбинационная длина относительно электрон-электронных столкновений, $l_{R, ee} = \sqrt{\eta_{xx} \tau_R} : l_{eh} \ll l_{R, ee}$. Введём также рекомбинационную длину, учитывающую как электрон-дырочное рассеяние, так и рассеяние на беспорядке: $l_R(B) = l_0 / \sqrt{\gamma + \beta_{eh}^2}$. Заметим, что вязкостная характерная длина (“длина Гуржи”) зависит от магнитного поля похожим образом: $l_G(B) = l_G(0) / \sqrt{1 + \beta_{ee}^2}$. Из уравнения (3.80) получаем, что выполнены как

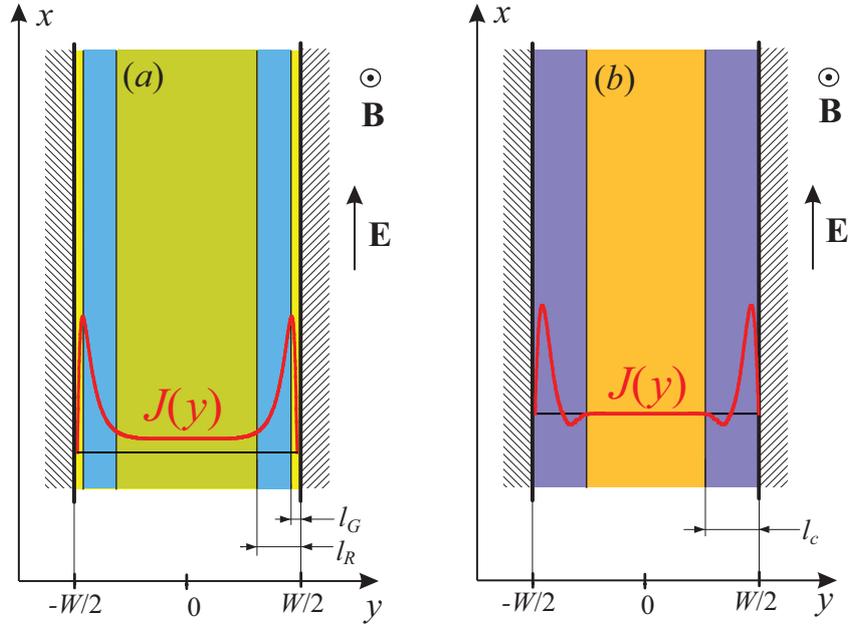


Рис. 3.12: Течения различных типов в электрон-дырочных системах в длинных чистых образцах при наличии магнитного и электрического полей \mathbf{B} и \mathbf{E} . Панели (a) и (b) отвечают случаям медленной и быстрой рекомбинации. Показаны также распределения плотности электрического тока $\mathbf{J}(y)$. Видно, что с случае (b) существуют области, где плотность тока направлена противоположно электрическому полю.

неравенство $l_G(B=0) \ll l_0$, так и аналогичное неравенство $l_G(B) \ll l_R(B)$ при ненулевых магнитных полях. В связи с этими оценками, корни уравнения (3.77) становятся вещественными и сильно различными по величине:

$$\lambda_+ \approx l_G^{-2}, \quad \lambda_- \approx l_R^{-2}, \quad \lambda_+ \gg \lambda_- . \quad (3.81)$$

В силу уравнения (3.76), для широкого образца, $W \gg l_R, l_G$, около каждого из краёв возникают два слоя с ширинами $l_R(B)$ и $l_G(B)$ [см. Рис. 3.12(a)]. В слоях $l_G < W/2 - |y| < l_R$ профили потоков $P(y)$ и $j(y)$ обусловлены рекомбинацией и диффузией, в то время как в слоях $0 < W/2 - |y| < l_G$ потоки $j(y)$ и $P(y)$ определяются эффектом сдвиговой вязкости.

Общая формула (3.78) приводит к следующему результату для полного тока:

$$I = e j_0 W \left\{ \frac{\beta_{eh}^2}{\gamma + \beta_{eh}^2} \left[F\left(\frac{W}{2l_R}\right) - 1 \right] + \left[1 - F\left(\frac{W}{2l_G}\right) \right] \right\} . \quad (3.82)$$

Зависимость I от магнитного поля B определяется соотношением между шириной образца W и характерными длинами l_G и l_R в нулевом магнитном поле.

Ниже приводятся последовательно результаты для случаев широкого [$W \gg l_R(0)$], среднего [$l_G(0) \ll W \ll l_R(0)$], и узкого образцов [$W \ll l_G(0)$]. Для каждого из этих случаев, будет рассмотрен весь интервал магнитных полей от нулевого до максимально больших полей, допускаемых в развитой теории.

(i) Для широких образцов, $W \gg l_R(0)$, уравнения (3.63) и (3.82) для усредненного сопротивления $R_{\square} = E_0 W / I$ дают:

$$R_{\square}(B) = \varrho_D \frac{\gamma + \beta_{eh}^2}{\gamma + \beta_{eh}^2 \frac{2l_0}{W \sqrt{\gamma + \beta_{eh}^2}}}, \quad (3.83)$$

где $\varrho_D = m / \varrho_0 e^2 \tau_{eh}$ – друдевское сопротивление за счёт электрон-дырочных столкновений. В соответствии с формулой (3.83), магнетосопротивление параболично в малых полях и линейно в больших полях:

$$R_{\square}(B) = \varrho_D \times \begin{cases} \frac{\gamma + \beta_{eh}^2}{\gamma}, & \omega_c \tau \ll W / l_0 \\ \frac{W}{2l_0} \beta_{eh}, & \omega_c \tau \gg W / l_0 \end{cases}. \quad (3.84)$$

В сильных магнитных полях, $\omega_c \tau \gg W / l_0$, формируются приграничные слои, в которых поток носителей направлен почти вдоль краёв. Полный ток определяется шириной прикраевых слоёв, которая равна длине рекомбинации $l_R(B)$. Влияние вязкости в этом случае несущественно.

(ii) Для образцов средних ширин, $l_G(0) \ll W \ll l_R(0)$, уравнения (3.63) и (3.82) приводят к следующему магнетосопротивлению:

$$R_{\square}(B) = \varrho_D \times \begin{cases} 1 + \frac{2l_G(0)}{W \sqrt{1 + \beta_{ee}^2}}, & W \ll l_R \\ \frac{W}{2l_0} \beta_{eh}, & l_R \ll W \end{cases}. \quad (3.85)$$

Линейное магнетосопротивление в режиме сильных полей, когда $l_R \ll W$ также обусловлено формированием прикраевых слоёв. Эффект вязкости определяет небольшую поправку $2l_G(0)(1 + \beta_{ee}^2)^{-1/2} \varrho_D / W$ к удельному сопротивлению Друде ϱ_D в режиме $W \ll l_R$, что приводит к малому отрицательному магнетосопротивлению.

(iii) В случае узких образцов, $W \ll l_G(0) \ll l_R(0)$, используя неравенства $\tau_{eh} \gg \tau_{ee}$ и $\gamma \ll 1$, из уравнений (3.63) и (3.82) получаем следующий результат:

$$R_{\square}(B) = \varrho_D \times \begin{cases} 12 \frac{l_G(0)^2}{W^2} \frac{1}{1 + \beta_{ee}^2}, & W \ll l_G \\ 1, & l_G \ll W \ll l_R \\ \frac{W}{2l_0} \beta_{eh}, & l_R \ll W \end{cases}. \quad (3.86)$$

В силу малых поправок (они не приводятся), в режиме $l_G \ll W \ll l_R$ функция $R_{\square}(B)$ (3.86) имеет минимум при магнитном поле B_m , которое оценивается из соотношения $l_G l_R^2 \sim W^3$.

Из уравнения (3.86) получаем, что магнетосопротивление $[R_{\square}(B) - R_{\square}(0)] / R_{\square}(0)$ для очень узких образцов является сильным и отрицательным при относительно малых магнитных полях

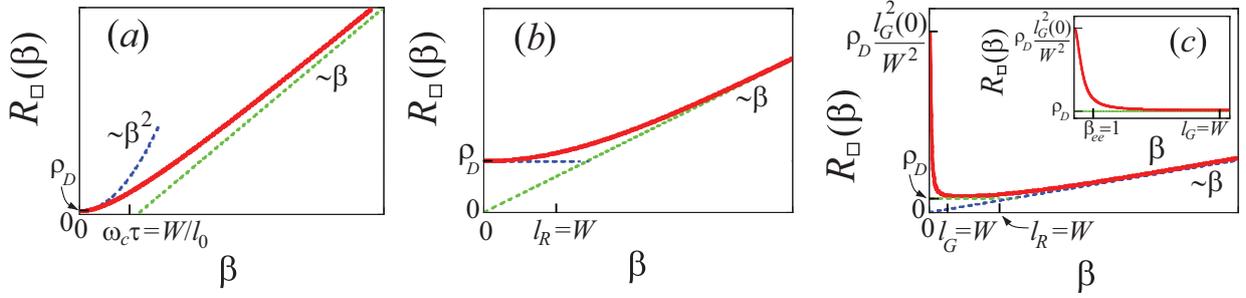


Рис. 3.13: Магнетосопротивление электрон-дырочной системы в точке электронейтральности в чистом длинном образце в случае медленной рекомбинации для широкого [$W \gg l_R(0)$], среднего [$l_G(0) \ll W \ll l_R(0)$], и узкого [$W \ll l_G(0)$] образцов. Вставка на панели (c) показывает график $R_{\square}(\beta)$ в диапазоне малых β .

$0 < \beta_{ee} \ll l_G(0)/W$. В этом случае электроны и дырки достигают краёв и теряют импульс при рассеянии на них быстрее, чем при рассеянии друг на друге. В связи с этим, формируется вязкое течение Пуазейля для каждой из компонент электрон-дырочной жидкости. Напомним, что для реализации такого течения должны быть выполнены следующие неравенства: $W \gg l_{ee}$ при $\omega_c \tau_{ee} \ll 1$ или же $W \gg R_c$ при $\omega_c \tau_{ee} \gg 1$.

В интервале магнитных полей, отвечающих неравенству $l_G(B) \ll W \ll l_R(B)$, носители теряют свой импульс преимущественно в столкновениях электронов и дырок. В этом случае сопротивление описывается обычными формулами Друде. Магнетосопротивление мало по сравнению с единицей.

Зависимости (3.84)-(3.86) показаны на Рис. 3.13.

3.4.4 Результаты для случая быстрой рекомбинации

Рассмотрим случай быстрой рекомбинации, когда для τ_R выполнено неравенство:

$$\tau_{ee} \ll \tau_R \ll \frac{\tau_{eh}^2}{\tau_{ee}}. \quad (3.87)$$

В этом режиме длина пробега относительно релаксации импульса за счёт электрон-дырочных столкновений в нулевом магнитном поле, $l_{eh} = v_F \tau_{eh}$, становится много больше, чем рекомбинационная длина относительно межэлектронных столкновений, $l_{R,ee} = \sqrt{\eta_{xx} \tau_R}$.

Из неравенств $l_G(0) \ll l_0$ и (3.87) видно, что характеристические числа λ_{\pm} являются вещественными и при этом $\lambda_{+} \gg \lambda_{-}$ для магнитных полей, удовлетворяющих соотношению $\omega_c^2 \ll \tau_R / \tau_{ee} \tau_{eh}^2$. Таким образом, в малых магнитных полях, $\omega_c^2 \ll \tau_R / \tau_{ee} \tau_{eh}^2$, можно использовать все результаты, полученные выше для случая медленной рекомбинации. Заметим, что в этом интервале выполнено неравенство $\omega_c \tau_{ee} \ll 1$.

При магнитном поле, даваемом оценкой $\omega_c^2 \sim \tau_R / \tau_{ee} \tau_{eh}^2$, характеристические числа λ_{\pm} (3.77) становятся комплексными. Такое магнитное поле соответствует равенству вязкостной длины

Гуржи l_G длине рекомбинации l_R . При более высоких магнитных полях, $\omega_c^2 \gg \tau_R/\tau_{ee}\tau_{eh}^2$, оказывается справедливым неравенство $l_G \gg l_R$ и поэтому корни λ_{\pm} становятся полностью мнимыми (при достаточно малых γ):

$$\lambda_{\pm} \approx \pm \frac{i}{l_c^2}, \quad l_c = \sqrt{l_R l_G} = \frac{v_F \sqrt[4]{\tau_R \tau_{ee}}}{\sqrt{\omega_c} \sqrt[4]{1 + \beta_{ee}^2}}. \quad (3.88)$$

Отсюда следует, что потоки $P(y)$ и $j(y)$, даваемые (3.76), имеют один характерный масштаб l_c .

Для достаточно широкого образца, $W \gg l_c$, зависимости потоков от координаты вдоль сечения образца, $P(y)$ и $j(y)$, отвечающие уравнению (3.88), имеют осциллирующий около краёв и затухающий в направлении объёма образца профиль. Например, для $j(y)$ было получено:

$$j(y) \sim \sin\left(\frac{W/2 - |y|}{\sqrt{2} l_c}\right) e^{-\frac{W/2 - |y|}{\sqrt{2} l_c}} \quad (3.89)$$

при $0 < W/2 - |y| \lesssim l_c$ [см. Рис. 3.12(b)]. Такое распределение плотности тока с участками, где $j(y) < 0$, можно понимать как разрушение в окрестностях краёв бездиссипативного потока ЕН-дрейфа, $j(y) = 0$, $P(y) = j_0/\beta_{eh} = \varrho_0 c(E_0/B)$, формирующегося в центральной области образца. Форма и величина потока в области “смятия” течения, $0 < W/2 - |y| \lesssim l_c$, определяется балансом трёх эффектов: эффекта вязкости [и граничного условия прилипания (3.72)], эффекта рекомбинации и поворота потоков \mathbf{j}_{α} магнитным полем.

Расчёт плотности тока по формуле (3.79) в больших магнитных полях, отвечающих неравенству, $\omega_c^2 \gg \tau_R/(\tau_{ee}\tau_{eh}^2)$, даёт:

$$I = e j_0 W \left\{ \frac{\gamma}{\beta_{eh}^2} \left[1 - \operatorname{Re} f\left(\sqrt{i} \frac{W}{2l_c}\right) \right] - \frac{l_R}{l_G} \operatorname{Im} f\left(\sqrt{i} \frac{W}{2l_c}\right) \right\}. \quad (3.90)$$

Для образцов с ширинами $W \ll l_c$ уравнения (3.63) и (3.90) дают результат:

$$I = e j_0 \frac{W^3}{12 l_G^2}, \quad (3.91)$$

отвечающий течению Пуазейля. Для ширин образцов $W \gg l_c$ уравнения (3.63) и (3.90) дают:

$$I = e j_0 \left(\frac{\gamma W}{\beta_{eh}^2} + 2\sqrt{2} \frac{l_R^{3/2}}{l_G^{1/2}} \right). \quad (3.92)$$

Первый член в скобках соответствует объемному друдевскому вкладу, обусловленному релаксацией импульса носителей на дефектах и при рассеянии на носителях другого типа. Второе слагаемое происходит от приграничных областей, где происходит “смятие” потоков.

Для простоты ниже будем рассматривать только случай, когда рассеяние на дефектах достаточно слабое (или образец является достаточно узким). В этом случае в уравнении (3.92) преобладает краевой вклад. В этом случае получаем:

$$I = 2^{5/4} \frac{e^2 \varrho_0}{m} \frac{v_F}{\omega_c^{3/2}} \frac{\tau_R^{3/4}}{\tau_{ee}^{1/4}} \sqrt[4]{1 + 4\omega_c^2 \tau_{ee}^2}. \quad (3.93)$$

Магнетосопротивление во всем диапазоне магнитных полей зависит от ширины образца. Ниже последовательно представим результаты для случаев широкого [$W \gg l_G(0)$], среднего [$v_F \tau_R^{1/4} \tau_{ee}^{3/4} \ll W \ll l_G(0)$] и узкого образцов [$W \ll v_F \tau_R^{1/4} \tau_{ee}^{3/4}$]. В каждом из этих случаев будет изучен весь интервал магнитных полей от нуля до максимальных. Такая классификация образцов по их ширине отличается от той, что была в предыдущем Разделе 3.4.3.

(i) Для случая широких образцов, $l_G(0) \ll W$, [этот случай включает случаи средних и широких образцов из предыдущего раздела], интервал малых магнитных полей $\omega_c \ll \tau_R^{1/2}/(\tau_{eh}\tau_{ee}^{1/2})$ содержит магнитное поле, при котором $W = l_R$. Магнитное поле, отвечающее равенству $l_c = W$, также находится в интервале слабых полей, $\omega_c \ll \tau_R^{1/2}/(\tau_{eh}\tau_{ee}^{1/2})$. Поэтому из (3.85) и (3.93) получаем:

$$R_{\square}(B) = \frac{m}{e^2 \rho_0} \times \begin{cases} \frac{1}{\tau_{eh}}, & W \ll l_R \\ \frac{1}{\tau_{eh}} \frac{W}{2l_0} \beta_{eh}, & l_G \ll l_R \ll W \\ \frac{2^{-5/4} W \omega_c^{3/2} \tau_{ee}^{1/4}}{v_F \tau_R^{3/4} \sqrt{1 + 4\omega_c^2 \tau_{ee}^2}}, & l_R \ll l_G \end{cases}. \quad (3.94)$$

Последняя строка включает два интервала: малых, $\tau_R^{1/2} \tau_{ee}^{1/2}/\tau_{eh} \ll \beta_{ee} \ll 1$, и больших, $\beta_{ee} \gg 1$, значений параметра $\beta_{ee} = \omega_c \tau_{ee}$. В пределе $\beta_{ee} \gg 1$ магнетосопротивление становится линейным по магнитному полю B , как и в диапазоне меньших магнитных полей, $l_G \ll l_R \ll W$, в котором действует изученный ранее механизм линейного магнетосопротивления за счёт диффузии и рекомбинации в приграничных слоях.

(ii) Для случая образцов средних ширин, $v_F \tau_R^{1/4} \tau_{ee}^{3/4} \ll W \ll l_G(0)$, магнитное поле $\omega_c = \tau_R^{1/4} v_F / \tau_{ee}^{1/4} W$, отвечающее равенству $l_c = W$, оказывается лежащим в таком диапазоне магнитных полей: $\omega_c^2 \gg \tau_R / (\tau_{ee} \tau_{eh}^2)$. При более низких полях, $\omega_c^2 \ll \tau_R / (\tau_{ee} \tau_{eh}^2)$, неравенство $\omega_c \tau_{ee} \ll 1$ оказывается выполненным, при этом формируются течения Пуазейля электронной и дырочной компонент. Они также формируются в диапазоне больших полей: между полями, отвечающими равенствам $\omega_c^2 = \tau_R / \tau_{ee} \tau_{eh}^2$ и $l_c = W$. В очень высоких магнитных полях, когда $l_c \ll W$ (при этом оказывается $\omega_c \tau_{ee} \gg 1$) формируется “смятое” течение с осциллирующей плотностью тока (3.89). В результате, для магнетосопротивления в обоих интервалах $\omega_c \gg \tau_R^{1/2}/(\tau_{eh}\tau_{ee}^{1/2})$ и $\omega_c \ll \tau_R^{1/2}/(\tau_{eh}\tau_{ee}^{1/2})$ получаем:

$$R_{\square}(B) = \frac{m}{e^2 \rho_0} \times \begin{cases} 12 \frac{\eta_0}{W^2} \frac{1}{1 + \beta_{ee}^2}, & W \ll l_c \\ \frac{2^{-7/4} W \omega_c}{v_F \tau_R^{3/4} \tau_{ee}^{1/4}}, & l_c \ll W \end{cases}. \quad (3.95)$$

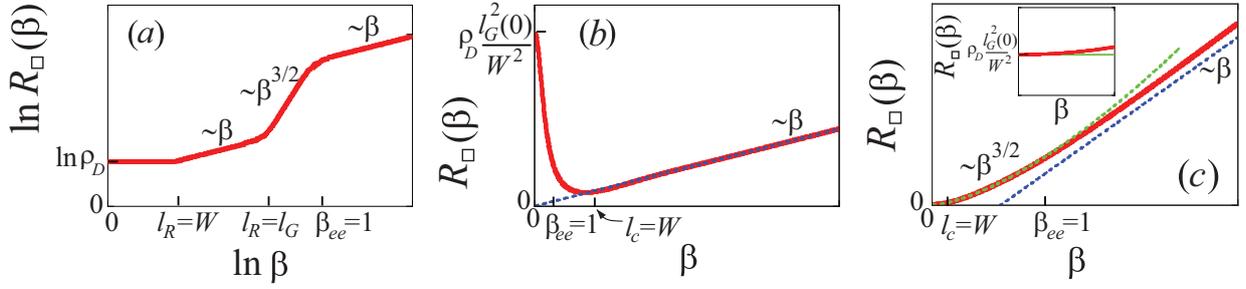


Рис. 3.14: Магнетосопротивление электрон-дырочной системы в чистом длинном образце в случае быстрой рекомбинации и отсутствия рассеяния на беспорядке ($\gamma = 0$) для широких образцов [$W \gg l_G(0)$], образцов со средними ширинами [$v_F \tau_R^{1/4} \tau_{ee}^{3/4} \ll W \ll l_G(0)$] и узких образцов [$W \ll v_F \tau_R^{1/4} \tau_{ee}^{3/4}$]. Вставка на панели (с) показывает график $R_{\square}(\beta)$ в диапазоне малых β .

(iii) Для узких образцов, $W \ll v_F \tau_R^{1/4} \tau_{ee}^{3/4}$, магнитное поле, отвечающее равенству $l_c = W$, попадает в диапазон, $\omega_c^2 \gg \tau_R / (\tau_{eh} \tau_{ee}^2)$. В отличие от случая (ii), при очень высоких полях, отвечающих условию $l_c \ll W$, могут реализоваться оба режима малых и больших полей в смысле поведения сдвиговой вязкости: $\omega_c \tau_{ee} \ll 1$ и $\omega_c \tau_{ee} \gg 1$. Поэтому сопротивление как при высоких полях, $\omega_c \gg \tau_R^{1/2} / (\tau_{eh} \tau_{ee}^{1/2})$, так и при низких, $\omega_c \ll \tau_R^{1/2} / (\tau_{eh} \tau_{ee}^{1/2})$, дается формулой:

$$R_{\square}(B) = \frac{m}{e^2 \varrho_0} \times \begin{cases} 12 \frac{\eta_0}{W^2}, & W \ll l_c \\ \frac{2^{-5/4} W \omega_c^{3/2} \tau_{ee}^{1/4}}{v_F \tau_R^{3/4} \sqrt{1 + 4\omega_c^2 \tau_{ee}^2}}, & l_c \ll W \end{cases}. \quad (3.96)$$

Видно, что в последнем интервале $l_c \ll W$ поведение магнетосопротивления $\sim B^{3/2}$ с ростом магнитного поля сменяется на линейное поведение.

Зависимости (3.94), (3.95) и (3.96) схематически построены на Рис. 3.14.

3.4.5 Обсуждение

Обсудим физическую природу уравнений (3.70) для рассмотренной геометрии течения в случае быстрой рекомбинации. Когда выполнено условие (3.88) и $\gamma = 0$, эти уравнения принимают следующую форму [аналог уравнений (3.74), учитывающий зависимость от времени]:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = \omega_c j + \frac{\langle v^2 \rangle}{2\nu_0} \tau_R \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{e \varrho_0}{m} E_0 - \omega_c P + \eta_{xx} \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} \end{cases}. \quad (3.97)$$

Эти уравнения не содержат параметра τ_{eh} и описывают баланс y - и x -компонент электромагнитных и гидродинамических сил, действующих на элементы объема жидкости.

Первое уравнение (3.97) показывает, что магнитная сила Лоренца $\omega_c j$ в направлении y действует вместе с гидростатической силой от эффективного давления, $\sim -\nabla \delta \varrho$. В последней градиент плотности частиц $\delta \varrho$ обусловлен рекомбинацией: $\delta \varrho = -\tau_R dP/dy$. Итоговый

вид последнего слагаемого, $\sim d^2 P/dy^2$, содержащий вторую производную потока частиц P в направлении этой силы, вдоль y (то есть, одну из компонент выражения $\nabla \operatorname{div} \mathbf{P}$), является слагаемым объёмной вязкости. Таким образом, величина ζ ,

$$\zeta = \frac{\langle v^2 \rangle}{2\nu_0} \tau_R \approx \frac{1}{2} v_F^2 \tau_R, \quad (3.98)$$

есть коэффициент объёмной вязкости в электрон-дырочной жидкости

Второе уравнение (3.97) описывает совместное действие электрической и магнитной сил Лоренца, а также эффективную силу трения за счёт сдвиговой вязкости в направлении x .

Кратко обсудим природу осциллирующей плотности тока $j(y)$ (3.89) в режиме быстрой рекомбинации. Во-первых, отметим, что полный ток (3.90) в этом режиме направлен вдоль электрического поля, поэтому глобального нарушения устойчивости нет. Отметим также, что в работе [A15] было рассчитано распределение выделения тепла и была последовательно изучена устойчивость течения $j(y)$ (3.89) с отрицательными значениями плотности тока при некоторых y . Как и следует ожидать из типа гидродинамических уравнений (3.70), описывающих слабый отклик на слабое внешнее электрическое поле E_0 , течение $j(y)$ (3.89) является устойчивым.

Во-вторых, напомним, что аналогичное пространственное распределение характеристик течения (с быстро падающими при удалении от края осцилляциями, связанными с собственным числом $\sim \sqrt{i}$) было также теоретически получено в Разделе 1.5 для плотности спина $\mathbf{P}(y)$, спиновых токов $q_{ij}(y)$ и спин-орбитальной поправки к плотности тока, $\Delta j(y)$. Там рассматривалось омическое течение в образце, в котором возникает спиновая поляризация электронов за счёт спинового эффекта Холла. Поправка $\Delta j(y)$ возникала от неоднородного по y спинового тока $q_{ij}(y)$ в направлении y . Уравнения (1.71) и (3.97) оказываются аналогичны по своей форме. Таким образом, осциллирующие распределения потоковых величин в системах, изученных в Разделе 1.5 и в настоящем разделе являются явлениями, родственными друг другу и объёмной вязкости в молекулярных газах.

Появление в некоторых областях образца направления y плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, противоположного направлению электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, хотя, вероятно, является невозможным для омического и баллистического режимов транспорта, для гидродинамического режима, по видимому, является характерным явлением. Противонаправленность $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ может быть связана как со сложной геометрией течения и контактов у образца (эффект отрицательного абсолютного сопротивления за счёт водоворотов [30]), так и с дополнительными внутренними степенями свободы жидкости, связанными с $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ [здесь это величины $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ и $\delta \varrho(\mathbf{r})$].

Глава 4

Формирование гидродинамического режима

4.1 Обзор литературы

4.1.1 Баллистический режим переноса тепла и заряда

Теория баллистического транспорта частиц, динамика которых является классической, была разработана в 1930-1950-е годы для потоков разреженных газов. Считалось, что столкновения молекул друг с другом являются гораздо более редкими, чем их столкновения со стенками трубы или сосуда (течения с большими числами Кнудсена, см. книгу [182]). Похожий подход был также использован в 1950-е для описания баллистического теплопереноса для газа из фононов в тонких образцах диэлектриков [13]. Интенсивные исследования в этой области возобновились в 2000-е годы, в частности, в связи с открытием графена.

Теплоперенос в однослойном подвешенном графене изучается экспериментально в работах [173],[183]-[185]. Измеренные значения коэффициента фононной теплопроводности оказались чрезвычайно высокими и зависели от размера образца. Это указывает на то, что теплоперенос в изученных в этих работах образцах графена осуществлялся не по объёмным механизмам (связанным, например, с рассеянием изгибных фононов при беспорядке или фонон-фононным рассеянием [186]-[190]), а по баллистическому или гидродинамическому механизмам. Обнаруженная аномально большая теплопроводность подвешенного графена привлекла большое внимание в связи с надеждой на использование графена для теплоотвода в высокоскоростных электронных устройствах [191].

Теоретические исследования в области фононного “не-объёмного” теплопереноса в графене шли в нескольких направлениях. Изучалось влияние характера рассеяния изгибных фононов на краях образца [192, 193]. Исследовался гидродинамический режим фононного транспорта в узких образцах подвешенного графена [194]-[196]. В работах [194, 195] было численно изучено течение Пуазейля фононной жидкости в графене. В работе [196] была развита строгая

аналитическая теория гидродинамики изгибных фононов в графене.

Баллистический режим явлений переноса в системах двумерных невзаимодействующих электронов в высококачественных наноструктурах активно изучался в 1980-1990-е годы [197]. Для построения теории такого режима использовались методы, ранее развитые для разреженных газов из атомов и молекул. В последние годы, в связи с открытием режима гидродинамического транспорта в очень качественных образцах (см. Главы 1-3), стал актуальным вопрос о том, как из баллистического режима транспорта формируется гидродинамический режим при изменении параметров системы (см., например, экспериментальные работы [33, 34] и теоретические работы [61, 198]).

Для образцов с редкими электрон-электронными столкновениями (длина пробега l_{ee} много больше размера образца W) при приложении магнитного поля гидродинамический режим начинает формироваться по следующему сценарию. При величине магнитного поля $B = B_c$, при которой диаметр циклотронной орбиты электрона $2R_c$ становится равным ширине образца W , некоторые электроны начинают делать полный оборот без рассеяния на краях и начинают сталкиваться только с другими электронами. В связи с этим, течение электронов при $B > B_c$ меняет свой характер, постепенно приобретая гидродинамическую компоненту. Впервые, на такой механизм формирования гидродинамики электронов было указано в работе [21] для случая объёмных проводников (см. обсуждение в Разделе 1.1). В настоящей главе этот механизм будет изучен подробно для длинных чистых образцов с шероховатыми краями.

4.1.2 Баллистический транспорт при наличии медленных межэлектронных столкновений в нулевом и слабом магнитных полях

Изучение перехода от баллистического к гидродинамическому режиму магнетотранспорта разумно начать с анализа поправок от электрон-электронных столкновений к баллистическим течениям в отсутствие магнитного поля.

В работах [199, 200] были изучены поправки от межчастичного рассеяния к баллистической проводимости широкого баллистического микроконтакта между двумя объёмными металлическими образцами. Такую поправку следует рассматривать как предвестник гидродинамического режима. В работе [201] такая положительная поправка наблюдалась в баллистическом микроконтакте в образце на основе гетероструктур GaAs/AlGaAs.

В этой главе, во-первых, строится аналитическая теория баллистического транспорта взаимодействующих электронов в длинных образцах с шероховатыми краями [A16-A19]. Теория основана на подходе, изложенном в публикациях [182, 197]. Во-первых, показано, что основ-

ная часть баллистической проводимости сталкивающихся электронов в длинном образце расходится как логарифм отношения ширины образце, $\sim \ln(1/W)$, аналогично баллистической проводимости невзаимодействующих частиц [197]. В рамках кинетики частиц, основанной на классической механике, этот логарифм ограничивается либо столкновением между частицами, $\ln(l_{ee}/W)$, либо конечностью длины образца, $\ln(L/W)$. В настоящей главе показано, что столкновения между частицами, сохраняющие импульс, вызывают также гидродинамическую поправку к проводимости образца, которая является предвестником формирования течения Пуазейля [A16] (последнее формируется при длинах свободного пробега, много меньших ширины образца, $l_{ee} \ll W$). Этот результат по своей физической природе аналогичен результату работ [199]-[201] для поправок от межчастичного рассеяния к баллистической проводимости микроконтакта между двумя объёмным проводниками.

Во-вторых, в настоящей главе изучено влияние очень слабых магнитных полей на баллистическую проводимость взаимодействующих электронов [A16,A17,A19]. Такой режим, по-видимому, представляет значительный интерес, однако он не был изучен в работах [61, 198] на основе развитых в них методик расчёта и общих аналитических формул, вероятно, в связи с тем, что яркое проявление такого режима требует выделенных соотношений между параметрами системы.

В настоящей главе показывается, что для образца с очень прямыми, но шероховатыми слоями в достаточном малых магнитных полях баллистическое течение является сильно неоднородным по сечению образца [A19]. Вблизи краёв формируются области течения, где основной вклад в холловское поле и компоненту тока, зависящую от магнитного поля, дают “скачущие” электроны (электроны, возвращающиеся к тому же краю, от которого отразились, за счёт действия магнитного поля). Вклад этих прикраевых слоев в ток приводит к зависящему от скорости межчастичных столкновений положительному магнетосопротивлению и к аномально большой величине холловского поля. Эффект, аналогичный последнему, был теоретически изучен в работе [202] для длинного асимметричного образца с одним шероховатым и одним гладким краями (что моделирует неидеальность краёв реальных образцов).

В коротких образцах (и в образцах с не очень прямыми краями) описанные выше прикраевые слои не формируются. Для них основной вклад в магнетосопротивление и эффект Холла, по-видимому, дают “путешествующие” электроны в объёмной части образца, траектории которых соединяют противоположные края образца. Зависящая от магнитного поля поправка к сопротивлению, рассчитанная для этого случая, оказывается отрицательной [A16]. Изучен также эффект Холла в этом режиме. Холловское сопротивление оказывается значи-

тельно меньшим по величине, чем для образцов первого типа с прямыми краями, а именно, оно равно одной второй от “стандартного” холловского сопротивления объёмных омических образцов при низкой температуре [A17].

Гигантское отрицательное магнетосопротивление, наблюдавшееся в работах [40]-[45], часто состоит из двух частей: температурно-зависимый широкий пик и температурно-независимый узкий около нулевого поля. Первая его часть была объяснена в Главе 1 как проявление вязкого течения электронной жидкости. В настоящей главе показывается, что узкий пик, по-видимому, объясняется баллистическими эффектами, изученными в диссертации для коротких образцов (или для длинных образцах с нерегулярными краями) [A16,A19].

Для случая трёхмерных баллистических проводников аналогичное баллистическое отрицательное магнетосопротивление было изучено в работах [203]-[206]. Для случая двумерных образцов малых размеров (значительно меньших по размеру, чем образцы высокоподвижных квантовых ям GaAs, изучавшиеся в работах [40]-[45]) аналогичное отрицательное магнетосопротивление наблюдалось в работе [207] для квантовых ям GaAs с умеренной подвижностью.

4.1.3 Баллистический транспорт в умеренных магнитных полях

В настоящей главе также изучен баллистический транспорт взаимодействующих двумерных электронов в умеренных магнитных полях B , меньших критического поля B_c перехода в гидродинамический режим (при котором циклотронный диаметр становится равным ширине образца) [A18].

Используя общее аналитическое решение кинетического уравнения в баллистическом режиме, полученное в работах [198],[A19], показывается, что в диапазоне полей $B \gg B_1$, $B_c - B \gg B_c - B_2$ течение электронов при низкой температуре, в основном, определяется рассеянием электронов на краях образца и влиянием циклотронного эффекта магнитного поля. Слабые межэлектронные столкновения с интенсивностью γ определяют величины B_1 и B_2 и приводят только к малым поправкам ко всем характеристикам течения в этом диапазоне.

Получены аналитические формулы для профиля холловского поля $E_H(y)$ как при малых полях, $B_1 \ll B \ll B_c$, так и вблизи перехода, $B_c - B_2 \ll B_c - B \ll B_c$. Они являются отличными от плоского и расходятся около краёв образца. Рассчитан также профиль плотности тока $j(y)$. С ростом магнитного поля от B_1 до B_2 он эволюционирует от почти плоского (всюду кроме узких прикраевых слоёв) до деформированной полуокружности.

Зависимости сопротивлений $\varrho_{xx}(B)$ и $\varrho_{xy}(B)$ во всем диапазоне $B_1 < B < B_2$ проявляют нетривиальное немонотонное поведение и согласуются с результатами численного моделирова-

ния [61]. Амплитуда холловского поля E_H становится независимой от магнитного поля B в пределе умеренно малых полей $B_1 \ll B \ll B_c$, а холловское сопротивление $\varrho_{xy}(B)$ демонстрирует в этой области сингулярное поведение, похожее на плато. Такое сингулярное поведение $\varrho_{xy}(B)$, по-видимому, является одной из форм баллистических аномалий магнетосопротивления, которые наблюдались экспериментально и были ранее получены в численном моделировании [197]. Продольное сопротивление $\varrho_{xx}(B)$ в нижней окрестности перехода, $B_c - B_2 \ll B_c - B \ll B_c$, падает к нулю линейно по величине $B_c - B$, что отвечает резкому росту тока при $B \rightarrow B_c$.

4.1.4 Переходные баллистически-гидродинамические режимы электрического транспорта

Теория двумерного течения электронов в образцах с макроскопическими локализованными дефектами была построена в работе [57]. В отсутствие магнитного поля баллистически-гидродинамический переход происходит в такой системе с изменением скорости межчастичного рассеяния $1/\tau_{ee}$ и имеет тип плавного кроссовера: при $l_{ee} \gg r_0$ реализуется квазибаллистический режим и гидродинамический режим при $l_{ee} \ll r_0$, где $l_{ee} = v_F \tau_{ee}$ и r_0 – размер дефектов.

В последние несколько лет переход между баллистическим и гидродинамическим режимами транспорта наблюдался для двумерных электронов в системах другого типа: длинные образцы графена и квантовых ям GaAs с малым числом дефектов в перпендикулярном магнитном поле.

В работах [33, 34] было измерено пространственное распределение плотности тока и холловского электрического поля в течении двумерных электронов в полосках графена. Как отмечалось выше, при слабом межчастичном взаимодействии в полях $B < B_c$ транспорт является баллистическим и связан преимущественно с рассеянием электронов на стенках, а при $B > B_c$ начинает формироваться гидродинамический режим. В работе [33] наблюдение эволюции кривизны профиля холловского поля послужило свидетельством перехода между баллистическим и гидродинамическим режимами транспорта. В работе [34] плотность тока гидродинамического и баллистического течения в узкой полоске графена была экспериментально определена при помощи измерения распределения локального магнитного поля, наведенного током в полоске. В обеих работах [33, 34] было также обнаружено, что продольное и холловское сопротивления имеют излом как функции магнитного поля при $B = B_c$.

В работе [61] переход между баллистическим и гидродинамическим режимами транспорта изучался теоретически при помощи численного решения кинетического уравнения для изучае-

мой системы: двумерных электронов, сталкивающихся друг с другом и с дефектами, в длинном образце с шероховатыми краями в перпендикулярном магнитном поле. Были получены зависимости продольного и холловского сопротивления от магнитного при разных соотношениях между длинами свободного пробега, очень похожие на наблюдавшиеся в работах [33, 34]. В частности, при длинах свободного пробега больше ширины образца у зависимостей $\rho_{xx}(B)$ и $\rho_{xy}(B)$ при критическом поле $B = B_c$ наблюдается излом, что говорит о резком начале формирования электронной жидкости.

В работе [198] были выполнены дальнейшие исследования течения двумерных электронов в системе, аналогичной исследованной в работе [61]. А именно, в [198] были численно рассчитаны распределения холловского поля по сечению образца при $B < B_c$ и $B > B_c$, а также построено аналитическое решение кинетического уравнения в баллистической области $B < B_c$. Это позволило объяснить эволюцию кривизны профиля холловского поля с изменением магнитного поля, наблюдающуюся в эксперименте [33].

В эксперименте [208] переход между гидродинамическим и баллистическим течениями двумерных электронов для длинных образцов квантовых ям GaAs наблюдался как по температурным зависимостям сопротивления, так и по его зависимости от магнитного поля, похожей на результаты работ [33, 34]. В работе [209] переход между гидродинамическим и баллистическим течениями двумерных электронов наблюдался в образцах сложной геометрии ям GaAs по падению напряжения и тока между контактами при сложной геометрии течений.

4.1.5 Фазовый переход между баллистическим и гидродинамическим режимами транспорта

Обнаруженный в экспериментах [33, 34] резкий излом сопротивления $\rho_{xx}(B)$ при поле $B = B_c$, по-видимому, свидетельствует о резком переходе между преимущественно баллистическим транспортом при $B < B_c$ и началом формирования гидродинамического режима при $B > B_c$. Подобное магнетосопротивление было также обнаружено в длинных образцах очень чистых квантовых ям GaAs [46, 48], что, по-видимому, также свидетельствует о баллистически-гидродинамическом переходе. В работе [48] наблюдалось также нетривиальное холловское сопротивление $\rho_{xy}(B)$, отличное от стандартного $B/(n_0ec)$ при полях $B < B_c$ и очень близкое к стандартному при $B > B_c$. Как отмечалось выше, в численном расчёте работы [61] было также получено, что при слабых межчастичном рассеянии и рассеяния на беспорядке внутри полоски продольное и холловское сопротивления полоски как функции B имеют изломы в точке $B = B_c$.

В настоящей главе показывается, что гидродинамический режим транспорта двумерных электронов в длинных чистых полосках с прямыми шероховатыми краями формируется из баллистического режима с увеличением магнитного поля B путём фазового перехода. Такой переход отвечает резкой смене типа классических траекторий электронов и характера рассеяния электронов друг на друге в нижней и в верхней окрестностях поля B_c . Поэтому изучаемый переход имеет классическую природу и этим резко отличается от типичных квантовых фазовых переходов в объёмных системах.

Динамика электронов в этом переходе меняется следующим образом. В нижней окрестности критического поля, $0 < B_c - B \ll B_c$, большинство электронов возвращается к тому же краю, от которого они отразились; слабое электрон-электронное рассеяние начинает определять перераспределение электронов между траекториями около левого и правого краёв образца и соответствующую величину тока. В верхней окрестности критического поля, $0 < B - B_c \ll B_c$, появляются “центральные” электроны, которые рассеиваются не на краях, а только на других электронах, и поэтому резко меняют тип функции распределения электронов по их скоростям. Их функция распределения отвечает коллективизированной объёмной термодинамической фазе, поэтому они являются ростком жидкой фазы.

Для описания этих критических баллистически-гидродинамических течений в области фазового перехода разработана модель среднего поля, основанная на классическом кинетическом уравнении. Решение уравнений модели даёт изломы в зависимостях продольного ϱ_{xx} и холловского ϱ_{xy} сопротивлений длинного образца от поля B и разный вид температурных зависимостей производных $\partial\varrho_{xx}/\partial B$ при $B < B_c$ и $B > B_c$. Сопоставление зависимостей сопротивлений $\varrho_{xx}(B)$ и $\varrho_{xy}(B)$ длинных образцов графена и квантовых ям, наблюдавшихся в работах [33, 34, 48], с рассчитанными в настоящей главе, свидетельствует о том, что в них наблюдался баллистически-гидродинамический фазовый переход.

4.2 Взаимодействующие электроны в баллистических образцах

4.2.1 Модель

Рассмотрим поток двумерных вырожденных электронов в длинном образце шириной W с прямыми, но шероховатыми краями в перпендикулярном магнитном поле \mathbf{B} (см. Рис. 4.1). Электроны диффузно рассеиваются на шероховатых краях, что приводит к релаксации импульса. В объёме образца электроны рассеиваются друг на друге и/или на дефектах.

В этой главе считается, что общая скорость электрон-электронных столкновений и столк-

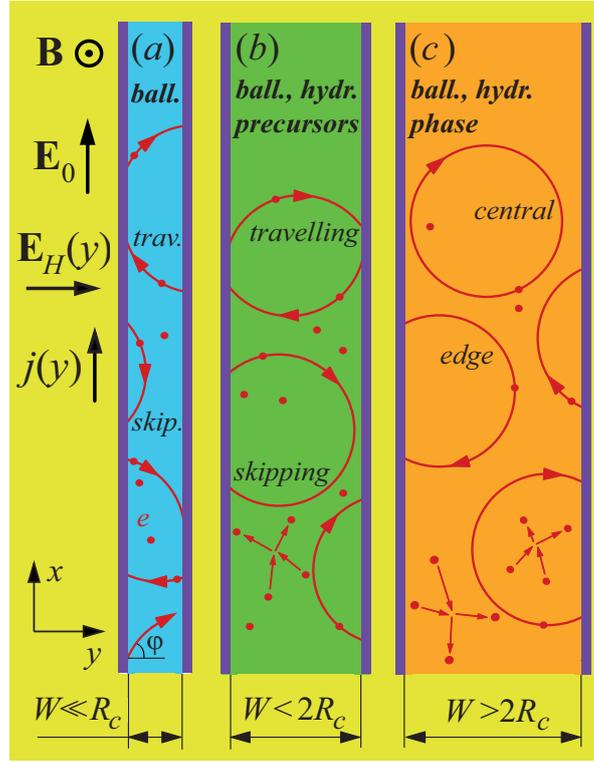


Рис. 4.1: Двумерный электронный газ в длинном образце при малых, $W \ll R_c$ (a); промежуточных, $W \sim R_c$, $W < 2R_c$ (b); и умеренно больших полях, $W \sim R_c$, $W > 2R_c$ (c). Баллистическо-гидродинамический фазовый переход происходит при критическом поле B_c , отвечающем равенству $2R_c = W$. В нижней окрестности поля B_c , $0 < B_c - B \ll B_c$, большинство электронов движется вдоль “скачущих траекторий”, близких к полным циклотронным окружностям. Такие траектории являются переходными к полным круговым траекториям при гидродинамическом течении. Выше критической точки, $B > B_c$, появляется группа “центральных” электронов, которые не сталкиваются с краями. Электроны такого типа представляют собой ядро гидродинамической фазы электронной жидкости.

новений с дефектами γ является слабой, в том смысле, что отвечающая ей длина свободного пробега $l = v_F/\gamma$ много больше ширины образца W . Целью настоящей главы является изучить, как в такой системе с ростом магнитного поля происходит переход от баллистического режима к гидродинамическому или омическому. Как разумно ожидать, важную роль в этих переходах играет достижение магнитным полем B значения критического B_c , в котором ширина образца равна диаметру циклотронной окружности электрона:

$$W = 2R_c. \quad (4.1)$$

При магнитных полях меньше критического, $B < B_c$, большинство электронов не рассеиваются в объеме образца и движутся по баллистическим траекториям между столкновениями с краями [см. Рис. 4.1(a,b)]. При магнитных полях больше критического, $B > B_c$, для некоторой части электронов становятся возможны столкновения электронов только друг с другом [см. Рис. 4.1(c)], поэтому начинается переход в гидродинамический или омический режимы течения. Изучению такого перехода посвящена настоящая глава.

Электрический транспорт в этой системе описывается неравновесной частью $\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ функ-

ции распределения $f = f_F + \delta f$. Эта величина ищется из линеаризованного кинетического уравнения:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_F}{\partial \mathbf{v}} - \omega_c \frac{\partial \delta f}{\partial \varphi} = \text{St}[\delta f], \quad (4.2)$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$, φ – угол между скоростью электрона $\mathbf{v} = v(\varepsilon)(\sin \varphi, \cos \varphi)$ и нормалью к левому краю образца (см. Рис. 4.1), $f_F(\varepsilon)$ – фермиевская функция распределения, $\varepsilon = p^2/(2m)$ – энергия электрона, $\omega_c = v_F/R_c$ – циклотронная частота электронов, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_H$ – полное электрическое поле, $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_x$ – приложенное поле, $\mathbf{E}_H = E_H(y) \mathbf{e}_y$ – холловское электрическое поле, появляющееся за счёт перераспределения электронов в магнитном поле. Интеграл столкновений $\text{St}[f]$ в уравнении (4.2), описывает как сохраняющие импульс электрон-электронные столкновения, так и рассеяние на беспорядке в объёме образца. В простейшем виде, не учитывая зависимость его ядра от энергии и различие скорости релаксации разных угловых гармоник старше второй, он имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{St}[f] &= -\gamma_{ee} \{ f - \hat{P}[f] \} - \gamma' \{ f - \hat{P}_0[f] \} = \\ &= -\gamma f + \gamma_{ee} \hat{P}[f] + \gamma' \hat{P}_0[f], \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\gamma = \gamma_{ee} + \gamma'$ – полная скорость рассеяния, γ_{ee} и γ' – скорости межчастичного рассеяния и рассеяния на беспорядке, \hat{P} и \hat{P}_0 – проекторы функции $f(\varphi)$ на подпространства $\{1, e^{\pm i\varphi}\}$ и $\{1\}$. Такой интеграл столкновений сохраняет возмущения функции распределения, отвечающие ненулевой плотности, а также описывает сохранение импульса за счёт межчастичных столкновений, когда нет рассеяния на беспорядке ($\gamma' = 0$).

Таким образом, уравнения (4.2) и (4.3) позволяют изучать магнетотранспорт в системах, являющиеся смешением двух предельных случаев: (1) внутри образца нет дефектов и электроны в объёме рассеиваются только друг на друге с сохранением импульса [в зависимости от ширины образца, реализуется баллистический или гидродинамический режимы]; (2) межчастичные столкновения отсутствуют, при этом происходит рассеяние электронов на беспорядке в объёме образца, что приводит к медленной релаксации импульса в объёме [в зависимости от ширины образца, реализуется баллистический или омический режимы].

Найдём линейный отклик электронов на однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0 \parallel x$ при наличии магнитного поля \mathbf{B} , перпендикулярного плоскости образца (см. Рис. 4.1). Соответствующая неравновесная функция распределения для вырожденных электронов имеет вид:

$$\delta f(y, \mathbf{p}) = -f'_F(\varepsilon) f(y, \varphi, \varepsilon), \quad (4.4)$$

где множитель $f(y, \varphi, \varepsilon)$ линеен по E_0 : $f \sim E_0$. Зависимость δf от координаты x отсутствует в связи с тем, что длина образца много больше ширины: $L \gg W$. Также не будем учитывать

малую энергетическую зависимость скорости $v(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon/m} \approx v_F$ и множителя $f(y, \varphi, \varepsilon)$ в неравновесной части функции распределения $\delta f(y, \mathbf{p})$. В Разделе 2.3 было показано, что такой вид δf реализуется в гидродинамическом режиме для электронов, потенциал взаимодействия которых есть экранированный кулоновский потенциал. В баллистическом режиме для взаимодействующих электронов, термализация которых по энергии также происходит за счёт межэлектронных столкновений, по-видимому, реализуется аналогичная форма δf .

Ниже в этой Главе почти всюду будем использовать единицы измерения, в которых модуль скорости электрона $v(\varepsilon) \equiv v_F$ и модуль заряда электрона e равны единице. Таким образом, координата, время и обратное электрическое поле, $1/E_0$, имеют одинаковые единицы. Кинетическое уравнение (4.2) для неравновесной части функции распределения $f(y, \varphi)$, зависящей только от одной координаты y , принимает форму:

$$\cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y} - \sin \varphi E_0 - \cos \varphi E_H - \omega_c \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \text{St}[f]. \quad (4.5)$$

Так как продольные края образца являются шероховатыми, рассеяние электронов на них является диффузным, что описывается граничными условиями [197] (см. Рис. 4.1):

$$\begin{aligned} f(-W/2, \varphi) &= c_l, \quad -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \\ f(W/2, \varphi) &= c_r, \quad \pi/2 < \varphi < 3\pi/2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь величины $c_l = c_l[f]$ и $c_r = c_r[f]$ пропорциональны y -компонентам потоков частиц, налетающим на левый и правый края ($y = -W/2$) и ($y = W/2$), и имеют вид:

$$c_l = -\frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi' \cos \varphi' f(-W/2, \varphi'), \quad c_r = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi' \cos \varphi' f(W/2, \varphi'). \quad (4.7)$$

Такие граничные условия показывают, что (i) вероятность рассеяния электрона на шероховатых краях не зависит от угла отражения φ и (ii) поперечная компонента потока электронов, j_y , исчезает на краях:

$$j_y|_{y=\pm W/2} = 0, \quad j_y(y) = \frac{n_0}{\pi m} \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos \varphi' f(y, \varphi'). \quad (4.8)$$

При выполнении этого условия компонента тока j_y равна нулю всюду в образце, $j_y \equiv 0$, в силу уравнения непрерывности, $\text{div } \mathbf{j} = j'_y = 0$.

Продольная плотность тока вдоль образца в выбранных единицах есть:

$$j(y) = \frac{n_0}{\pi m} \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin \varphi' f(y, \varphi'). \quad (4.9)$$

Если электрический ток протекает через образец в магнитном поле, магнитная сила Лоренца приводит к возмущению плотности заряда и электрического поля Холла. Оба эти эффекта

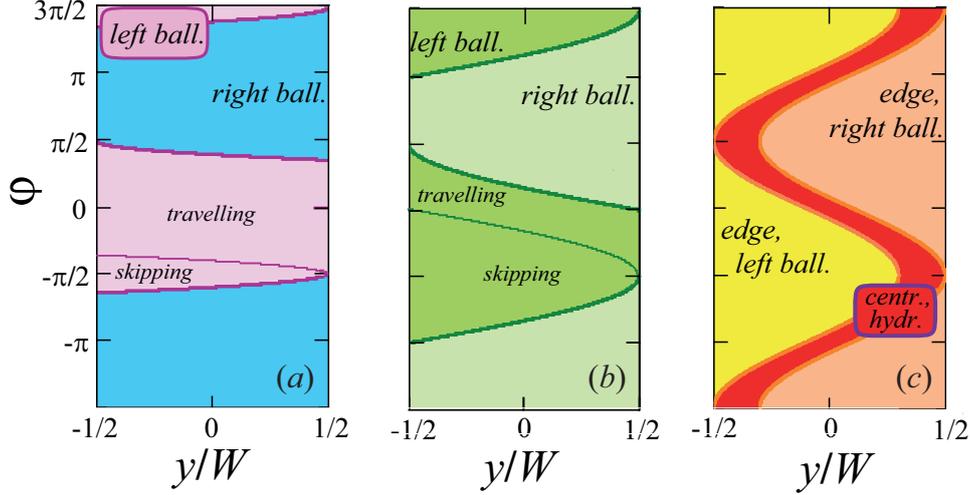


Рис. 4.2: Области в плоскости (y, φ) с “баллистическими” электронами, отраженными от левого и правого краев образца (на всех панелях), а также с “центральными гидродинамическими” электронами, которые не рассеиваются по краям [красная область на панели (c)]. Показаны случаи узких, $W \ll R_c$ (a); промежуточных, $W \sim R_c$ (b); и широких образцов $W > 2R_c$ (c).

описываются нулевой ($m = 0$) угловой гармоникой функции распределения:

$$f^{m=0}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' f(y, \varphi'). \quad (4.10)$$

На рисунках 4.2(a,b) показаны области в плоскости (y, φ) , соответствующие баллистическому движению электронов, отраженных от правого и левого краев образца. Для узких образцов, $W \ll R_c$, левая и правая баллистические области близки к прямоугольникам $[-\pi/2, \pi/2] \times [-W/2, W/2]$ и $[\pi/2, 3\pi/2] \times [-W/2, W/2]$ [см. Рис. 4.2(a)]. Для более широких образцов, $W \sim R_c$, $W < 2R_c$, границы левой и правой области $\varphi_{\pm}(y)$ начинают существенно зависеть от координаты y [см. Рис. 4.2(b)]. Граничные кривые $\varphi_+(y) = \arcsin[1 - \omega_c(W/2 + y)]$ и $\varphi_-(y) + \pi$, где $\varphi_-(y) = \arcsin[1 - \omega_c(W/2 - y)]$ совпадают с траекториями электронов, касающимися краёв по касательной. Следовательно, функция распределения $f(y, \varphi)$ не определены корректно на граничных кривых $\varphi = \varphi_+(y)$, $\varphi_-(y) + \pi$ и могут на них иметь разрыв. В магнитных полях выше критического, $W > 2R_c$, “центральные” электроны, которые не рассеиваются по краям, возникают в области, выделенной красным цветом на Рис. 4.2(c). При этом “краевые” электроны в левой и правой областях (желтый и розовый) по-прежнему рассеиваются в основном по краям.

Из уравнения (4.5) следует, что потенциал холловского поля $\phi(y)$ играет ту же роль, что и его источник, нулевая гармоника функции распределения $f^{m=0}(y)$ (4.10), пропорциональна неоднородному возмущению плотности δn . Поэтому удобно ввести функцию:

$$\tilde{f}(y, \varphi) = f(y, \varphi) + \phi(y), \quad (4.11)$$

чтобы учитывать в расчётах $\phi(y)$ и $f^{m=0}(y)$ одинаковым образом. Тогда кинетическое уравнение (4.5) переписывается в виде:

$$\left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \right] \tilde{f} - \sin \varphi E_0 = \gamma_{ee} \hat{P}[\tilde{f}] + \gamma' \hat{P}_0[\tilde{f}] + \omega_c \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}, \quad (4.12)$$

Нулевая гармоника $\tilde{f}^{m=0}(y)$ функции $\tilde{f}(y, \varphi)$ имеет вид:

$$\tilde{f}^{m=0}(y) = \delta\mu(y) + \phi(y), \quad (4.13)$$

где $\delta\mu$ – возмущение химического потенциала. Для достаточно медленных течений величины $\delta\mu(y)$ и $\phi(y)$ связаны между собой электростатическими соотношениями (см. Раздел 1.3). Для изучаемого случая вырожденных двумерных электронов, абсолютная величина ϕ обычно много больше амплитуды связанного с ней возмущения химического потенциала $\delta\mu$ (см. Раздел 1.3). Поэтому холловское поле вычисляется по простой формуле $E_H(y) \approx -d\tilde{f}^{m=0}/dy$.

Далее для краткости опускаем тильду у функции \tilde{f} и пишем просто $f \equiv \tilde{f}$.

4.2.2 Баллистическое течение в отсутствии магнитного поля с учётом слабого межчастичного рассеяния

Во-первых, получим в рамках сформулированной модели функцию распределения взаимодействующих электронов в баллистическом режиме, $\gamma W \ll 1$, в отсутствии магнитного поля.

Без учёта приходных слагаемых в интеграле столкновений (4.3) и в нулевом порядке по ω_c , функция распределения в левой и правой областях на Рис. 4.2 имеет следующую хорошо известную форму [197]:

$$f_{0,\pm}(y, \varphi) = E_0 \frac{\sin \varphi}{\gamma} \left[1 - \exp \left(-\gamma \frac{y \pm W/2}{\cos \varphi} \right) \right], \quad (4.14)$$

с нулевыми коэффициентами $c_{l,r}$. Такая функция описывает течение, в котором отражённые от края частицы рассеиваются на противоположном крае при движении под не слишком малыми углами относительно направления образца, $\pi/2 - |\varphi| \gg \gamma W$, и рассеиваются на дефектах или на других электронах при движении под углами вблизи направления образца $\pi/2 - |\varphi| \lesssim \gamma W$. Функция (4.14) не учитывает приходные слагаемые в операторе (4.3), описывающие вклад в течение частиц, рассеянных на других частицах в объёме образца, $-W/2 < y < W/2$.

Плотность потока, соответствующая уравнению (4.14) в главном порядке по параметру γW однородна, зависимость от координаты y возникает в следующем порядке по γW :

$$j(y) = j_\gamma + \Delta j(y), \quad j_\gamma = \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{1}{\gamma W} \right) j_0, \quad j_0 = \frac{n_0 E_0 W}{m}, \quad (4.15)$$

$$\Delta j(y) = -\frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{W} \right) \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{W} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{W} \right) \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{W} \right) \right] j_0.$$

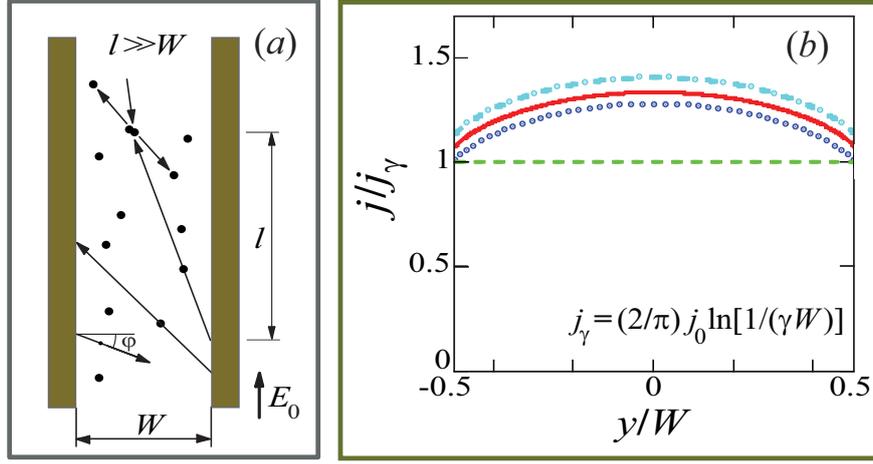


Рис. 4.3: (а): Электроны в длинном баллистическом образце, рассеивающиеся на краях образца и друг на друге. Длина свободного пробега относительно межэлектронных столкновений велика l по сравнению с шириной образца W , но мала по сравнению с длиной образца L . (б): Плотность тока $j(y)$ в отсутствие магнитного поля. Расчёт выполнен для баллистического параметра $\gamma W = 0.08$. Красная сплошная кривая показывает прямой расчёт с помощью численного интегрирования по формуле (4.9) для функции распределения (4.14); зелёная штриховая кривая – главное логарифмическое слагаемое j_γ в плотности тока (4.15); синяя пунктирная кривая – расчёт по формулам (4.15) с учётом неоднородной по сечению баллистической поправки $\Delta j(y)$; голубая штрих-пунктирная кривая – расчёт по формулам (4.15) и (4.22) с учётом гидродинамической поправки δj_{h1} , описывающей вклад в ток от электронов, последнее рассеяние которых произошло на других электронах [см. панель (а)].

Слагаемое $\Delta j(y)$ имеет бесконечные производные на краях образца, $y = \pm W/2$ (см. Рис. 4.3).

Логарифмическая расходимость j_γ в уравнении (4.14) по γW возникает от электронов с углами скорости в диапазоне: $|\varphi - \pi/2| \lesssim \delta_m^\pm(y)$, где $\delta_m^\pm(y) = \gamma(W/2 \pm y) \ll 1$. По сравнению с “типичными” электронами с углами $\varphi \sim 1$, “наиболее существенные” электроны движутся почти параллельно образцу и проводят гораздо больше времени между рассеянием на краях, приобретая гораздо больший вклад в их скорости v_x из-за ускорения полем E_0 .

Примечательно, что уравнение (4.15) можно интерпретировать как формулу Друде для усредненной проводимости образца $\sigma = I/(WE_0)$, равной $n_0 e^2 \tau_{ball}/m$ согласно формуле (4.15) [$I = \int_{-W/2}^{W/2} dy j(y)$]. Введённое баллистическое время релаксации импульса τ_{ball} имеет вид:

$$\tau_{ball} = W \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{1}{\gamma W} \right) \quad (4.16)$$

где множитель $\ln[1/(\gamma W)]$ описывает доминирующий вклад в ток от баллистических траекторий в направлениях, близких к направлению образца [см. Рис. 4.1(а)].

Более точное решение уравнения (4.12) с учётом приходного слагаемого в интеграле столкновений $\gamma \hat{P}[f]$ даёт гидродинамическую поправку δI_h к току I , отвечающему плотности тока $j(y)$ (4.15). Такая поправка является положительной, так как она происходит от электронов, которые рассеялись на других электронах с сохранением общего импульса, что “защило” эти частицы от потери импульса при рассеянии на краях.

Для того чтобы получить такую гидродинамическую поправку в первом порядке по

$\gamma W \ll 1$, найдём функцию распределения с учётом поправки первого порядка по приходному слагаемому интеграла столкновений $\gamma \hat{P}[f]$ [см. уравнение (4.12)]:

$$f = f_0 + f_{h1}. \quad (4.17)$$

Здесь f_0 дается формулой (4.14), а поправка f_{h1} пропорциональна $\gamma \hat{P}[f]$. Уравнение для f_{h1} имеет вид:

$$\left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \right] f_{h1} = \gamma \hat{P}_{\sin}[f_0], \quad (4.18)$$

где $\hat{P}_{\sin}[f](\varphi) = (\sin \varphi / \pi) \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin \varphi' f(\varphi')$ – это проектор f на функцию $\sin \varphi$.

Действие оператора \hat{P}_{\sin} на любую функцию распределения $f(y, \varphi)$ даёт значение, пропорциональное x -компоненте плотности потока, отвечающего f :

$$\hat{P}_{\sin}[f](y) = \sin \varphi \frac{j(y)}{n_0/m}. \quad (4.19)$$

Для функции распределения нулевого порядка f_0 плотность потока есть $j(y) \approx j_0$ [см. формулу (4.15)]. Следовательно, правая часть уравнения (4.18) становится равной $qE_0 \sin \varphi$, где $q \ll 1$ – это малый параметр:

$$q = \frac{2}{\pi} \gamma W \ln \left(\frac{1}{\gamma W} \right). \quad (4.20)$$

Поэтому уравнение (4.18) превращается в уравнение (4.12) с нулевой правой частью, в котором вместо поля E_0 появляется величина qE_0 . Поэтому для поправки к функции распределения f_{h1} в главном порядке по логарифму $\ln[1/(\gamma W)]$ получаем:

$$f_{h1}(y, \varphi) = q f_0(y, \varphi), \quad (4.21)$$

Соответствующая поправка к плотности тока в главном порядке по логарифму, как и основная часть j_0 , не зависит от координаты по сечению образца:

$$\delta j_{h1}(y) \approx q j_\gamma, \quad (4.22)$$

и для гидродинамической поправки к току $I_\gamma = j_\gamma W$ получаем: $\delta I_{h1} = q I_\gamma W$, а именно:

$$\delta I_{h1} = \frac{4e^2 n_0 E_0 \gamma W^3}{\pi^2 m} \ln \left(\frac{1}{\gamma W} \right)^2. \quad (4.23)$$

Так как поправка δI_{h1} (4.23) возникает от электронов, рассеявшихся в объёме на других электронах с сохранением импульса, что препятствует релаксации их импульса на шероховатых краях образца, она является предвестником формирования течения Пуазейля вязкой жидкости за счёт межчастичных столкновений.

Отметим следующее обстоятельство. Для широкого образца ток в гидродинамическом режиме имеет вид (см. Раздел 1.2):

$$I_h = \frac{e^2 n_0 E_0 \gamma W^3}{3m}. \quad (4.24)$$

Хотя эта формула справедлива в режиме $W \gg 1/\gamma$, противоположном условию реализации баллистического течения, $W \ll 1/\gamma$, и применимости формулы (4.23), она имеет вид, похожий на выражение (4.23). Обе этих формулы отражают тот факт, что гидродинамический вклад в ток в отсутствие магнитного поля пропорционален интенсивности межчастичных столкновений. Действительно, чем интенсивнее межчастичные столкновения, тем сильнее степень защиты электронов в объёмной части образца от рассеяния импульса на шероховатых краях и больше величина гидродинамического вклада в ток.

4.2.3 Различные баллистические подрежимы в магнитном поле

В пределе $\gamma W \gg 1$ реализуется гидродинамический режим течения: в центральной части образца, $W/2 - |y| \gg 1/\gamma$ формируется вязкое течение, при котором приходное и уходное слагаемые интеграла столкновений в уравнении (4.12) имеют один и тот же порядок величины, $-\gamma_{ee} f \sim \gamma_{ee} \hat{P}[f]$. Уравнение (4.12) в связи с этим переходит в главном порядке по $1/(\gamma W)$ в уравнение Навье-Стокса [A16].

Выше, в Разделе 4.2.2, отмечалось, что в узких образцах, $\gamma W \ll 1$, приходные слагаемые $\gamma_{ee} \hat{P}[f]$ и $\gamma' \hat{P}_0[f]$ в уравнении (4.12) много меньше, чем слагаемые $\cos \varphi \partial f / \partial y$ и $\sin \varphi E_0$ (в меру множителя q (4.20)), поэтому приходные слагаемые могут быть учтены по теории возмущений. Уходное слагаемое γf в (4.12) играет роль регуляризации кинетического уравнения при углах $\varphi \approx \pm \pi/2$, и необходимо в связи с обнулением при $\varphi = \pm \pi/2$ слагаемого с производной по y , $\cos \varphi \partial f / \partial y$. Это обнуление отражает тот факт, что максимальная длина траекторий электронов при углах $\varphi \approx \pm \pi/2$ ограничивается рассеянием на других электронах.

Приложение очень слабого магнитного поля B , хотя и несколько изгибает траектории электронов, но в главном приближении по B сохраняет эту картину для тех электронов, которые остаются “путешествующими” (электронов, траектории которых соединяют противоположные края образца). Критерий, когда такие электроны существуют, является следующее условие: длина максимального сегмента циклотронной окружности, $l_c \sim \sqrt{R_c W}$, который может вписан в образец, много больше, чем длина свободного пробега $l = 1/\gamma$: $l_c \gg l$. Отсюда легко получается критерий реализации этого режима: $\omega_c \ll \gamma^2 W$. В таком режиме для большинства электронов, как с начальными углами $\varphi \approx \pm \pi/2$, так и $|\pi/2 - |\varphi|| \sim 1$, приходные слагаемые $\gamma_{ee} \hat{P}[f]$ и $\gamma' \hat{P}_0[f]$ являются возмущения, а уходное слагаемое $-\gamma f$ должно учитываться

точно для регуляризации уравнения при $\varphi \approx \pm\pi/2$. Можно составить уравнения для поправок первого, $f_1 \sim \omega_c$, и второго порядков, $f_2 \sim \omega_c^2$, к функции распределения $f_{0,\pm}$ (4.14) по параметру $\omega_c/(\gamma^2 W) \ll 1$ и решить их по теории возмущений [A16,A17]. Такие поправки описывают вклады в эффект Холла и магнетосопротивление от “путешествующих” электронов.

Ниже в Разделе 4.3 описывается получение этих поправок несколько другим способом: из общего решения кинетического уравнения (4.12) без приходных слагаемых, построенного для произвольных полей $B < B_c$ [A19]. Также в Разделе 4.3 будет изучена роль малой части “скачущих” электронов, которые, после отражения от края, возвращаются к тому же краю. Такие электроны являются чисто баллистической компонентой течения в режиме $\omega_c \ll \gamma^2 W$ и для них неприменима теория возмущений по $\omega_c/(\gamma^2 W)$.

При умеренных магнитных полях ниже критического поля:

$$\omega_c \sim 1/W, \quad \omega_c < 2/W, \quad (4.25)$$

когда $l_c \lesssim l$, обнуление слагаемого $\cos \varphi \partial f / \partial y$ при $|\varphi| \approx \pi/2$ “лечится” магнитным слагаемым $\omega_c \partial f / \partial \varphi$ и поэтому функция распределения при каждом φ определяется преимущественно рассеянием на краях и действием магнитного поля. Без учета интеграла столкновений St уравнение (4.12) приводит к оценкам:

$$f \sim E_0/\omega_c, \quad j \sim j_0, \quad E_H \sim E_0. \quad (4.26)$$

где $j_0 = n_0 E_0 W / m$ – характерная баллистическая плотность тока. В соответствии с оценкой (4.26), оба приходное и уходное слагаемые St пропорциональны величине $(\gamma/\omega_c) E_0$, поэтому оба они много меньше, чем все другие слагаемые уравнения (4.12), поэтому в режиме (4.25) рассеяние электронов в объёме приводит только к малым поправкам, пропорциональным $\gamma/\omega_c \ll 1$.

Ниже будет показано, что оценки (4.26) справедливы только в средней части интервала $0 < \omega_c W < 2$, которая исключает слабые поля, $\gamma^2 W \lesssim \omega_c W \ll 1$, и нижнюю окрестность критической точки $0 < 2 - \omega_c W \ll 1$. В первом подынтервале максимальная длина баллистических траекторий достигается для группы электронов с углами $\varphi \approx \pm\pi/2$, движущихся почти вдоль образца, и ограничивается рассеянием на краях. Во втором исключенном подынтервале баллистические размерные эффекты приводят к резкому увеличению числа скачущих электронов. Как следствие, столкновения электронов в объёме при $2 - \omega_c W \sim \gamma W$ снова становятся более важными, чем при полях $2 - \omega_c W \sim 1$ (см. Раздел 4.5).

На основе изложенного выше можно сделать следующий вывод. Баллистический режим реализуется в интервале полей $0 < \omega_c W \lesssim 2$ [а именно, вплоть до полей $2 - \omega_c W \gg \gamma W$]. При

этом он разделяется на три подрежима. Первый из них имеет вид [см. Рис. 4.1(a)]:

$$(i) \quad \omega_c \ll \gamma^2 W. \quad (4.27)$$

Такой подрежим исследован в Разделе 4.3. Длина максимального сегмента траектории, вписанной в образец, $l_c = \sqrt{R_c W}$, короче длины электрон-электронного рассеяния, $l_c \gg l = 1/\gamma$, поэтому самые длинные траектории в направлениях, близких к направлению вдоль образца, ограничиваются длиной рассеяния l .

Второй подрежим определяется неравенством [см. Рис. 4.1(a)]:

$$(ii) \quad \gamma^2 W \ll \omega_c \ll 1/W \quad (4.28)$$

Этот случай был частично изучен в работах [61, 198] и частично в Разделе 4.4. Параметр W/R_c мал по сравнению с единицей и при этом $l_c \ll l$, поэтому максимальная длина траекторий, направленных почти вдоль образца, является чисто баллистической величиной и оценивается как l_c . Объёмное рассеяние даёт малые поправки к величинам j и E_H .

Третий подрежим имеет вид [см. Рис. 4.1(b)]:

$$(iii) \quad \omega_c \sim 1/W, \quad 2 - \omega_c W \gg \gamma W \quad (4.29)$$

Этот режим был изучен в Разделе 4.4. Параметр W/R_c оказывается порядка единицы, типичные траектории имеют длину порядка W . Объёмное рассеяние также приводит только к малым поправкам, но определяет верхнюю границу этого интервала, $\gamma W \ll 2 - \omega_c W \ll 1$, когда появляются траектории электронов близкие к полным окружностям. В последнем случае баллистические размерные эффекты вызывают резкое увеличение тока и холловского поля.

Согласно приведенным выше оценкам для подрежимов (i)-(iii), для разработки единого описания баллистического транспорта следует использовать кинетическое уравнение (4.12) с сохранением только уходящего слагаемого интеграла столкновений:

$$\left[\cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \right] f - \sin \varphi e E_0 = \omega_c \frac{\partial f}{\partial \varphi}. \quad (4.30)$$

Это уравнение решается методом характеристик для дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Впервые такое решение было построено в работе [198]. В работе [A19] независимо, но несколько позже, было построено аналогичное решение по методу характеристик с помощью подхода, несколько отличного от подхода работы [198].

В следующем разделе в этой Главы будет приведён явный вид решения $f(y, \varphi)$. Далее это решение будет использовано для того, чтобы изучить режимы, которые не были рассмотрены

в работе [198]: первый баллистический подрежим (i) $\omega_c W \ll \gamma^2 W^2$ [Раздел 4.3]; правая сингулярная часть третьего подрежима (iii), $\gamma W \ll 2 - \omega_c W \ll 1$ [Раздел 4.5]. Кроме того, получен ряд новых результатов по режиму (ii) [см. Раздел 4.4].

4.2.4 Общее решение для баллистического течения в магнитном поле

Решение уравнения (4.30) с граничными условиями (4.6) и (4.7) – это разрывная функция с областями непрерывности, показанными на Рис. 4.2(a,b). Для части функции распределения, отвечающей электронам, отражённым от левого края, чьи траектории лежат в области:

$$-\pi + \varphi_-(y) < \varphi < \varphi_+(y), \quad (4.31)$$

будем использовать обозначение: $f(y, \varphi) = f_+(y, \varphi)$ {здесь $\varphi_{\pm}(y) = \arcsin[1 - \omega_c(W/2 \pm y)]$ }. Для электронов, отражённых от правого края, чьи траектории лежат в интервале:

$$\varphi_+(y) < \varphi < \pi + \varphi_-(y), \quad (4.32)$$

будем использовать аналогичное обозначения: $f(y, \varphi) = f_-(y, \varphi)$.

Решение f_{\pm} уравнения (4.30) находятся методом характеристик. Он основан на рассмотрении ансамбля электронов с траекториями, выходящими из краёв $y = \pm W/2$ с различными начальными скоростями и относительными долями, которые позволяют удовлетворить заданным граничным условиям для функции распределения этих частиц. Было получено:

$$f_{\pm}(y, \varphi) = \frac{E_0}{\gamma^2 + \omega_c^2} \left[\omega_c \cos \varphi + \gamma \sin \varphi + e^{\frac{\gamma \varphi}{\omega_c}} Z_{\pm}(\sin \varphi + \omega_c y) \right], \quad (4.33)$$

где независимые от y слагаемые $\omega_c \cos \varphi$ и $\gamma \sin \varphi$ – это решение уравнения (4.30), отвечающее формулам Друде для однородного омического течения, в то время как слагаемое $e^{\gamma \varphi / \omega_c} Z_{\pm}(X)$ – это общее решение кинетического уравнения (4.30) без внешнего слагаемого $\sin \varphi E_0$, отвечающее произвольным начальным условиям для ансамбля электронов.

Подставляя выражения (4.33) в граничные условия (4.6), получаем необходимую форму функций $Z_{\pm}(X)$:

$$Z_+(X) = e^{-\frac{\gamma}{\omega_c} \arcsin X_+} (c_l - \gamma X_+ - \omega_c \sqrt{1 - X_+^2}), \quad (4.34)$$

$$Z_-(X) = e^{-\frac{\gamma}{\omega_c} (\pi - \arcsin X_-)} (c_r - \gamma X_- + \omega_c \sqrt{1 - X_-^2}), \quad (4.35)$$

где $X_{\pm} = X \pm \omega_c W/2$. Коэффициенты c_l и c_r в этих формулах определяются из балансовых соотношений (4.7) граничных условий. Итоговое уравнение на c_l и c_r принимает форму:

$$\begin{pmatrix} I_{ll} & I_{lr} \\ I_{rl} & I_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_l \\ c_r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I_l \\ I_r \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

где коэффициенты в первой строке матрицы выражаются через интегралы:

$$I_{ll} = 2 + \int_{-\pi+\varphi_0}^{-\pi/2} d\varphi \cos \varphi e^{\frac{\gamma}{\omega_c}(\pi+2\varphi)}, \quad (4.37)$$

$$I_{lr} = \int_{\pi/2}^{\pi+\varphi_0} d\varphi \cos \varphi e^{\frac{\gamma}{\omega_c}[\varphi-\pi+\arcsin(s_\varphi^-)]}, \quad (4.38)$$

а первая компонента правого вектора равна:

$$I_l = \frac{\pi\omega_c}{2} + \int_{\varphi_0}^{\pi/2} d\varphi \cos \varphi e^{\frac{\gamma}{\omega_c}(2\varphi-\pi)} (\omega_c \cos \varphi - \gamma \sin \varphi) - \int_{-\pi/2}^{\varphi_0} d\varphi \cos \varphi e^{\frac{\gamma}{\omega_c}[\varphi-\arcsin(s_\varphi^+)]} [\omega_c \sqrt{1-(s_\varphi^+)^2} + \gamma s_\varphi^+], \quad (4.39)$$

где $s_\varphi^\pm = \sin \varphi \pm \omega_c W$ и $\varphi_0 = \arcsin(1 - \omega_c W)$. Остальные коэффициенты в уравнении (4.36), I_{rr} , I_{rl} и I_r , связаны с величинами I_{ll} , I_{lr} , и I_l формулами: $I_{rr} = -I_{ll}$, $I_{rl} = -I_{lr}$, $I_r = I_l$.

При произвольных значениях $\omega_c W$ интегралы (4.37)-(4.39) могут быть вычислены только численно. Явные выражения для этих интегралов и результирующих значений $c_{l,r}$, $j(y)$ и $E_H(y)$ были получены в следующих предельных случаях: $\omega_c W \ll (\gamma W)^2$ [подрезим (i)]; $(\gamma W)^2 \ll \omega_c W \ll 1$ [подрезим (ii)]; и $\gamma W \ll 2 - \omega_c W \ll 1$ [правая часть подрезима (iii)].

4.3 Баллистическое течение в очень малых магнитных полях

4.3.1 “Путешествующие” и “скачущие” электроны

В первом баллистическом подрезиме, $\omega_c \ll \gamma^2 W$, области непрерывности функции $f_\pm(y, \varphi)$, даваемые уравнениями (4.31) и (4.32) становятся близки к $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ и $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ при каждом y . Как говорилось в прошлом разделе, траектории большинства электронов изогнуты слабо и делятся на “путешествующие” и “скачущие” [см. Рис. 4.1(a) и 4.2(a)].

Сравнение магнитного слагаемого, $\omega_c \partial f / \partial \varphi$, в кинетическом уравнении с другими слагаемыми, $\cos \varphi \partial f / \partial y$ и $-\gamma f$, при углах $|\varphi| \rightarrow \pi/2$ показывает, что первое слагаемое мало по сравнению с остальными в центральной области образца:

$$W/2 - |y| \gg \omega_c / \gamma^2. \quad (4.40)$$

В такой области “скачущих” электронов очень мало; главный вклад во все величины дают “путешествующие” электроны, траектории которых слабо отличаются от тех, которые были без магнитного поля. Поэтому в области (4.40) можно использовать пертурбативное разложение для функции распределения:

$$f = f_0 + f_1 + f_2, \quad (4.41)$$

где f_0 – функция распределения (4.14) в нулевом поле, а $f_1 \sim \omega_c$ и $f_2 \sim \omega_c^2$ – поправки к ней первого и второго порядка по магнитному полю.

В оставшихся областях, представляющих собой окрестности краёв:

$$W/2 - |y| \lesssim \omega_c/\gamma^2, \quad (4.42)$$

магнитное слагаемое $\omega_c \partial f / \partial \varphi$ не является малым по сравнению с остальными слагаемыми для электронов, движущихся почти вдоль образца и находящихся на “скачущих” орбитах: $|\varphi| \approx \pi/2$, [см. Рис. 4.1(а) и 4.2(а)]. Столкновения определяют ширину слоя (4.42), в котором баллистическое движение “скачущих” электронов не прерывается рассеянием в других электронах. А именно: критерии (4.40) и (4.42) следуют из сопоставления длины сегмента $\sqrt{R_c(W/2 - |y|)}$ циклотронной окружности высотой $(W/2 - |y|)$ и межчастичной длины свободного пробега, $l = 1/\gamma$.

Заметим, что для рассматриваемого диффузного отражения от стенок классификация электронов на “скачущие” и “путешествующие” относится только к состоянию электронов в заданный момент времени и определяется по типу траектории, на которых они находятся в текущий момент времени [см. Рис. 4.4(а)]. При отражении от шероховатых границ электроны могут менять тип траекторий, в отличие от случая прямоугольного образца с зеркальными границами, где тип траектории сохраняется при отражении от краёв.

В реальных образцах приграничные области, по-видимому, могут образоваться только в не слишком малом магнитном поле и при достаточно прямых (шероховатых) краях. Геометрический анализ показывает, что, по-видимому, необходимы следующие условия на минимальную величину магнитного поля: ширина прикраевого слоя ω_c/γ^2 должна быть больше размера шероховатостей краев и радиус кривизны краёв должен быть больше циклотронного радиуса R_c . В очень малых полях, не удовлетворяющих этим критериям, $\omega_c < \omega_c^* \ll \gamma^2 W$ течение в приграничных слоях определяется конкретными профилями краёв и шероховатостей. При таких ω_c объёмные вклады в ток и холловское поле могут доминировать и определять сопротивления образца ϱ_{xx} и ϱ_{xy} .

В Приложении Е выполнено наглядное рассмотрение транспорта в баллистических образцах в слабом магнитном поле и дан качественный вывод части результатов по эффекту Холла и магнетосопротивлению, излагаемых ниже. Такое рассмотрение, хотя и явно описывает картину баллистической динамики в слабом поле, является весьма сложным. Поэтому оно приводится именно в Приложении, а ниже представлен “регулярный” вывод тех же результатов с помощью решения (4.33) кинетического уравнения (4.30).

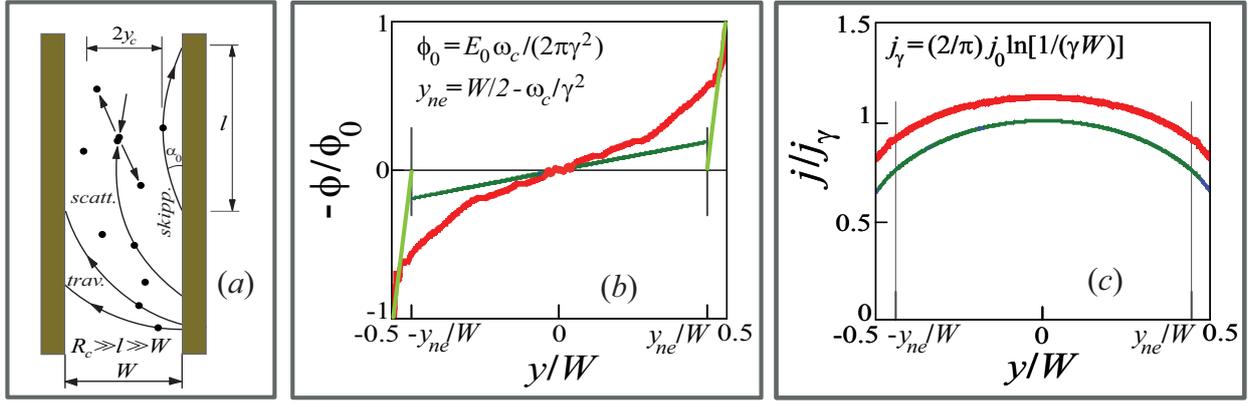


Рис. 4.4: (а): Схематическое изображение течения в первом баллистическом режиме. Показаны траектории “путешествующих”, “скачущих” электронов и электронов, которые рассеиваются на других электронах в объёме образца. Ширина прикраевой области, где важную роль играют скачущие электроны, определяется равенством длин баллистической прикраевой траектории (сегмента циклотронной окружности с углом $\alpha_0 \ll 1$) и длины свободного пробега за счёт межчастичных столкновений: $\alpha_0 \approx (W - y_{ne})/l \approx l/R_c$. (b): Потенциал $\phi_H(y)$ холловского поля, $E_H(y) = -\phi'_H(y)$, при магнитном поле на границе первого баллистического подрежима: $\omega_c W = 0.01$ и $\gamma W = 0.3$. На обеих панелях (b,c) красные кривые получены путём расчёта по формулам (4.10) и (4.9) с общей функцией распределения (4.33); тонкие вертикальные линии показывают ориентировочные границы между объёмной и краевыми областями течения. Тёмно-зелёные линии представляет результаты (4.47) и (4.15) теории возмущений для объёмной области. Светло-зелёные прямые показывают непертурбативный результат (4.52) для холловского потенциала для прикраевых областей. (c): Плотность тока $j(y)$ для тех же параметров, что использованы на панели (b). Зелёная кривая учитывает два главных вклада по параметру γW , $j_\gamma + \Delta j(y)$.

4.3.2 Эффект Холла

Для того, чтобы рассчитать величину холловского электрического поля, обеспечивающего равновесие в y направлении “путешествующих” и “скачущих” электронов “в целом”, во-первых, получим асимптотическое разложение функций f_\pm (4.33) в подрежиме (i) $\omega_c \ll \gamma^2 W$ по малому параметру $\omega_c/(\gamma^2 W)$. Такая асимптотика отвечает “путешествующим” электронам. Она применима в объёмной области (4.40) при любых углах φ [и поэтому определяет величины $j(y)$ и $E_H(y)$ в этой области], а также для функций f_\pm в прикраевых областях (4.42) при углах скорости, не близких к направлению вдоль краёв: $|\pi/2 - |\varphi|| \gg \sqrt{\omega_c(W/2 - |y|)}$.

Прямые вычисления показывают, что слагаемое первого порядка в разложении f_\pm (4.33) по параметру $\omega_c/(\gamma^2 W)$ имеет вид:

$$f_1 = f_1^z + f_1^b, \quad (4.43)$$

где первое слагаемое:

$$f_{1,\pm}^z(y, \varphi) = \omega_c E_0 \left[\frac{\cos \varphi}{\gamma^2} - \exp\left(-\gamma \frac{y_\pm}{\cos \varphi}\right) \left(\frac{\cos \varphi}{\gamma^2} + \frac{y_\pm}{\gamma} - \frac{\sin^2 \varphi}{2 \cos^3 \varphi} y_\pm^2 \right) \right], \quad (4.44)$$

где $y_\pm = y \pm W/2$, есть решение неоднородного кинетического уравнения ($E_0 \neq 0$) с нулевыми

граничными условиями, $f|_{y=\pm W/2} = 0$, а второе слагаемое:

$$f_{1,\pm}^b(y, \varphi) = \mp \omega_c E_0 \frac{W}{4\gamma} \exp\left(-\gamma \frac{y_{\pm}}{\cos \varphi}\right), \quad (4.45)$$

есть решение однородного уравнения ($E_0 = 0$) и обеспечивает удовлетворение граничных условий (4.6). Слагаемое $f_{1,\pm}^b$ даёт вклад, сравнимый в вкладом $f_{1,\pm}^z$, в поток к краю $j_y|_{y=\pm W/2} = 0$ в условиях (4.6).

Из уравнений (4.44), (4.45) и (4.10) получаем для нулевой гармоники функции f_1 :

$$f^{m=0}(y) = -E_0 \frac{\omega_c y W}{\pi} \ln\left(\frac{1}{\gamma W}\right). \quad (4.46)$$

и для холловского поля в объёмной области (4.40) в главном порядке по параметру γW :

$$E_H(y) = E_0 \frac{\omega_c W}{\pi} \ln\left(\frac{1}{\gamma W}\right). \quad (4.47)$$

Результат является линейным по магнитному полю, как это имеет место для холловского поля в объёмных проводниках. Численное интегрирование с общей функцией (4.33) даёт профили $\phi(y)$ $E_H(y)$, близкие к формуле (4.47) в объёмной области (4.40) [см. Рис. 4.4(b)]. Из формул (4.15) и (4.47) получаем следующий результат для локального холловского сопротивления $\varrho_{xy}(y) = E_H(y)/j(y)$ при y в объёмной области:

$$\varrho_{xy} \approx \frac{1}{2} \varrho_{xy}^{(0)}, \quad \varrho_{xy}^{(0)} = \frac{m \omega_c}{n_0} = \frac{B}{n_0 e c}, \quad (4.48)$$

где $\varrho_{xy}^{(0)}$ – это стандартное холловское сопротивление омических образцов при низких температурах. В Приложении Е обсуждается физическая природа этого результата, в частности, происхождение коэффициента $1/2$.

Во-вторых, изучим вклад в эффект Холла от приграничных слоёв (4.42), где течение в значительной степени формируется “скачущими” электронами.

Из уравнения (4.33) можно увидеть, что для y в области (4.42) одна из компонент общей функции распределения f_{\pm} (4.33) [а именно, f_+ при $y \approx -W/2$ и f_- при $y \approx W/2$] асимптотически близка к чисто баллистическому решению:

$$f_{\pm}(y, \varphi) = c'_{l,r} + \frac{E_0}{\omega_c} \left\{ \cos \varphi \mp \sqrt{1 - \left[\sin \varphi + \omega_c \left(y \pm \frac{W}{2} \right) \right]^2} \right\}. \quad (4.49)$$

Отметим, что во втором баллистическом подрежиме аналогичное решение становится справедливым во всём образце, см. Раздел 4.4. Для рассматриваемого здесь первого подрежима коэффициенты $c'_{l,r}$ отвечают коэффициентам в функции $f_{1,\pm}^b$ (4.45):

$$c'_{l,r} = \mp \frac{\omega_c E_0 W}{4\gamma}. \quad (4.50)$$

Функция f_{\pm} (4.49) описывает “скачущие” электроны. Для углов φ в диапазоне около направления вдоль края:

$$|\pi/2 - |\varphi|| \lesssim \delta_{\pm}(y), \quad \delta_{\pm}(y) = \sqrt{\omega_c \left(\frac{W}{2} \pm y \right)}, \quad (4.51)$$

она принимает конечные значения $\sim E_0 \sqrt{W/\omega_c}$, тогда как при углах $\delta_{\pm}(y) \ll |\pi/2 - |\varphi|| \ll 1$ функция f_{\pm} (4.49) асимптотически близка к сумме выражений (4.14) и (4.43) в главном порядке по $\gamma W \ll 1$ [важно отметить, что $\delta_{\pm}(y) \gg \delta_m^{\pm}(y) = \gamma(W/2 \pm y)$ в прикраевых слоях, где величины $\delta_m^{\pm}(y)$ отвечают функциям (4.14) и (4.43)]. Оставшиеся компоненты функции распределения, f_+ при $y \approx W/2$ и f_- при $y \approx -W/2$, во всём диапазоне углов описываются формулами (4.14) и (4.43) с характерными углами $\delta_m^{\pm}(y)$. Последние компоненты описывают “путешествующие” электроны, прилетающие в приграничный слой с противоположного края образца.

Нулевая гармоника $f^{m=0}$ описанного распределения f_{\pm} в прикраевых слоях $y \approx \pm W/2$ (4.42) принимает форму:

$$f^{m=0}(y) \approx \mp \frac{E_0 \omega_c}{2\pi} \left[\frac{1}{\gamma^2} - C \frac{W/2 \mp y}{\omega_c} \right], \quad (4.52)$$

где $C \sim 1$ – численный коэффициент. Значения (4.52) нулевой гармоники $f^{m=0}$ в прикраевых областях много больше её значения (4.46) в объёмной области. Оба слагаемых в выражении $f^{m=0}(y)$ (4.52) происходят от самого большого сингулярного слагаемого $\sim 1/\cos^3 \varphi$ во вкладе (4.44) в асимптотических выражениях для f_+ и f_- . В объёмной области (4.40), вклады в нулевую гармонику $f^{m=0}(y)$, отвечающие этим слагаемым $\sim 1/\cos^3 \varphi$ в f_{\pm} , исчезают в силу того, компоненты от $f_{1,+}^z$ и $f_{1,-}^z$ являются симметричными и интегралы от них по φ компенсируют друг друга. Таким образом, очень большие значения $f^{m=0}(y)$ в прикраевых слоях [сравните (4.46) и (4.52)] связаны с декомпенсацией главных вкладов порядка $\sim 1/\gamma^2$ в нулевой гармонике $f^{m=0}(y)$ от компонент f_+ и f_- , описывающих в этих слоях “скачущие” электроны и “путешествующие” электроны.

Формулы (4.52) и (4.10) приводит к следующей оценке для холловского поля в прикраевых областях (4.42):

$$E_H(y) \sim E_0, \quad W/2 - |y| \lesssim \omega_c/\gamma^2. \quad (4.53)$$

Примечательно, что такое поле $E_H(y)$ не зависит от магнитного поля и велико по сравнению с полем в объёмной области [сравните формулы (4.47) и (4.53)].

На Рис. 4.4(b) показан результат расчёта потенциала холловского поля $\phi(y) \approx f^{m=0}(y)$ для общей функции распределения (4.33) для умеренно малых значений параметров γW и $\omega_c W$,

при которых оказалось возможным выполнить это вычисление при использованном численном методе расчёта интегралов. На численную кривую наложены полученные выше асимптотики (4.46) и 4.52) в объёмной и в прикраевой областях. Видно, что профиль поля имеет сложную форму с плавным переходом между прикраевыми и объёмной областями.

Линейная зависимость холловского напряжения $U_H = \phi(W/2) - \phi(-W/2)$ от магнитного поля возникает за счёт линейной зависимостью ширины приграничных слоёв от ω_c . Формула (4.52) даёт:

$$U_H = -\frac{\omega_c}{\pi\gamma^2} E_0. \quad (4.54)$$

В результате значение холловского сопротивления $\varrho_{xy} = U_H/(Wj_\gamma)$ является аномально большим по сравнению с холловским сопротивлением $\varrho_{xy}^{(0)} = B/(n_0ec)$ в гидродинамическом и омическом режимах (см. Раздел 1.2.2):

$$\varrho_{xy} = \frac{\varrho_{xy}^{(0)}}{2\gamma^2 W^2 \ln[1/(\gamma W)]}. \quad (4.55)$$

4.3.3 Магнетосопротивление

Изучим магнетосопротивление в первом баллистическом подрежиме. Для этого нужно: (i) для “путешествующих” электронов в объёмной области и для половины электронов в прикраевых областях получить пертурбативный вклад второго порядка $f_2 \sim \omega_c^2$ по параметру $\omega_c/(\gamma^2 W)$ из общей функции распределения (4.33) и (ii) для “скачущих” электронов в прикраевых областях найти второй главный порядок по параметру $\omega_c W$ в чисто баллистической функции (4.49).

Для зависимой от ω_c части тока, как и для тока при $\omega_c = 0$, главный вклад происходит от электронов, двигающихся почти вдоль образца, $|\varphi| - \pi/2| \ll 1$. Разложение функции (4.33) по параметру $\omega_c/(\gamma^2 W) \ll 1$ показывает, что при таких направлениях скорости функция f_2 в центральной области (4.40) в главном порядке по второму малому параметру задачи $\gamma W \ll 1$ принимает форму:

$$f_2(y, \varphi) = \frac{\omega_c^2 E_0 y_\pm^3}{2 \cos^5 \varphi} \left(1 - \frac{\gamma y_\pm}{4 \cos \varphi} \right) \exp \left(-\frac{\gamma y_\pm}{\cos \varphi} \right), \quad (4.56)$$

где $y_\pm = y \pm W/2$. Это выражение приводит к следующей зависящей от магнитного поля поправки к току в объёмной области (4.40):

$$j(y) \approx j_\gamma + j_2, \quad j_2 = \frac{3n_0 E_0}{2\pi m} \frac{\omega_c^2}{W\gamma^4}. \quad (4.57)$$

Физическая природа положительной поправки j_2 к току j_γ состоит в малом увеличении средней длины траекторий “путешествующих” электронов с увеличением магнитного поля (см. подробное обсуждение и рисунок в Приложении F).

Из формулы (4.57) для j_2 получаем малое отрицательное магнетосопротивление объёмной области образца:

$$\frac{\varrho_{xx}^b(B) - \varrho_{xx}^b(0)}{\varrho_{xx}^b(0)} = -\frac{3\omega_c^2}{4\gamma^4 W^2 \ln[1/(\gamma W)]}, \quad (4.58)$$

$$\varrho_{xx}^b(B) = \frac{E_0}{j^b(B)}, \quad j^b(B) = \int_{-W/2+a\omega_c/\gamma^2}^{W/2-a\omega_c/\gamma^2} dy j(y), \quad a \sim 1,$$

где $j^b(B)$ – усреднённая плотность тока в объёмной области образца, условно выбранной следующим образом: $-W/2 + a\omega_c/\gamma^2 < y < W/2 - a\omega_c/\gamma^2$.

Изучим теперь вклад в магнетосопротивление от прикраевых областей (4.42).

Из сопоставления формул (4.14), (4.49) и (4.56) для функций распределений при таких y получается выражение для плотности тока в магнитном поле, учитывающее как скачущие, так и путешествующие электроны. Для этого надо учесть как нулевой, так и первый порядок по баллистическому параметру γW в токе (4.15) в нулевом магнитном поле. Итоговая формула содержит два малых параметра $\delta_m^\pm(y) \sim \gamma W$ и $\delta_\pm(y) \sim \sqrt{\omega_c W}$, зависящих от координаты y :

$$j(y) \approx \frac{2j_0}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2} \pm \frac{y}{W} \right) \ln \left[\frac{1}{\sqrt{\omega_c \left(\frac{W}{2} \pm y \right)}} \right] + \left(\frac{1}{2} \mp \frac{y}{W} \right) \ln \left[\frac{1}{\gamma \left(\frac{W}{2} \mp y \right)} \right] \right\}, \quad (4.59)$$

где знаки \pm отвечают левому и правому краям $y \approx \pm W/2$ (их конкретный выбор зависит от знака магнитного поля $\mathbf{V} = V e_z$). Логарифмы как в первом, так и во втором слагаемом оцениваются как $\ln(\gamma/\omega_c)$ при типичных координатах y в середине прикраевых слоёв (4.42), однако они имеют разные зависимости от y , что приводит к нетривиальному вкладу в магнетосопротивление.

На Рис. 4.4(с) построен график $j(y)$ (4.59) с помощью расчёта тока по формуле (4.9) с общей функцией распределения (красная кривая). Видно, что в приграничных регионах он несколько отличается от плотности тока (4.15) в нулевом магнитном поле (зелёная кривая). Действительно, в приграничной области логарифмическое слагаемое с магнитным полем {например, для края $y = -W/2$ это $(1/2 + y/W) \ln[1/\sqrt{\omega_c(W/2 + y)}]}$ становится меньше, чем соответствующее слагаемое в отсутствии магнитного поля {для края $y = -W/2$ это $(1/2 + y/W) \ln[1/\gamma(W/2 + y)]}$. Поэтому края красной кривой оказываются “срезанными” под более резким углом по сравнению с более выпуклыми краями зелёной кривой.

Найдём величину отклонения усреднённой плотности тока, $j = \int_{-W/2}^{W/2} j(y) dy/W$, от её значения в нулевом магнитном поле:

$$\delta j^e = j - j_\gamma - \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} dy \Delta j(y). \quad (4.60)$$

Из уравнений (4.15) и (4.59) получаем:

$$\delta j^e = \frac{4j_0}{\pi} \int_0^{\Delta\xi} d\xi \xi \left[\ln \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_c W \xi}} \right) - \ln \left(\frac{1}{\gamma W \xi} \right) \right], \quad (4.61)$$

где введена переменная $\xi = 1/2 - |y|/W$ и характерное положение границы прикраевых областей $\Delta\xi = a\omega_c/(\gamma^2 W)$. Взятие интеграла (4.61) приводит к результату:

$$\delta j^e \sim -j_0 \frac{\omega_c^2}{\gamma^4 W^2} \ln \left(\frac{\gamma}{\omega_c} \right). \quad (4.62)$$

Такая поправка к току приводит к малому положительному неаналитическому магнетосопротивлению от прикраевых областей:

$$\frac{\varrho_{xx}^{be}(B) - \varrho_{xx}^{be}(0)}{\varrho_{xx}^{be}(0)} \sim \frac{\omega_c^2 \ln(\gamma/\omega_c)}{\gamma^4 W^2 \ln[1/(\gamma W)]}, \quad (4.63)$$

$$j^{be}(B) = \frac{E_0}{j^{be}(B)}, \quad j^{be}(B) = j_\gamma + \delta j^e,$$

где $j^{be}(B)$ – совокупность основного вклада в плотность тока, отвечающего $B = 0$, и зависящего от магнитного поля вклада от прикраевых слоёв.

Полученный результат (4.63) имеет следующее происхождение. Для половины электронов в прикраевых областях предельные углы $||\varphi| - \pi/2| \sim \delta_m^\pm(y)$, связанные с электрон-электронными столкновениями и определяющие основной вклад в ток в объёмной области, заменяются на чисто баллистические углы $\delta_\pm(y)$ (4.51) [$\delta_\pm(y) \gg \delta_m^\pm(y)$; см. Рис. 4.4(a)]. Неаналитический вид магнетосопротивления (4.63) отражает чисто баллистическую динамику “скачущих” электронов, приводящую к обрезанию логарифма во вкладах в плотность тока $j_0 \ln(1/||\varphi| - \pi/2|_{\min})$ зависящей от магнитного поля величиной $\delta_\pm(y)$ (4.51).

В реалистичных образцах, в зависимости от их геометрии, могут проявляться как объёмный (4.58), так и прикраевой (4.63) вклады в магнетосопротивление и эффект Холла. В образцах с краями высокого качества, в которых хорошо сформированы “скачущие” траектории, сопротивления всего образца ϱ_{xx} и ϱ_{xy} будут преимущественно определяться прикраевыми областями (4.42), поскольку вклады (4.55), (4.63) от этих областей в сопротивление $\varrho_{xy}(B)$ и зависящую от B часть ϱ_{xx} больше, чем объёмный вклады (4.48) и (4.58). Для образцов с более нерегулярной геометрией, например, с несколько изогнутыми краями или с краями с крупными шероховатостями, прикраевые области не могут сформироваться по геометрическим причинам: в таких образцах все траектории, которые существовали в нулевом поле, в очень слабом поле приобретают только малые поправки, не меняющие тип траектории. Поэтому должны наблюдаться объёмное магнетосопротивление (4.58) и объёмный эффект Холла (4.48). Отметим также, что конкретные положения электрических холловских контактов

$y_{i,\pm}$ (расположение их на самом краю образца или немного внутри образца) также должны существенно влиять на проявление объёмного или прикраевого вкладов в измеряемом сопротивлении $\varrho_{\pm,xy} = [\phi(y_{i+}) - \phi(y_{i-})]/[j_{\gamma}(y_{i+} - y_{i-})]$.

Все эти вопросы о роли частной геометрии краев и контактов на наблюдаемые ϱ_{xx} и ϱ_{xy} требуют дополнительного исследования для конкретных образцов.

Отдельно обсудим случай не очень длинных образцов $L \lesssim 1/\gamma$, когда движение электронов, двигающихся почти вдоль образца, ограничивается не объёмным рассеянием, а рассеянием на поперечных краях образца при $x = \pm L/2$. Для грубой оценки транспортных величин в таком случае, во всех итоговых формулах электрон-электронная скорость рассеяния γ должна быть заменена на обратную длину образца, $1/L$, или, для совсем коротких образцов ($L \sim W$), на обратную ширину, $1/W$. В этом случае магнетосопротивления (4.58) и (4.63) становятся не зависящими от температуры.

Для случая, $W \ll L \ll 1/\gamma$, в котором для предельного угла, вместо $\delta_m \sim \gamma W$, имеем оценку $\delta_m \sim W/L$, поэтому из уравнения (4.58) получаем для объёмного вклада:

$$\frac{\varrho_{xx}^b(B) - \varrho_{xx}^b(0)}{\varrho_{xx}^b(0)} \sim -\frac{\omega_c^2 L^4}{W^2 \ln(L/W)}, \quad \omega_c \ll W/L^2, \quad (4.64)$$

и аналогичную формулу для прикраевого вклада.

В предельном случае коротких образцов $L \sim W$ или образцов с сильно изогнутыми краями с характерным радиусом $R \sim W$, одинаково важны траектории со всеми углами φ . Поэтому в формулах (4.58) и (4.63) следует положить $\gamma W \rightarrow 1$, что отвечает параметру δ_m равному единице. При этом для образцов не являющихся идеальными прямоугольниками, прикраевой вклад отсутствует по тем же причинам, что и для длинных образцов с изогнутыми краями. В результате усредненная плотность тока в слабых магнитных полях, $\omega_c W \ll 1$, оценивается просто как $j = j_0 + j_2$, где $j_0 \sim E_0 W$ – введённая выше амплитуда баллистической плотности тока, а $j_2 \sim j_0 W^2 \omega_c^2$ – поправка к ней от изгиба траекторий в магнитном поле. Подчеркнём, что при этом считается, что у образца нет ровных краёв, около которых могут формироваться прикраевые слои со “скачущими” электронами. Магнетосопротивление принимает вид:

$$\frac{\varrho_{xx}(B) - \varrho_{xx}(0)}{\varrho_{xx}(0)} \sim -\omega_c^2 W^2, \quad \omega_c \ll 1/W, \quad (4.65)$$

где $\varrho_{xx}(B)$ – полное усредненное сопротивление. Такое магнетосопротивление, как и аналогичный результат для длинных образцов (4.58), связано с увеличением средней длины траекторий электронов за счёт их изгиба магнитным полем.

Таким образом, в коротких образцах, $L \sim W$, возможны только два баллистических подрежима, $\omega_c W \ll 1$ и $1 \lesssim \omega_c W \lesssim 2$, аналогичные подрежимам “i” и “iii” для длинных образцов.

4.3.4 Сопоставление с экспериментами

Обсудим результаты экспериментов [40, 41, 42, 45] по магнетотранспорту двумерных электронов в высокоподвижных квантовых ямах.

На Рис. 4.5(a-d) приводятся кривые магнетосопротивления образцов, изученных в этих работах. Видно, что наблюдаемое отрицательное магнетосопротивление состоит из двух пиков: широкого, сильно зависящего от температуры, и узкого пика, почти не зависящего от температуры. Широкий пик один был объяснён в Главе 1 как результат формирования вязкого течения замагниченной электронной жидкости.

Ниже приводятся аргументы в пользу того, что магнетосопротивление в области узкого пика имеет баллистическую природу и объясняется теорией, развитой в настоящем Разделе 4.3. Качественными признаками этого, во-первых, является его независимость от температуры [см. Рис. 4.5(a)]. Во-вторых, оно нечувствительно к приложению магнитного поля в плоскости [см. Рис. 4.5(b)], что коррелирует с тем, что такое поле не влияет на динамику частиц в плоскости двумерного слоя. В-третьих, такое магнетосопротивление более ярко проявляется в более узких участках образца, чем в более широких [см. Рис. 4.5(c), узкий пик не наблюдается для широкой секции образца]. Примечательно, что амплитуда узкого пика может меняться от очень малой, до очень большой [см. Рис. 4.5(d)].

Другим возможным объяснением малого пика, предложенным в работе [45], могут быть изученные в работе [71] эффекты памяти в классической динамике электронов при их рассеянии на локализованных дефектах при наличии между ними плавного беспорядка.

Из-за наличия макроскопических овальных дефектов в образцах, исследованных в работах [42],[45], а также, возможно и в работах [41, 40], характерные длины и ширины течений вязкой электронной жидкости могут существенно отличаться от ширины и длины образца W и L . Соответствующая эффективная ширина W_{eff} – это, по-видимому, величина того же порядка, что и расстояние между овальными дефектами, поэтому $W_{eff} < W$ [см. Рис. 4.5(f) и Приложение A].

Температурно-независимая часть отрицательного магнетосопротивления, наблюдавшегося в работах [42, 40, 41, 45], по форме похожа на зависимость (4.65), полученную выше для первого баллистического подрежима в коротких образцах, $W \sim L \ll l$. В размерном виде и с учётом замены ширины образца W на эффективную ширину течения W_{eff} для учёта влияния макроскопических дефектов этот результат (4.65) для среднего по образцу удельного

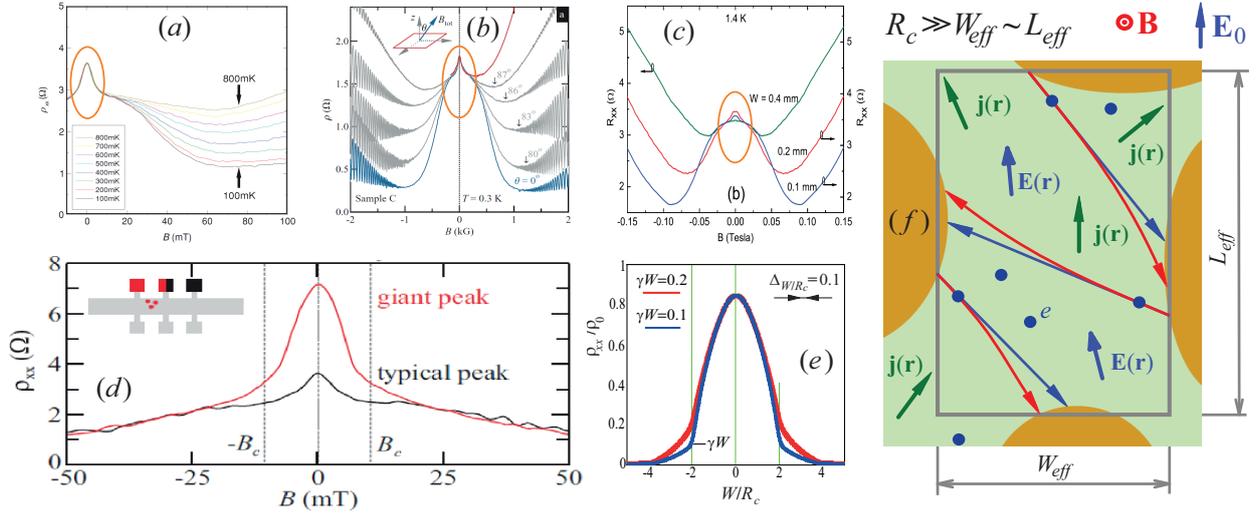


Рис. 4.5: (a)-(d) Продольное “колоколообразное” магнетосопротивление высокоподвижных квантовых ям GaAs. Панели (a)-(d) взяты из экспериментальных работ [42, 40, 41, 45]. В образцах, изученных в экспериментах [42, 45] (возможно, также и в остальных), присутствуют макроскопические дефекты, которые разделяют течение электронной жидкости в образце на течения с меньшими характерными размерами. По-видимому, во всех экспериментах [42, 40, 41, 45] эффективные ширина W_{eff} и длина L_{eff} каждого их участков, свободных от овальных дефектов [см. панель (f)], были сравнимы и при этом много меньше электрон-электронной длин рассеяния и длины рассеяния на беспорядке между макроскопическими дефектами. На панели (d) приведены графики магнетосопротивления для образцов с большой (красная кривая) и типично (чёрная кривая) плотностью макроскопических дефектов. На панели (e) схематически построено баллистически-гидродинамическое магнетосопротивление, даваемое формулами (4.66) и (4.67) для коротких образцов $W \sim L \ll l$. На панели (f) схематически изображён участок течения между близко расположенными овальными дефектами, который может рассматриваться как короткий баллистический образец с эффективной длиной порядка эффективной ширины, $L_{eff} \sim W_{eff}$. Магнитное поле вызывает увеличение средней по образцу длины траекторий, что приводит к отрицательному магнетосопротивлению, изображённому на панели (e).

сопротивления $\rho_{xx} = E_0 / \langle j \rangle$ записывается в виде:

$$\rho_{ball}(\omega_c) \sim \frac{m v_F}{n_0 e^2 W_{eff}} \left(1 - \frac{\omega_c^2 W_{eff}^2}{v_F^2} \right), \quad \omega_c \lesssim W_{eff}. \quad (4.66)$$

Напомним, что это формула отражает увеличение средней длины траекторий с ростом магнитного поля за счёт их изгиба магнитным полем [см. Рис.4.5 (f)]. Как было показано в прошлом разделе, аналогичное отрицательное магнетосопротивление [см. формулы (4.58) и (4.64)] возможно также и для длинных образцов $L \gg W$ в пределе $\omega_c \ll \gamma^2 W$, если подавлен эффект от вклада от электронов на скачущих орбитах. Однако, из сопоставления формул (4.66), (4.58) и (4.64) видно, что именно для коротких образцов отрицательное баллистическое магнетосопротивление проявляется наиболее сильно.

Температурно-независимый узкий пик во всех экспериментах имеет полуширину порядка 50 Гс [см. Рис. 4.5(a-d)]. Такое магнитное поле соответствует диаметру циклотронной окружности $2R_c$ порядка 30-40 мкм для экспериментальных значений двумерных плотностей электронов $n_0 = 2 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$. Эти значения диаметра $2R_c$ сравнимы с характерными расстояниями между макроскопическими дефектами, которые часто присутствуют в высокоподвиж-

ных квантовых ямах GaAs [45]. Теоретическое значения амплитуды баллистического сопротивления $\Delta \varrho_{ball} = E_0/j_0$ в предельном случае $L_{eff} \sim W_{eff}$ при $W_{eff} = 40 \text{ мкм}$ и $n_0 \sim 2 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$, – величина порядка 5 Ом. Эта величина определяет амплитуду баллистического магнетосопротивления, $\varrho_{xx} |_{\omega_c=1/W_{eff}} - \varrho_{xx} |_{\omega_c=0}$, которая согласуется по порядку величины с максимальными экспериментальными значениями амплитуды узкого пика [см. Рис. 4.5(a-d)].

Таким образом, узкий температурно-независимый пик появляется в магнитных полях $B \lesssim B_c^{eff}$, где B_c^{eff} отвечает циклотронному диаметру $2R_c$ порядка среднего расстояния между овальными дефектами, которое играет роль эффективной ширины течения: $W_{eff} \sim 2R_c |_{B=B_c^{eff}}$. При этом максимальная амплитуда наблюдаемых пиков $\Delta \varrho_{ball}$ соответствует теоретическому результату (4.66) для баллистического магнетосопротивления коротких образцов.

В магнитных полях вблизи критического, $B \sim B_c^{eff}$, в областях течения размерами $W_{eff} \sim L_{eff}$ [см. Рис. 4.5(f)], происходит плавный баллистически-гидродинамический переход, обусловленный, как и для длинных образцов, появлением электронов, которые совершают полный циклотронный оборот и не сталкиваются с макроскопическими дефектами. При полях $B \gg B_c^{eff}$ происходит формирование вязкого течения электронов, которому отвечает отрицательное температурно-зависимое магнетосопротивление (1.25), пропорциональное вязкости жидкости (см. Раздел 1.2). Для короткого образца формула (1.25) принимает вид:

$$\varrho_{hydr}(\omega_c) \sim \frac{m}{n_0 e^2} \frac{\eta_{xx}}{W_{eff}^2} \sim \frac{m \gamma v_F^2}{n_0 e^2 W_{eff}^2 \omega_c^2}, \quad \omega_c \lesssim W_{eff}, \quad \gamma \ll \omega_c. \quad (4.67)$$

На Рис. 4.5(e) схематически построено магнетосопротивление во всём диапазоне магнитных полей по формулам (4.66) и (4.67). Область перехода $B \approx B_c^{eff}$ будет теоретически изучена ниже в этой главе для длинных образцов. Для коротких образцов поведение потоков и сопротивления при $B \approx B_c^{eff}$, сильно зависит от конкретной геометрии образца и поэтому, по-видимому, может быть теоретически изучено только численно.

Обсудим имеющиеся трудности в предложенном объяснении узкого пика в магнетосопротивлении квантовых ям GaAs.

В области магнитных полей $\omega_c \sim 1/W_{eff}$ температурно-зависимое гидродинамическое магнетосопротивление имеет амплитуду, малую по сравнению амплитудой баллистического магнетосопротивления (4.66): отношение величин $\varrho_{hydr}(\omega_c = 2/W_{eff})$ и $\varrho_{ball}(\omega_c = 0)$ равно баллистическому параметру $\gamma W_{eff} \ll 1$ [см. Рис. 4.5(e)]. Частое наличие относительно большой амплитуды у экспериментально наблюдаемой температурно-зависимой компоненты магнетосопротивления по сравнению с амплитудой узкого температурно-независимого пика [см. Рис. 4.5(a)-(c)], и, при этом, наблюдение в ряде образцов большой амплитуды у температурно независимого узкого магнетосопротивления [см. Рис. 4.5(d)] может быть связано со сложной,

пространственно-неоднородной геометрией образцов и одновременным сосуществованием баллистических и гидродинамических областей течения (см. Приложение А). Формулы (4.66) и (4.67) для случая наличия двух типов областей содержат разные эффективные ширины W_{ball} и W_{hydr} . Для простейшей модели, в которой гидродинамическая и баллистическая области течения соединяются последовательно, их вклады суммируются с множителями, учитывающими ширины и длины двух областей:

$$R_{\square} = \frac{L_{ball}}{W_{ball}} \varrho_{ball} + \frac{L_{hydr}}{W_{hydr}} \varrho_{hydr}. \quad (4.68)$$

В более реалистичных моделях течения должна получаться некоторая более сложная комбинация магнетосопротивлений (4.66) и (4.67), определяемая частной геометрией образца.

Другим недостаточно ясным вопросом является вопрос о размере макроскопических “овальных” дефектов. В работе [45] приводится оценка их размера, $r_0 \sim 10 - 20$ мкм, основанная на применении формулы Друде для бесконечного образца с овальными дефектами к наблюдаемой величине сопротивления в нулевом магнитном поле. При среднем расстоянии между дефектами $W_{eff} = 40$ мкм нижняя величина этой оценки для r_0 означает, что электроны могут проходить несколько областей между соседними дефектами без столкновения с ними. Такая ситуация ближе к описанию рассеяния на дефектах как транспорта в неупорядоченном образце, чем транспорта в “эффективном” коротком образце, образуемой краями дефекта [Рис. 4.5(f)].

Для образцов, отвечающих верхней оценке на величину r_0 , $r_0 \sim 20$ мкм, измерения для набора различных образцов, выполненные в работе [45], показывают, что чем больше плотность дефектов N_d и, следовательно, больше отношение r_0/W_{eff} , тем больше амплитуда пика [см. Рис. 4.5(d), на нём приведены результаты для двух образцов с относительной большой и относительной малой плотностью дефектов N_d]. Рост амплитуды пика с увеличением N_d полностью отвечает ожидаемому картине: при малых $r_0/W_{eff} \ll 1$ рассеяние электронов на дефектах происходит редко и применим статистический подход Друде, дающий объёмную проводимость и сопротивление. Для образцов, в которых $r_0/W_{eff} \sim 1$, картина транспорта в каждой области между дефектами является баллистической, похожей на транспорт в коротком образце с размерами $W_{eff} \sim L_{eff}$ [см. Рис. 4.5(f) и Рис. А.1 в Приложении А].

Заметим также, что общее количество овальных дефектов в изученных в работе [45] образцах было относительно мало (порядка 30), поэтому рассеяние электронов на краях образца также, по-видимому, играет важную роль. Как отмечалось выше, явно эффект зависимости амплитуды узкого пика от размера образца наблюдался в работе [41] для образца, состоящего

из трёх секций разной ширины [см. Рис. 4.5(с)].

4.4 Баллистическое течение в умеренных магнитных полях

4.4.1 Чисто баллистическая функция распределения

В этом разделе построим аналитическое описание течения электронов в баллистических под-режимах (ii) и (iii) [см. Раздел 4.2.3]. Частично такое течение было описано в статье [198]. В настоящем разделе, дополнительно к результатам работы [198], получены аналитические выражения для профилей тока и холловского поля, а также для зависимости продольного и холловского сопротивлений от магнитного поля.

Подрежимы (ii) и (iii) в совокупности описываются неравенствами:

$$\omega_c : \quad \omega_c \gg \gamma^2 W, \quad 2 - \omega_c W \gg \gamma W, \quad (4.69)$$

В левой части этого диапазона, $\gamma^2 W \ll \omega_c \ll \gamma$, динамика электронов в рамках уравнений (4.6), (4.7) и (4.30) могла бы контролироваться как действием приложенных полей и рассеянием на краях, так и рассеянием в объёме образца. Действительно, при классически малых полях, $\omega_c \ll \gamma$, входящих в интервал (4.69), скорость перераспределения импульса при межэлектронных столкновениях, γ , больше чем скорость изменения импульса за счёт циклотронного вращения, ω_c . Например, это отражается в том, что в знаменателе $\gamma^2 + \omega_c^2$ формулы (4.33) доминирует первое слагаемое. Однако, проведённый анализ решения (4.33)-(4.39) показывает, что в обеих подобластях $\gamma^2 W \ll \omega_c \ll \gamma$ и $\gamma \ll \omega_c \lesssim 1/W$ функция распределения электронов в главном порядке по γ определяется рассеянием на краях и влиянием приложенных полей, а межэлектронные столкновения приводят лишь к малым поправкам.

Малую роль объёмного рассеяния в главном порядке по γ в обоих диапазонах $\gamma^2 W \ll \omega_c \ll \gamma$ и $\gamma \ll \omega_c \ll 1/W$ качественно можно объяснить следующим образом. Как отмечалось в прошлом разделе, при $\omega_c \gg \gamma^2 W$ максимальный размер баллистической траектории ограничивается не длиной, связанной с объёмным рассеянием, $l = 1/\gamma$, а максимальной длиной сегмента циклотронной орбиты, который можно вписать в образец, $l_b^{(2)} = \sqrt{R_c W}$ [см. Рис. 4.1(a)]. Следовательно, для обоих этих диапазонов ω_c , после отражения любого электрона от края, следующее его отражение от того же или противоположного края – это более вероятный процесс, нежели рассеяние в объёме на других электронах или на беспорядке. С характером динамики электронов связаны величины плотности тока $j \equiv j_x$ и холловского электрического поля E_H , получающегося из требования отсутствия средних тока и ускорения

вдоль оси y . Поэтому j и E_H в главном порядке по параметру $l_b^{(2)}/l \ll 1$ (и $W/l_b^{(2)} \ll 1$ при $\omega_c \ll \gamma$) описываются баллистическими формулами, не учитывающими рассеяние в объёме.

Таким образом, во всем диапазоне (4.69) выражение (4.33) при $\gamma = 0$ даёт искомую функцию распределения в главном порядке по темпу объемного рассеяния γ при всех y и φ . Эта функция аналогична приведённой выше функции (4.49):

$$f_{\pm}(y, \varphi) = \tilde{c}_{l,r} + \frac{E_0}{\omega_c} \left\{ \cos \varphi \mp \sqrt{1 - \left[\sin \varphi + \omega_c \left(y \pm \frac{W}{2} \right) \right]^2} \right\}, \quad (4.70)$$

но имеет другие коэффициенты: $\tilde{c}_{l,r} = E_0 c_{l,r} / \omega_c^2$ (см. их вид ниже). Отметим, что при $\gamma^2 W \ll \omega_c \ll \gamma$ буквальный переход к пределу $\gamma \rightarrow 0$ в функции (4.33) невозможен и совпадение итогового вида функции f_{\pm} с выражением (4.70) в главном порядке по параметру $\omega_c W \ll 1$ есть результат анализа первых двух слагаемых асимптотики общего выражения (4.33) по параметру $\gamma^2 W / \omega_c \ll 1$ при условии $\omega_c W \ll 1$.

Любое решение уравнения (4.12) при $\gamma = 0$ может быть найдено с точностью до константы, что соответствует отсутствию релаксации возмущений электронной плотности. Соответственно, система алгебраических уравнений для коэффициентов $c_{l,r}$ (4.36) является вырожденной. Накладывая условие симметричности, $c_l + c_r = 0$, из системы (4.36), получаем:

$$\tilde{c}_{l,r} = \mp \frac{E_0}{\omega_c} \frac{U(\omega_c) - V(\omega_c)}{2(2 - \omega_c W)}, \quad (4.71)$$

где $U(\omega_c) = \arccos(1 - \omega_c W)$ и $V(\omega_c) = (1 - \omega_c W) \sqrt{\omega_c W} \sqrt{2 - \omega_c W}$. Отметим, что вид решения (4.70) был получен в работе [198], однако в ней не был проведен полный анализ области его применимости.

Как видно из выражения (4.70), в промежуточных магнитных полях $\omega_c \sim 1/W$ [левая часть подрежима (iii)] плотность тока $j(y)$ оценивается как:

$$j(y) \sim j_0, \quad (4.72)$$

где $j_0 = n_0 E_0 W / m$ – характерная плотность чисто баллистического тока. Уравнение (4.72) является следствием того, что типичные баллистические траектории, обеспечивающие главный вклад в ток j при $\omega_c \sim W$, имеют длину порядка W . При тех же полях, $\omega_c \sim 1/W$, функция распределения (4.70) также позволяет оценить холловское поле:

$$E_H(y) \sim E_0. \quad (4.73)$$

На Рис. 4.6 построены зависимости полного тока, $I = \int_{-W/2}^{W/2} dy j(y)$, усредненного холловского электрического поля, $E_H = \int_{-W/2}^{W/2} (dy/W) E_H(y)$, и сопротивлений $\varrho_{xx} = E_0 / (I/W)$,

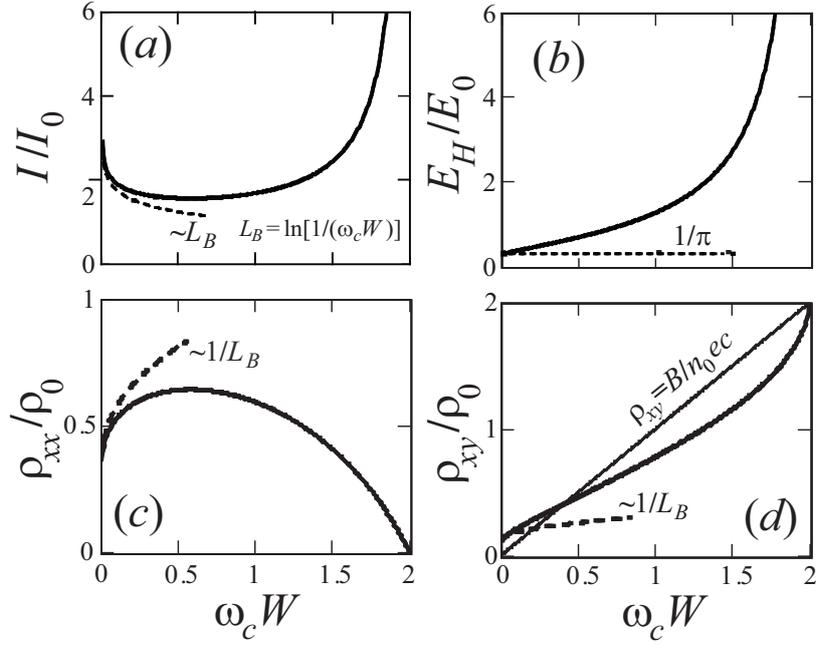


Рис. 4.6: Полный ток (а), холловское электрическое поле (b), продольное (c) и холловское сопротивления (d) для образца с отсутствующим объемным рассеянием, $\gamma = 0$, как функции магнитного поля во втором (ii), $0 < \omega_c W \ll 1$, и в третьем (iii), $1 \lesssim \omega_c W < 2$, баллистических подрежимах. Сопротивления показаны в единицах $\rho_0 = E_0/j_0 = m/(n_0 W)$.

$\rho_{xy} = E_H/(I/W)$ от параметра $\omega_c W$ во всей баллистической области $0 < \omega_c < 2/W$ при отсутствии рассеяния объёма, $\gamma = 0$. Из Рис. 4.6 можно видеть, что оценки (4.72) и (4.73) для плотности $j(y)$ и холловского поля $E_H(y)$ на самом деле справедливы в средней части интервала (4.69), где $\omega_c W \sim 2 - \omega_c W \sim 1$. На краях интервала ток $I(\omega_c)$ расходится; холловское поле $E_H(\omega_c)$ расходится на правом краю $\omega_c W \rightarrow 2$, оставаясь конечным на левом краю $\omega_c \rightarrow 0$.

Существование конечного значения холловского поля, $E_H \rightarrow E_0/\pi$, в пределе слабых полей, $\omega_c \rightarrow 0$ – одно из нетривиальных проявлений баллистического характера движения электронов. Подобное поведение зависимости $\rho_{xy}(B)$ было получено ранее в экспериментах и численном моделировании [197] для двумерных электронов в образцах с четырьмя контактами и было названо баллистическими аномалиями магнетосопротивления. В терминах обзора [197], зависимость $\rho_{xy}(B)$ на Рис. 4.6(d) в диапазоне $\omega_c W \ll 1$ представляет собой “последнее холловское плато”.

4.4.2 Профиль течения и сопротивления во втором (“ii”) баллистическом подрежиме

Выведем аналитические выражения для интегральных характеристик течения (плотности тока, холловского поля и сопротивлений) в пределах $\omega_c \rightarrow 0$ и $\omega_c W \rightarrow 2$, то есть в подрежиме (ii) и правой сингулярной части подрежима (iii).

Из функции распределения (4.70) в пределе слабых полей, $\omega_c W \ll 1$, главный вклад в транспортные величины дают электроны, двигающиеся вдоль краев образца с углами $\varphi \approx \pm\pi/2$. Асимптотический вид выражения (4.70) при углах $\sqrt{\omega_c W} \ll |\pi/2 - |\varphi|| \ll 1$ есть:

$$f_{\pm}(y, \varphi) = \tilde{c}_{l,r} + E_0 \left(y_{\pm} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} + \omega_c \frac{y_{\pm}^2}{2} \frac{1}{\cos^3 \varphi} \right), \quad (4.74)$$

где $y_{\pm} = y \pm W/2$ и

$$\tilde{c}_{l,r} = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} E_0 \sqrt{\omega_c W^3}. \quad (4.75)$$

При углах $|\pi/2 - |\varphi|| \lesssim \sqrt{\omega_c W}$ необходимо использовать точное выражение (4.70), в котором положено $\sin \varphi \approx \pm[1 - (|\varphi| - \pi/2)^2/2]$ и $\cos \varphi \approx \pm||\varphi| - \pi/2|$.

Плотность тока $j(y)$ (4.9), отвечающая функции распределения (4.74), состоит из главной части, которая не зависит от координаты y , и малой поправки по логарифмическому параметру $L_B = \ln[1/(\omega_c W)] \gg 1$, зависящей от y :

$$j(y) = j_{m0} + \Delta j(y), \quad j_{m0} \approx j_B = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{1}{\omega_c W} \right) j_0, \quad (4.76)$$

$$\Delta j(y) = [f_1(y) + f_2(y)] j_0.$$

Функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ были вычислены аналитически. Они имеют схожие профили с расходящейся производной у краёв образца, $y = \pm W/2$:

$$\begin{aligned} f_1(y) &= \frac{1}{\pi} \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{y}{W}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{y}{W}} \right), \\ f_2(y) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{W} \right) \ln \left[\frac{2}{(1 - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{y}{W}}) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{y}{W}}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{W} \right) \ln \left[\frac{2}{(1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{y}{W}}) \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{y}{W}}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Зависимости $f_1(y)$ и $f_2(y)$ показаны на Рис. 4.7(a).

Потенциал холловского поля (4.10), рассчитанный по функции распределения (4.74), принимает вид:

$$\phi(y) = E_0 W [g_1(y) + g_2(y)], \quad (4.78)$$

$$g_1(y) = \frac{1}{2\pi} \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{y}{W}} - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{y}{W}} \right)$$

$$g_2(y) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{W} \right) \ln \left[\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{y}{W}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{y}{W}}} \right] - \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{W} \right) \ln \left[\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{y}{W}}}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{y}{W}}} \right] \right\}. \quad (4.79)$$

Данные формулы описывают холловское поле в главном порядке по параметру $\omega_c W \ll 1$. Обе функции $g_1(y)$ и $g_2(y)$ имеют расходящиеся производные вблизи краёв образца, что приводит к расходимости холловского поля $E_H(y) = -\phi'(y)$ [см. рис. 4.7(b)].

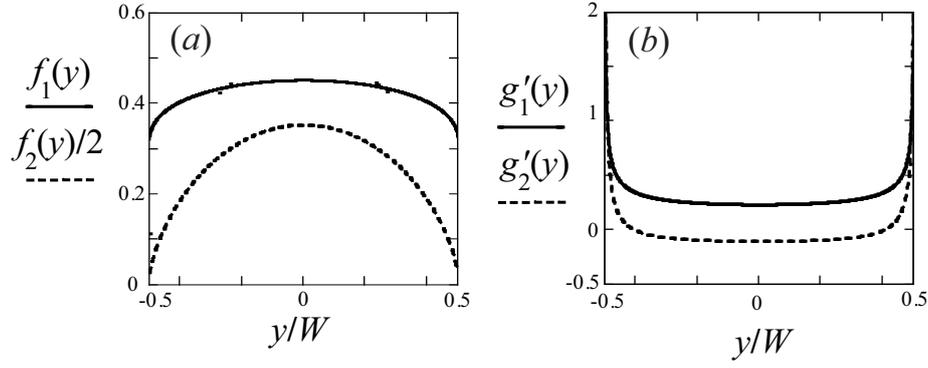


Рис. 4.7: Функции, определяющие профили плотности тока (а) и холловского электрического поля (b) согласно выражениям (4.76)-(4.79) во втором баллистическом подрежиме, $(\gamma W)^2 \ll \omega_c W \ll 1$, полученные в пренебрежение межчастичным рассеянием.

Было проверено, что численный расчёт профилей $j(y)$ и $E_H(y)$, основанный на точной функции распределения (4.70), приводит с нужной точностью к полученным аналитически выражениям (4.76)-(4.79).

Из выражений (4.76)-(4.79) в главном порядке по $\omega_c W$ получаются следующие выражения для полного тока I и холловского напряжения $U_H = \phi(W/2) - \phi(-W/2)$:

$$I = W \frac{L_B}{\pi} j_0, \quad U_H = \frac{1}{\pi} W E_0. \quad (4.80)$$

Соответственно, продольное и холловское сопротивления есть:

$$\varrho_{xx}(B) = \frac{1}{L_B} \varrho_0, \quad \varrho_{xy}(B) = \frac{1}{\pi L_B} \varrho_0, \quad (4.81)$$

где $\varrho_0 = E_0/j_0 = m/(n_0 W)$. Можно видеть что обе эти величины имеют слабую сингулярность вследствие наличия множителя $1/L_B(B) \sim 1/\ln(1/B)$.

Зависимости полного тока, среднего холловского поля и соответствующих сопротивлений во втором баллистическом подрежиме, $\omega_c W \ll 1$, от параметра $\omega_c W$ [характеризующего величину магнитного поля] были также получены путём численного расчёта на основе функции распределения (4.70) и были сопоставлены с аналитическими результатами (4.81) и (4.80). Продемонстрировано, что последние хорошо описывают численный расчёт [A19].

Оба полученных сопротивления $\varrho_{xx}(B)$ и $\varrho_{xy}(B)$ являются неаналитическими функциями в пределе $B \rightarrow 0$: $\varrho_{xx/xy}(\omega_c) \sim 1/\ln[1/(\omega_c W)]$ {см. Рис. 4.6(c,d)}. Однако, из рисунка видно, что такие сингулярности очень слабые, похожие на наличие конечных пределов. Сингулярное поведение такого типа не встречается для омических и гидродинамических режимов транспорта и типично для баллистического транспорта, где основной вклад в ток может возникать за счёт группы траекторий выделенной геометрии. В рассматриваемой системе в пределе $\omega_c W \ll 1$ такой группой траекторий являются сегменты циклотронных окружностей с углами скорости,

близкими к направлению образца: $|\varphi| \approx \pi/2$.

4.4.3 Профиль течения и сопротивления в третьем (iii) баллистическом под-режиме вблизи критического магнитного поля

В третьем баллистическом подрежиме, $B_c W/l \ll B_c - B \lesssim B_c$, число “скачущих” электронов становится относительно большим: сравним или даже б’ольшим, чем число “путешествующих” электронов [см. Рис. 4.1(b)]. Для того, чтобы удовлетворить условию отсутствия поперечного тока, $j_y = 0$, вклад от ЕН-дрейфа в ток j_y , связанный со всеми электронами, $j_y^{(0)} = n_0 e c E_0 / B$, компенсируется за счёт недостатка и избытка неравновесных “правых и левых путешествующих” электронов со скоростями $v_y(t) > 0$ и $v_y(t) < 0$, соответственно. Неравновесные скачущие электроны не компенсируют ток $j_y^{(0)}$, потому что для них направления скорости взаимно противоположны $v_y(t) > 0$ и $v_y(t) < 0$ и симметричны для каждой траектории. Диффузное отражение электронов от краёв происходит с равными вероятностями во все углы φ , поэтому в области магнитных полей вблизи перехода $2R_c/W - 1 \ll 1$, где доминируют “скачущие электроны”, доля путешествующих электронов в числе всех неравновесных электронов мала и полные неравновесные плотности электронов, необходимые для компенсации тока $j_y^{(0)}$, становятся очень большими по сравнению с плотностями в области $2R_c/W - 1 \sim 1$.

Такая динамика электронов вблизи перехода, $\gamma W \ll 2 - \omega_c W \ll 1$ (правая часть третьего баллистического подрежима), в формулах выражается в том, что коэффициенты $\tilde{c}_{l,r}$ (4.71) быстро расходятся при $\omega_c W \rightarrow 2$. В главном порядке по параметру $\sqrt{2 - \omega_c W}$ они принимают вид: $\tilde{c}_{l,r} = \pm(\pi E_0)/[2\omega_c(2 - \omega_c W)]$ и становятся больше других слагаемых в формуле (4.70). В связи с этим главная часть функции распределения принимает вид:

$$f_{\pm}(y, \varphi) \approx \pm \frac{E_0}{\omega_c u}, \quad (4.82)$$

где $u = (2/\pi)(2 - \omega_c W) \ll 1$ – малый параметр, а опущенные члены имеют порядок величины E_0/ω_c . Для лучшего отражения разрывного кусочно-постоянного характера такой функции распределения, запишем в её в более подробном виде вместе с множителем, описывающим зависимость от энергии:

$$\delta f(y, \varphi, \varepsilon) = \frac{E_0}{\omega_c u} \chi(y, \varphi) f'_F(\varepsilon), \quad (4.83)$$

где $\chi(y, \varphi)$ – функция, показывающая принадлежность точки y, φ к левой или правой области образца: $\chi(y, \varphi) = 1$ при $-\pi + \varphi_- < \varphi < \varphi_+$ и $\chi(y, \varphi) = -1$ при $\varphi_+ < \varphi < \pi + \varphi_-$ {см. Рис. 4.2; напомним, что пограничные углы $\varphi_{\pm} = \varphi_{\pm}(y)$, введённые в Разделе 4.2.4, имеют вид: $\varphi_{\pm}(y) = \arcsin[1 - (W/2 \pm y)/R_c]$. Наличие множителя χ явно демонстрирует, что главную часть нерав-

новесных электронов вблизи перехода составляют скачущие электроны, перераспределённые между левой и правой областями. Малый параметр $u = u(B) = (2/\pi)(2 - W/R_c) \ll 1$ в уравнении (4.83) показывает, насколько близко магнитное поле B к критическому полю B_c .

Расчёт по формулам (4.9) и (4.10) с функцией распределения (4.82) позволяет получить плотность тока:

$$j(y) = \frac{2E_0}{\pi\omega_c u} \left[\sqrt{1 - \left(\omega_c y - \frac{\pi u}{4}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\omega_c y + \frac{\pi u}{4}\right)^2} \right] \quad (4.84)$$

и электростатический потенциал холловского поля:

$$\phi_H(y) = \frac{E_0}{\pi\omega_c u} \left[\arcsin\left(\omega_c y - \frac{\pi u}{4}\right) + \arcsin\left(\omega_c y + \frac{\pi u}{4}\right) \right]. \quad (4.85)$$

Обе величины (4.84) и (4.85), как и функция распределения (4.82) расходятся как $\sim 1/u$ в магнитных полях, близких к полю перехода $\gamma W \ll 2 - \omega_c W \ll 1$. Видно, что плотность тока $j(y)$ имеет профиль искаженной полуокружности с очень большими производными вблизи краев образца $y = \pm W/2$, при этом холловский потенциал $\phi_H(y)$ имеет профиль в форме искаженного арксинуса. Такая величина $j(y)$ и холловское поле $E_H(y)$, отвечающее $\phi_H(y)$, для образца без рассеяния в объёме, $\gamma = 0$, показаны на Рис. 4.8 для самой ближней окрестности точки перехода, $u \rightarrow 0$ ($B \rightarrow B_c$), и для магнитного поля вблизи перехода со стороны меньших полей, $u \ll 1$ ($B_c - B \ll B_c$).

В непосредственной близости к точке перехода $u \rightarrow 0$ (такой предел имеет смысл при полном отсутствии рассеяния в объёме $\gamma = 0$) формулы (4.84) и (4.85) дают:

$$j(y) = \frac{2\sqrt{1 - (y/R_c)^2}}{\pi u} j_0, \quad E_H(y) = \frac{2}{\pi u \sqrt{1 - (y/R_c)^2}} E_0, \quad (4.86)$$

где, как и в двух предыдущих разделах, $j_0 = n_0 E_0 W/m$. Видно, что профиль тока приобретает вид точной окружности, а холловское поле имеет сильные сингулярности на краях образца.

Для полного тока и холловского напряжения в главном и следующем порядках по параметру \sqrt{u} из формул (4.84) и (4.85) получаем:

$$I = W \frac{1}{2u} j_0, \quad U_H = W \left(1 - \sqrt{\frac{u}{\pi}}\right) \frac{1}{u} E_0. \quad (4.87)$$

Соответствующие сопротивления есть:

$$\varrho_{xx} = 2u\varrho_0, \quad \varrho_{xy} = 2 \left(1 - \sqrt{\frac{u}{\pi}}\right) \varrho_0, \quad (4.88)$$

то есть продольное сопротивление, ϱ_{xx} , как функция u линейно убывает к нулю при $u \rightarrow 0$, а холловское сопротивление, ϱ_{xy} , демонстрирует корневую сингулярность при $u \rightarrow 0$, но при этом

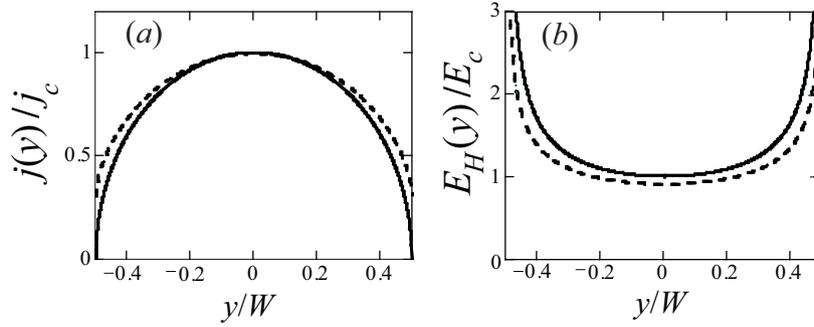


Рис. 4.8: Плотность тока (а) и холловское электрическое поле (b) в образце без объёмного рассеяния, $\gamma = 0$, для правой части третьего баллистического подрежима, $0 < 2 - \omega_c W \ll 1$. Сплошные кривые отвечают магнитным полям предельно близким к точке перехода, $u \rightarrow 0$, штриховые кривые соответствуют относительно большому параметру u , $u = 0.31$. Плотность тока нормирована на величину $j_c = 4E_0/(\pi\omega_c u)$, холловское поле нормировано на $E_c = 2E_0/(\pi u)$.

стремится к конечному пределу ϱ_0 . Это же поведение сопротивлений было также получено выше путем прямых численных расчетов по функции распределения (4.70) [см. Рис. 4.6(с,d)].

Примечательно, что полученное холловское сопротивление ϱ_{xy} (4.88) в непосредственной близости к критическому полю, $u \rightarrow 0$, в точности принимает стандартное значение для омиического объёмного режима, $\varrho_{xy}^{(0)} = B/(n_0 e c)$, а продольное сопротивление ϱ_{xx} (4.88) стремится к нулю линейно по разности $B_c - B$ (при условии $\gamma = 0$):

$$\varrho_{xx}(B) \sim (B_c - B) \varrho_0, \quad \varrho_{xy}(B) = B_c F(u) R_H^{(0)}, \quad (4.89)$$

где $F(u) = 1 - \sqrt{u/\pi}$ – множитель, включающий в себя корневую сингулярность, а $R_H^{(0)} = 1/(n_0 e c)$ – стандартный коэффициент Холла.

Обращение в нуль величины ϱ_{xx} при $B \rightarrow B_c$ соответствует тому факту, что двумерные электроны в перпендикулярном магнитном поле в полоске с шириной, равной или шире критического значения, $W \geq 2R_c$, при полном отсутствии беспорядка и межэлектронного взаимодействия ($\gamma = 0$) не обладают конечным сопротивлением. В такой системе при $W \geq 2R_c$ приложение внешнего поля $\mathbf{E}_0 || \mathbf{e}_x$ в некоторый момент времени $t = 0$ приводит к неограниченному увеличению со временем всех величин: тока $j(y, t)$ вдоль поля \mathbf{E}_0 , тока по сечению образца $j_y(y, t)$, возмущения заряда $\delta n(y, t)$ и холловского поля $E_H(y, t)$.

4.5 Фазовый переход от баллистики к гидродинамике

4.5.1 Переход от баллистики к гидродинамике в отсутствии магнитного поля

Изучим, как происходит переход из баллистического течения при магнитных полях меньше критического $B < B_c$ в гидродинамическое течение в полях выше критического $B > B_c$ для

двумерных электронов в чистых образцах. Рассмотрим случай длинных образцов с малой интенсивностью межчастичных столкновений при отсутствии рассеяния на дефектах и фононах: $\gamma W \ll 1$, $\gamma = \gamma_{ee}$, $\gamma' = 0$. Дополнительная цель этого раздела – исследовать переход между баллистическим и омическим режимами, который также происходит с ростом магнитного поля при том же критическом поле $B = B_c$ в образцах со слабым рассеянием электронов на беспорядке в объёме и при полном отсутствии межчастичного рассеяния. Будет показано, что хотя хорошо гидродинамический режим кардинально отличается от омического, баллистически-гидродинамический и баллистически-омический переходы имеют много похожих черт.

Для того чтобы выявить особенности природы этих переходов, контролируемых магнитным полем, обсудим сначала, как происходят переходы между баллистическим и омическим, а также между баллистическим и гидродинамическим режимами транспорта в длинных образцах при отсутствии магнитного поля при изменении длин свободного пробега (например, за счёт изменения температуры).

Для первого перехода ключевым параметром является отношение W/l_{tr} ширины образца к длине свободного пробега относительно релаксации импульса в объёме образца [$l_{tr} = 1/\gamma'$, где γ' введенная в Разделе 4.2.1 скорость релаксации импульса за счёт рассеяния электронов на дефектах и/или фононах]. При $W/l_{tr} \ll 1$ реализуется баллистический режим, в котором электроны рассеиваются на краях при движении под углами, не очень близкими к направлению края, $|\pi/2 - |\varphi|| \gg W/l_{tr}$, и в объёме при направлении движения почти вдоль края, $|\pi/2 - |\varphi|| \lesssim W/l_{tr}$. Такой транспортный режим описан в первой части Раздела 4.2.2. Плотность тока приблизительно однородна и равна, в главном порядке, величине $j \approx (2/\pi) \ln(l_{tr}/W) j_0$ (4.15). При $W/l_{tr} \gg 1$ транспорт является омическим. В основной объёмной части образца, $W/2 - |y| \gg l_{tr}$, электроны рассеиваются на дефектах (и/или фононах) с релаксацией импульса. Плотность тока в этом регионе даётся формулой Друде, $j_D = (l_{tr}/W) j_0$. На Рис. 4.9(а) схематически построена зависимость средней плотности тока от длины l_{tr} .

Рассмотрим переход между баллистическим и гидродинамическим режимами транспорта для образца с малой, но конечной скоростью объёмной релаксацией импульса на дефектах (или фононах). В таком образце электрон-электронные столкновения не играют роли, когда они являются очень медленными, а именно: когда длина свободного пробега относительно них велика по сравнению с длиной свободного пробега относительно рассеяния на дефектах: $l_{tr} \ll l_{ee}$. В этом случае транспорт является баллистическим и его плотность тока, в главном порядке по $l_{ee}/l_{tr} \ll 1$, даётся той же формулой, $j \approx (2/\pi) \ln(l_{tr}/W) j_0$, как и без учёта межчастичных столкновений.

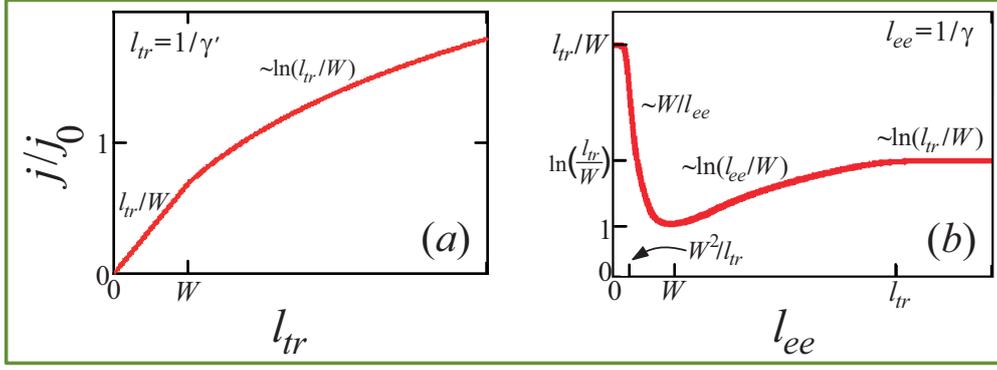


Рис. 4.9: Зависимость средней плотности тока от длин свободного пробега для перехода между баллистическим и омическим (а) и баллистическим и гидродинамическим режимами (б). Оба перехода являются плавными.

В режиме, когда межчастичные столкновения становятся более частыми, чем столкновения с дефектами, но всё ещё более редкими, чем столкновения со стенками, $W \ll l_{ee} \ll l_{tr}$, транспорт остаётся баллистическим, но длина наиболее важных траекторий в направлении почти вдоль образца ограничивается межчастичным рассеянием, как было описано выше в настоящей Главе 4. Плотность тока приобретает вид $j \approx (2/\pi) \ln(l_{ee}/W) j_0$ в главном порядке по $l_{ee}/l_{tr} \ll 1$. При относительно частых межчастичных столкновениях, сохраняющих импульс, когда $l_{ee} \ll W$ формируется вязкая электронная жидкость в объёмной части образца $W/2 - |y| \gg l_{ee}$. При условии $W \ll \sqrt{l_{ee}l_{tr}}$, профиль течения $j(y)$ является параболическим (течение Пуазейля), а при условии $W \gtrsim \sqrt{l_{ee}l_{tr}}$ – плоским в центральной части образца, $W/2 - |y| \gg \sqrt{l_{ee}l_{tr}}$, и спадающим к нулю у краёв образца в областях $W/2 - |y| \lesssim \sqrt{l_{ee}l_{tr}}$ (см. Рис. 1.2). Средняя плотность тока как функция длины свободного пробега l_{ee} при фиксированной длине l_{tr} схематически нарисована на Рис. 4.9(б).

Критические значения длин пробега:

$$l_{tr} = W, \quad l_{ee} = l_{tr}, \quad W, \quad W^2/l_{tr}, \quad (4.90)$$

характеризуют совпадение скоростей релаксации импульсов разных типов: непосредственно при рассеянии на шероховатых краях образца; при рассеянии на дефектах в объёме образца; при рассеянии на краях после ряда многих межэлектронных столкновениях, осуществляющих диффузную передачу неравновесного импульса. Течения при переходе длинами l_{tr} и l_{ee} соответствующих критических значения меняются плавно: всё большая и большая часть электронов начинает менять механизм релаксации импульса. Таким образом, оба описанные перехода являются плавными (в английской терминологии: кроссоверами).

Ниже будет показано, что при фиксированных малых скоростях рассеяния электронов на дефектах и друг на друге, $l_{tr} \gg W$, $l_{ee} \gg W$ баллистически-омический и баллистически-

гидродинамический переходы происходят с ростом магнитного поля резко: при переходе им критического значения $B = B_c$. Такие переходы оказываются резкими и, более того, имеют многие черты фазовых переходов. Как сообщалось в Разделе 4.1, ранее теоретические исследования таких переходов были основаны на численном решении кинетического уравнения [61, 198]. Одной из целей этой главы является построение аналитической теории этих переходов. Такая теория, как будет показано ниже, позволит изучить конкретные процессы в динамике электронов, ответственные за переходы, и аналитически рассчитать поведение характеристик системы в окрестности критической точки $B = B_c$.

4.5.2 Течение в ближайшей нижней окрестности точки перехода с учётом межчастичных столкновений

Как обсуждалось в Разделе 4.4, в образцах, в которых $l_{tr}, l_{ee} \gg W$, в ближайшей нижней окрестности критического поля B_c , $0 < B_c - B \lesssim B_c W/l$ (иначе: $0 < 2 - \omega_c W \lesssim \gamma W$), дисбаланс в плотностях “скачущих” электронов около левого и около правого краёв резко увеличивается. При этом число “путешествующих” электронов, которые могут компенсировать ЕН-дрейф, становится относительно мало. Описывающее этот дисбаланс баллистическое распределение (4.83) [а также ток и холловское поле (4.86)] расходятся при приближении к точке перехода $u \rightarrow 0$. Эти расходимости ограничиваются межчастичными столкновениями.

Чтобы описать такое полубаллистическое течение, во-первых, введём “пробную” функцию распределения, похожую на чисто баллистическую функцию (4.83), но дополнительно учитывающую уходное слагаемое $-\gamma \delta f$ в операторе St в кинетическом уравнении (4.2). Из общего решения (4.33) уравнения (4.2) с учётом $-\gamma \delta f$ в пределе $2 - \omega_c W \lesssim \gamma W$ получаем:

$$\delta f_d(y, \varphi, \varepsilon) = \chi(y, \varphi) f'_F(\varepsilon) \frac{E_0/\omega_c}{u + W/l}. \quad (4.91)$$

Отвечающие этой функции δf_d плотность тока $j(y)$ и холловское поле $E_H(y)$, как и величины (4.86), быстро растут вблизи точки перехода, однако в пределе $B \rightarrow B_c$ достигают конечных значений, определяемых медленной скоростью межчастичных столкновений. Для средних по сечению образца значений $j(y)$ и $E_H(y)$ получаем:

$$j_d = \frac{j_0/2}{u + W/l}, \quad E_{H,d} = \frac{F(u) E_0}{u + W/l}. \quad (4.92)$$

Во-вторых, для того, чтобы описать течение в критической области $0 < B_c - B \lesssim B_c W/l$, необходимо учесть влияние приходного слагаемого интеграла столкновений $\gamma \hat{P}[\delta f]$ [см. уравнение (4.2)], которое описывает электроны,двигающиеся после межчастичных столкновений.

Действительно, уходящее слагаемое $-\gamma \delta f$ доминирует в первом баллистическом подрежиме в связи с сингулярным характером f при $\varphi \approx \pm\pi/2$ [см. Раздел 4.3]. В хорошо сформированной гидродинамическом режиме при $W \gg R_c$, уходящее и приходное слагаемое близки по порядку величины (см. Раздел 4.2.3). Оценка показывает, что для нижней окрестности фазового перехода, $0 < B_c - B \lesssim B_c W/l$, уходящее и приходное слагаемые, отвечающие функции δf_d (4.91), также имеют один и тот же порядок величины.

С целью качественно описать динамику электронов в последней области, сформулируем модель среднего поля, основанную на приближении интегрального приходного слагаемого $\gamma \hat{P}[f]$ его средним значением. Основная часть последней величины имеет вид: $\gamma \sin \varphi j / (n_0/m)$ (подробности см. в Приложении G). Здесь $j = \int_{-W/2}^{W/2} j(y) dy / W$ – усредненная по сечению плотность тока. Такая подстановка отвечает замене в кинетическом уравнении (4.30), внешнего поля E_0 на “эффективное среднее поле”:

$$E_0 \rightarrow \tilde{E}_0 = E_0 + \frac{\gamma j}{n_0/m}. \quad (4.93)$$

Далее, в рамках развиваемого приближённого метода, такое среднее поле необходимо подставить в выражения для пробной волновой функции f_d и соответствующего ей тока j [формулы (4.91) и (4.92)]. В результате для величины j получаем самосогласованное уравнение:

$$j = \frac{1}{2} \frac{j_0 + j W/l}{u + W/l}. \quad (4.94)$$

Полученное уравнение учитывает перераспределение импульса электронов между “скачущими” электронами при их столкновениях, в то время как пробная функция (4.91) и отвечающие ей величины (4.92) учитывают только потерю импульса электронами при их столкновениях.

Решение уравнения (4.94) имеет вид: $j = j_0/[2u + W/l]$. Для того, чтобы найти холловское поле в окрестности $0 < B_c - B \lesssim B_c W/l$ критической точки, необходимо подставить перенормированное внешне поле $E_0 \rightarrow \tilde{E}_0$ в полубаллистическое выражение для холловского поля $E_{H,d}$ (4.92). В результате получится: $E_H = E_0 F(u)/[u + W/(2l)]$.

4.5.3 Течение в верхней окрестности точки перехода с учётом межчастичных столкновений

Когда магнитное поле переходит критическое значение B_c , диаметр циклотронной окружности становится меньше ширины образца, $2R_c < W$, и поэтому появляется группа “центральных электронов”, которые не сталкиваются с краями [см. Рис. 4.1(с)].

В верхней окрестности критической точки, $0 < B - B_c \ll B_c$, пока относительная доля центральных электронов мала, $\alpha_c = (W - 2R_c)/W \ll 1$, каждый краевой электрон рассеивается

преимущественно на краях и на других краевых электронах. Уходящее и приходное слагаемые оператора St в уравнении (4.2) с пробной функцией δf_d при $u = 0$ для областей, где есть краевые электроны [см. Рис. 4.2(с)], снова имеют одинаковый порядок величины.

Сформулируем для этого диапазона магнитных полей метод среднего поля аналогичный тому, что в предыдущем разделе был сформулирован для нижней окрестности критической точки, $0 < B_c - B \ll B_c$. Чтобы качественно учесть приходное слагаемое $\gamma \hat{P}[\delta f]$ в кинетическом уравнении, снова заменим его на его среднее значение: $\gamma \hat{P}_{\sin}[\delta f](y, \varphi) \rightarrow \gamma \sin \varphi (j_e + j_c)/(n_0/m)$, где последнее выражение пропорционально усредненной плотности тока, содержащей две компоненты: $j = j_e + j_c$. Таким образом, перенормированное поле \tilde{E}_0 в кинетическом уравнении (4.30) приобретает вид:

$$E_0 \rightarrow \tilde{E}_0 = E_0 + \frac{\gamma(j_e + j_c)}{n_0/m}. \quad (4.95)$$

Два слагаемых j_e и j_c отвечают вкладам в функцию распределения $\delta f = \delta f_e + \delta f_c$ от краевых и от центральных электронов.

В результате, в рамках метода среднего поля функция распределения краевых электронов δf_e даётся формулой (4.91) при $u = 0$, в которой полная ширина образца W заменяется на ширину области $\tilde{W} = 2R_c$, где находятся краевые электроны, а поле E_0 заменяется на перенормированное эффективное поле \tilde{E}_0 (4.95). Соответственно, для компоненты усредненной плотности тока j_e от краевых электронов необходимо использовать формулу (4.92), в которой $u = 0$, $E_0 \rightarrow \tilde{E}_0$ (4.95), и введён множитель, учитывающий относительную плотность краевых электронов: $\alpha_e = \tilde{W}/W$.

Все центральные электроны имеют траектории, центр которых расположен приблизительно в середине образца [см. Рис. 4.1(с)]. Поэтому поток центральных электронов похож на однородное омическое течение. Их вклад в ток, j_c , даётся формулой Друде с множителем, описывающим их относительную плотность, α_c , и с тем же самым эффективным полем \tilde{E}_0 (4.95). В функции распределения центральных электронов δf_c доминирует первая угловая гармоника, в отличие от полубаллистической функции δf_b (4.91), которая имеет разрыв по переменной φ . Поэтому гармоники по φ функции δf_c медленно падают с ростом их номера.

В результате, получаем систему уравнений метода среднего поля для величин j_e и j_c , описывающих состояние системы выше критической точки (см. подробности в Приложении G):

$$\begin{cases} j_e = \alpha_e \frac{j_{cr} + j_e + j_c}{2}, \\ j_c = \alpha_c (j_{cr} + j_e + j_c), \end{cases} \quad (4.96)$$

Здесь $j_{cr} = j_0 l/W = n_0 e^2 E_0 l/(mv_F)$ – характерное критическое значение тока. Полученные

уравнения (4.96) по своей природе аналогичны однокомпонентному уравнению (4.94) ниже критической точки, но дополнительно учитывают появление при $B > B_c$ двух типов частиц с качественно разными траекториями. Решение системы (4.96) даёт: $j = (1 + 2\alpha_c)j_{tr}$.

Холловское поле также содержит два вклада, отвечающие необходимости компенсировать силу Лоренца, действующую на краевые и на центральные электроны: $E_H = E_{H,e} + E_{H,c}$. Первое слагаемое $E_{H,e}$ рассчитывается по второй из формул (4.92) при параметре $u = 0$, с добавлением множителя α_e , учитывающего относительное число краевых электронов, и с заменами $E_0 \rightarrow \tilde{E}_0$ и $W \rightarrow \tilde{W}$. Для второго слагаемого $E_{H,c}$, в связи с тем, что функция распределения δf_c похожа на однородную функцию для омического течения с доминирующей первой гармоникой, необходимо использовать формулу типа формулы Друде: $E_{H,c} = \omega_c j_c / (n_0/m)$. В результате, для поля E_H получим: $E_H = (1 + 2\alpha_c)(l/R_c)E_0$.

Описанное изменение динамики электронов выше и ниже критического поля отражается в появлении изломов у получаемых зависимостей $j(B)$ и $E_H(B)$. Эти изломы наследуются в зависимости продольного и холловского сопротивлений от магнитного поля. Для величины ϱ_{xx} в основных порядках по $|b| \ll 1$ и $W/l \ll 1$ получаем [здесь $b = (B - B_c)/B_c$]:

$$\frac{\varrho_{xx}(B)}{\varrho_{cr}} = 1 - b \begin{cases} \frac{8l}{\pi W}, & b < 0, \quad |b| \ll 1 \\ 2, & 0 < b \ll 1 \end{cases}. \quad (4.97)$$

где $\varrho_{cr} = E_0/j_{cr}$. Для холловского сопротивления $\varrho_{xy}(B)$ в основном порядке по W/l и двух первых порядках по $\sqrt{|b|}$ получаем то же выражение, что и чисто баллистический результат (4.89) при $b < 0$. Для полей выше критического, $b > 0$, приведенные выше формулы для j и E_H дают: $\varrho_{xy}(B) \equiv R_H^{(0)}B$. В итоге, результат может быть записан в виде:

$$\frac{\varrho_{xy}(B)}{R_H^{(0)}B} = \begin{cases} F(b), & b < 0, \quad |b| \ll 1 \\ 1, & 0 < b \ll 1 \end{cases}, \quad (4.98)$$

где $R_H^{(0)} = 1/(n_0 e c)$ и $F(b) = 1 - (2/\pi)\sqrt{|b|}$.

Изломы в полученных продольных и холловских сопротивлениях при $B = B_c$, а также изменение типа температурных зависимостей производной $\partial \varrho_{xx} / \partial B$ [см. формулу (4.97), в которой $l = l_{ee}(T)$] свидетельствуют о том, что формирование гидродинамического потока из баллистического осуществляется посредством фазового перехода. Появляющаяся выше точки $B = B_c$ фаза – это центральные электроны, функция распределения которых имеет резко б'ольшую (термодинамическую) степень хаотизации, чем степень хаотизации баллистической функция распределения электронов, сталкивающихся с краями.

С увеличением магнитного поля B и доли центральных электронов α_c , столкновения центральных электронов друг с другом становятся существенными. Центральные электроны вбли-

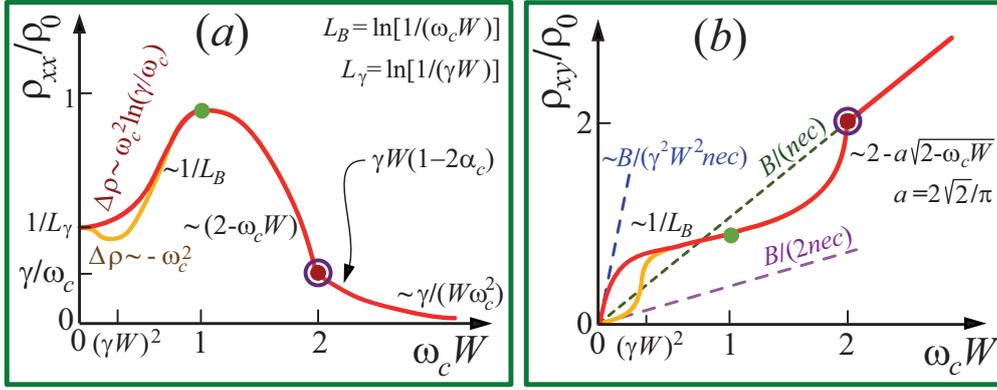


Рис. 4.10: Продольное ρ_{xx} (а) и холловское ρ_{xy} (б) сопротивления (схематично) как функции магнитного поля для бездефектного образца, нормированные на номинальное баллистическое сопротивление $\rho_0 = mv_F/(ne^2W)$. Для первого баллистического подрежима ($R_c \gg l^2/W$) показаны (i) сопротивления всего образца с прямыми краями, включая прикраевые области (красные кривые), а также (ii) сопротивления объемной части образца без учёта прикраевых областей (оранжевые кривые).

зи границ достаточно часто сталкиваются с краевыми электронами, в то время как центральные электроны, центр орбиты которых расположен на расстояниях от края больше циклотронного диаметра, рассеиваются только на других центральных электронах. В результате функция распределения центральных электронов $f_c(y)$ становится существенно неоднородной по сечению образца. Гидродинамически-баллистическое течение при $\alpha_c \sim 1$ было изучено численно в работах [61, 198]. При больших магнитных полях, когда циклотронный радиус становится много меньше ширины образца, центральные электроны доминируют почти всюду кроме окрестностей краёв образца, $W/2 - |y| \sim R_c$, (при этом $\alpha_c \approx 1$). В результате формируется течение Пуазейля с параболическим профилем: $j_c(y) \sim [(W/2)^2 - y^2]$. Продольное сопротивление течения ρ_{xx} в главном порядке становится пропорциональным вязкости: $\rho_{xx} \sim \eta_{xx}/W^2$, $\eta_{xx} \sim \gamma/\omega_c^2$, а холловское сопротивление ρ_{xy} оказывается близким к стандартному значению для объёмных образцов при низких температурах $\rho_{xy}^{(0)} = R_H^{(0)} B$ (см. Раздел 1.2).

На Рис. 4.10 схематически изображены продольное и холловское сопротивления $\rho_{xx}(B)$ и $\rho_{xy}(B)$ во всём рассматриваемом диапазоне B : для трёх баллистических подобластей, для верхней и нижней окрестностей баллистически-гидродинамического перехода, и для гидродинамического режима.

В Приложении G приводятся подробности описанного построения теории среднего поля для перехода из баллистического режима в гидродинамический. Также, с помощью аналогичного подхода, в Приложении G для образцов со значительной плотностью дефектов описывается переход из баллистического режима в омический. Теория такого перехода оказывается значительно проще, чем теория баллистически-гидродинамического перехода. В этом разделе отметим только, что оба эти перехода имеют много общих черт, связанных со схожестью ди-

намики взаимодействующих и невзаимодействующих электронов в ближайших окрестностях перехода при медленных темпах рассеяния, $\gamma_{ee}W \ll 1$ и $\gamma'W \ll 1$.

В Приложении G представлено сравнение результатов предыдущих теоретических работ [61, 198] с результатами, полученными в настоящей главе. В работе [61] было выполнено численное решение уравнения (4.2) для длинных образцов, в которых преобладает рассеяние двумерных электронов на беспорядке и является медленным ($\gamma'W \ll 1$), а также в которых межэлектронные столкновения являются очень быстрыми. Для первого случая при всех длинах свободного пробега больше ширины образца были получены зависимости сопротивлений от магнитного поля $\varrho_{xx,xy}(B)$, аналогичные тем, которые получаются в аналитической теории на основе уравнения (4.2) с интегралом столкновений, в котором оставлен только вклад, описывающий рассеяние на беспорядке: $St = St_{dis}$.

Часть полученных в диссертации аналитических результатов для баллистического режима совпадают с результатами, полученными почти одновременно в работе [198]. В ней, в частности, было получено общее аналитическое решение кинетического уравнения (4.33) с учётом только уходящего слагаемого, а также его частный вариант (4.70) для второго баллистического подрежима, когда межэлектронными столкновениями можно пренебречь. Функции распределения и свойства течения в первом баллистическом подрежиме (см. Раздел 4.3), а также в третьем подрежиме в окрестности критического поля (см. Разделы 4.4 и 4.5), насколько известно автору, впервые получены в диссертации. Новым результатом диссертации также являются аналитические формулы для профилей плотности тока, холловского поля и сопротивлений во втором подрежиме (см. Разделы 4.4). Также, насколько известно автору, описание самого перехода из баллистического режима в гидродинамический в окрестности точки $B = B_c$ впервые выполнено в настоящей диссертации.

4.5.4 Сопоставление с экспериментами

В работе [33] экспериментально исследован поток двумерных электронов в полоске из очень качественного графена. Магнетосопротивление и распределения холловского поля по поперечному сечению полоски измерялись при различных магнитных полях, концентрациях электронов и температурах, соответствующих баллистическому и гидродинамическому режимам. На Рис. 4.11(a) цитируются кривые магнетосопротивления, полученные в эксперименте [33]. На панелях (c, d) построены полученные выше теоретические результаты для некоторых значений параметра γW . А именно: на панели 4.3(c) построены кривые $\varrho_{xx}(B)$ на основе интерполяции полученных выше асимптотик при $B \rightarrow 0$, $B \rightarrow B_c - 0$, $B \rightarrow B_c + 0$, $B \gg B_c$. На пане-

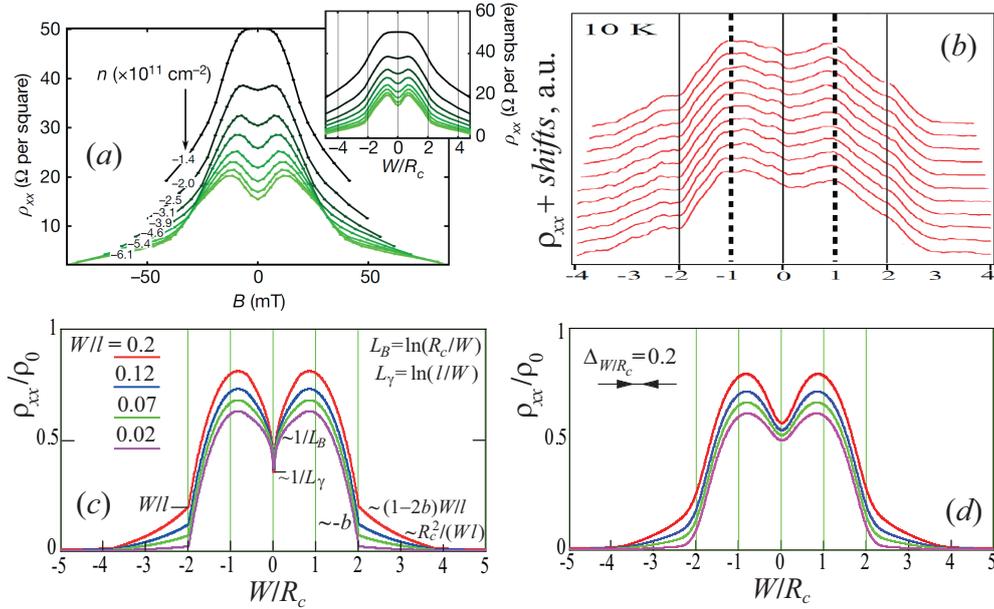


Рис. 4.11: Зависимость продольного сопротивления ρ_{xx} длинных образцов с двумерными электронами от отношения $W/R_c \propto B$. На панелях (a) и (b) цитированы экспериментальные результаты для полосок графена из работ [33] и [34], соответственно. Различные кривые соответствуют различной плотности двумерных электронов, контролируемой напряжениями на затворе. Искажения кривых на панели (b), асимметричные по B , могут быть обусловлены появлением некоторого вклада холловского сопротивления ρ_{xy} в измеряемую величину сопротивления. (c): Результаты развитой теории для нескольких скоростей межчастичного рассеяния γ . На панели (d) построены кривые из панели (c), сглаженные свёрткой с гауссовой весовой функцией $G_\Delta(B)$ с шириной Δ_{W/R_c} , которая моделирует вклад от углов образца, участков образца разной ширины и другие несовершенства образца.

ли (d) построены кривые панели (c), сглаженные с помощью свёртки с гауссовской функцией с шириной Δ_{W/R_c} , что моделирует влияние неидеальностей образца.

Как экспериментальные, так и теоретические зависимости $\rho_{xx}(B)$ демонстрируют положительное магнетосопротивление при $B \lesssim 0.3 B_c$; немонотонное поведение при $B \lesssim B_c$ с максимумом при $B \sim 0.4 B_c$; излом в критическом поле $B = B_c$ [см. вставку на панели (a)]; зависимость, близкую к линейной в нижней окрестности критического поля $\rho_{xx}(B) - \rho_{xx}(B_c) \sim B_c - B$ при $0 < B_c - B \ll B_c$; и монотонное убывание при $B > B_c$. Из наблюдаемого согласия эксперимента и теории можно сделать вывод о том, что в эксперименте [33] были реализованы течения баллистических подобластей (ii), (iii) и баллистически-гидродинамический фазовый переход, изученные в этой главе, а также гидродинамический режим, изученный в Главах 1 и 2.

В работе [34] был измерен профиль плотности тока $j(y)$ для гидродинамического и омического течений двумерных электронов в полосках графена, похожих на исследованные в работе [33]. Для этого измерялось локальное магнитное поле около полоски, индуцированное распределением в ней плотности тока $j(y)$. Наблюдалось также магнетосопротивление, очень похожее на магнетосопротивление работы [33]. На Рис. 4.11(b) цитируются кривые магнетосопротивления, представленные в приложении к работе [34]. Они имеют хорошо выраженный

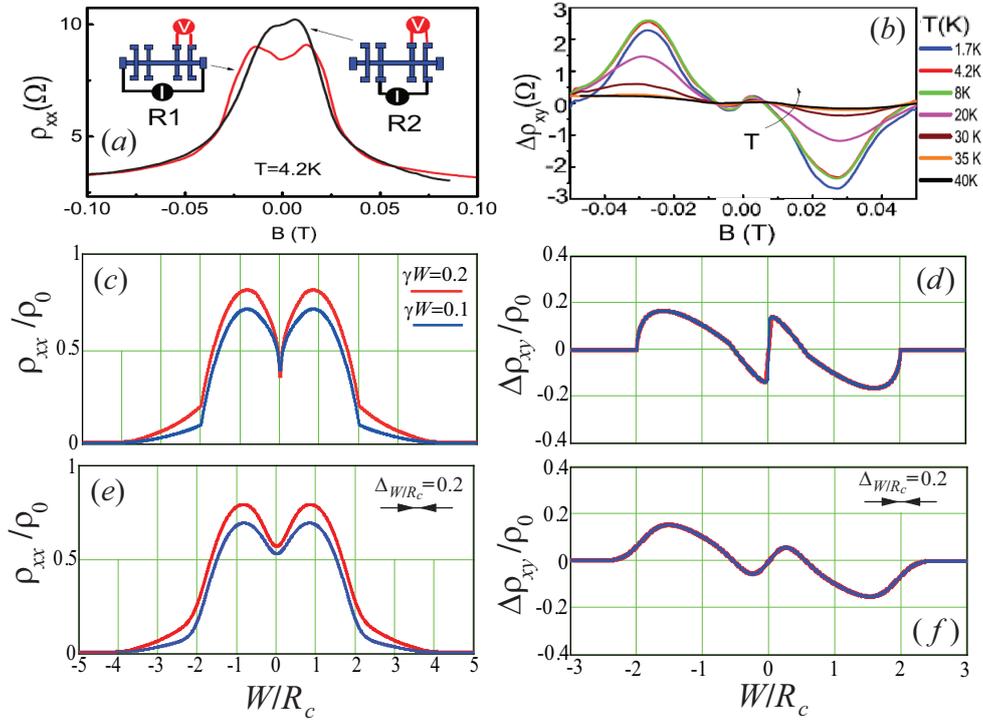


Рис. 4.12: Продольное ϱ_{xx} и холловское ϱ_{xy} сопротивления длинных образцов квантовых ям GaAs. На панелях (b,d,f) построено отклонение холловского сопротивления от стандартного: $\Delta\varrho_{xy} = \varrho_{xy} - \varrho_{xy}^{(0)}$. Панели (a,b) цитируют экспериментальные результаты работы [48]. На панели (c,d) представлены теоретические результаты для ϱ_{xx} и ϱ_{xy} для чистых длинных образцов без дефектов для двух значений скоростей межчастичного рассеяния γ . На панелях (e,f) построены кривые панелей (c,d), сглаженные свёрткой с гауссовой весовой функцией $G_{\Delta}(B)$ с шириной $\Delta W/R_c$, которая моделирует вклад нескольких участков длинного образца с разной шириной, а также других неидеальностей образца. Магнитное поле $B_c \approx 0.05$ Т на правом и левом краях панели (b), где сопротивление ϱ_{xy} становится близким к стандартному значению $\varrho_{xy}^{(0)}$, хорошо соответствуют равенству $2R_c \approx W$, где $W = 5$ мкм – ширина образца, исследованного в работе [48].

излом в точке $B = -B_c$, максимумы в точках $B \sim \pm B_c$ и близкое к линейному поведению $\varrho_{xx}(|B|) - \varrho_{xx}(B_c) \sim B_c - |B|$ при $0 < B_c - |B| \ll B_c$. Излом в точке $|B| = B_c$, как и для эксперимента [33], по-видимому, указывает на реализацию баллистически-гидродинамического фазового перехода. Из Рис. 4.11(b) видно, что зависимости $\varrho_{xx}(B)$ на Рис. 4.11(b) существенно асимметричны по $B \rightarrow -B$. Это может быть связано с появлением в наблюдаемом сопротивлении вклада от холловского сопротивления $\varrho_{xy}(B)$ из-за геометрии контактов.

В работе [48] экспериментально исследован поток двумерных электронов в длинных образцах высокоподвижных квантовых ям GaAs. Измерены зависимости сопротивлений ϱ_{xx} и ϱ_{xy} от магнитного поля [эти результаты цитируются на Рис. 4.12(a,b)]. По-видимому, в изучавшейся в работе [48] двумерной системе был реализован баллистический режим при $W < 2R_c$ и гидродинамический режим при $W > 2R_c$. На Рис. 4.12(c,d) построены теоретические зависимости $\varrho_{xx}(B)$ и $\Delta\varrho_{xy}(B) = \varrho_{xy}(B) - \varrho_{xy}^{(0)}(B)$, полученные интерполяцией полученных выше асимптот этих функций в предельных диапазонах B [здесь $\varrho_{xy}^{(0)}(B) = B/(n_0ec)$]. На панелях (e,f) постро-

ены кривые панелей (c,d), сглаженные с помощью свёртки с гауссовской функцией с шириной Δ_{W/R_c} , что моделирует влияние неидеальностей образца. Видно, что экспериментальные зависимости $\rho_{xx}(B)$ очень похожи на магнетосопротивление, наблюдаемое в работах [33, 34] в полосах графена и на полученную в настоящей главе теоретическую зависимость. Экспериментальный результат для $\rho_{xy}(B)$ также очень похож на предсказания развитой теории: кривая $\rho_{xy}(B)$ демонстрирует положительные и отрицательные отклонения от стандартного холловского сопротивления $\rho_{xy}^{(0)}$ ниже точки перехода, $W < 2R_c$, и почти точное совпадение с $\rho_{xy}^{(0)}$ над точкой перехода, $W > 2R_c$.

Заметим, что резкость особенностей в зависимостях $\rho_{xx}(B)$ и $\rho_{xy}(B)$, наблюдавшихся в работе [48] при $\omega_c W \lesssim 2$ значительно меньше, чем для зависимостей $\rho_{xx}(B)$ работ [33, 34]. Это может быть связано с относительно б'ольшим несовершенством исследованных в [48] образцов по сравнению с полосками графена, исследованными в [33, 34].

Таким образом, предсказанные зависимости продольного и холловского сопротивлений $\rho_{xx,xy}(B)$ от магнитного поля в баллистических подрежимах, в окрестности баллистически-гидродинамического фазового перехода, а также в полях выше перехода хорошо согласуются с результатами экспериментов [33, 34, 48]. Такое согласие свидетельствует о том, что в этих экспериментах переход между баллистическим и гидродинамическим режимами имел характер, близкий к фазовому переходу, описанному в этой главе.

В заключение, отметим, что фазовые переходы рассмотренного типа, по-видимому, возможны в широком классе чистых двумерных и объёмных материалов для образцов, в которых бездефектные области ограничены краями разной формы. Такие фазовые переходы могут различаться по типам энергетических спектров носителей, по характеру электрон-электронного рассеяния и по форме образцов. Например, большой интерес могут представлять образцы с баллистическими микроконтактами, исследованные в работах [199]-[201]. Фазовые переходы такого типа должны характеризоваться (i) изломами в зависимостях холловского и продольного сопротивлений образца от магнитного поля и (ii) изменением типа температурных зависимостей производной $\partial\rho_{xx}/\partial B$ продольного сопротивления по магнитному полю выше и ниже критического поля. В связи с этими признаками и лежащей в их основе физической картиной, баллистически-гидродинамические переходы можно рассматривать как классически-механический аналог перехода “металл-диэлектрик” в легированных полупроводниках и перехода “нормальный металл-сверхпроводник”.

Список публикаций по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в следующих докладах и статьях:

[A1] P. S. Alekseev, M. I. Dyakonov, Poiseuille flow and negative magnetoresistance in high mobility 2DEG, Workshop: Disorder and its Role in Transport in 2D Systems, Okinawa, Japan, January 2015, <https://groups.oist.jp/ja/dirt2d/program>.

[A2] P. S. Alekseev, M. I. Dyakonov, Strong negative magnetoresistance in Poiseuille flow of two-dimensional electrons, Workshop: Quantum transport in 2D systems, Luchon, France, May 2015, <http://www.quantware.ups-tlse.fr/ecoledeluchon/sessionw2/program.html>.

[A3] П. С. Алексеев, М. И. Дьяконов, Объяснение "колоссального" отрицательного магнетосопротивления двумерной электронной жидкости, Российская конференция по физике полупроводников, Звенигород, Россия, сентябрь 2015, <http://semicond-2015.lebedev.ru/ru/programme>.

[A4] P. S. Alekseev, Negative Magnetoresistance in Viscous Flow of Two-Dimensional Electrons, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 166601 (2016).

[A5] P. S. Alekseev, Magnetic resonance in high-frequency viscosity of two-dimensional electrons, *Phys. Rev. B* **98**, 165440 (2018).

[A6] P. S. Alekseev, A. P. Alekseeva, Transverse magnetosonic waves and viscoelastic resonance in a two-dimensional highly viscous electron fluid, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 236801 (2019).

[A7] P. S. Alekseev, M. I. Dyakonov, Dynamic spin-charge coupling: ac spin Hall magnetoresistance in nonmagnetic conductors, *Phys. Rev. B* **100**, 081301 (2019).

[A8] П. С. Алексеев, Магнитозвуковые волны в двумерной электронной ферми-жидкости, *ФТП* **53**, 1405 (2019).

[A9] P. S. Alekseev, A. P. Dmitriev, Viscosity of two-dimensional electrons, *Phys. Rev. B* **102**, 241409 (2020).

[A10] P. S. Alekseev, A. P. Dmitriev, I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, B. N. Narozhny, M. Schutt, M. Titov, Magnetoresistance in two-component systems, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 156601 (2015).

[A11] P. S. Alekseev, A. P. Dmitriev, I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, B. N. Narozhny, M. Schutt, M. Titov, Magnetoresistance of compensated semimetals in confined geometries, *Phys. Rev. B* **95**, 165410 (2017).

[A12] G. Y. Vasileva, D. Smirnov, Y. L. Ivanov, Y. B. Vasilyev, P. S. Alekseev, A. P. Dmitriev, I. V. Gornyi, V. Y. Kachorovskii, M. Titov, B. N. Narozhny, R. J. Haug, Linear magnetoresistance

in compensated graphene bilayer, *Phys. Rev. B* **93**, 195430 (2016).

[A13] П. С. Алексеев, А. П. Дмитриев, И. В. Горный, В. Ю. Качоровский, М. А. Семина, Классическое магнетосопротивление двухкомпонентной системы, обусловленное термоэлектрическими эффектами, *ФТП* **51**, 798 (2017).

[A14] P. S. Alekseev, A. P. Dmitriev, I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, B. N. Narozhny, M. Titov, Nonmonotonic magnetoresistance of a two-dimensional viscous electron-hole fluid in a confined geometry, *Phys. Rev. B* **97**, 085109 (2018).

[A15] P. S. Alekseev, A. P. Dmitriev, I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, B. N. Narozhny, M. Titov, Counterflows in viscous electron-hole fluid, *Phys. Rev. B* **98**, 125111 (2018).

[A16] P. S. Alekseev, M. A. Semina, Ballistic flow of two-dimensional interacting electrons, *Phys. Rev. B* **98**, 165412 (2018).

[A17] P. S. Alekseev, M. A. Semina, Hall effect in a ballistic flow of two-dimensional interacting particles, *Phys. Rev. B* **100**, 125419 (2019).

[A18] А. Н. Афанасьев, П. С. Алексеев, А. А. Грешнов, М. А. Семина, Баллистическое течение двумерных электронов в магнитном поле, *ФТП* **55**, 566 (2021).

[A19] A. N. Afanasiev, P. S. Alekseev, A. A. Greshnov, M. A. Semina, Ballistic-hydrodynamic phase transition in flow of two-dimensional electrons, *Phys. Rev. B* **104**, 195415 (2021).

Заключение

В заключении, хочу перечислить задачи, непосредственно примыкающие к задачам, решённым в диссертации. Работа над первыми задачами ведётся в настоящее время.

Первая задача – исследование эффекта Холла в гидродинамическом режиме. Поправка к холловскому сопротивлению относительно его “стандартного значения” $\rho_{xy}^{(0)} = B/(n_0 e c)$, по-видимому, содержит два вклада: вклад от объёма течения, пропорциональный внедиагональной вязкости η_{xy} , и вклад от приграничной области шириной порядка l_2 (при $\omega_c \tau_2 \ll 1$) или R_c (при $\omega_c \tau_2 \gg 1$), где течение является частично баллистическим. Оба эти вклада важно учитывать при интерпретации экспериментов по эффекту Холла в гидродинамическом режиме, первыми из которых, по-видимому, были работы [28, 48].

Вторая задача – определение механизма фотосопротивления электронной жидкости за счёт конкретных нелинейных эффектов в гидродинамическом магнетотранспорте. Одним из таких механизмов может быть эффект памяти при повторных электрон-электронных столкновениях электронов (точнее, квазичастиц электронной жидкости) в магнитном поле. Сила этого эффекта зависит от амплитуды и формы течения, описываемых гидродинамической скоростью $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$. Второй, по-видимому, важный эффект – появление поправок к энергии взаимодействия квазичастиц (то есть, к параметрами Ландау $F_{1,2}$), в том числе запаздывающих поправок, за счёт возмущения течением траекторий квазичастиц, близких друг к другу.

Третья задача – построение теории гидродинамического транспорта в сильно неидеальной ферми-жидкости при очень низких температурах, когда межчастичные столкновения имеют очень малую интенсивность: $1/\tau_{ee,2} \ll 1/\tau_{imp,2}$. Магнетотранспорт электронов в этом режиме определяется релаксацией средней скорости и сдвиговых напряжений при рассеянии квазичастиц на дефектах, однако при этом может быть очень важно взаимодействие квазичастиц. Частная цель, которая может быть достигнута после решения этой задачи, – объяснение наблюдаемого по гигантскому отрицательному магнетосопротивлению (см. Главы 1 и 2 и Приложение А) большого различия, $1/\tau_{imp,2} \gg 1/\tau_0$, скоростей релаксации сдвиговых напряжений, $1/\tau_{imp,2}$, и импульса $1/\tau_{imp,1} \equiv \tau_0$, при рассеянии двумерных электронов на дефектах.

Благодарности

Благодарю моих родителей И. П. Алексееву и С. М. Постолова, мою тётю А. П. Алексееву за сопереживание, сорадование, наставления, советы, заботу и поддержку.

Благодарю моего духовного отца Архимандрита Иринарха за наставления, поддержку и молитвы.

Благодарю моих руководителей Н. С. Аверкиева и М. И. Дьяконова за предложение темы работы, за наставления и советы, за заботу о хороших условиях работы, за внимание, помощь и поддержку. Также горячо благодарю М. И. Дьяконова за переданные мне основополагающие знания и яркий опыт в ходе работ под его руководством, за многочисленные обсуждения физики и путей её развития, за гостеприимство, за неоценимый пример искать и видеть истину и красоту в физике и во многом другом.

Благодарю мою тётю А. П. Алексееву за интерес, терпение и поддержку при нашей совместной работе, а также за огромную помощь по чтению предварительного варианта диссертации и поиску в ней ошибок и неточностей.

Благодарю моих соавторов А. Н. Афанасьева, Ю. Б. Васильева, Г. Ю. Васильеву, И. В. Горного, А. А. Грешнова, А. П. Дмитриева, В. Ю. Качоровского, Б. Н. Нарожного, М. А. Сёмину, М. Титова за воодушевляющие и плодотворные обсуждения, за поддержку и терпение при совместной работе. Особенно я благодарю И. В. Горного, А. П. Дмитриева, и В. Ю. Качоровского за переданные мне знания, опыт работы в области физики и опыт общения в современной научной среде, за обсуждения исторических и концептуальных проблем физики.

Я благодарю моих коллег по Физико-техническому институту К. А. Барышникова, А. В. Герта, К. С. Денисова, И. В. Крайнова, И. В. Рожанского, М. В. Черемисина, М. М. Глазова, Л. Е. Голуба, М. О. Нестоклона, А. Н. Поддубного, Д. С. Смирнова, С. А. Тарасенко, Д. П. Барсукова, Д. А. Зюзина, А. А. Кожберова, М. Е. Гусакова, А. И. Чугунова, П. С. Штернина, Д. Г. Яковлева, А. Ю. Зюзина, Я. М. Бельтюкова, А. А. Зюзина, А. В. Шумилина, А. А. Даниленко, В. В. Клименко, Э. А. Троппа, Ю. А. Шибанова, П. А. Алексеева, В. В. Белькова, А. В. Андрианова, А. О. Захарьина, Д. С. Свинкина, моих однокурсников по Физико-техническому факультету Санкт-Петербургского политехнического университета И. В. Волковца, К. В. Игумнова, М. В. Меша, Д. С. Мосеева, О. И. Рождественского, Е. А. Седову, Е. М. Собко, А. В. Якубовича за интерес к работам с моим участием, многочисленные обсуждения, советы, помощь и поддержку.

Горячо благодарю участников семинаров Физико-технического института: Чайного семинара, Астрофизического семинара и Семинара Сектора теории полупроводников и диэлектриков. Обсуждения работ, вошедших в диссертацию, на этих семинарах было исключительно важно, полезно и плодотворно.

Благодарю заведующего Кафедрой математической физики Санкт-Петербургского политехнического университета и Лабораторией прикладной математики и математической физики Физико-технического института Э. А. Троппа за наставления и советы по выбору направления и места работы, за знания и опыт, которые я получил на его лекциях и в ходе работ под его руководством в годы моего обучения в Политехническом университете.

Благодарю преподавателей кружка по физике для школьников старших классов при Физико-техническом факультете Санкт-Петербургского политехнического университета М. А. Тынтарева и В. С. Ройтерштейна за привлечение моего интереса к физике, за яркий пример видеть суть и красоту физических явлений, за знания и незабываемый первый опыт работы в области физики.

Хочу почтить память руководителя моей кандидатской диссертации, бакалаврского и магистерского дипломов И. Н. Ясиевич, профессора Кафедры высшей математики Санкт-Петербургского политехнического университета В. М. Чистякова, заведующего Сектором теории оптических и электрических явлений в полупроводниках Физико-технического института В. И. Переля, под руководством которых мне посчастливилось работать. Я благодарю их за многое добро, которое они мне делали, за переданные мне знания и опыт, за терпение, заботу и поддержку.

Благодарю мою жену Е. Г. Алексееву и моих детей Варвару и Леонида за терпение, сочувствие, поддержку, внимание и заботу.

Приложения

В приложениях описаны выводы балансовых уравнений для изучаемых в диссертации двумерных электронных и электрон-дырочных систем; приведены подробности расчётов течений в рамках этих уравнений; приведены подробности построения теории перехода между баллистическим и гидродинамическим режимами транспорта; выполнен анализ и развит метод решения кинетического уравнения для слабо неидеального двумерного электронного ферми-газа; сформулированы более реалистичные и сложные варианты моделей течений двумерных электронов, отражающие важные особенности обсуждаемых в диссертации экспериментов; а также развит качественный “кинематический” подход к описанию баллистического магнетотранспорта, основанный на рассмотрении траекторий отдельных электронов.

Приложение А

Вязкие течения в реалистичных образцах с дефектами

А.1 Течения в образцах с макроскопическими дефектами

Гидродинамический режим транспорта двумерных электронов может быть реализован не только в чистых длинных полосках с шероховатыми краями, которые рассматривались в Главе 1, но также в высокоподвижных образцах другой геометрии, например, в образцах, содержащих изолированные макроскопические дефекты.

Высокоподвижные квантовые ямы GaAs с такими дефектами были экспериментально изучены в работе [45]. Двумерная электронная жидкость ограничена краями образца и краями дефектов (см. Рис. А1). Её вязкое течение формируется, если среднее расстояние между дефектами d велико по сравнению с длиной релаксации сдвиговых напряжений l_2 : $d \gg l_2$. При наличии перпендикулярного к слою магнитного поля этот критерий сохраняется вплоть до полей, в которых достаточно мал циклотронный радиус электронов R_c : $R_c \gg l_2$. При $R_c \ll l_2$ критерий $d \gg l_2$ меняется на $d \gg R_c$.

В случае отсутствия магнитного поля такая модель изучалась в работах [55, 56]. В них было показано, что при формировании вязкого потока в такой системе удельное сопротивление системы оказывается пропорциональным вязкости:

$$\varrho \sim \eta, \quad (\text{A.1})$$

при относительно большом радиусе дефектов r_0 : $r_0 \gg l_2$; или пропорционально вязкости и дополнительному логарифмическому коэффициенту:

$$\varrho \sim \frac{\eta}{\ln(d/l_2)}, \quad (\text{A.2})$$

когда радиус дефектов относительно мал: $r_0 \ll l_2$. Напомним, что для двумерных вырожденных электронов вязкость равна: $\eta = v_F l_2 / 4$. С точностью до логарифмического множителя,

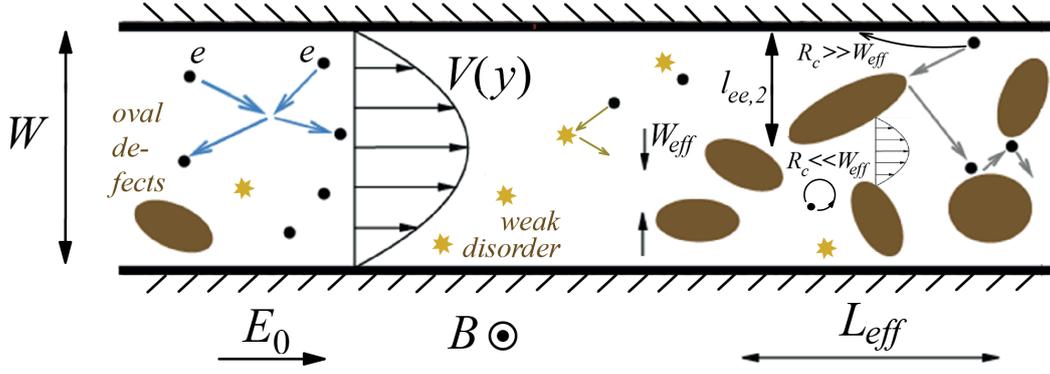


Рис. А.1: Схематическое изображение образца с макроскопическими овальными дефектами, неравномерно распределенными по объёму. В таком образце баллистический и гидродинамический режимы транспорта могут быть реализованы: в различных областях, где концентрация макроскопических дефектов достаточно велика и достаточно мала соответственно. В баллистической и гидродинамической областях параметры W_{eff} и L_{eff} , которые можно отождествить с параметрами W и L развитой теории, определяются конкретными распределениями овальных дефектов. На рисунке показаны циклотронные окружности для случая большого и малого магнитных полей, отвечающих неравенствам $R_c \gg W_{eff}$ и $R_c \ll W_{eff}$.

который не может быть слишком большим для реальных образцов, результаты (А.1) и (А.2) аналогичны результату (1.3) для течения Пуазейля в длинном прямоугольном образце.

Точное рассмотрение двумерного течения в образце с дефектами большого радиуса, $r_0 \gg l_2$, в присутствии магнитного поля необходимо проводить на основе уравнения (1.21) с соответствующими граничными условиями на $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ на краях образца и краях дефектов. По видимому, в широком диапазоне параметров d , r_0 , l_2 из решения этой задачи получаются формулы для сопротивления типа (1.25), описывающие гигантское отрицательное магнетосопротивление. Ниже выполняется качественное рассмотрение течения электронной жидкости в образце с макроскопическими дефектами для простейшего случая, когда радиус дефектов того же порядка, что и среднее расстояние между ними: $r_0 \sim d \gg l_2$.

Рассмотрим поток электронов в длинном прямоугольном образце шириной $W \gg d$ и длиной $L \gg W$. Следуя работе [210], введём средние значения скорости $\bar{\mathbf{V}}$ и среднее электрическое поле $\bar{\mathbf{E}}$, которые являются результатами усреднения значений $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ по областям в образце, размер которых превышает типичное расстояние между дефектами, d . Результат такого усреднения для лапласиана скорости $\Delta \mathbf{V}$ можно оценить следующим образом:

$$\overline{\Delta \mathbf{V}} \sim -\frac{\bar{\mathbf{V}}}{d^2}. \quad (\text{A.3})$$

Здесь используется пространственная однородность системы на масштабах много больше d и осциллирующий квазипериодический характер зависимости $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ с характерным периодом порядка $d \sim r_0$.

При $L \gg W$ составляющая усредненного электрического поля вдоль образца \bar{E}_x равна

электрическому полю E_0 от приложенного напряжения. Средняя скорость $\bar{\mathbf{V}}$ имеет только компоненту \bar{V}_x вдоль направления образца. В связи с этим x -компонента уравнения Навье-Стокса (1.21) принимает вид:

$$-\eta_{xx} \frac{\bar{V}_x}{d^2} + \frac{e}{m} E_0 - \frac{\bar{V}_x}{\tau} = 0, \quad (\text{A.4})$$

что сразу приводит к магнитосопротивлению (1.25). Напомним, что уравнение (1.25) было получено как результат интерполяции точной формулы (1.9), полученной для течения Пуазейля в плоском образце. Таким образом, уравнение (1.25) грубо описывает два вклада в релаксацию импульса электронов, омический и гидродинамический, и, тем самым, является более общим, чем предположения о геометрии потока в Главе 1, использованные при его выводе.

Характер рассеяния электронов (диффузное или зеркальное) на краях образца и краях дефектов не играет критической роли при формировании вязкого течения в образце с дефектами большого радиуса. Действительно, природа релаксации импульса в такой системе следующая. В окрестностях дефектов гидродинамическая скорость не может иметь составляющую, перпендикулярную поверхности дефекта. Замедление потока происходит из-за вязкой передачи x -компоненты импульса в направлении y между областями, которые находятся непосредственно перед дефектами (в направлении x), и областях между дефектами.

Из сравнения формул (1.25) и (A.4) видно, что время $\tau^* = d^2/\eta_{xx}$ можно интерпретировать как нелокальное время релаксации импульса за счёт эффекта вязкости. Иными словами, время τ^* описывает релаксацию импульса в системах, которые характеризуются: (i) пространственной неоднородностью скорости релаксации импульса электронов [связанной с обтеканием дефектов большого радиуса или с диффузным рассеянием на шероховатых краях образца]; (ii) вязким переносом среднего импульса электронов за счёт неоднородности поля скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r})$.

Заметим также, что некоторые образцы квантовых ям GaAs часто имеют сложную геометрию краёв (например, см. работу [41]). Неровности краёв образца могут также приводить к замедлению вязкого течения аналогично тому, как это было описано выше для вязкого течения в образце с дефектами большого радиуса.

По-видимому, относительные вклады процессов диффузного рассеяния на краях образца и обтекания дефектов большого радиуса в формировании вязкого течения электронов, а также вклад от рассеяния на остаточном беспорядке в области вязкого течения (см. следующий раздел) существенно различаются от образца к образцу и сильно зависят от величины магнитного поля. Всё это приводит к многообразию наблюдаемых форм гигантского отрицательного магнетосопротивления (см. экспериментальные результаты, цитированные в Главе 1).

А.2 Рассеяние на слабых дефектах в области течения

Обсудим рассеяние электронов на слабом остаточном беспорядке в объёме образца между его краями и/или между макроскопическими дефектами (в области, где сформировалось вязкое течение электронной жидкости).

Во-первых, отметим, следующее обстоятельство. В работе [25] было показано, что если бы релаксация всех угловых гармоник функции распределения происходила бы только за счёт электрон-электронного рассеяния, огромная разница во временах релаксации $\tau_{ee,m}$ для чётных и нечётных m могла бы привести к реализации аномальных негидродинамических режимов переноса, для которых нет оснований ожидать сильного отрицательного магнетосопротивления. Возможность гидродинамического режима в реальных образцах, в частности, в квантовых ямах GaAs, по-видимому, связана со значительным вкладом в релаксацию нечётных гармоник функции распределения от рассеяния электронов на дефектах.

Действительно, скорости релаксации гармоник $1/\tau_{imp,m}$ за счёт рассеяния на дефектах для нечётных $m \geq 3$, по-видимому, являются много большими в типичных наноструктурах при низких температурах, чем скорости релаксации $1/\tau_{ee,m}$ для нечётных m за счёт электрон-электронных столкновений. Для чётных m вклады от рассеяния на дефектах и от межэлектронного рассеяния, $1/\tau_{imp,m}$ и $1/\tau_{ee,m}$, скорее всего, являются сравнимыми при не очень низких температурах. Так, для $m = 2$ это непосредственно видно для экспериментальных значений $\tau_2(T)$ при $T \rightarrow 0$ и при $T \rightarrow 0$ на Рис. 1.5 и 2.4. Логично ожидать, что времена релаксации $\tau_{imp,m}$ старших чётных и нечётных гармоник отличаются друг от друга не слишком сильно, по крайней мере, значительно слабее, чем электрон-электронные времена $\tau_{ee,m}$ для нечётных и для нечётных $m \geq 2$ [для отношения $\tau_{ee,3}/\tau_{ee,2}$ электрон-электронных времён в Приложении С будет получена оценка, главный множитель которой, $(\varepsilon_F/T)^2$, для типичных квантовых ям GaAs при 1 К – величина порядка 10^4].

Во-вторых, отметим, что правило Матиссена для сложения скоростей релаксации сдвиговых напряжений (использованное в Главах 1 и 2):

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_{imp,2}} + \frac{1}{\tau_{ee,2}}, \quad (\text{A.5})$$

применимо как для электронного газа ($r_s \ll 1$), так и для электронной ферми-жидкости ($r_s \sim 1$). Действительно, для описания как слабо неравновесных электронов, так и слабо неравновесных квазичастиц в неупорядоченном образце применимо кинетическое уравнение, в которое, помимо интеграла межчастичных столкновений St^{ee} , следует включить интеграл

столкновений с дефектами St^{imp} , приводящий к релаксации гармоник $m \geq 1$:

$$St \rightarrow St^{ee} + St^{imp}. \quad (A.6)$$

В соответствии с результатами Разделов 2.2 и 2.3, оба вклады $1/\tau_{ee,m}$ и $1/\tau_{imp,m}$ в скорости релаксации, $1/\tau_m$, m -ой гармоники функции распределения $\Psi_m(\phi, \varepsilon) \sim \cos(m\phi)$ пропорциональны произведению множителя с параметрами Ландау $(1 + F_m)$ и интегралов столкновений квазичастиц St^{ee} и St^{imp} , вычисленных на функциях Ψ_m и усредненных по энергии.

В-третьих, отметим следующий, по-видимому, очень важный факт. В Разделе 1.2 было показано, что в пределе низких температур и сильного магнитного поля время релаксации импульса относительно рассеяния частиц на объёмном беспорядке, $\tau_{imp,1} \equiv \tau_0$, можно оценить по предельному значению сопротивления $\varrho |_{\omega_c \tau_2 \gg 1}$. Хотя, как говорилось выше, обычно считается, что времена релаксации чётных и нечётных гармоник при рассеянии на дефектах имеют не слишком сильно различные порядки величины, простая процедура подгонки, описанная в Главе 1 и использованная также в работах [46, 48], приводит к удивительно большой разнице между временами релаксации $\tau_{imp,1}$ и $\tau_{imp,2}$ импульса (гармоники $|m| = 1$) и сдвиговых напряжений (гармоники $|m| = 2$) в высокоподвижных квантовых ямах GaAs. А именно: время $\tau_{imp,1}$ оказывается длиннее времени $\tau_{imp,2}$ в 10-100 раз.

Разумно полагать, что объяснение причины такой большой разницы этих времён и возможное получение экспериментальных данных по временам релаксации старших гармоник, $\tau_{imp,m}$, $m \geq 3$, даст очень важную информацию о природе двумерных электронных систем в высокоподвижных структурах. В настоящее время ведётся работа в этом направлении.

Приложение В

Высокочастотные вязкоупругие течения электронной жидкости

В.1 Расчёт линейного отклика жидкости на внешнее поле

В этом разделе представлен подробный отчёт о вычислении линейного отклика двумерной сильно неидеальной электронной жидкости на высокочастотное электрическое поле в присутствии магнитного поля.

В разделах 1.2 и 1.3 было показано, что в режиме, линейном по внешнему высокочастотному электрическому полю, уравнение непрерывности и уравнения Навье-Стокса двумерной жидкости имеют вид:

$$-i\omega \delta n + n_0 \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (\text{B.1})$$

and

$$\begin{aligned} -i\omega \mathbf{V} = & \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \omega_c [\mathbf{V} \times \mathbf{e}_z] - \gamma \mathbf{V} - \frac{\nabla P}{m} + \\ & + \eta_{xx}(\omega) \Delta \mathbf{V} + \eta_{xy}(\omega) [\Delta \mathbf{V} \times \mathbf{e}_z], \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, $\delta n = \delta n(\mathbf{r}, \omega)$ и $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega)$ – комплексные амплитуды гармоник электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, возмущённой части плотности $\delta n(\mathbf{r}, t)$, и гидродинамической скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$; n_0 – невозмущенная плотность электронов; $e < 0$ – заряд электрона; m – масса электрона; $\gamma \equiv 1/\tau$ – скорость релаксации импульса в объёме за счёт рассеяния электронов на дефектах и/или фононах; P – давление электронной жидкости; $\eta_{xx}(\omega)$ и $\eta_{xy}(\omega)$ – высокочастотные коэффициенты вязкости, зависящие от магнитного поля и частоты (см. Раздел 1.3):

$$\begin{aligned} \eta_{xx}(\omega) = & \eta_0 \frac{1 - i\omega\tau_{ee}}{1 + (-\omega^2 + 4\omega_c^2)\tau_{ee}^2 - 2i\omega\tau_{ee}}, \\ \eta_{xy}(\omega) = & \eta_0 \frac{2\omega_c\tau_{ee}}{1 + (-\omega^2 + 4\omega_c^2)\tau_{ee}^2 - 2i\omega\tau_{ee}}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Здесь $\eta_0 = (v_F^\eta)^2 \tau_{ee}/4$ – вязкость двумерных электронов в отсутствии магнитного поля; τ_{ee} – время релаксации сдвиговых напряжений, то есть второй гармоники функции распределе-

нии по углу скорости электронов; параметр v_F^η равен скорости Ферми v_F для случая слабого межчастичного взаимодействия (слабо неидеальный ферми-газ) и много больше скорости Ферми v_F для случая сильного межчастичного взаимодействия (сильно-неидеальная ферми-жидкость). В последнем случае v_F^η определяется через величину вязкости в нулевом поле как $v_F^\eta = 2\sqrt{\eta_0/\tau_{ee}}$ и пропорционален параметрам функции Ландау, описывающей взаимодействие квазичастиц (см. Раздел 2.2).

Электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ состоит из двух частей: внешнего циркулярно поляризованного поля излучения $\mathbf{E}_0(t)$ и внутреннего поля $\mathbf{E}_{int}(\mathbf{r}, t)$, возникающего за счёт возбуждения плотности двумерных электронов $\delta n(\mathbf{r}, t)$. В диссертации не рассматриваются эффекты запаздывания электромагнитного поля, которые могут быть важны в области малых волновых векторов в структурах с квантовыми ямами без затвора (см. работы [110, 111]). Когда можно пренебречь эффектами запаздывания, для внутреннего поля необходимо использовать электростатическую формулу $\mathbf{E}_{int} = -\nabla\delta\phi$, где электростатический потенциал $\delta\phi$ связан с возмущением плотности δn . Для структур с металлическим затвором, расположенным на расстоянии d от двумерного слоя имеем:

$$\delta\phi = \frac{4\pi ed}{\kappa} \delta n, \quad (\text{B.4})$$

где κ – диэлектрическая постоянная материала барьеров вокруг ямы. Уравнение (B.4) справедливо при условии $d \gg a_B$, где a_B – боровский радиус двумерных электронов. Для структур без затвора связь между величинами $\delta\phi(\mathbf{r}, t)$ и $\delta n(\mathbf{r}, t)$ представляет собой закон Кулона с плотностью заряда $\varrho(\mathbf{r}, z, t) = e \delta n(\mathbf{r}, t) \delta(z)$, где $\delta(z)$ – дельта-функция, показывающая положение двумерного слоя:

$$\delta\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{\kappa} \int d^2\mathbf{r}' \frac{\delta n(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{B.5})$$

Отношение слагаемых $-\nabla P/m$ и $e\mathbf{E}_{int}/m$ в уравнении (B.2) оценивается как a_B/d для структур с затвором и как $a_B q$ для структур без затвора, где q – характерный волновой вектор течения. Обе эти величины должны быть много меньше единицы в случаях, когда применимо электростатическое приближение. Поэтому гидростатическим слагаемым $-\nabla P/m$ можно пренебречь.

Во-первых, изучим возможные типы волн, которые могут распространяться в системе. Для этой цели найдём решение уравнений (B.1), (B.2) и (B.4) в отсутствие внешнего электрического поля ($\mathbf{E}_0 = 0$) в форме плоских волн: $\delta n(\mathbf{r}, t) = \delta n_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})$. Подстановка таких δn и \mathbf{V} в уравнение непрерывности (B.1), в электростатическое уравнение (B.4) и в уравнение Навье-Стокса (B.2) даёт замкнутую систему для амплитуд \mathbf{V}_0

и для закона дисперсии $\omega_{1,2}(q)$:

$$\det \hat{M}(\omega, q) = 0, \quad \hat{M}\mathbf{V}_0 = 0, \quad (B.6)$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} i\tilde{\omega} + \eta q^2 & -(\omega_c + \bar{\eta} q^2) \\ \omega_c + \bar{\eta} q^2 & i\tilde{\omega} + \left(\eta + i \frac{s^2}{\omega}\right) q^2 \end{pmatrix}.$$

В этих формулах введены дополнительные сокращённые обозначения: $\tilde{\omega} = \omega + i\gamma$, $\eta = \eta_{xx}(\omega)$ и $\bar{\eta} = \eta_{xy}(\omega)$.

Для того, чтобы упростить дальнейшие выкладки и получить более наглядный результат, будем предполагать, что система удовлетворяет условиям, приведённым в Таблице 1.1 Главы 1. Эти условия, во-первых, приводят к тому, что собственные числа $\omega_{1,2}(q)$ системы (B.12) отличаются по порядку величины.

Наибольшее из собственных чисел $\omega_{1,2}(q)$ отвечает магнитоплазонам. В пренебрежении всеми процессами релаксации ($1/\tau_{ee} = 0$ и $\gamma = 0$) для структуры с затвором соответствующий закон дисперсии имеет хорошо известный вид:

$$\omega_p(q) = \sqrt{\omega_c^2 + s^2 q^2}, \quad (B.7)$$

где $s = \sqrt{4\pi e^2 n_0 d / m\kappa}$ – скорость плазмонов в отсутствии магнитного поля. Второе слагаемое под квадратным корнем, $s^2 q^2$, – квадрат частоты плазмонов в отсутствии магнитного поля. Для структур без затвора оно заменяется на выражение: $2\pi e^2 n_0 q / m\kappa$.

Коэффициент затухания магнитоплазмонов $\Upsilon_p(q)$ был вычислен в разделе в Разделе 1.3.3. Вне циклотронного резонанса, $|\omega - \omega_c| \gg \gamma$, он имеет вид:

$$\Upsilon_p(q) = \frac{\omega_c^2 + \omega_p^2}{2\omega_p^2} q^2 \operatorname{Re} \eta + \frac{\omega_c}{\omega_p} q^2 \operatorname{Im} \bar{\eta}. \quad (B.8)$$

Здесь коэффициенты вязкости $\eta = \eta_{xx}(\omega)$ и $\bar{\eta} = \eta_{xy}(\omega)$ вычисляются на частоте магнитоплазонам $\omega = \omega_p(q)$. При очень малой интенсивности рассеяния на дефектах, $\gamma \rightarrow 0$, затухание магнитоплазмонов за счёт рассеяния на них становится важно только в окрестности циклотронного резонанса, $|\omega - \omega_c| \lesssim \gamma$.

Наименьшее из собственных чисел $\omega_{1,2}(q)$ отвечает поперечным волнам поперечного нулевого звука, для которых приближённо выполнено $\mathbf{V}_0 \perp \mathbf{q}$. Такие волны могут распространяться в достаточно сильно неидеальных ферми-жидкостях при высоких частотах, $\omega \gg 1/\tau_{ee}$ [17]. Они похожи на поперечные волны в аморфных средах, таких как стёкла, пластики и другие аналогичные вещества. Поперечные сдвиговые волны – это характерный эффект, который позволяет различить слабо (похожие на газ) и сильно (похожие на мёд) вязкие жидкости: они отсутствуют в первых и есть во вторых.

В Разделе 2.2 было показано, что в очень сильно неидеальной электронов ферми-жидкости как продольные, так и поперечные волны могут описываться в рамках уравнений гидродинамики. Электрон-электронные столкновения, определяющие релаксацию тензора сдвиговых напряжений, определяют коэффициент затухания поперечного звука.

Расчёт, основанный на уравнениях (B.1), (B.2) и (B.3) даёт закон дисперсии $\omega_s(q)$ и коэффициент затухания $\Upsilon_s(q)$ поперечного нулевого магнитозвука. При высоких частотах, $\omega_c, \omega \gg 1/\tau_{ee}$, и вдали от вязкоупругого резонанса, $|\omega - 2\omega_c| \gg 1/\tau_{ee}$, получаем:

$$\omega_s(q) = \sqrt{4\omega_c^2 + \frac{(v_F^\eta)^2 q^2}{4}}, \quad \Upsilon_s(q) = \frac{4\omega_c^2 + \omega_s^2}{2\omega_s^2 \tau_{ee}}. \quad (\text{B.9})$$

Как обсуждалось выше, для сильно неидеальной жидкости параметр v_F^η много больше, чем истинная скорость Ферми v_F , определяющая величины потоков жидкости. Как следствие, характерная длина волны поперечного магнитозвука, $l_s = v_F^\eta/\omega$, которая есть минимальная характерная длина в сформулированной гидродинамической модели, оказывается много больше длины пути, который проходят квазичастицы за один период высокочастотного поля, $\sim l_\omega = v_F/\omega$. Таким образом, в рамках развиваемого подхода можно рассматривать течения $\mathbf{V}(y, t)$ с минимальными размерами неоднородностей W , лежащими в диапазоне:

$$\frac{v_F}{\omega} \ll W \ll \frac{v_F^\eta}{\omega}. \quad (\text{B.10})$$

На Рис. 1.10(а) Главы 1 схематично показаны законы дисперсии магнетоплазмонов и поперечного нулевого звука. К настоящему моменту остаётся неизученной область в окрестности пересечения этих законов дисперсии $\omega_p(q)$ and $\omega_s(q)$, где волны этих двух типов могут сильно смешиваться. Отметим однако, что эта область также может быть изучена в рамках сформулированной гидродинамической модели.

Во-вторых, рассчитаем и изучим линейный отклик жидкости на циркулярно поляризованное поле излучения $\mathbf{E}_0(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + c.c.$, где

$$\mathbf{E}_0 = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

и знаки “−” и “+” отвечают правой и левой циркулярным поляризациям.

В настоящем Приложении В и в Главе 1 расчёты проводятся только для структур с затвором. По-видимому, основные полученные результаты относительно вязкой составляющей течения будут качественно справедливы также и для структур без затвора (другой компонентной течения является компонента, сформированная плазмонами и/или высокочастотным омическим течением). Однако, для структур без затвора расчёты течений представляются гораздо более сложными ввиду нелокального характера электростатики [см. уравнение (B.5)].

Рассмотрим высокочастотное течение жидкости в длинном образце, $-L/2 \ll x \ll L/2$, $-W/2 \ll y \ll W/2$, $L \gg W$, с шероховатыми продольными краями. Такая система представляет собой “минимальную” возможную модель для рассмотрение вязкого транспорта. Поле скорости имеет вид: $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}(y)e^{-i\omega t} + c.c.$, и аналогичные формулы имеют место для $\delta n(\mathbf{r}, t)$ и $\delta U(\mathbf{r}, t)$. Подстановка $\delta n(y)$ и $\delta \phi(y)$ из уравнения непрерывности (В.1) и электростатического уравнения (В.4) в уравнение Навье-Стокса (В.2) даёт замкнутую систему уравнения для амплитуды $\mathbf{V} = \mathbf{V}(y)$:

$$\begin{pmatrix} i\tilde{\omega} + \eta \frac{d^2}{dy^2} & -\left(\omega_c + \bar{\eta} \frac{d^2}{dy^2}\right) \\ \omega_c + \bar{\eta} \frac{d^2}{dy^2} & i\tilde{\omega} + \left(\eta + i \frac{s^2}{\omega}\right) \frac{d^2}{dy^2} \end{pmatrix} \mathbf{V} = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m}. \quad (\text{В.12})$$

Для шероховатых краёв образца на амплитуду скорости необходимо наложить условия отсутствия проскальзывания:

$$\mathbf{V}|_{y=\pm W/2} = 0. \quad (\text{В.13})$$

Будем полагать, что скорость рассеяния электронов на дефектах, γ , является самым малым параметром задачи размерности частоты: $\gamma \rightarrow 0$ (точное условие см. в Таблице 1.1). В этом случае уравнение на собственные числа приобретает вид:

$$\left(i \frac{s^2}{\omega} \eta + \eta^2 + \bar{\eta}^2\right) \lambda^4 + \left(-s^2 + 2i\omega\eta + 2\omega_c\bar{\eta}\right) \lambda^2 + \omega_c^2 - \tilde{\omega}^2 = 0. \quad (\text{В.14})$$

Скорость релаксации γ нужно оставить только в последнем слагаемом, т. к. все остальные слагаемые имеют ненулевые как вещественные, так и мнимые части и при $\gamma = 0$.

Наиболее прозрачной для анализа является ситуации, когда пространственные масштабы, отвечающие двум корням λ_1 и λ_2 уравнения (В.14) имеют разные порядки величины: $|\text{Re}\lambda_1|, |\text{Im}\lambda_1| \ll |\text{Re}\lambda_2|, |\text{Im}\lambda_2|$. Такая ситуация реализуется, когда выполнены неравенства, представленные в Таблице 1.1. Напомним, что в этом случае собственные частоты $\omega_{1,2}(q)$ при не слишком малых волновых векторах \mathbf{q} также имеют разный порядок величины.

Неравенство из Таблицы 1.1

$$\frac{s}{v_F \eta} \gg \omega \tau_{ee} \gg 1. \quad (\text{В.15})$$

вместе с формулами (В.3) приводит к следующим решениям $\lambda_1 = \lambda_p$ и $\lambda_2 = \lambda_s$ уравнения (В.14):

$$\begin{aligned} \lambda_p^2 &= \frac{\omega_c^2 - \tilde{\omega}^2}{s^2} (1 + i u), \\ \lambda_s^2 &= -i \frac{\omega}{\eta} (1 - i w). \end{aligned} \quad (\text{В.16})$$

В этих формулах введены комплексные параметры u и w , пропорциональные малой величине $(v_F^\eta/s)^2$ [см. неравенство (B.15)]:

$$u = \frac{(\omega^2 + \omega_c^2)\eta - 2i\omega\omega_c\bar{\eta}}{\omega s^2}, \quad w = \frac{(\omega_c\eta - i\omega\bar{\eta})^2}{\omega\eta s^2}. \quad (\text{B.17})$$

Первое собственное значение λ_p описывает характерный масштаб длины части линейного отклика, связанного с возмущением заряда, то есть с магнитоплазмонами. Второе собственное значение λ_s соответствует вкладу в линейный отклик, связанному поперечными магнитозвуковыми волнами с законом дисперсии (B.9).

Прямые вычисления на основе формул (B.12), (B.13) и (B.16) приводят к следующему результату для профиля амплитуды скорости:

$$\mathbf{V}(y) = \frac{eE_0}{2m} [\mathbf{A}_0 + h(\lambda_p, y) \mathbf{A}_p + h(\lambda_s, y) \mathbf{A}_s], \quad (\text{B.18})$$

где

$$h(\lambda, y) = \frac{\cosh(\lambda y)}{\cosh(\lambda W/2)}, \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{\tilde{\omega} \pm \omega_c} \begin{pmatrix} i \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_p = \pm \frac{1}{\omega(\tilde{\omega} \pm \omega_c)} \begin{pmatrix} i\omega_c \\ -\omega \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{\omega^2} \begin{pmatrix} -2\omega_c \pm \omega \\ -i\omega \end{pmatrix}, \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{A}_s = \frac{i}{\omega} \begin{pmatrix} -1 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \left[1 + \frac{i\varepsilon}{\omega} (2\omega_c \mp \omega) \right].$$

Первое, второе и третье слагаемые в уравнении (B.18) представляют собой объемную (омическую), плазмонную и вязкоупругую части линейного отклика, соответственно.

Полученные формулы (B.16) и (B.18) являются решением задачи вычисления линейного отклика в нулевом и первом порядках по малому параметру $(v_F^\eta/s)^2$ [так как $\varepsilon \sim (v_F^\eta/s)^2$].

Слагаемые в уравнениях (B.16) и (B.18), пропорциональные малому параметру ε , описывают связь между плазмонной и вязкоупругой частями потока.

Из уравнения (B.18) видно, что вязкоупругая часть линейного отклика отвечает за формирование потока в самых окрестностях краёв образца с ширинами порядка $L_s = 1/|\text{Re}\lambda_s|$ в случае $W \gg L_s$ [см. Рис. 1.10(b) в Разделе 1.4.2] или во всём образце для очень узких образцов $W \ll L_s$. Плазмонная часть линейного отклика определяет течение в более широких приграничных слоях с шириной порядка $L_p = 1/|\text{Re}\lambda_p|$ в широких выборках, $W \gg L_p$ [см. Рис. 1.10(b)], либо в центральной части образцов с шириной в интервале $L_s \ll W \ll L_p$. В центральной части очень широких выборок, $W \gg L_p$, течение является омическим: $\mathbf{V}(y) = eE_0\mathbf{A}_0/(2m)$ [см. Рис. 1.10(b)]. Оно контролируется движением одиночных электронов (точнее, квазичастиц) во внешних электрических и магнитных полях и рассеянием на беспорядке.

Для комплексной амплитуды

$$\mathbf{I} = en_0 \int_{-W/2}^{W/2} dy \mathbf{V}(y) \quad (\text{B.21})$$

полного тока через образец, $\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}e^{-i\omega t} + c.c.$ из формулы (B.18) получается:

$$\mathbf{I} = \frac{e^2 n_0 E_0 W}{2m} [\mathbf{A}_0 + F(\lambda_p W/2) \mathbf{A}_p + F(\lambda_s W/2) \mathbf{A}_s], \quad (\text{B.22})$$

где использована функция:

$$F(\xi) = \frac{\tanh(\xi)}{\xi}. \quad (\text{B.23})$$

Ниже в этом разделе делаются оценки собственных значений λ_p и λ_s для наиболее интересного случая больших частот ω и ω_c : $\omega, \omega_c \gg 1/\tau_{ee}$ (см. Таблицу 1.1).

Для частот ω выше циклотронного резонанса, $\omega - \omega_c \gg \gamma$, мнимая часть собственного числа λ_p имеет вид:

$$\text{Im } \lambda_p \approx \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{s} \sim \frac{1}{l_p}. \quad (\text{B.24})$$

Здесь и ниже представлены значения мнимой и действительной частей собственных значений $\lambda_{p,s}$ только со знаком «+» [возможны оба знака, так как уравнение (B.14) для нахождения собственных значений является биквадратичным]. Значение $\text{Im } \lambda_p$ в уравнении (B.24) намного больше, чем действительная часть λ_p , которая имеет вид:

$$\text{Re } \lambda_p \approx \frac{1}{l_p s^2} \left(\frac{\omega^2 + \omega_c^2}{2\omega} \text{Re } \eta + \omega_c \text{Im } \bar{\eta} \right). \quad (\text{B.25})$$

Последняя формула соответствует коэффициенту затухания магнитоплазмонов за счёт вязкости (B.8).

Значения $\text{Re } \eta(\omega)$ и $\text{Im } \bar{\eta}(\omega)$, в свою очередь, сильно зависят от близости частот ω и ω_c к вязкоупругому резонансу при $\omega = 2\omega_c$. Для частот вдали и в непосредственной окрестности от вязкоупругого резонанса получаем следующие величины $\text{Re } \lambda_p$:

$$\text{Re } \lambda_p \sim \frac{1}{l_p} \frac{(v_F^\eta)^2}{s^2} \begin{cases} 1/(\omega\tau_{ee}), & |\omega - 2\omega_c| \gg 1/\tau_{ee} \\ \omega\tau_{ee}, & |\omega - 2\omega_c| \lesssim 1/\tau_{ee} \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

Из уравнений (B.24) и (B.26) видно, что действительно реализуется неравенство $\text{Im } \lambda_p \gg \text{Re } \lambda_p$, если условие (B.15) выполнено.

Согласно формулам (B.24) и (B.26) выше циклотронного резонанса профиль скорости $\mathbf{V}(y)$ представляет собой стоячую магнитоплазмонную волну с длиной волны $l_p \sim s/\omega$ и с длиной затухания $L_p^{\text{out}} \sim (s/v_F^\eta)^2 s\tau_{ee}$ вдали вязкоупругого резонанса или $L_p^{\text{in}} \sim (s/v_F^\eta)^2 [s/(\omega^2\tau_{ee})]$ в окрестности вязкоупругого резонанса.

Ниже циклотронного резонанса, $\omega_c - \omega \gg \gamma$, вещественная часть плазмонного собственного числа λ_p много больше чем мнимая часть:

$$\lambda_p \approx \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{s} \sim \frac{1}{l_p}. \quad (\text{B.27})$$

Поэтому амплитуда скорости $\mathbf{V}(y)$ в таком режиме имеет неосциллирующий экспоненциальный профиль с характерной длиной затухания $l_p = s/\omega$.

В окрестности циклотронного резонанса, $|\omega - \omega_c| \lesssim \gamma$, действительная и мнимая части плазмонного собственного числа, в основном, контролируются рассеянием на беспорядке:

$$\lambda_p \approx \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}}{s}. \quad (\text{B.28})$$

Такое значение λ_p соответствует колебаниям и экспоненциальному затуханию скорости $\mathbf{V}(y)$ с одинаковыми периодом и длиной затухания $\tilde{L}_p \sim s/\sqrt{\gamma\omega}$. При очень слабом рассеянии на беспорядке, $\gamma \rightarrow 0$, масштаб длины \tilde{L}_p намного больше, чем все характерные длины l_p , L_p^{in} и L_p^{out} плазмонной компоненты вне циклотронного резонанса, контролируемые межчастичным рассеянием.

Вязкоупругое собственное число λ_s зависит только от положения частот ω и ω_c относительно вязкоупругого резонанса. Выше вязкоупругого резонанса, $\omega - 2\omega_c \gg 1/\tau_{ee}$, получаем:

$$\text{Im } \lambda_s \approx \frac{2\sqrt{\omega^2 - 4\omega_c^2}}{v_F^\eta} \sim \frac{1}{l_s} \quad (\text{B.29})$$

и

$$\text{Re } \lambda_s \approx \frac{2(4\omega_c^2 + \omega^2)}{(v_F^\eta)^2 \omega \tau_{ee} \text{Im } \lambda_s} \sim \frac{1}{L_s}. \quad (\text{B.30})$$

Здесь $l_s = v_F^\eta/\omega$; $L_s = v_F^\eta \tau_{ee}$ – характерная длина, которая не есть какая-либо длина свободного пробега, но есть характерный масштаб гидродинамических уравнений, связанных с коэффициентом вязкости η_0 : $L_s = 2\sqrt{\eta_0 \tau_{ee}}$. Видно, что уравнения (B.29) и (B.30) представляют собой другую форму уравнений (B.9), описывающих закон дисперсии и коэффициент затухания поперечного звука. Так как $\text{Im } \lambda_s \gg \text{Re } \lambda_s$, собственное число λ_s отвечает стоячим волнам поперечного звука с длиной волны порядка l_s и длиной затухания порядка L_s .

Ниже вязкоупругого резонанса, $2\omega_c - \omega \gg 1/\tau_{ee}$, собственное число λ_s преимущественно вещественное:

$$\lambda_s \approx \frac{2\sqrt{4\omega_c^2 - \omega^2}}{v_F^\eta} \sim \frac{1}{l_\omega}. \quad (\text{B.31})$$

В этом случае вязкоупругая часть отклика в величине $\mathbf{V}(y)$ экспоненциально растёт от краев, где $\mathbf{V} \equiv 0$, в направлении объёма образца с характерной длиной l_s .

В окрестности вязкоупругого резонанса, $|\omega - 2\omega_c| \lesssim 1/\tau_{ee}$, из уравнений (В.16) получаем следующий результат:

$$\lambda_s \approx \frac{2\sqrt{4\omega_c^2 - \omega^2 - 4i\omega/\tau_{ee}}}{v_F^\eta}. \quad (\text{В.32})$$

В этом случае собственное число λ_s , как и собственное значение λ_p в уравнении (В.28) вблизи циклотронного резонанса, соответствует экспоненциальному затуханию и колебаниям с одинаковыми характерными длинами $\tilde{L}_s = \sqrt{l_s L_s}$. Последняя величина намного меньше длины затухания магнитозвука, L_s , при частотах выше вязкоупругого резонанса и намного больше ширины приграничных областей, l_s , ниже вязкоупругого резонанса.

Таким образом, поведение вязкоупругого собственного значения λ_s вблизи и вдали от вязкоупругого резонанса аналогично поведению собственного магнитоплазмонного значения λ_p вблизи и вдали от циклотронного резонанса.

Как видно из формул (В.24)-(В.30), условие (В.15) гарантирует, что $L_p, l_p \gg L_s, l_s$. Таким образом, плазменная и вязкоупругая части линейного отклика в достаточно широких образцах, $W \gg L_s$, расположены в пространственно разделённых слоях с ширинами разного порядка [см. Рис. 1.10(b)].

Аналитический расчёт величины $\mathbf{V}(y)$ в общем случае, когда условие (В.15) не выполняется и плазменный и вязкоупругий вклады линейного отклика не разделены в пространстве, очень громоздко. В этом случае целесообразно использовать численные расчёты, чтобы получить зависимости $\mathbf{V}(y)$ и \mathbf{I} от частот ω и ω_c . Однако, как видно из уравнения (В.14), значения $\mathbf{V}(y)$ и \mathbf{I} по-прежнему будут проявлять циклотронный и вязкоупругий резонансы.

В.2 Анализ линейного отклика

В этом разделе приводится подробный анализ свойств высокочастотного течения электронной жидкости в длинных образцах с различными ширинами, в которых доминируют друдевский, плазменный или вязкоупругий вклады.

Линейный отклик $\mathbf{V}(y, t)$, вычисленный в предыдущем разделе, описывает, в частности, поглощение энергии от переменного внешнего поля $\mathbf{E}_0(t)$. Поглощаемая мощность имеет вид:

$$\mathcal{W} = 2 \operatorname{Re}(\mathbf{E}_0^* \mathbf{I}) = E_0 \operatorname{Re}(I_x \pm iI_y). \quad (\text{В.33})$$

Чтобы выявить все возможные вклады в линейный отклик, были рассчитаны зависимости $\mathcal{W}(\omega_c)$ по формулам (В.22) и (В.33) при фиксированной частоте течения ω для разных ширин образца W .

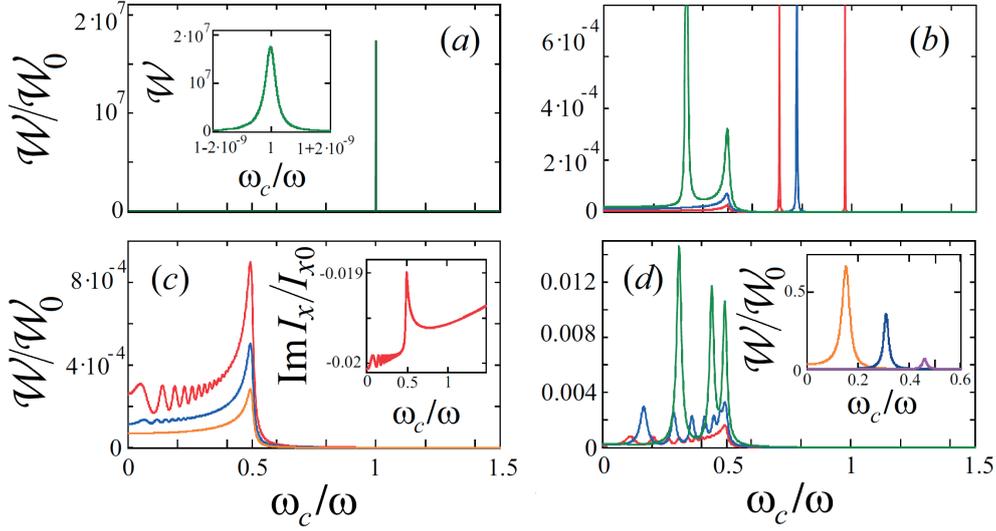


Рис. В.1: Поглощаемая мощность \mathcal{W} в единицах $\mathcal{W}_0 = e^2 n_0 W E_0^2 \tau_{ee} / (2m)$ как функция циклотронной частоты ω_c при фиксированной частоте течения ω для очень широких (а), широких (б), средних (с), и узких (д) образцов. Все кривые построены для следующих параметров: $\omega \tau_{ee} = 50$, $s/v_F^\eta = 300$, и $\gamma \tau_{ee} = 10^{-7}$. На панели (а) построена величина $\mathcal{W}(\omega_c)$ для очень широких образцов $W/L_s = 10^6$, что соответствует следующим параметрам плазмонов $W/l_p \approx 2 \cdot 10^5$, $W/L_p^{out} \approx 0.04$, и $W/L_p^{in} \approx 10$. Панель (б) отвечает широким образцам с ширинами: $W/L_s = 80, 30, 20$ (красная, синяя, и зелёная кривые); такие отношения W/L_s отвечают следующим длинам волн: $2\pi W/l_p \approx 5.0, 1.2, 0.9$. На панели (с) показана поглощаемая мощность $\mathcal{W}(\omega_c)$ для образцов средних ширин: $W/L_s = 5.7, 3.2, 1.8$, что соответствует отношениям: $W/l_s \approx 280, 160, 90$ (желтая, синяя, и красная кривые). Панель (д) отвечает узким образцам с ширинами $W/L_s = 1, 0.5, 0.2$ и $W/l_s = 50, 25, 10$ (красная, синяя и зелёная кривые). Вставка на панели (а) показывает зависимость $\mathcal{W}(\omega_c)$ для очень широких образцов, $W/L_s = 10^6$, в увеличенном масштабе по оси ω_c . Вставка на панели (с) показывает мнимую часть тока $I_x(\omega_c)$ в единицах $I_{x0} = e^2 n_0 W E_0 \tau_{ee} / (2m)$ для образца средней ширины, $W/L_s = 1.8$. Вставка на панели (д) показывает поглощаемую мощность $\mathcal{W}(\omega_c)$ в единицах \mathcal{W}_0 для очень узких образцов, $W/L_s = 0.08, 0.04, 0.033$ и $W/l_s \approx 0.4, 0.2, 0.16$ (фиолетовая, синяя и жёлтая кривые).

а) Широкие образцы: поведение плазменной компоненты течения.

В очень широких образцах:

$$W \gg L_p \gg l_p, \quad (\text{B.34})$$

плазменная компонента течения формируется в прикраевых слоях с ширинами порядка L_p или l_p . Величина L_p сильно зависит от близости к вязкоупругому резонансу [см. уравнение (B.26)]. Вязкоупругая компонента течения формируется в окрестностях краёв с ширинами порядка $L_s = 1/\text{Re}\lambda_s$, $L_s \ll L_p, l_p$ [см. Рис. 1.10(b)]. Вязкоупругий вклад в ток \mathbf{I} для широких образцов пренебрежимо мал [см. уравнение (B.18)]. В центральной области, $W/2 - |y| \gtrsim L_p$, линейный отклик является омическим течением. Оно формируется циклотронным движением отдельных электронов (точнее, квазичастиц) и их рассеянием на беспорядке.

Если поглощаемая мощность \mathcal{W} в основном определяется центральной областью, линейный отклик проявляет обычный циклотронный резонанс, расположенный при $\omega = \omega_c$ с симметричной лоренцевой формой с полушириной γ , определяемой рассеянием на объёмном беспорядке [см. Рис. В.1(a)].

При частотах ω выше циклотронного резонанса, $\omega - \omega_c \gg \gamma$, плазмонное собственное число λ_p преимущественно мнимое, поэтому течение в приграничных областях, $W/2 - |y| \lesssim L_s$, имеет вид стоячих волн магнитоплазмонов. На частотах ниже циклотронного резонанса, $\omega_c - \omega \gg \gamma$, плазмонное собственное число в основном вещественное, поэтому в приграничных слоях образца с ширинами порядка $l_p \sim s/\omega \ll L_p$ формируются неосциллирующие возмущения электронной плотности и гидродинамической скорости. Вблизи циклотронного резонанса $|\omega - \omega_c| \lesssim \gamma$, число λ_p имеет сравнимые действительную и мнимую части, а плазмонные возмущения имеют протяжённость порядка $\tilde{L}_p \sim s/\sqrt{\gamma\omega}$. Поскольку считалось, что $\gamma \rightarrow 0$, такая ширина \tilde{L}_p больше ширины слоя с плазмонными возмущениями ниже и выше циклотронного резонанса.

В образцах со средними ширинами:

$$l_p \ll W \ll L_p, \quad (\text{B.35})$$

плазмонные возмущения при частотах выше циклотронного резонанса $\omega - \omega_c \gg \gamma$ формируются внутри всего образца. Когда ширина образца равна полуцелому числу длин волн магнитоплазмонов,

$$W = \frac{(2m+1)\pi}{q_p(\omega, \omega_c)}, \quad (\text{B.36})$$

зависимость $W(\omega_c)$ проявляет плазмонные резонансы [см. Рис. В.1(b)]. В уравнении (B.36) m – целое число и $q_p(\omega, \omega_c)$ – волновой вектор магнитоплазмонов, который является корнем уравнения (B.7). При фиксированной частоте ω положение резонансов от стоячих волн магнитоплазмонов $\omega_c^{p,m}(W)$ может попадать в окрестность вязкоупругого резонанса $\omega_c = \omega/2$. В таких случаях полуширина плазмонного резонанса, которая пропорциональна коэффициенту затухания магнитоплазмонов за счёт вязкости (B.8), резонансно зависит от разности $\omega_c - \omega/2$ (см. Рис. В.2).

b) Средние и узкие образцы: поведение вязкоупругой компоненты течения.

В образцах средних ширин:

$$L_s \ll W \ll l_p, \quad (\text{B.37})$$

вязкоупругая часть линейного отклика, которая формируется в приграничных областях с шириной порядка L_s , даёт существенный вклад в ток $\mathbf{I}(t)$. В центральной части образца $W/2 - |y| \gg L_s$ поток по-прежнему контролируется магнитоплазмонами. Вязкоупругий и плазмонный вклады в ток могут быть сопоставимы.

При частотах выше вязкоупругого резонанса $\omega - 2\omega_c \gg 1/\tau_{ee}$ течение в приграничных областях, $W/2 - |y| \lesssim L_s$, имеет вид стоячих волн поперечного нулевого звука. Ниже вязкоупругого резонанса, $2\omega_c - \omega \gg 1/\tau_{ee}$, вязкоупругая часть линейного отклика расположена в более узких

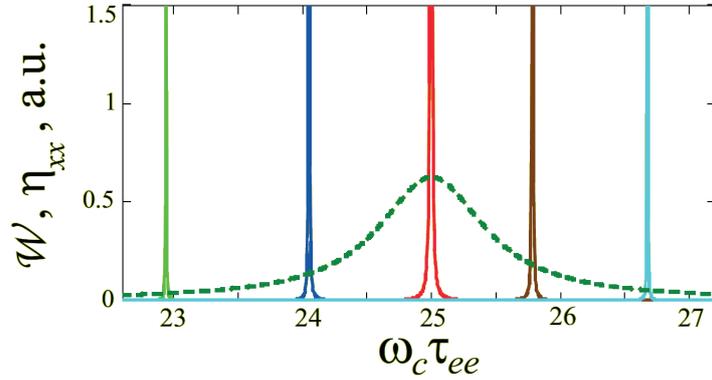


Рис. В.2: Поглощаемая мощность \mathcal{W} как функция циклотронной частоты ω_c при фиксированной частоте течения ω для широких образцов ($W/L_s = 148.5, 150.5, 152.35, 154, 156$ для зелёной, синей, красной, коричневой и голубой кривых) при параметрах $\omega\tau_{ee} = 50$ и $s/v_F^\eta = 300$. Зависимость $\mathcal{W}(\omega_c)$ проявляет плазменные резонансы, чьи частоты $\omega_c^{p,m}$ зависят от ширины образца W . Штриховая линия показывает диссипативные части коэффициентов вязкости, $\text{Re } \eta_{xx} = \text{Im } \eta_{xy}$. Ширина плазменных резонансов максимальна в максимуме функции $\text{Re } \eta_{xx}(\omega_c)$.

приграничных слоях с шириной $\sim l_s \ll L_s$ и имеет экспоненциальный неосциллирующий профиль. Из-за такого изменения характера вязкоупругого возмущения зависимость $\mathbf{I}(\omega_c)$ меняет свой характер при $\omega_c = \omega/2$ и возникает вязкоупругий резонанс в виде пика в зависимостях $\mathcal{W}(\omega_c)$ и $I_{x,y}(\omega_c)$ [см. Рис. В.1 (с)]. Из формул (В.22) и (В.32) получаем для мощности $\mathcal{W}(\omega_c)$ вблизи вязкоупругого резонанса:

$$\mathcal{W}(\omega_c) \propto \text{Re} \left(\frac{1}{\sqrt{i - (2\omega_c - \omega)\tau_{ee}}} \right). \quad (\text{В.38})$$

Эта зависимость представляет собой сильно асимметричный пик относительно точки $\omega_c = \omega/2$.

Вблизи вязкоупругого резонанса, $|\omega - 2\omega_c| \lesssim 1/\tau_{ee}$ вязкоупругая компонента имеет вид колебаний вблизи краев образца, быстро затухающих в направлении внутрь объёма с одинаковыми периодом и характерной длиной затухания: $\sim \sqrt{L_s l_s}$ [см. уравнение (В.32)].

В узких образцах,

$$l_s \ll W \ll L_s, \quad (\text{В.39})$$

при частотах выше вязкоупругого резонанса, $\omega - 2\omega_c \gg 1/\tau_{ee}$, течение контролируется высокочастотной вязкостью во всём образце. Распределение гидродинамической скорости в направлении y имеет вид стоячих волн поперечного нулевого звука. Когда ширина образца становится равной полуцелому числу длин волн поперечного звука:

$$W = \frac{(2m+1)\pi}{q_s(\omega, \omega_c)}, \quad (\text{В.40})$$

в линейном отклике и в $\mathcal{W}(\omega_c)$ возникают резонансы за счёт усиления амплитуды стоячих волн (в направлении y) [см. Рис. В.1(с,d)]. В уравнении (В.40) m – это целое число и $q_s(\omega, \omega_c)$ – это волновой вектор магнитозвуковых волн, который является корнем уравнения (В.9) при

фиксированных частотах. Такие резонансы аналогичны плазмонным резонансам и, в более общем смысле, резонансам любых стоячих волн в резонаторе.

В узких образцах [уравнение (В.39)] при частотах ω ниже вязкоупругого резонанса, $2\omega_c - \omega \gg 1/\tau_{ee}$, вязкоупругая компонента потока имеет профиль, экспоненциально спадающий в направлениях от краёв в внутрь образца, и локализованный в приграничных областях шириной порядка l_s .

В максимально узких образцах, которые можно рассмотреть в рамках гидродинамической теории:

$$\frac{v_F}{\omega} \ll W \ll l_s, \quad (\text{В.41})$$

преобладает вязкоупругая компонента течения. Поток имеет параболический профиль во всём образце [см. уравнение (В.18)]. Этот режим можно рассматривать как переменное течение Пуазейля в магнитном поле. Из общей формулы (В.22) для тока получаем:

$$I_x = \frac{e^2 n_0 E_0 W^3}{24 m \eta_0} \frac{\omega^2 + 4\omega_c^2 + i\omega\tau_{ee}(-\omega^2 + 4\omega_c^2)}{\omega^2}, \quad (\text{В.42})$$

при этом $|I_y| \ll |I_x|$. Из уравнения (В.42) видно что вязкоупругий резонанс в таком режиме проявляется не в токе и кондуктансе, а, наоборот, в высокочастотном импедансе $Z = E/I_x$. Вблизи резонанса из формулы (В.42) получаем:

$$\text{Re } Z \propto \frac{1}{1 + (\omega - 2\omega_c)^2 \tau_{ee}^2}. \quad (\text{В.43})$$

В пределе $\omega\tau_{ee} \gg 1$ мнимая часть тока (В.42) в главном порядке по $\omega\tau_{ee}$ не зависит ни от каких релаксационных характеристик. Движение жидкости в этом режиме напоминает механические колебания заряженной упругой среды, приклеенной к краям в точках $y = \pm W/2$. Малая действительная часть выражения (В.42) описывает медленную релаксацию этих упругих колебаний. Таким образом, при частотах $\omega\tau_{ee} \sim 1$ для максимально узких образцов, $v_F/\omega \ll W \ll l_s$, в двумерной сильно неидеальной жидкости происходит вязкоупругий переход: с ростом частоты ω внешнего поля $\mathbf{E}(t)$ квазистационарное диссипативное течение Пуазейля переходит в почти бездиссипативные упругие колебания.

Таким образом, вязкоупругий резонанс проявляется по-разному в зависимости от ширины образца W . В широких образцах он наблюдается по резонансной зависимости полуширины плазмонного резонанса от W . В образцах средней ширины вязкоупругий резонанс возникает из-за изменения характера вязкоупругой компоненты течения выше и ниже частоты $\omega = 2\omega_c$. В узких образцах возникают магнитозвуковые резонансы, связанные с совпадением ширины образца с полуцелым числом длин волн поперечного звука, что проявляется в зависимо-

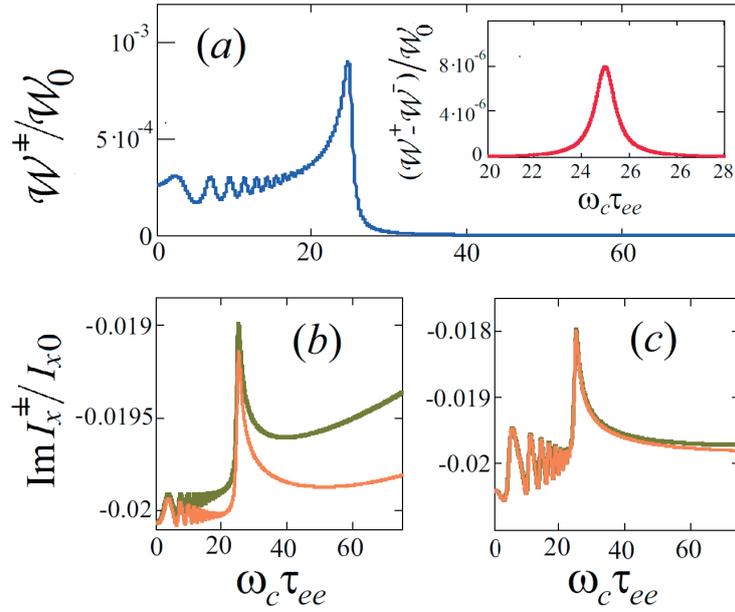


Рис. В.3: На панели (а) показана поглощаемая мощность $W^\pm(\omega_c) \approx E_0 \text{Re} I_x^\pm(\omega_c)$ в единицах W_0 для образцов со средними ширинами ($W/L_s = 1.8$) для правой (+) и левой (-) поляризаций излучения. Все остальные значения параметров системы такие же, как на Рис. В.1: $\omega\tau_{ee} = 50$, $s/v_F^\eta = 300$ и $\gamma\tau_{ee} = 10^{-7}$. На вставке на панели (а) показана разность $W^+(\omega_c) - W^-(\omega_c)$ вблизи вязкоупругого резонанса, $\omega_c = \omega/2$. Видно, что зависимости $W^\pm(\omega_c)$ для двух знаков поляризации почти совпадают. На панелях (b) и (c) показана мнимая часть высокочастотного тока, $\text{Im} I_x^\pm(\omega_c)$, в единицах $I_{x0} = e^2 n_0 W E_0 \tau_{ee} / (2m)$ для образцов средних ширин [$W/L_s = 1.8$ для (b) и $W/l_{ee}^\eta = 0.8$ для (c)]. Оранжевая и зелёная кривые отвечают правой и левой поляризации излучения.

сти $W(\omega_c)$. В наиболее узких образцах формируется переменное течение Пуазейля. В этом случае вязкоупругий резонанс проявляется в импедансе образца $Z \sim \eta_{xx}(\omega, \omega_c)$.

Важной особенностью вязкоупругой части линейного отклика является ее независимость от знака циркулярной поляризации излучения [см. уравнение (В.18)]. С уменьшением ширины образца зависимость \mathbf{I} и W от знака поляризации ослабевают и, наконец, практически исчезают как для действительной, так и для мнимой частей тока при ширине образца W порядка длины затухания магнитозвука, L_s (см. Рис. В.3). При этом, для действительной части тока I_x эта зависимость исчезает быстрее, чем для мнимой части.

Слабая зависимость вязкоупругой части линейного отклика от знака циркулярной поляризации поля излучения $\mathbf{E}_0(t)$ связана с экранированием y -компоненты поля падающего излучения $\mathbf{E}_0(t)$ и со слабым взаимодействием между вязкоупругим слоем течения и плазмонными возбуждения [сила взаимодействия пропорциональна малому параметру ε , см. формулы (В.18) и (В.22)].

Приложение С

Кинетика слабо взаимодействующих двумерных электронов

С.1 Оператор межэлектронных столкновений

С.1.1 Кинематические соотношения для межэлектронных столкновений

В настоящем Приложении описано составление и решение кинетического уравнения для описания вязких течений в слабо неидеальном электронном ферми-газе с реалистичным законом взаимодействия между электронами (экранированный кулоновский потенциал).

В первом разделе представлены формулы для соотношений между углами рассеяния φ , θ и ψ двух электронов при различных начальных и конечных энергиях электронов ε_1 , ε_2 , ε_3 и $\varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$. Удобно считать, что все эти углы определены в диапазоне $(-\pi, \pi)$.

Энергетическая зависимость ядра интеграла столкновений (2.47) определяется, в первую очередь, заселённостью начальных и конечных состояний, что описывается множителем:

$$f_F(\varepsilon_1) f_F(\varepsilon_2) [1 - f_F(\varepsilon_3)] [1 - f_F(\varepsilon_4)] = \frac{1}{16 \cosh\left(\frac{x_1}{2}\right) \cosh\left(\frac{x_2}{2}\right) \cosh\left(\frac{x_3}{2}\right) \cosh\left(\frac{x_4}{2}\right)}, \quad (\text{C.1})$$

где введены безразмерные энергии электронов, отсчитываемые от химического потенциала μ :

$$x_i = \frac{\varepsilon_i - \mu}{T}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{C.2})$$

Напомним, что μ отличается от энергии Ферми ε_F на величину второго порядка по температуре $\sim (T/\mu)^2$.

За счёт фактора (С.1) начальная и конечная энергии электронов близки к химическому потенциалу $\mu \approx \varepsilon_F$:

$$\frac{\varepsilon_i - \mu}{\varepsilon_F} \lesssim \zeta, \quad \zeta = \frac{T}{\varepsilon_F}. \quad (\text{C.3})$$

то есть:

$$x_i \lesssim 1. \quad (\text{C.4})$$

Закон сохранения импульса $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$ спроектированный на ось y' приводит к следующему уравнению для угла рассеяния $\psi = \psi(\varphi, \theta, \check{\varepsilon})$ [см. Рис. 2.3(a)]:

$$\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3} \sin \psi = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \varphi - \sqrt{\varepsilon_3} \sin \theta. \quad (\text{C.5})$$

В аргументах функции $\psi(\varphi, \theta, \check{\varepsilon})$ введено сокращённое обозначение $\check{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Решение уравнения (C.5) $\psi = \psi(\varphi, \theta, \check{\varepsilon})$ имеет следующий вид: $\psi = \psi_0$, $\psi = \pi - \psi_0$ или $\psi = -\pi - \psi_0$, в зависимости от положения углов φ и θ на единичной окружности. Здесь ψ_0 имеет вид:

$$\psi_0(\varphi, \theta, \check{\varepsilon}) = \arcsin \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \sin \varphi - \sqrt{\varepsilon_3} \sin \theta}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3}} \right). \quad (\text{C.6})$$

Необходимо выбрать такое из приведённых выше трёх решений $\psi(\varphi, \theta, \check{\varepsilon})$, которое приводит к выполнению x' -компоненты закона сохранения импульса при заданных углах φ и θ .

Закон сохранения энергии $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$ в переменных φ , θ и $\check{\varepsilon}$ принимает вид:

$$\varepsilon_3 + \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos \varphi = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \cos(\varphi - \theta). \quad (\text{C.7})$$

Он даёт соотношение, $\theta = \theta_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon})$, между углами φ и θ при энергиях $\check{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \theta_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon}) = & \arctan \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} \sin \varphi}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \varphi} \right) \pm \\ & \pm \arccos \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_3} + \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 / \varepsilon_3} \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos \varphi}} \right) + N_{\pm}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Здесь функции $N_{\pm} = N_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon})$ принимают одно из значений: 0 , π или $-\pi$, – для которых углы $\theta_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon})$ и отвечающий им другой угол рассеяния $\psi[\varphi, \theta_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon}), \check{\varepsilon}]$ удовлетворяют x' -компоненте закона сохранения импульса.

Подставляя результат (C.8) в формулу (C.6), получаем угол $\psi = \psi_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon})$ как функцию только угла φ и энергий $\check{\varepsilon}$:

$$\psi_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon}) = \psi[\varphi, \theta_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon}), \check{\varepsilon}]. \quad (\text{C.9})$$

При выполнении неравенств (C.3), функции (C.8) в промежуточном интервале углов $|\varphi| \sim 1$ [точнее, при $|\varphi| \gg \sqrt{\zeta}$, $|\pi - \varphi| \gg \zeta$] имеют асимптоты:

$$\theta_+ = \varphi + \Delta\theta_+, \quad \theta_- = \Delta\theta_-, \quad (\text{C.10})$$

где $\Delta\theta_{\pm} = \Delta\theta_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon}) \sim \zeta$. Из уравнений (C.10) и (C.6) видно, что похожие асимптоты имеют функции $\psi_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon})$ в том же интервале углов φ :

$$\psi_+ = \Delta\psi_+, \quad \psi_- = \varphi + \Delta\psi_-, \quad (\text{C.11})$$

где $\Delta\psi_{\pm} = \Delta\psi_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon}) \sim \zeta$.

Иными словами, процесс столкновений двух электронов $(1, 2) \rightarrow (3, 4)$ при углах $|\varphi| \sim 1$ является малоугловым рассеянием,

$$(0, \varphi) \rightarrow \left(\theta = \Delta\theta_-, \psi = \varphi + \Delta\psi_- \right), \quad (\text{C.12})$$

или обменом импульсами двух электронов, сопровождающимся малоугловым рассеянием:

$$(0, \varphi) \rightarrow \left(\theta = \varphi + \Delta\theta_+, \psi = \Delta\psi_+ \right). \quad (\text{C.13})$$

Функции $\theta_{\pm}(\varphi; \check{\varepsilon})$, задаваемые формулами (C.8) и (C.10), показаны на Рис. 2.3(b) для простейшего случая $\varepsilon_1 > \varepsilon_2, \varepsilon_3 > \varepsilon_4$, и $\Delta < 0$. Здесь вводится величина $\Delta = \Delta(\check{\varepsilon})$:

$$\Delta = \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}{T^2} = x_3 x_4 - x_1 x_2. \quad (\text{C.14})$$

Отметим, что в случае $N_{\pm} \equiv 0$ в уравнении (C.8) параметр Δ определяет величину щели между кривыми $\theta_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon})$ и вертикальными линиями $\varphi = 0, \varphi = \pi$ [см. Рис. 2.3(b)]. Для других соотношений между энергиями $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и $\varepsilon_3, \varepsilon_4$, функции $\theta_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon})$ определены в других интервалах углов φ , включающих точки $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. В таких случаях эти функции могут проявлять другие типы связности около точек $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ и (π, π) на плоскости (φ, θ) .

В пределе $\varphi \rightarrow 0$, функции (C.6) и (C.8), определяющие углы $\psi = \psi(\varphi, \theta, \check{x})$, и $\theta = \theta_{\pm}(\varphi, \check{x})$ принимают вид:

$$\psi(\varphi, \theta, \check{x}) = \varphi - \theta \quad (\text{C.15})$$

и

$$\theta_{\pm}(\varphi, \check{x}) = \frac{\varphi \pm \sqrt{\varphi^2 + \zeta^2 \Delta}}{2}. \quad (\text{C.16})$$

Из уравнений (C.15) и (C.16) для функции $\psi_{\pm}(\varphi, \check{x})$ (C.9) получаем:

$$\psi_{\pm}(\varphi, \check{x}) = \theta_{\mp}(\varphi, \check{x}). \quad (\text{C.17})$$

Таким образом, видно, что при $|\varphi| \ll 1$ углы рассеяния θ и ψ тоже оказываются малыми: $|\theta|, |\psi| \ll 1$. Полученные выражения (C.15)-(C.17) справедливы при $|\varphi| \ll \sqrt{\zeta}$.

Получим из формул (C.6) и (C.8) асимптотики для углов рассеяния $\psi_{\pm} = \psi_{\pm}(\varphi, \check{x})$ и $\theta_{\pm} = \theta_{\pm}(\varphi, \check{x})$ в пределе $|\varphi| \rightarrow \pi$ в главном порядке по $\zeta \ll 1$. Для положительных φ такие асимптотики принимают вид:

$$\psi(\varphi, \theta, \check{x}) = \pi + \theta, \quad \psi(\varphi, \theta, \check{x}) = -\pi + \theta, \quad (\text{C.18})$$

для отрицательных и положительных значений $\theta = \theta_{\pm}(\varphi, \check{x})$, соответственно, и

$$\theta_{\pm}(\varphi, \check{x}) = \arctan\left(\frac{s}{a}\right) \pm \arccos\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + s^2}}\right) + N_{\pm}. \quad (\text{C.19})$$

Здесь введены обозначения: $s = (\pi - \varphi)/\zeta$, $a = (x_1 - x_2)/2$ и $b = (x_3 - x_4)/2$. Формулы (С.18) и (С.19) справедливы для углов $|\pi - |\varphi|| \ll 1$ (то есть, при $s \lesssim 1/\zeta$).

Модуль $q = q(\theta, \check{\varepsilon})$ переданного импульса $\mathbf{q} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ выражается через энергии $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ и угол рассеяния θ :

$$q = \sqrt{2m(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3} \cos \theta)}. \quad (\text{С.20})$$

Аналогичным образом, для модуля $w = w(\varphi, \theta, \check{\varepsilon})$ переданного импульса в обменном процессе при столкновении, $\mathbf{w} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2$ [см. формулу (2.49)] получаем:

$$w = \sqrt{2m[\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3} \cos(\varphi - \theta)]}. \quad (\text{С.21})$$

В пределе, $|\varphi| \ll 1$, из формул (С.6), (С.8), (С.20), (С.21) для функций $q = q(\theta, \check{x})$ и $w = w(\varphi, \theta, \check{x})$ получаем:

$$q = p_F \sqrt{\theta^2 + \zeta^2(x_1 - x_3)^2/4}, \quad (\text{С.22})$$

$$w = p_F \sqrt{\psi^2 + \zeta^2(x_2 - x_3)^2/4},$$

где $p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}$; $\psi = \psi(\varphi, \theta, \check{x})$ описывается формулой (С.6) и введено обозначение $\check{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Из формул (С.6)-(С.10), (С.22) видно, что при вычислении q и w на углах рассеяния $\theta = \theta_{\pm}$ и $\psi = \psi_{\pm}$ получается оценка:

$$q, w \sim p_F \zeta \quad (\text{С.23})$$

в области очень малых углов φ , $|\varphi| \sim \zeta$, и оценки:

$$q \sim p_F \zeta, \quad w \sim p_F |\varphi| \quad (\text{С.24})$$

или

$$q \sim p_F |\varphi|, \quad w \sim p_F \zeta \quad (\text{С.25})$$

в области умеренно малых углов φ , $\zeta \ll |\varphi| \ll 1$.

В пределе, $\pi - |\varphi| \ll 1$, отвечающем встречным столкновениям, функции $q = q(\theta, \check{x})$ (С.20) и $w = w(\varphi, \theta, \check{x})$ (С.21) принимают формы:

$$q = p_F \sqrt{2(1 - \cos \theta) + \zeta^2(x_1 - x_3)^2/4}, \quad (\text{С.26})$$

$$w = p_F \sqrt{2(1 + \cos \theta) + \zeta^2(x_2 - x_3)^2/4}.$$

В зависимости от знака \pm в уравнениях (С.8), (С.9) величины угла φ , первые слагаемые под квадратными корнями в формулах (С.26), $1 \mp \cos \theta$, при подстановке $\theta = \theta_{\pm}(\varphi, \check{\varepsilon})$ могут оказаться сравнимы или много больше вторых слагаемых, $\zeta^2(x_{1,2} - x_3)^2/4$.

С.1.2 Ядро интеграла столкновений, учитывающее передачу энергии при столкновениях

Использование статического экранированного потенциала $V(q)$ (2.50) подразумевает пренебрежение зависимостью ядра $V(q, \epsilon)$ оператора межчастичного взаимодействия от передаваемой при столкновении энергии:

$$\epsilon = \epsilon_3 - \epsilon_1 . \quad (\text{C.27})$$

Полное описание межчастичного рассеяния в двумерном электронном ферми-газе может быть выполнено в рамках приближения случайных фаз (RPA). В частности, этот подход позволяет учесть передачу энергии (C.27) при расчёте вероятности рассеяния W по формуле, аналогичной уравнению (2.48). Основным элементом при вычислении $V(q, \epsilon)$ в рамках приближения RPA является поляризационный оператор $\Pi(q, \epsilon)$ двумерного ферми-газа. Учёт зависимости $\Pi(q, \epsilon)$ от переменной ϵ приводит к замене статического экранированного потенциала $V(q)$ (2.50) в квадрате матричного элемента рассеяния M^2 на ядро $V(q, \epsilon)$ [134, 135]:

$$V(q, \epsilon) = \frac{\pi e^2 a_B / \kappa}{1 + \frac{a_B q}{2\hbar} - i \frac{\epsilon}{\sqrt{v_F^2 q^2 - \epsilon^2}}} , \quad (\text{C.28})$$

где κ – диэлектрическая проницаемость окружения двумерного слоя.

Для неполяризованных по спину электронов квадрат матричного элемента $M^2 = M^2(\varphi, \theta, \epsilon)$, отвечающий ядру (C.28), имеет вид [134, 135, 129]:

$$M^2 = 2 \{ |V(q, \epsilon)|^2 + |V(w, \epsilon')|^2 - \text{Re} [V(q, \epsilon) V(w, \epsilon')^*] \} , \quad (\text{C.29})$$

где $\epsilon' = \epsilon_3 - \epsilon_2$ – непрямая переданная энергия. В уравнении (C.29) первое слагаемое – это прямое кулоновское слагаемое, а второе и третье слагаемые – обменные слагаемые. Вероятность рассеяния W снова выражается через M^2 по Золотому правилу Ферми, аналогично формуле (2.48).

Ниже проводится анализ того, при каких углах рассеяния можно, а при каких – нельзя пренебречь зависимостью матричного элемента M^2 от передаваемых энергий ϵ и ϵ' . Приводим это рассмотрение подробно только для прямого слагаемого $2|V(q, \epsilon)|^2$ в M^2 (C.29). Аналогичное рассмотрение для второго и третьего обменных слагаемых в M^2 , содержащем ядро $V(w, \epsilon')$, осуществляется заменой всех величин, соответствующих электронам “3” и “4”.

Из формул (C.20) и (2.47) следует, что величины q и ϵ независимо изменяются в диапазонах от 0 до $\approx 2p_F$ и от 0 до $\sim T$ соответственно. Для малых, промежуточных и больших углов рассеяния в интервалах:

$$|\theta| \sim \zeta , \quad \zeta \ll |\theta| \ll 1 , \quad |\theta| \sim 1 , \quad (\text{C.30})$$

получаем, соответственно, оценки:

$$q \sim p_F \zeta, \quad q \sim p_F \theta, \quad q \sim p_F, \quad (C.31)$$

[см. Рис. 2.3(а)]. Модуль выражения $-i\epsilon/\sqrt{v_F^2 q^2 - \epsilon^2}$ в знаменателе уравнения (C.28) оценивается как:

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{v_F^2 q^2 - \epsilon^2}} \sim 1, \quad \frac{\zeta}{|\theta|}, \quad \zeta \quad (C.32)$$

для углов θ в интервалах (C.30). Поэтому для не очень малых углов θ , $|\theta| \gg \zeta$, слагаемым (C.32) можно пренебречь в знаменателе формулы (C.28) по сравнению с единицей. Для малых углов рассеяния, $|\theta| \lesssim \zeta$, слагаемое (C.32) – величина порядка или много больше единицы и им пренебречь нельзя.

В связи с тем, что энергии $\epsilon_{1,2,3}$ близки к химическому потенциалу, $|\epsilon_{1,2,3} - \mu| \lesssim T$, из уравнений (C.6), (C.8) и (C.10) следует, что для малых и промежуточных углов φ ,

$$\pi - |\varphi| \sim 1 \quad (C.33)$$

(в частности, при $|\varphi| \sim \zeta$), углы рассеяния $\theta = \theta_{\pm}(\varphi, \epsilon)$ и $\psi = \psi_{\pm}(\varphi, \epsilon)$ удовлетворяют соотношениям:

$$|\theta| \lesssim \zeta, \quad |\psi - \varphi| \lesssim \zeta \quad (C.34)$$

[“горизонтальная” часть красной кривой на Рис. 2.3(b)] или соотношениям

$$|\theta - \varphi| \lesssim \zeta, \quad |\psi| \lesssim \zeta \quad (C.35)$$

[“диагональная” часть синей кривой на Рис. 2.3(b)]. Для встречных столкновений, когда углы налетающего электрона φ близки к $\pm\pi$,

$$\pi - |\varphi| \ll 1, \quad (C.36)$$

[“вертикальные” части синей и красной кривых на Рис. 2.3(b)], оба угла рассеяния $\theta = \theta_{\pm}(\varphi, \epsilon)$ и $\psi = \psi_{\pm}(\varphi, \epsilon)$ становятся велики по сравнению с малым параметром ζ :

$$|\theta|, |\psi| \gg \zeta. \quad (C.37)$$

Таким образом, уравнения (C.34), (C.35) и (C.37) говорят о следующем. Во-первых, встречные столкновения $[\pi - |\varphi| \ll 1]$ отвечают большим углам рассеяния θ и ψ [см. уравнение (C.37)]. С учётом оценок (C.32) для вероятности рассеяния на них можно использовать статический потенциал $V(q)$ (2.50). Во-вторых, рассеяние при столкновениях с электронами, налетающими под малыми или промежуточными углами φ $[\pi - |\varphi| \sim 1]$, является малоугловым: $|\theta| \lesssim \zeta$ или

$|\psi| \lesssim \zeta$. В соответствии с оценками (C.32), необходимо использовать точное ядро межчастичного взаимодействия $V(q, \epsilon)$ (C.28).

C.1.3 Множитель S в интеграле столкновений и учёт переданной энергии при столкновениях при некоторых углах φ

В этом разделе выполним оценки зависящего от функции распределения выражения $S = S(\alpha; \varphi, \check{\epsilon})$, входящего в интеграл столкновений (2.47):

$$S = \Psi(\varepsilon_1, \alpha) + \Psi(\varepsilon_2, \alpha + \varphi) - \Psi(\varepsilon_3, \alpha + \theta) - \Psi(\varepsilon_4, \alpha + \psi). \quad (\text{C.38})$$

В этом выражении часть переменных связаны соотношениями: $\varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\theta = \theta_{\pm}(\varphi, \check{\epsilon})$ и $\psi = \psi_{\pm}(\varphi, \check{\epsilon})$. Для оценок S удобно положить, что $\alpha = 0$ и считать функцию $\Psi(\varepsilon, \phi)$ чётной по ϕ и нормированной так что $\Psi(\varepsilon, \phi) \sim 1$ при типичных углах $\phi \sim 1$ и энергиях $x = (\varepsilon - \mu)/T \sim \zeta$. Так определённая величина S является функцией переменных φ и $\check{\epsilon}$: $S = S_{\pm}(\varphi, \check{\epsilon})$. Целью этого раздела является сравнение её с единицей.

В силу уравнений (C.10) и (C.33)-(C.35), величину $S(\varphi, \check{\epsilon}) = S(\varphi, \check{x})$ можно разложить при каждом малом или промежуточном φ , $\pi - |\varphi| \sim 1$, в ряд Тейлора по малым величинами θ и $(\psi - \varphi)$ для “-”-решений θ_- и ψ_- [или по малым величинам ψ и $(\theta - \varphi)$ для “+”-решений]. Действительно, из уравнений (C.6) и (C.8) следует, что углы $\theta_{\pm}(\varphi, \check{x} = 0)$ и $\psi_{\pm}(\varphi, \check{x} = 0)$ равны 0 и φ или наоборот. Поэтому возможно разложение S по отклонениям величин функций θ_{\pm} от ψ_{\pm} их нулевых значений, принимаемыми ими при $\check{x} = 0$. На Рис. 2.3(b) точки $[\varphi, \theta_{\pm}(\varphi, 0)]$ на плоскости (φ, θ) показаны коричневыми тонкими линиями; а функции $\theta_{\pm}(\varphi, \check{x})$ при некотором ненулевом \check{x} показаны толстыми красными и синими линиями.

Выразим величину S в удобной для разложения Тейлора форме по малым отклонением углов рассеяния θ и ψ от их значений при $\varepsilon_i = \mu$. Для решений $\theta = \theta_-$ и $\psi = \psi_-$ пишем:

$$\begin{aligned} S_- = & \Psi(x_1, 0) + \Psi(x_2, \varphi) - \Psi(x_3, 0) - \Psi(x_4, \varphi) + \\ & + [\Psi(x_3, 0) - \Psi(x_3, \theta)] + [\Psi(x_4, \varphi) - \Psi(x_4, \psi)]. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Такая форма позволяет производить разложение S по θ и $(\psi - \varphi)$. Для решений $\theta = \theta_+$ и $\psi = \psi_+$ удобно записать:

$$\begin{aligned} S_+ = & \Psi(x_1, 0) + \Psi(x_2, \varphi) - \Psi(x_3, \varphi) - \Psi(x_4, 0) + \\ & + [\Psi(x_3, \varphi) - \Psi(x_3, \theta)] + [\Psi(x_4, 0) - \Psi(x_4, \psi)] \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

чтобы провести разложение Тейлора по малым значениям $(\theta - \varphi)$ и ψ .

Если функция распределения $\Psi(\varepsilon, \alpha)$ существенно зависит от угла ϕ и слабо зависит от энергии ε :

$$\Psi(\varepsilon, \phi) \approx \Psi(\phi), \quad (\text{C.41})$$

слагаемые в первых строчках уравнений (C.39) и (C.40) близки к нулю и разложение оставшихся слагаемых в S (C.39), (C.40) в ряды Тейлора приводит к следующей оценке. При малых и промежуточных φ , $\pi - |\varphi| \sim 1$ [при этом углы рассеяния θ и ψ лежат в интервалах (C.34) и (C.35)], величина S есть линейная комбинация x_i в первом порядке по ζ и является квадратичной формой x_i во втором порядке по ζ :

$$S(\varphi, \check{x}) \approx \zeta A_1(\varphi, \check{x}) + \zeta^2 A_2(\varphi, \check{x}), \quad (\text{C.42})$$

где

$$A_1(\varphi, \check{x}) = \sum_{i=1}^3 a_i x_i, \quad A_2(\varphi, \check{x}) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j, \quad (\text{C.43})$$

$a_i = a_i(\varphi) \sim 1$ и $a_{ij} = a_{ij}(\varphi) \sim 1$.

Для встречных столкновений, когда φ вблизи $\pm\pi$ [см. уравнение (C.36)], углы рассеяния большие [см. уравнение (C.37)]. При условии, что величина $\Psi(0)$ не близка к величине $-\Psi(\pi)$, выражение S (C.38) не может быть разложено в ряд Тейлора по θ , $(\theta - \varphi)$, ψ и $(\psi - \varphi)$ и, вообще говоря, оценивается как:

$$S(\varphi, \check{x}) \sim 1. \quad (\text{C.44})$$

Если, напротив, функция распределения такая, что $\Psi(0) = -\Psi(\pi)$, можно разложить величину S (C.39) по разности $\varphi - \pi$. В результате будет справедливо неравенство:

$$S(\varphi, \check{x}) \ll 1. \quad (\text{C.45})$$

Из сравнения величин S в уравнениях (C.42) и (C.44) следует, что для функций $\Psi(\varepsilon, \alpha) = \cos(m\alpha)$ с чётным ненулевым значением m вклады в интеграл столкновений St (2.47) от встречных столкновений [$\pi - |\varphi| \ll 1$] могут доминировать над вкладами от столкновений с малыми и промежуточными углами φ [$\pi - |\varphi| \sim 1$] при условии достаточно большой величины остальных множителей в операторе St в области $\pi - |\varphi| \ll 1$. Этими множителями являются дельта-функция (2.51) и матричный элемент M^2 . Первый из них расходится как $1/\varphi$ при $\varphi \rightarrow 0$ и как $1/(\pi - \varphi)$ при $\varphi \rightarrow \pi$, в то время как матричный элемент (2.49) [а также (C.29)], вообще говоря, убывает при $|\varphi| \rightarrow \pi$. Поэтому вопрос о важности встречных столкновениях, $\varphi \rightarrow \pi$, для различных Ψ нетривиален. Если они действительно доминируют, следует использовать статический потенциал $V(q)$ (2.50) в основном вкладе в St , согласно полученным в Разделе C.2.1 соотношениям между $V(q)$ (2.50) и $V(q, \epsilon)$ (C.28).

Наоборот, из формул (C.42) и (C.45) видно, что для функций распределения $\Psi(\varepsilon, \alpha) = \cos(m\alpha)$ с нечётным m [ведущее к $\Psi(0) = -\Psi(\pi)$] множитель $S(\varphi, \check{x})$ оказывает влияние другого типа на выделение наиболее существенных углов φ . А именно: могут оказаться важны не

только встречные столкновения, но и столкновения с другими углами $|\varphi| \ll 1$ и $|\varphi| \sim 1$. В соответствии с Разделом С.1.2, в этом случае необходимо использовать точное ядро $V(q, \epsilon)$ (С.28).

Если функция $\Psi = \Psi_m^F$ существенно зависит от энергии:

$$\Psi_m^F(\epsilon, \phi) = F(\epsilon) \cos(m\phi), \quad (\text{C.46})$$

где $F(\epsilon) \neq \text{const}$, множитель S (С.39) при промежуточных углах φ , $|\varphi| \sim 1$, связан в основном с первыми строками выражений (С.39) и (С.40). В этом случае S оценивается как единица. При малых углах, $|\varphi| \ll 1$, для таких $\Psi = \Psi_m^F$ имеем:

$$S(\varphi, \check{x}) \sim F(x_1) + F(x_2) - F(x_3) - F(x_4), \quad (\text{C.47})$$

что тоже есть величина порядка единицы, за исключением случаев $F(x) = 1$ и $F(x) = x$ (такие F отвечают, в частности, возмущению плотности и энергии). Слагаемые во вторых строках уравнений (С.39) и (С.40) для Ψ_m^F (С.46) являются много меньшими величинами при малых и промежуточных φ , $\pi - |\varphi| \sim 1$, чем слагаемые в первых строках, но могут давать определяющий вклад в зависимость $\text{St}[\Psi_m^F]$ от номера гармоники m .

С.2 Вклады различных типов в оператор столкновений

С.2.1 Структура интеграла столкновений

Области $0 \leq \varphi \leq \pi$ и $-\pi \leq \varphi \leq 0$ дают одинаковые вклады в интеграл столкновений St , задаваемый уравнением (2.47). Поэтому можно вычислить интеграл по переменной φ в St только по одному из этих двух интервалов, например, по $0 \leq \varphi \leq \pi$, и чтобы учесть вклад второго интервала, $-\pi \leq \varphi \leq 0$, просто умножением первого вклада на множитель два.

Можно выделить вклады в интеграл столкновений от коллинеарных столкновений ($|\varphi| \ll 1$ и при этом $|\theta|, |\psi| \ll 1$); от встречных столкновений ($|\varphi| \approx \pi$); и от столкновений с электронами, имеющими промежуточные углы ($|\varphi| \sim 1$):

$$\text{St} = \text{St}_0 + \text{St}_\pi + \text{St}_1. \quad (\text{C.48})$$

Выполненные выше оценки множителя S (С.38) показывают, что в зависимости от вида функции Ψ_m^F (С.46), некоторые из слагаемых St_0 , St_π или St_1 , в формуле (С.48) могут быть более или менее существенны.

Из определения оператора St (2.47) следует, что он является диагональным по угловому множителю $\cos(m\alpha)$ для на функциях вида (С.46):

$$\text{St}[\Psi_m^F(\epsilon, \phi)](\epsilon_1, \alpha) = \cos(m\alpha) \text{St}^{(m)}[F(\epsilon)](\epsilon_1), \quad (\text{C.49})$$

и, соответственно:

$$\text{St}_\zeta[\Psi_m^F(\varepsilon, \phi)](\varepsilon_1, \alpha) = \cos(m\alpha) \text{St}_\zeta^{(m)}[F(\varepsilon)](\varepsilon_1), \quad (\text{C.50})$$

где $\zeta = 0, \pi, 1$. Ниже с помощью формул (C.39) и (C.40) показывается, что для функций распределения вида $\Psi_m^F(\varepsilon, \phi) = F(\varepsilon) \cos(m\phi)$ (C.46), в каждом из вкладов St_ζ можно выделить независимую и зависящую от угловой переменной (то есть, от номера гармоники m) части:

$$\text{St}_\zeta^{(m)}[F] = \text{St}_\zeta^{\text{in}}[F] + \text{St}_\zeta^{\text{dep},(m)}[F], \quad (\text{C.51})$$

[и, соответственно, $\text{St} = \text{St}^{\text{in}} + \text{St}^{\text{dep},(m)}$]. Здесь, по определению этого разложения, зависящие от угловой переменной части $\text{St}_\zeta^{\text{dep},(m)}$ и $\text{St}^{\text{dep},(m)}$ равны нулю для независимой от угла функции распределения $c_0(\phi)F(\varepsilon)$, $c_0(\phi) \equiv 1$:

$$\text{St}_\zeta^{\text{dep},(m=0)}[c_0(\phi)F(\varepsilon)] \equiv 0. \quad (\text{C.52})$$

Соответственно, для таких функций распределения интеграл столкновений определяется только независимой от угла частью:

$$\text{St}_\zeta[c_0(\phi)F(\varepsilon)] \equiv \text{St}_\zeta^{\text{in}}[F(\varepsilon)]. \quad (\text{C.53})$$

В следующих разделах будет показано, что для функций Ψ_m^F (C.46), существенно зависящих от энергии $F(x) \neq \text{const}$, некоторые из не зависящих от угла вкладов $\text{in}_\zeta^{(m)}$ намного больше, чем все части, зависящие от углов $\text{St}_\zeta^{\text{dep}}$. В то же время для функций Ψ_m^F (C.46) с $F(x) = \text{const}$ и $m \neq 0$ операторы $\text{St}_\zeta^{\text{in}}$ становятся точным нулем [см. уравнение (2.47)], и остаются только вклады $\text{St}_\zeta^{\text{dep},(m)}$.

C.2.2 Вклад в интеграл столкновений от углов $\varphi \rightarrow 0$

В соответствии с формулой (2.51) и формулами Раздела C.1.1, интегрирование по углу θ выражений, содержащих дельта-функцию, при $\varphi \ll \sqrt{\zeta}$ даёт:

$$\int_0^\pi d\theta \delta\left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \frac{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)^2}{2m}\right] H(\varphi, \theta; \check{x}) = \sum_{\pm} \frac{H[\varphi, \theta_{\pm}(\varphi); \check{x}]}{2\varepsilon_F \sqrt{\varphi^2 + \zeta^2 \Delta}}, \quad (\text{C.54})$$

где $H(\varphi, \theta, \check{x})$ – регулярная функция переменных φ, θ и \check{x} .

Подстановка выражений (C.15)-(C.17) в матричных элемент (C.29), учитывающий передачу энергии при столкновений, приводит к следующему результату для квадрата безразмерного матричного элемента $\tilde{M}_{\pm}^2(\varphi, \check{x}) = M^2[\varphi, \theta_{\pm}(\varphi, \check{x}), \check{x}] / (\pi e^2 a_B)^2$:

$$\tilde{M}_{\pm}^2 = 2 \left\{ \frac{1}{|\chi_q + q_0|^2} + \frac{1}{|\chi_w + w_0|^2} - \text{Re} \left[\frac{1}{(\chi_q + q_0)(\chi_w + w_0)^*} \right] \right\}, \quad (\text{C.55})$$

где

$$\chi_q = 1 - \frac{i\epsilon}{\sqrt{v_F^2 q^2 - \epsilon^2}} = 1 - \frac{i\zeta(x_3 - x_1)}{|\theta_{\pm}|}, \quad (\text{C.56})$$

$$\chi_w = 1 - \frac{i\epsilon'}{\sqrt{v_F^2 w^2 - (\epsilon')^2}} = 1 - \frac{i\zeta(x_3 - x_2)}{|\psi_{\pm}|}, \quad (\text{C.57})$$

[здесь были использованы формулы (C.22)] и

$$q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}r_s} \sqrt{\theta_{\pm}^2 + \frac{1}{4}\zeta^2(x_1 - x_3)^2}, \quad (\text{C.58})$$

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2}r_s} \sqrt{\psi_{\pm}^2 + \frac{1}{4}\zeta^2(x_2 - x_3)^2}. \quad (\text{C.59})$$

В силу сингулярного множителя $1/\sqrt{\varphi^2 + \zeta^2\Delta}$ в уравнении (C.54), вклад в интеграл столкновений St от компоненты St_0 , вычисляемый на углах φ из некоторой окрестности $\varphi_{\min} < \varphi < \varphi_{\max}$ угла $\varphi = 0$, может быть много больше, чем вклад от промежуточных углов $\varphi \sim 1$. В силу уравнения (C.16), минимальный угол φ_{\min} равен нулю при $\Delta > 0$ и равен $\zeta\sqrt{-\Delta}$ при $\Delta < 0$. Максимальный угол φ_{\max} зависит от функции распределения Ψ и соотношения между малыми параметрами ζ и r_s . Для того, чтобы использовать формулы (C.15)-(C.17) и (C.55)-(C.59) необходимо выполнение неравенства $\varphi_{\max} \lesssim \sqrt{\zeta}$.

Анализ показывает, что коллинеарные столкновения, $|\varphi| \ll 1$, могут дать один из главных вкладов St_0^{in} в не зависящую от угла St^{in} часть оператора St . Эта часть интеграла столкновений имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{St}_0^{in}[\Psi](x_1, \alpha) &= -\frac{T^2}{\epsilon_F} \frac{1}{8\pi\hbar T} \int \frac{dx_2 dx_3}{f_1 f_2 f_3 f_4} \times \\ &\times \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \zeta^2\Delta}} \sum_{\pm} \tilde{M}_{\pm}^2 [\Psi(x_1, \alpha) + \Psi(x_2, \alpha) - \Psi(x_3, \alpha) - \Psi(x_4, \alpha)], \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

где $f_i = 2 \cosh(x_i/2)$, $i = 1, 2, 3, 4$ и $x_4 = x_1 + x_2 - x_3$. В силу сингулярного характера подынтегрального выражения St_0^{in} (C.60), оно может оказаться независимым от верхнего предела φ_{\max} в главном порядке по параметрам $\zeta \ll 1$ и $r_s \ll 1$. Отсутствие интегрирования по φ функции Ψ в выражении (C.60) соответствует определению (C.51) независящей от угловой переменной части St_0^{in} оператора St .

Из формул (C.55) при умеренно низких температурах, $\zeta \ll r_s \ll \sqrt{\zeta}$, для квадрата матричного элемента при углах $\varphi_{\min} < \varphi \ll r_s$ имеем:

$$\tilde{M}_{\pm}^2 = 2 \left[\frac{1}{|\chi_q|^2} + \frac{1}{|\chi_w|^2} - \text{Re} \left(\frac{1}{\chi_q \chi_w^*} \right) \right], \quad (\text{C.61})$$

При углах $\varphi \sim \zeta$ это выражение как функция угла φ существенно зависит от энергетической переменной \check{x} , при этом оказывается справедливой оценка:

$$\tilde{M}_{\pm}^2 \sim 1. \quad (\text{C.62})$$

При углах $\zeta \ll \varphi \ll r_s$ одно из слагаемых, $2/|\chi_q|^2$ или $2/|\chi_w|^2$, (в зависимости от знака \pm) доминирует в матричном элементе (C.61). При этом матричный элемент в главном порядке по r_s и ζ принимает значения:

$$\tilde{M}_+^2 = 2, \quad \tilde{M}_-^2 = 2. \quad (\text{C.63})$$

При больших углах, $r_s \ll \varphi \ll \sqrt{\zeta}$ матричный элемент \tilde{M}_{\pm}^2 определяется по общей формуле (C.55). Вычисления в этом диапазоне приводят к асимптотике:

$$\tilde{M}_{\pm}^2 \sim r_s^2/\varphi^2. \quad (\text{C.64})$$

Используя эти оценки \tilde{M}_{\pm}^2 , можно вычислить интеграл по $d\varphi$ в слагаемом St_0^{in} :

$$I_0(\check{x}) = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi \tilde{M}_{\pm}^2}{\sqrt{\varphi^2 + \zeta^2 \Delta}} \approx \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi \tilde{M}_{\pm}^2}{\sqrt{\varphi^2 + \zeta^2 \Delta}}. \quad (\text{C.65})$$

Положив $\varphi_{\min} = \zeta$ и $\varphi_{\max} = r_s$ [ввиду формулы $\varphi_{\min} = \zeta\sqrt{-\Delta}$ или $\varphi_{\min} = 0$ и быстрого падения функции $\tilde{M}_{\pm}^2(\varphi)$ при $\varphi \gg r_s$, см. уравнение (C.64)] и учитывая, что $\Delta \sim 1$ при $x_i \sim 1$, получаем:

$$I_0 \approx 2 \int_{\zeta}^{r_s} \frac{d\varphi}{\varphi} = 2 \ln(r_s/\zeta). \quad (\text{C.66})$$

В пределе очень низких температур $\sqrt{\zeta} \ll r_s$, результат (C.63) для матричного элемента \tilde{M}_{\pm}^2 остается справедливым во всём диапазоне углов, $0 < \varphi \ll \sqrt{\zeta}$, для которого были получены уравнения (C.15)-(C.17) и (C.55)-(C.59). При больших углах, $\varphi \gtrsim \sqrt{\zeta}$, матричный элемент вычисляется по общим формулам (C.6), (C.8), (C.20), (C.21) и (C.29). Такой расчёт приводит к формуле (C.62) для \tilde{M}_{\pm}^2 в интервале $\sqrt{\zeta} \ll \varphi \ll r_s$ и уравнение (C.64) в интервале $\varphi \gtrsim r_s$. Эти оценки аналогичны оценкам для матричного элемента \tilde{M}_{\pm}^2 в случае умеренно низких температур, $\zeta \ll r_s \ll \sqrt{\zeta}$, с точностью до замены формулы (C.63) на оценку (C.62). Поэтому в случае $\sqrt{\zeta} \ll r_s$ приходим снова к результату (C.66) для интеграла I_0 (C.65), при этом знак “ \approx ” заменяется на знак “ \sim ”.

В случае не очень низких температур, $\zeta^{3/2} \ll r_s \ll \zeta$, уравнение (C.55) приводит к следующей оценке матричного элемента:

$$\tilde{M}_{\pm}^2 \sim r_s^2/\zeta^2. \quad (\text{C.67})$$

при углах $\zeta \lesssim \varphi \ll \zeta^2/r_s$ и к оценке

$$\tilde{M}_{\pm}^2 \sim \zeta^2/\varphi^2. \quad (\text{C.68})$$

при углах $\zeta^2/r_s \lesssim \varphi \ll \sqrt{\zeta}$. Отметим, что величина параметра взаимодействия r_s ограничивается снизу, $r_s \gg \zeta^{3/2}$, для того, что бы было выполнено неравенство $\zeta^2/r_s \ll \sqrt{\zeta}$, позволяющее для углов $\zeta^2/r_s \lesssim \varphi \ll \sqrt{\zeta}$ использовать уравнения (C.15)-(C.17) и (C.55)-(C.59) при оценке величины \tilde{M}_{\pm}^2 .

Формулы (C.67) и (C.68) приводят к оценке $\varphi_{\max} \sim \zeta^2/r_s$ и к такому результату для I_0 :

$$I_0 \sim \frac{r_s^2}{\zeta^2} \int_{\zeta}^{\zeta^2/r_s} \frac{d\varphi}{\varphi} \approx \frac{r_s^2}{\zeta^2} \ln(\zeta/r_s). \quad (\text{C.69})$$

Интегрирование по одной из энергетических переменных x_2 или x_3 в выражении (C.60) приводит к окончательной формуле для независимой от угла части вклада в St от коллинеарных столкновений:

$$\begin{aligned} \text{St}_0^{in}[\Psi](x_1, \alpha) = & -\frac{T^2}{\varepsilon_F} \frac{I_0}{4\pi\hbar T} \int dx' K_0(x_1, x') \times \\ & \times [\Psi(x_1, \alpha) + \Psi(-x', \alpha) - 2\Psi(x', \alpha)], \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

где интеграл I_0 даётся формулами (C.66) или (C.69), а ядро $K_0(x_1, x')$ – экспоненциально падающая функция при $|x_1|, |x'| \gtrsim 1$, имеющая следующий вид:

$$K_0(x_1, x') = \frac{(x_1 - x')/2}{4 \cosh(x_1/2) \cosh(x'/2) \sinh[(x_1 - x')/2]}. \quad (\text{C.71})$$

В соответствии с определениями (C.51), (C.53) независимой от угла части St_0 , для функций $\Psi_m^F(x, \phi) = F(x) \cos(m\phi)$ (C.46) с множителем $F(x) \neq \text{const}$ получаем:

$$\text{St}_0^{in}[\Psi_m^F](x_1, \alpha) = \cos(m\alpha) \text{St}_0^{in}[F(x)](x_1, 0). \quad (\text{C.72})$$

Для функций $\Psi_m(x, \alpha) = \Psi(\alpha)$, независимых от переменной x , оператор St_0^{in} равен нулю [см. уравнения (C.60) и (C.70)].

С.2.3 Вклад в интеграл столкновений от углов $\varphi \rightarrow \pi$

Для встречных столкновений, отвечающих $\varphi \approx \pi$, взятие интеграла в операторе столкновений St (2.47) по углу рассеяния θ от выражения с дельта-функцией даёт:

$$\int_0^{\pi} d\theta \delta\left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \frac{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)^2}{2m}\right] L(\varphi, \theta, \check{x}) = \sum_{\pm} \frac{L[\pi - \zeta s, \theta_{\pm}(s, \check{x}), \check{x}]}{2\varepsilon_F \zeta \sqrt{s^2 + \Delta}}. \quad (\text{C.73})$$

где $L(\varphi, \theta, \check{x})$ – регулярная функция переменных φ , θ и \check{x} . Величина $\Delta = \Delta(\check{x})$ выражается через введенные в Разделе С.1.1 переменные a и b как: $\Delta = a^2 - b^2$.

Как обсуждалось в Разделах С.1.2 и С.1.3, для вклада St_π в интеграл столкновений St от встречных столкновений с углами $\pi - |\varphi| \ll 1$ зависимость вероятности рассеяния от переданной энергии ϵ несущественна и можно использовать статический матричный элемент M^2 (2.49) с экранированным кулоновским потенциалом $V(q)$ (2.50).

Величина $\cos \theta$, входящая в формулы (С.26) для q и w в матричном элементе M^2 , при углах рассеяния $\theta = \theta_\pm$ и $s \sim 1$ есть величина порядка единицы. Из формулы (С.19) следует, что в интервале $1 \ll s \ll 1/\zeta$ она принимает вид:

$$\cos[\theta_\pm(s, \check{x})] \approx \mp \left[1 - \frac{(a \pm b)^2}{2s^2} \right]. \quad (\text{С.74})$$

Благодаря этим соотношениям для величин $[1 \pm \cos(\theta_\pm)]$, входящих в выражения (С.26) для q и w , в интервале $1 \ll s \ll 1/\zeta$ получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \zeta^2 \ll 1 + \cos(\theta_+) \ll 1, \quad \zeta^2 \ll 1 - \cos(\theta_-) \ll 1, \\ 1 - \cos(\theta_+) \approx 1 + \cos(\theta_-) \approx 2. \end{aligned} \quad (\text{С.75})$$

В связи с этими асимптотиками величины $\zeta^2(x_{1,2} - x_3)^2/4$ в уравнениях (С.26) могут быть опущены, и импульсы q и w приобретают вид: $q = (2\hbar/a_B) q_\pm$ и $w = (2\hbar/a_B) w_\pm$, где

$$\begin{aligned} q_\pm(s, \check{x}) &= \frac{\sqrt{1 - \cos(\theta_\pm)}}{r_s} \approx \frac{\sqrt{2}}{r_s}, \quad \frac{|a - b|}{\sqrt{2}r_s s}, \\ w_\pm(s, \check{x}) &= \frac{\sqrt{1 + \cos(\theta_\pm)}}{\sqrt{2}r_s} \approx \frac{|a + b|}{\sqrt{2}r_s s}, \quad \frac{\sqrt{2}}{r_s}. \end{aligned} \quad (\text{С.76})$$

Напомним, что параметр взаимодействия в ферми-газе мал: $r_s = \sqrt{2}\hbar/(p_F a_B) \ll 1$.

Из уравнений (С.76) получаем следующие соотношения между множителями в прямых и обменных вкладах в матричном элементе (2.49):

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + q_+} \ll \frac{1}{1 + q_-}, \quad \frac{1}{1 + w_-} \ll \frac{1}{1 + w_+}, \\ \frac{1}{(1 + q_-)(1 + w_-)} \ll \frac{1}{(1 + q_-)^2}, \quad \frac{1}{(1 + q_+)(1 + w_+)} \ll \frac{1}{(1 + w_+)^2}. \end{aligned} \quad (\text{С.77})$$

На основе этих неравенств, получаем следующие главные вклады в безразмерный матричный элемент $\tilde{M}_\pm^2(\varphi, \check{x}) = M^2[\varphi, \theta_\pm(\varphi, \check{x}), \check{x}] / (\pi e^2 a_B)^2$ для решений $\theta = \theta_\pm(\varphi, \check{x})$:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_-^2(s, \check{x}) &= \frac{2}{(1 + q_-)^2} = \frac{2}{\left(1 + \frac{|a - b|}{\sqrt{2}r_s s}\right)^2}, \\ \tilde{M}_+^2(s, \check{x}) &= \frac{2}{(1 + w_+)^2} = \frac{2}{\left(1 + \frac{|a + b|}{\sqrt{2}r_s s}\right)^2}. \end{aligned} \quad (\text{С.78})$$

Анализ показывает, что встречные столкновения, для которых $\pi - \varphi \ll 1$, дают существенные вклады как в зависящую St_π^{dep} , так и в независящую St_π^{in} от угла части оператора St . Для их суммы $\text{St}_\pi = \text{St}_\pi^{in} + \text{St}_\pi^{dep}$ в главном порядке по ζ получаем:

$$\begin{aligned} \text{St}_\pi[\Psi](x_1, \alpha) = & -\frac{T^2}{\varepsilon_F} \frac{1}{8\pi\hbar T} \int \frac{dx_2 dx_3}{f_1 f_2 f_3 f_4} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} ds \sum_{\pm} \frac{\tilde{M}_{\pm}^2(s; \check{x})}{\sqrt{s^2 + \Delta}} \times \\ & \times \{ \Psi(x_1, \alpha) + \Psi(x_2, \alpha + \pi) - \Psi[x_3, \alpha + \theta_{\pm}(s)] - \Psi[x_4, \alpha + \pi + \theta_{\pm}(s)] \}, \end{aligned} \quad (\text{C.79})$$

где $f_i = 2 \cosh(x_i/2)$, $i = 1, 2, 3, 4$; $x_4 = x_1 + x_2 - x_3$; нижний предел интегрирования $s_{\min} = s_{\min}(\check{x})$ равен нулю при $\Delta > 0$ и равен $\sqrt{-\Delta}$ при $\Delta < 0$. Из-за сингулярного вида множителя $1/\sqrt{s^2 + \Delta}$ в операторе St_π (C.79), для верхнего предела необходимо выбрать максимальное возможное значение, $s_{\max} = 1/\zeta$ [то есть $\pi - \varphi \sim 1$], до которого остаются справедливыми асимптотические формулы (C.18), (C.19) и (C.78).

Из уравнений (C.78) и (C.79) следует, что при низких температурах, $\zeta \ll r_s$, главный вклад в оператор St_π для функций $\Psi_m^F = F(x) \cos(m\alpha)$ (C.46) с чётными m происходит от углов φ в диапазоне $1 \ll s \ll 1/\zeta$ [то есть $\zeta \ll \pi - |\varphi| \ll 1$].

Таким образом, в уравнении (C.79) необходимо использовать асимптотики по $s \gg 1$ для функций $\theta_{\pm}(s, \check{x})$ (C.19), которым отвечают асимптотикам для косинуса (C.74). Например, для случая $b > a > 0$ имеем:

$$\theta_+(s, \check{x}) = \pi - \frac{a+b}{s}, \quad \theta_-(s, \check{x}) = \frac{b-a}{s}. \quad (\text{C.80})$$

Из этих формул также следует, что существенные встречные столкновения на самом деле являются также малоугловыми: $|\theta_-| \ll 1$ или $|\psi_+| = |\pi - \theta_+| \ll 1$ [см Рис. 2.3(b)].

Замена переменных $x_3 \leftrightarrow x_4$ в слагаемых со знаком “+” в уравнении (C.79) приводит к следующему упрощению оператора St_π на функциях $\Psi_m^F = F(x) \cos(m\alpha)$ (C.46) с чётным номером гармоники m :

$$\begin{aligned} \text{St}_\pi[\Psi_m^F](x_1, \alpha) = & -\cos(m\alpha) \frac{T^2}{\varepsilon_F} \frac{1}{8\pi\hbar T} \int \frac{dx_2 dx_3}{f_1 f_2 f_3 f_4} \int_1^{1/\zeta} \frac{ds}{s} \frac{4}{\left(1 + \frac{|a-b|}{\sqrt{2} r_s s}\right)^2} \times \\ & \times \{ [F(x_1) + F(x_2) - 2F(x_3)] + 2F(x_3) [1 - \cos(m\theta_-)] \}. \end{aligned} \quad (\text{C.81})$$

В этой формуле дополнительно заменен интервал интегрирования с $s_{\min} < s < 1/\zeta$ на $1 < s < 1/\zeta$, что справедливо в главном порядке по ζ благодаря наличию сингулярного множителя $1/\sqrt{s^2 + \Delta} \approx 1/s$ в выражении (C.79).

Из второй строки выражения (C.81) видно, что оператор St_π (C.81) действительно состоит из двух частей: $St_\pi = St_\pi^{in} + St_\pi^{dep}$, первая из которых, St_π^{in} , является интегральным оператором только по переменной x , а вторая часть, St_π^{dep} , действует как на угловую, так и на энергетическую переменные s и x и равна нулю при $m = 0$, в соответствии с определениями (C.51) и (C.52).

Интегрирование по ds (то есть по $d\varphi$) в обеих частях (C.81) может быть выполнено явно. Для амплитуды независимой от угла части St_π^{in} получаем:

$$I_\pi(\check{x}) = \int_1^{1/\zeta} \frac{ds}{s} \frac{r_s^2 s^2}{(r_s s + |a - b|/\sqrt{2})^2}, \quad (C.82)$$

При низких температурах $\zeta \ll r_s$ этот интеграл равен:

$$I_\pi \approx \int_{1/r_s}^{1/\zeta} \frac{ds}{s} = \ln(r_s/\zeta). \quad (C.83)$$

Для зависящей от угла части St_π^{dep} оператора (C.81) амплитуда имеет вид:

$$I_s(\check{x}) = \int_1^{1/\zeta} \frac{ds}{s} \frac{r_s^2 (a - b)^2}{(r_s s + |a - b|/\sqrt{2})^2}, \quad (C.84)$$

Для случаев как низких, так и промежуточных и умеренных температур, $\zeta \ll r_s$, $\zeta \gg r_s$ и $\zeta \sim r_s$, результат вычисления этого интеграла может быть представлен в виде:

$$I_s = 2r_s^2 \ln\left(\frac{1}{\zeta + r_s}\right). \quad (C.85)$$

Из подынтегрального выражения в (C.84) видно, что при низких температурах, $\zeta \ll r_s$, главный вклад в I_s происходит от подгруппы встречных столкновений с углами $\zeta \ll \pi - \varphi \ll \zeta/r_s$ [см. вставку на Рис. 2.3(b)], а в противоположном случае $\zeta \gg r_s$ все встречные столкновения, $\zeta \ll \pi - \varphi \ll 1$, определяют величину I_s .

После подстановки выражений (C.80), (C.82) и (C.85) в уравнение (C.81) и интегрирования по одной из энергетических переменных x_2 или x_3 , оператор St_π принимает вид:

$$St_\pi[\Psi_m^F](x_1, \alpha) = -\cos(m\alpha) \frac{T^2}{\varepsilon_F} \frac{1}{2\pi\hbar T} \int dx' K_0(x_1, x') \times \\ \times \{ I_\pi [F(x_1) + F(-x') - 2F(x')] + I_s m^2 F(x') \}. \quad (C.86)$$

где ядро $K_0(x_1, x')$ даётся той же формулой (C.71), что для вклада от коллинеарных столкновений St_0 (C.70).

Для решения кинетического уравнения является важным то, что зависящая от угловой переменной часть St_π^{dep} оператора St_π (C.86), пропорциональная $I_s \ll 1$, оказывается значительно меньшей, чем независимая от угла часть St_π^{in} , содержащая множитель $I_\pi \gg 1$.

При очень слабом межчастичном взаимодействии, соответствующем умеренно низким температурам, $r_s \ll \zeta$, анализ оператора St_π (C.79) на функциях Ψ_m^F снова позволяет разделить в его независимую от угла и зависящую от угла части. Вторая часть, как и при $r_s \gg \zeta$, обусловлена встречными столкновениями, для которых $1 \ll s \ll 1/\zeta$ и выражается последним слагаемым в фигурных скобках в формуле (C.86) с тем же множителем I_s (C.85). Не зависящая от угла часть St_π , однако, при $r_s \ll \zeta$ обусловлена не встречными столкновениями с углами $\pi - \varphi \ll 1$, а столкновениями с электронами с промежуточными углами, $\varphi \sim 1$ [это видно из расходимости интеграла (C.82) в пределе $r_s \ll \zeta$]. Таким образом, асимптотика по малой разности $\pi - \varphi \ll 1$ для не зависящей от угла части оператора St_π становится неприменимой.

Уравнение (C.86) теперь дает только оценку для не зависящей от углов части St_1^{in} оператора St от углов $\varphi \sim 1$. Таким образом, множитель I_π (C.82) теперь фактически относится ко вкладу St_1^{in} от углов $\varphi \sim 1$ (то есть $I_\pi \rightarrow I_1$). Интегрируя в (C.82) по s от 1 до $1/\zeta$, получаем:

$$I_\pi \sim I_1 \sim r_s^2/\zeta^2, \quad r_s \ll \zeta. \quad (C.87)$$

Такая оценка отвечает значениям матричного элемента: $M_\pm^2 \sim r_s^2/\zeta^2$, и углам рассеяния $\theta \sim \zeta$ и $\psi \sim \zeta$ при углах налетающего электрона $\varphi \sim 1$ [см. уравнения (C.10)].

Из сравнения формул (C.69) и (C.87) видно, что вклад от встречных столкновений St_π^{in} (C.86) в не зависящую от угла часть оператора St много меньше, чем вклад от коллинеарных столкновений St_0^{in} (C.70) в рассматриваемом режиме, $r_s \ll \zeta \ll 1$.

Из окончательного выражения St_π (C.86) можно получить два свойства этого оператора встречных столкновений St_π , действующего на функции Ψ_m^F (C.46) с чётной гармоникой m .

Во-первых, так как независимая от угла часть St_π^{in} оператора St_π много больше зависящей от угла части St_π^{dep} ($I_s \ll I_\pi$), для функций $\Psi_m^F(x, \phi) = F(x) \cos(m\phi)$ (C.46) с нетривиальным энергетическим множителем $F(x) \neq \text{const}$ имеет место соотношение:

$$St_\pi[\Psi_m^F](x_1, \alpha) \approx \cos(m\alpha) St_\pi^{in}[F(x)](x_1, 0). \quad (C.88)$$

Во-вторых, первое слагаемое в фигурных скобках в St_π (C.86), являющееся независимой от угла частью St_π^{in} , оказывается равным нулю для функций $\Psi_m^F(x, \phi) = F(x) \cos(m\phi)$ (C.46), у которых отсутствует зависимость от энергии, $F(x) \equiv \text{const}$.

C.2.4 Вклад в интеграл столкновений от углов $\varphi \sim 1$ и относительные роли вкладов от углов $\varphi \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \pi$ и $\varphi \sim 1$

Оценим вклад St_1 в интеграл столкновений St от промежуточных углов, $\varphi \sim 1$.

В силу асимптотик (C.10) для углов рассеяния безразмерный матричный элемент, вычисляемый по формуле (C.29), для промежуточных φ оценивается как:

$$\tilde{M}_{\pm}^2 \sim 1 \quad (\text{C.89})$$

при низких температурах, $\zeta \ll r_s$, и как

$$\tilde{M}_{\pm}^2 \sim r_s^2 / \zeta^2 \quad (\text{C.90})$$

при умеренных температурах $\zeta \gg r_s$.

Множитель (2.51) от энергетической дельта-функции оценивается следующим образом:

$$\int d\theta \delta[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4(\varphi, \theta, \varepsilon)] \sim \frac{1}{\varepsilon_F} \quad (\text{C.91})$$

[сравните это выражение с формулами (C.54) и (C.73)]. Как обсуждалось в Разделе C.1.3, множитель S (C.38) для функций $\Psi_m^F(x, \phi) = F(x) \cos(m\phi)$ (C.46), которые существенно зависят от энергии (и имеют типичную величину порядка единицы), оценивается как единица [см. уравнение (C.47)]. Для функций вида $\Psi_m = \cos(m\varphi)$ без зависимости множителя F от энергии величина выражения S после интегрирования по энергетическим переменным x_i оценивается как ζ^2 [см. уравнения (C.42) и (C.43)].

В силу этих оценок и в виду того, что длина интервала промежуточных углов, $\varphi \sim 1$, примерно равна π , вклад St_1 в интеграл столкновений St для функций распределения $\Psi_m^F = F(x) \cos(m\varphi)$ с нетривиальной зависимостью от энергии $F(x) \neq \text{const}$ оценивается как :

$$\text{St}_1[\Psi_m^F] \approx \text{St}_1^{in}[\Psi_m^F] \sim \frac{T^2}{\varepsilon_F} \frac{1}{\hbar T} \begin{cases} 1, & \zeta \ll r_s \\ r_s^2 / \zeta^2, & \zeta \gg r_s \end{cases}. \quad (\text{C.92})$$

Для угловых гармоник $\Psi_m = \cos(m\varphi)$, а также для зависящей от угла части $\text{St}^{dep.(m)}$ оператора St на функциях $\Psi_m^F = F(x) \cos(m\varphi)$ получаем:

$$\text{St}_1[\Psi_m] \sim \text{St}_1^{dep.(m)}[F] \sim \frac{T^2}{\varepsilon_F} \frac{1}{\hbar T} \begin{cases} \zeta^2, & \zeta \ll r_s \\ r_s^2, & \zeta \gg r_s \end{cases}. \quad (\text{C.93})$$

Анализ, основанный на формулах (C.92), (C.93) и на результатах Разделов C.2.2 и C.2.3 показывает, что при низких температурах $\zeta \ll r_s$, для функций $\Psi = \Psi_m^F$ (C.46) с $F(x) \neq \text{const}$ коллинеарные и встречные столкновения дают два главных вклада St_0^{in} и St_π^{in} в независящую от угла часть оператора St . Эти вклады даются формулами (C.70), (C.66) и (C.86), (C.83). Зависящая от угла часть оператора St для Ψ_m^F с чётным номером гармоники m и произвольной функцией $F(x)$ [в частности, $F(x) = \cos nt$] определяется преимущественно встречными столкновениями, $\pi - |\varphi| \ll 1$. Этот вклад St_π^{dep} даётся формулами (C.86) и (C.85).

При умеренно низких температурах, $r_s \ll \zeta$, коллинеарные столкновения дают основной вклад в независящую от угла часть оператора $\text{St}[\Psi]$ для функций распределения $\Psi = \Psi_m^F$ с нетривиальным множителем $F(x) \neq \text{const}$. Такой вклад St_0^{in} описывается уравнениями (С.70) и (С.69). Зависящая от угла часть оператора $\text{St}[\Psi_m^F]$ для чётных номеров гармоник m и произвольной $F(x)$ снова определяется преимущественно встречными столкновениями. Соответствующий оператор St_π^{dep} даётся формулами (С.86) и (С.85)]. Вклад встречных столкновений в независящую от угла часть St становится несущественным [сравните (С.87) и (С.92)].

Относительные величины зависящих от угла вкладов в оператор St для функций $\Psi = \Psi_m^F$, пропорциональных нечётным гармоникам m , будут изучены отдельно в Разделе С.4.3.

С.3 Составление и анализ кинетического уравнения

С.3.1 Кинетическое уравнение для задач гидродинамического транспорта

Как хорошо известно, при описании слабонервновесного транспорта в двумерном электронном газе функция распределения электронов имеет вид:

$$f_{\mathbf{p}} = f_F(\varepsilon) + \delta f_{\mathbf{p}}, \quad (\text{С.94})$$

где возмущенная часть записывается в виде $\delta f_{\mathbf{p}} = -f'_F(\varepsilon)\Psi(\varepsilon, \alpha)$. Кинетическое уравнение в присутствии внешнего электрического поля $\mathbf{E}_{ext}(t)$ и магнитного поля $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, перпендикулярного слою двумерных электронов, имеет вид:

$$-f'_F(\varepsilon) \left[\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} + \omega_c \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} \right] = \text{St}[\Psi], \quad (\text{С.95})$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$, $\omega_c = |e|B/(mc)$ – циклотронная частота, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ – электрическое поле, состоящее из $\mathbf{E}_{ext}(t)$ и внутреннего поля $\mathbf{E}_{int}(\mathbf{r}, t)$, связанного с возмущением плотности заряда.

Выделяются два типа транспортных режимов, которые описываются уравнением (С.95).

Во-первых, если циклотронная частота ω изменения функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ является медленной по сравнению с типичными значениями оператора St [то есть, его собственными значениями, существенными для рассматриваемой задачи], а также характерный волновой вектор q функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ мал по сравнению с St/v_F , реализуется истинный гидродинамический режим. В этом случае функция Ψ состоит из двух частей:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1, \quad (\text{С.96})$$

где Ψ_0 – локально равновесное распределение, являющееся поправкой к функции Ферми за счёт медленно меняющихся параметров, μ , T и/или гидродинамической скорости \mathbf{V} , а $\Psi_1 \ll \Psi_0$

– неравновесная часть, вид которой зависит от рассматриваемой задачи. Часть Ψ_1 описывает диссипацию и для каждой задачи имеет определённую зависимость от α и ε . Кинетическое уравнение (С.95) приводит к двум макроскопическим уравнениям. Первое – это уравнение типа закона Фурье, дающее линейную связь между градиентами μ , T и \mathbf{V} , определяющими функцию Ψ_0 , и величинами потоков, описываемых неравновесной частью Ψ_1 (примерами потоков являются тепловой поток \mathbf{q} и тензор касательных напряжений σ_{ik}). Второе уравнение – это уравнение переноса, определяющие медленную эволюцию μ , T или \mathbf{V} и содержащие величины потоков \mathbf{q} или σ_{ik} .

Первое уравнение, связывающее градиенты величин и потоки, получается из неравновесной части уравнения (С.95). Например, в стационарном режиме при отсутствии магнитного поля в нём нужно оставить следующие слагаемые:

$$-f'_F(\varepsilon) \mathbf{v}_\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} = \text{St}[\Psi] . \quad (\text{C.97})$$

В левой части этого уравнения следует учитывать только локально равновесную часть, так как $\Psi_0 \gg \Psi_1$, а в правой части – только неравновесную часть, Ψ_1 , так как интеграл столкновений сохраняет любое локально равновесное распределение: $\text{St}[\Psi_0] = 0$. Таким образом, чтобы найти кинетические коэффициенты, связывающие градиенты и потоки, необходимо решить, неоднородное интегральное уравнение (С.97) для Ψ_1 . Учёт зависящих от времени и магнитных полей слагаемых $\partial \Psi / \partial t$ и $\omega_c \partial \Psi / \partial \alpha$ в уравнении (С.97) приводит к временной дисперсии кинетических коэффициентов и их зависимости от магнитного поля. Временная дисперсия является слабой в рассматриваемом режиме $\omega \ll \text{St}$.

Одним из таких режимов является низкочастотный гидродинамический транспорт. В нём неоднородность скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ приводит к диффузии импульса. Кинетическим коэффициентом в этой задаче является сдвиговая вязкость η , определяемая как коэффициент линейной связи между тензором сдвиговых напряжений:

$$\sigma_{ik}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{2\pi^2 \hbar^2} f'_F(\varepsilon) \Psi(\varepsilon, \alpha) p_i \mathbf{v}_{\mathbf{p}k} , \quad (\text{C.98})$$

и градиентами скорости, $\partial V_i / \partial x_k$:

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) . \quad (\text{C.99})$$

Формулы (С.98) и (С.99) записаны для случая несжимаемого течения, в котором $\text{div } \mathbf{V} = 0$. Возмущённая часть Ψ (С.96) функции распределения в этой задаче имеет вид:

$$\Psi(\varepsilon, \alpha) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{p} + \frac{mv_F^2}{4} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) F_{ik}(x, \alpha) , \quad (\text{C.100})$$

где $x = (\varepsilon - \mu)/T$, первое слагаемое $\Psi_0 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{p}$ описывает локально неоднородное течение, а функции $F_{ik}(x, \alpha)$ в неравновесной части Ψ_1 пропорциональны вторым гармоникам по углу α :

$$\left. \begin{array}{l} F_{xx}(x, \alpha) \\ F_{yy}(x, \alpha) \\ F_{xy}(x, \alpha) \end{array} \right\} = F(x) \times \begin{cases} \cos(2\alpha) \\ -\cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{cases} . \quad (\text{C.101})$$

Функция $F(x)$ в этих формулах описывает распределение электронов по энергии в неравновесной части функции распределения в вязком течении. Из уравнения (C.97) для функции $F(x)$ получаем замкнутое уравнение:

$$\text{St}[F(x) \cos(2\phi)](\varepsilon_1, \alpha) = -f'_F(\varepsilon_1) \cos(2\alpha) . \quad (\text{C.102})$$

Так как правая часть этого уравнения и ядро St являются чётными относительно замены $(\varepsilon_1 - \mu) \rightarrow -(\varepsilon_1 - \mu)$ и $(x_1, x') \rightarrow (-x_1, -x')$ [см. уравнения (C.70) и (C.86)], функция $F(x)$, получаемая из решения уравнения (C.102), должна также быть чётной относительно замены $x \rightarrow -x$.

Ниже в этом Приложении строятся решения уравнения (C.102). С помощью найденной $F(x)$ рассчитывается время релаксации сдвиговых напряжений $\tau_{ee,2}$, определяемое формулой:

$$\eta = \frac{1}{4} m n_0 v_F^2 \tau_{ee,2} . \quad (\text{C.103})$$

Из уравнений (C.98)-(C.100) следует явная формула для такого времени релаксации $\tau_{ee,2}$:

$$\tau_{ee,2} = \int dx f'_F(x) F(x) . \quad (\text{C.104})$$

Во-вторых, если характерный волновой вектор q функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ является малым по сравнению с характерной величиной St/v_F или с характерными величинами ω/v_F и ω_c/v_F , но при этом частоты ω или ω_c не являются малыми по сравнению с St :

$$\omega, \omega_c \gtrsim \text{St} , \quad (\text{C.105})$$

то реализуется транспортный режим, похожий на гидродинамический, но в котором неоднородная скорость жидкости $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ не отвечает локально равновесной части возмущенного распределения Ψ . Теперь форма функции Ψ контролируется неравенствами $v_F q \ll \omega, \omega_c$ или $v_F q \ll \text{St}$, определяющими соотношения между амплитудами угловых гармоник Ψ . При этом, однако, может быть справедливо разложение $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$, в котором первое слагаемое (например, $\Psi_0 \sim e^{\pm i\varphi}$ для задач вязкого транспорта) описывает пространственно-неоднородное состояние электронного газа, а Ψ_1 описывает диссипативные процессы. Следующие из уравнения (C.97) кинетические соотношения типа (C.99) между неравновесными потоками, пропорциональными Ψ_1 , и градиентами величин, определяющими Ψ_0 , остаются справедливыми, но становятся нелокальными во времени.

Примером такого “быстрого” гидродинамического режима является высокочастотный вязкий транспорт в магнитном поле. Связь между тензором сдвиговых напряжений $\sigma_{ik}(\mathbf{r}, t)$ и градиентами скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ приведена в Главе 1. Там было выполнено упрощенное рассмотрение без учёта энергетической зависимости функции $\Psi_1(x, \alpha)$. Ниже в настоящем приложении покажем, что такое рассмотрение оказывается асимптотически точным благодаря свойствам интеграла столкновений, описанным выше в Разделе С.2.

Основываясь на точном виде (С.86) компоненты St_π оператора столкновения St , в следующем подразделе будет показано, что обратный оператор St^{-1} для чётных функций $F(x)$, $F(x) = F(-x)$, оказывается близким к проектору на функции $\Phi_0^0(x) = 1/\cosh(x/2)$. Благодаря этому факту все слагаемые в кинетическом уравнении (С.95) для задач вязкого транспорта имеют приблизительно одинаковую энергетическую зависимость. Иными словами, в этом случае применимо “приближение времени релаксации”, состоящее в замене:

$$St^{-1} \rightarrow -\tau_{ee,2}, \quad (\text{С.106})$$

или, иначе говоря: $St \rightarrow -1/\tau_{ee,2}$.

Представляется также изучить релаксацию различных типов пространственно однородных возмущений. Такие процессы необходимо описывать уравнением (С.95), в котором есть только первое и последнее слагаемые:

$$-f'_F(\varepsilon) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = St[\Psi]. \quad (\text{С.107})$$

Для решения этого уравнения нужно найти “взвешенные” собственные функции Ψ_i и собственные числа λ_i оператора St , определяемые как :

$$\lambda_i [-f'_F(\varepsilon)] \Psi_i = St[\Psi_i]. \quad (\text{С.108})$$

Общее решение уравнения (С.107) записывается в виде:

$$\Psi(x, \alpha, t) = \sum_i c_i \Psi_i(x, \alpha) e^{\lambda_i t}. \quad (\text{С.109})$$

Применимость приближения (С.106) для кинетического уравнения (С.107) с функциями распределения, пропорциональными гармоникам m :

$$\Psi_m(x, \phi) = \cos(m\phi), \quad (\text{С.110})$$

означает, что оператор St имеет собственные функции (С.110), почти не зависящие от энергетической переменной x [а также аналогичные нечётные функции $\sin(m\phi)$]. Соответствующие собственные числа $\lambda^{(m)}$, $\lambda^{(m)} \in \{\lambda_i\}$, являются выделенными: они есть скорости релаксации угловых гармоник (С.110), не содержащих зависящего от энергии множителя $F(x)$.

Из уравнения (С.101) видно, что, если применимо приближение (С.106), функция (С.110) при $m = 2$ есть неравновесная часть функции распределения Ψ (С.100) для задачи о стационарном вязком транспорте. При этом собственное значение $m = 2$ даётся формулой $\lambda^{(2)} = -1/\tau_{ee,2}$, где $\tau_{ee,2}$ – время релаксации касательного напряжения, определённое выше уравнениями (С.103) и (С.104) как параметр в коэффициенте вязкости $\eta = mn_0 v_F^2 \tau_{ee,2}/4$. Таким образом, проблема расчёта низкочастотной вязкости η и вычисления скорости релаксации функции (С.110) при $m = 2$ напрямую связаны.

С.3.2 Математическая структура и метод решения кинетического уравнения

В Разделе С.2 были получены вклады в оператор St от различных типов столкновений. В этом разделе используем полученные свойства этих вкладов для решения кинетического уравнения для задач вязкого переноса и релаксации высших угловых гармоник.

Как говорилось в Разделе С.3.1, неравновесная часть функции распределения для вязкого транспорта Ψ_1 , пропорциональная $F_{xx}(x, \alpha) = F(x) \cos(2\alpha)$ [см. уравнения (С.100) и (С.101)], должна иметь чётный по x энергетический множитель $F(x)$. Для расчёта вязкости необходимо найти функцию $F(x)$. Например, для аналогичной задачи о вязком транспорте в трёхмерных ферми-газе и ферми-жидкости зависимость множителя $F(x)$ от x оказывается существенной и получается в нетривиальной процедуре решения уравнения (С.102) [139, 119].

Как было показано в Разделе С.2 основной вклад в зависящую от угла часть оператора St при низких температурах, $\zeta \ll r_s$ для таких Ψ_1 , вносят встречные столкновения [слагаемое в уравнении (С.86), пропорциональное I_s]. При этом коллинеарные $|\varphi| \ll 1$, и встречные столкновения $\pi - |\varphi| \ll 1$, дают одинаковые вклады в независящую от угла часть St [слагаемые (С.70) и (С.86), пропорциональные I_0 и I_π]. В случае умеренных температур, когда $\zeta \gg r_s$, зависящая от угла часть St снова происходит преимущественно от встречных столкновений, а не зависящая от угла часть St обусловлена в основном коллинеарными столкновениями.

Кинетическое уравнение (С.102) с интегралом столкновений $St = St_0 + St_\pi$ при чётных функциях $F(x)$, $F(-x) = F(x)$, записывается таким образом: $Qf = c$, или, в явном виде:

$$\int Q(x, x') f(x') dx' = c(x), \quad (\text{С.111})$$

где функция $f(x)$ пропорциональна искомой функции $F(x)$:

$$f(x) = \frac{F(x)}{2 \cosh(x/2)}; \quad (\text{С.112})$$

функция $c(x)$ пропорциональна неоднородному слагаемому в уравнении (С.102):

$$c(x) = \frac{1}{2 \cosh(x/2)}; \quad (\text{С.113})$$

ядро оператора Q в случае низких температур, $\zeta \ll r_s$, даётся формулами:

$$Q(x, x') = 2Q_0(x, x') + Q_1(x, x'), \quad (\text{C.114})$$

где первое слагаемое – это независящая от угла часть оператора столкновений:

$$Q_0(x, x') = K(x - x') - \frac{\delta(x - x')}{c(x')} \int K(x' - x'') c(x'') dx'', \quad (\text{C.115})$$

$$K(x) = \frac{T^2}{\varepsilon_F} \frac{I_\pi}{4\pi\hbar} \frac{x/2}{\sinh(x/2)}, \quad (\text{C.116})$$

а второе слагаемое в уравнении (C.114) – зависящая от угла часть:

$$Q_1(x, x') = -\xi K(x - x'), \quad \xi = \xi(m) = m^2 I_s / I_\pi \ll 1. \quad (\text{C.117})$$

Для вязкого транспорта $m = 2$, но дальнейшее рассмотрение справедливо для всех чётных m , для которых $m^2 \ll I_\pi / I_s$. Ядро оператора St_π связано с ядром $Q = 2Q_0 + Q_1$ формулой:

$$\text{St}_\pi(x, x') = [Q_0(x, x') + Q_1(x, x')] \frac{c(x)c(x')}{T}. \quad (\text{C.118})$$

Удвоение Q_0 в операторе Q (C.114) происходит за счёт двух одинаковых вкладов от коллинеарных и встречных столкновений в не зависящую от угла часть интеграл столкновений St : $\text{St}^{in} = \text{St}_0^{in} + \text{St}_\pi^{in}$ [см. уравнения (C.70) и (C.86)].

Для случая более высоких температур, $\zeta \gg r_s$, в связи с оценками предыдущего раздела необходимо сделать замену, $2Q_0 \rightarrow Q_0$, в формуле (C.114) для ядра Q . При этом остальные формулы (C.111)-(C.118) остаются справедливыми.

Отметим, что производная функции Ферми связана с функцией $c(x)$ как: $-f'_F(x) = c(x)^2$.

Из уравнения (C.115) видно, что

$$\int Q_0(x, x') c(x') dx' = 0. \quad (\text{C.119})$$

Это означает, что функция $c(x)$ является собственной функцией $\Phi_0^0(x) = c(x)$ оператора Q_0 , отвечающей нулевому собственному числу $\lambda_0^0 = 0$. Заметим, что такая функция $\Phi_0^0(x) = c(x)$ нормирована на единицу:

$$\int c(x)^2 dx = 1. \quad (\text{C.120})$$

В силу неравенства $\xi \ll 1$, оператор Q_1 , действующий на угловую переменную в функции Ψ , является малым возмущением относительно не зависящей от угла части $2Q_0$. Напомним, что это неравенство связано с сингулярным характером электрон-электронных столкновений в двумерном случае, который происходит из-за: (i) множителя Ферми (C.1), (ii) энергетической дельта-функции (2.51), (iii) резкой угловой зависимости потенциала взаимодействия (2.50).

Собственные значения и собственные функции оператора Q ищутся по теории возмущений по слагаемому Q_1 в операторе $Q = 2Q_0 + Q_1$. С помощью анализа оператора Q_0 в представлении Фурье по x можно доказать, что собственные значения λ_i^0 оператора Q_0 дискретны и невырождены, то есть соответствующие собственные функции $\Phi_i^0(x)$ задают одномерные собственные подпространства (см. аналогичные соображения для подобных ядер в двумерной и трёхмерной ферми-жидкостях в работах [119] и [39]). Таким образом, для двумерного ферми-газа для собственных чисел и собственных функций λ_i и $\Phi_i(x)$ оператора Q применима обычная теория возмущений для невырожденного спектра:

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + \Delta\lambda_i, \quad \Delta\lambda_i = \langle \Phi_i^0, Q_1 \Phi_i^0 \rangle, \quad \Phi_i(x) \approx \Phi_i^0(x), \quad (\text{C.121})$$

где $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \int \Phi_1(x) \Phi_2(x) dx$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\{\Phi(x)\}$ вещественных функций $\Phi(x)$.

В частности, для минимального собственного числа λ_0 оператора Q , отвечающего собственному числу $\lambda_0^0 = 0$ оператора Q_0 , имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \langle c, Q_1 c \rangle = \int dx dx' c(x) Q_1(x, x') c(x') = \\ &= \int dx dx' c(x) Q(x, x') c(x') = \int d\varepsilon_1 \text{St}_\pi[F \equiv 1](\varepsilon_1). \end{aligned} \quad (\text{C.122})$$

Решение кинетического уравнения (C.111) может быть записана через базис Φ_i^0 собственных функций оператора Q_0 . Ядро $Q_{inv}(x, x')$ оператора Q^{-1} даётся известной формулой:

$$Q_{inv}(x, x') = \sum_i \frac{\Phi_i(x) \Phi_i(x')}{\lambda_i} \approx \sum_i \frac{\Phi_i^0(x) \Phi_i^0(x')}{\lambda_i^0 + \Delta\lambda_i}. \quad (\text{C.123})$$

Соответственно, решение уравнение (C.111) записывается формулой:

$$f(x) = \sum_i \frac{\Phi_i^0(x)}{\lambda_i^0 + \Delta\lambda_i} \int \Phi_i(x') c(x') dx'. \quad (\text{C.124})$$

В силу обсужденных выше свойств λ_i^0 , в уравнении (C.124) доминирует слагаемое с номером $i = 0$. Поэтому решение $f(x)$ приближённо выражается через собственное число $\lambda_0 = \Delta\lambda_0$ и его собственную функцию $\Phi_0 \approx \Phi_0^0 = c$. Таким образом, из (C.120) и (C.124) получаем:

$$f(x) \approx \frac{c(x)}{\Delta\lambda_0}. \quad (\text{C.125})$$

Для функции $F(x)$ результат (C.125) приобретает вид:

$$F(x) = \frac{1}{\Delta\lambda_0}. \quad (\text{C.126})$$

Поэтому для времени релаксации $\tau_{ee,2}$, в соответствии с формулой (C.104), получаем:

$$\tau_{ee,2} = \frac{-1}{\Delta\lambda_0} = - \left\{ \int d\varepsilon_1 \text{St}_\pi[\cos(2\phi)](\varepsilon_1, 0) \right\}^{-1}. \quad (\text{C.127})$$

Таким образом, особый вид ядра Q [наличие собственной функции $\Phi_0^0(x) = c(x)$, отвечающей нулевому собственному значению $\lambda_0^0 = 0$ главной части $2Q_0$ оператора $Q = 2Q_0 + Q_1$] значительно упрощает решение кинетического уравнения (С.111): его решение (С.126), являющееся асимптотически точным по параметру $\xi \ll 1$, является константой.

Теперь обсудим решение кинетических уравнений (С.95) и (С.97) для других задач, имеющих отношение к гидродинамическому транспорту: вывод уравнения Навье-Стокса для высокочастотного вязкого течения при $\omega, \omega_c \gg 1/\tau_{ee,2}$ и расчёт скорости релаксации угловых гармоник $\Psi_m(\varepsilon, \phi) = \cos(m\phi)$ (С.110) старших порядков, $m > 2$.

Для первой задачи слагаемое $\Psi_1(x, \phi)$ функции распределения Ψ (С.96) пропорционально обоим гармоникам второго порядка $\cos(2\phi)$ и $\sin(2\phi)$ [в системе координат, в которой только компонента $\partial V_x/\partial y$ отлична от нуля]. Оператор Q имеет тот же вид для каждого слагаемого $F(x) \cos(2\phi)$ и $F(x) \sin(2\phi)$, как и в рассмотренном выше стационарном случае, $\omega, \omega_c = 0$. Энергетическая зависимость неоднородного слагаемого в уравнении (С.95), связанного с градиентами $\partial V_i/\partial x_j$, также оказывается чётной:

$$c(x) = c(-x). \quad (\text{С.128})$$

Для получения уравнения Навье-Стокса необходимо применить оператор Q^{-1} , даваемой формулой (С.123), ко всем слагаемым кинетического уравнения (С.95). В результате, все слагаемые преобразованного кинетического уравнения: $Q^{-1}c, \omega Q^{-1}f, \omega_c Q^{-1}\partial f/\partial \alpha$ и $Q^{-1}Qf = f$, - оказываются пропорциональными собственной функции $\Phi_0^0(x) = c(x)$ (F.6), отвечающей нулевому собственному числу $\lambda_0^0 = 0$ оператора Q_0 . В результате энергетическая зависимость решения $f(x)$ будет такой же, $f(x) \propto c(x)$, как и для задачи о стационарных и низкочастотных течениях, $\omega, \omega_c \rightarrow 0$, поэтому оператор St в уравнении (С.95) в главном порядке по $\xi \ll 1$ нужно заменить его минимальным собственным значением $\lambda_0 = -1/\tau_{ee,2}$, согласно “приближению времени релаксации” (С.106). Тем самым обосновывается метод построения высокочастотных уравнений гидродинамики в магнитном поле, использованный в Главе 1.

Построим схему решения второй задачи о релаксации высших угловых гармоник Ψ_m (С.110), $m > 2$. В следующем разделе в рамках этой схемы будет завершён расчёт скоростей релаксации $1/\tau_{ee,m}$ этих функций.

Как отмечалось в прошлом разделе, применимость приближения (С.106) к однородному уравнению (С.107) означает, что оно имеет решение $\Psi_m e^{\lambda^{(m)}t}$, в котором $\Psi_m(x, \alpha) = F_m(x) \cos(m\alpha)$ – функция (С.110), то есть $F_m(x) \approx 1$; а $\lambda^{(m)}$ – собственное число для Ψ_m :

$$\lambda^{(m)} f_m(x) = \int Q^{(m)}(x, x') f_m(x') dx'. \quad (\text{С.129})$$

Здесь введены обозначения $f_m(x) = F_m(x)/[2 \cosh(x/2)]$ и $Q^{(m)}(x, x')$ – ядро (С.114) при чётных m и ядро оператора St (2.47) при нечётных m . Доказательство приближения (С.106) основано на свойствах ядра $Q^{(m)}(x, x')$ задачи (С.129).

Проведённый анализ [для чётных m он приведён выше, а для нечётных является аналогичным и основан на формулах разделов С.1 и С.2] показывает, что оператор $Q^{(m)}$ имеет разложение:

$$Q^{(m)} = Q_0 + Q_1^{(m)}, \quad Q_1^{(m)} \ll Q_0, \quad (\text{С.130})$$

где первое слагаемое Q_0 – независящая от угла часть $Q^{(m)}$, такая же как в уравнении (С.115) для обсужденного выше случая с чётными m , а второе слагаемое $Q_1^{(m)}$ – зависящая от угла малая часть. Обращение оператора $Q^{(m)}$ в уравнении (С.129) с помощью формулы (С.123) приводит к собственной функции $f_m(x) = F_m(x)/[2 \cosh(x/2)]$ оператора $Q^{(m)}$ вида:

$$f_m(x) \approx c(x) = 1/[2 \cosh(x/2)], \quad (\text{С.131})$$

отвечающей минимальному собственному числу $\lambda^{(m)}$ оператора $Q^{(m)}$: $\lambda^{(m)} = \langle c, Q_1^{(m)} c \rangle$. Такие собственные числа определяют времена релаксации $\tau_{ee,m} \equiv -1/\lambda^{(m)}$ чисто угловых функций распределения $\Psi_m(x, \phi) = \cos(m\phi)$ для чётных и нечётных m :

$$\tau_{ee,m} = - \left\{ \int d\varepsilon_1 \text{St}_\zeta[\Psi_m](\varepsilon_1, 0) \right\}^{-1}. \quad (\text{С.132})$$

Здесь St_ζ обозначает вклад в оператор St , который наиболее важен для рассматриваемой гармоники Ψ_m . Для чётных m имеем: $\text{St}_\zeta = \text{St}_\pi$ (см. Раздел С.2). Ниже будет показано, что для нечётных m также доминирует вклад от встречных столкновений, $\text{St}_\zeta = \text{St}_\pi$.

Другие собственные значения $\lambda_i^{(m)}$ оператора $Q^{(m)}$ как для нечётного, так и для чётного номера m , имеют значительно большие величины, пропорциональные типичным матричным элементам оператора Q_0 . Они отвечают за релаксацию неравновесного распределения как по углу, так и по энергии, имеющего вид $\cos(m\alpha) \Phi_i(x)$, где $\Phi_i(x)$ существенно зависит от x . Функции такого вида описывают, например, эффект теплопроводности.

С.4 Времена релаксации при межэлектронных столкновениях

С.4.1 Уходное время за счет электрон-электронных столкновений

Прежде всего, отметим, что распределения $\Psi_j = \sqrt{2m\varepsilon} \cos \phi$, $\Psi_n = 1$ и $\Psi_\varepsilon = \varepsilon - \mu$, описывающих однородный поток электронов, возмущения плотности электронов и плотности энергии, не релаксируют за счёт межчастичных столкновений. Действительно, для таких решений выра-

жение S (С.38), входящее в интеграл столкновений St (2.47), равно нулю. Этот факт отражает сохранение импульса, числа частиц и энергии при межчастичных столкновениях.

Вычислим в этом разделе уходное время за счёт межчастичного рассеяния, определяющее ширину энергетических уровней электронов в ферми-газе. Из общего интеграла столкновений (2.47) следует, что эта величина определяется формулой:

$$\frac{1}{\tau_{ee,q}} = \int \frac{d\varepsilon_1}{T} f_F(\varepsilon_1) \sum_{2,3} W_{1,2 \rightarrow 3,4} f_F(\varepsilon_2) [1 - f_F(\varepsilon_3)][1 - f_F(\varepsilon_4)], \quad (\text{C.133})$$

где вероятность $W_{1,2 \rightarrow 3,4} \equiv W(\varphi, \theta; \varepsilon)$ даётся формулой (2.48).

По-видимому, величина $1/\tau_{ee,q}$ для двумерных вырожденных электронов была впервые определена и рассчитана в работе [138]. Ход расчёта $1/\tau_{ee,q}$ с помощью функций отклика плотность-плотность приведён в работе [78].

Из сравнения уравнения (С.133) с уходными слагаемыми в интегралах столкновений St_0^{in} (С.70) и St_π (С.86), видно, что при низких температурах, $\zeta \ll r_s$, коллинеарные и встречные столкновения вносят одинаковые в главном порядке вклады в скорость релаксации $1/\tau_{ee,q}$: $1/\tau_{ee,q}^0 = 1/\tau_{ee,q}^\pi$ [это связано с равенством $I_0 = 2I_\pi$], а вклад падающих электронов с углами $\varphi \sim 1$ относительно мал. Таким образом, величина $1/\tau_{ee,q}$ вычисляется через ядро $K(x)$ (С.116), описывающее уходные слагаемые в операторах St_0^{in} и St_π^{in} :

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee,q}} = \frac{1}{\tau_{ee,q}^0} + \frac{1}{\tau_{ee,q}^\pi}, \quad \frac{1}{\tau_{ee,q}^{0,\pi}} = \int dx_1 dx' c(x_1) K(x_1 - x') c(x'). \quad (\text{C.134})$$

Для вычисления интеграла по энергетическим переменным x_1 и x' в уравнении (С.134) удобно выразить этот интеграл через четыре переменные x_i , $i = 1, 2, 3, 4$, добавив дельта-функцию энергии $\delta(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$ записав $K(\xi)$ через интеграл от $1/[2 \cosh(x/2)]$. Скорость ухода (С.134) принимает вид:

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee,q}} = 2 \frac{I_\pi I_E}{2\pi} \frac{T^2}{\varepsilon_F}, \quad (\text{C.135})$$

$$I_E = \int \delta(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \prod_{i=1}^4 \frac{dx_i}{2 \cosh(x_i/2)}. \quad (\text{C.136})$$

Используя методы теории функций комплексного переменного, получаем для этого интеграла:

$I_E = 2\pi^2/3$, и в результате:

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee,q}} = \frac{2\pi}{3} \ln(r_s/\zeta) \frac{T^2}{\varepsilon_F}. \quad (\text{C.137})$$

При не очень низких температурах (или очень слабом межчастичном взаимодействии) $\zeta^{3/2} \ll r_s \ll \zeta$, множители I_0 (С.69) и I_π (С.87) в не зависящих от угла частях St_0 и St_π становится сильно зависящими от параметра взаимодействия r_s : $I_0, I_\pi \sim r_s^2$, поэтому скорость

релаксации $1/\tau_{ee,q}$ становится значительно меньше, чем в случае $\zeta \ll r_s$. Из сравнения уравнений (С.69) и (С.87) видно, что основной вклад в $1/\tau_{ee,q}$ теперь вносят почти коллинеарные столкновения, описываемые оператором St_0 . Таким образом, получаем:

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee,q}} = \frac{I_0 I_E T^2}{4\pi \varepsilon_F}. \quad (\text{С.138})$$

Полученная выше формула для I_E и формула (С.69) для I_0 в режиме $\zeta^{3/2} \ll r_s \ll \zeta$ дают:

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee,q}} = \frac{\pi}{3} \frac{r_s^2}{\zeta^2} \ln(\zeta/r_s) \frac{T^2}{\varepsilon_F} = \frac{\pi}{3} r_s^2 \ln(\zeta/r_s) \varepsilon_F. \quad (\text{С.139})$$

Примечательно, что полученное время зависит от температуры только через логарифм.

С.4.2 Релаксация сдвиговых напряжений

В этом разделе будет завершено изучение релаксации сдвиговых напряжений и расчёт вязкости. Будет найден время релаксации $\tau_{ee,2}$, определяющее вязкость в нулевом и ненулевом магнитных полях и равное характерному времени релаксации функции Ψ_2 (см. Раздел С.3.1):

$$\Psi_2(\varepsilon, \alpha) = \cos(2\alpha). \quad (\text{С.140})$$

В Разделах С.2 и С.3 было показано, что главный вклад в скорость релаксации сдвиговых напряжений $1/\tau_{ee,2}$ вносят встречные столкновения электронов с углами $\zeta \ll \pi - |\varphi| \ll 1$. Величина $1/\tau_{ee,2}$ в результате рассчитывается интегрированием по $d\varepsilon_1$ оператора столкновений, вычисленного на функции Ψ_2 (С.140): $St_\pi[\Psi_2](\varepsilon_1, \alpha)$ по переменной ε_1 [см. уравнение (С.127)]. В этом расчёте необходимо применить формулы, полученные в предыдущем Разделе С.4.1 при вычислении уходящего времени. Таким образом, из формул (С.86), (С.127) и (С.136) получаем:

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee,2}} = \frac{2 I_s I_E T^2}{\pi \varepsilon_F}. \quad (\text{С.141})$$

После подстановки интегралов I_s (С.85) и $I_E = 2\pi^2/3$ окончательно получаем:

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee,2}} = \frac{8\pi}{3} \frac{T^2}{\varepsilon_F} r_s^2 \ln\left(\frac{1}{\zeta + r_s}\right). \quad (\text{С.142})$$

При низких температурах, когда $\zeta \ll r_s$, логарифм в уравнении (С.142) принимает вид $\ln(1/r_s)$, что приводит к квадратичной температурной зависимости скорости релаксации: $1/\tau_{ee,2}(T) \sim T^2$. При умеренно низких температурах (очень слабом взаимодействии), когда $r_s \ll \zeta$, температурная зависимость $\tau_{ee,2}$ определяется также и логарифмическим множителем: $1/\tau_{ee,2}(T) \sim T^2 \ln(\varepsilon_F/T)$.

Полученный результат для $1/\tau_{ee,2}$ при низких температурах, $\zeta \ll r_s$, может быть получен с точностью до численного коэффициента из результатов работ [128, 129], где релаксация функций распределения, пропорциональных чётными нечётным гармоникам по ϕ , была изучена

для ферми-газа без учёта передачи энергии при столкновениях и с модельным (не кулоновским) законом взаимодействия между электронами. Для этой цели матричный элемент (2.49) с экранированным кулоновским потенциалом (2.50) необходимо подставить в уравнение (11) работы [128] или в уравнения (37) и (38) работы [129]. В результате получается формула для $1/\tau_{ee,2}$, отличающаяся от выражения (С.142) на численный коэффициент. Заметим, однако, что такой расчёт $1/\tau_{ee,2}$ является неполным и недостаточно обоснованным.

Действительно, во-первых, в работах [128, 129] свойства оператора St не были полностью изучены, в частности, не было доказано, что энергетический фактор $F(\varepsilon)$ в собственной функции Ψ_2 оператора St асимптотически равен константе. Решение интегрального уравнения (С.102) сводится к вычислению усредненного оператора столкновения $\int d\varepsilon_1 St[\cos(2\phi)]$ именно за счёт сингулярного характера собственной задачи для оператора St : наличие собственного числа $\lambda^{(2)} = -1/\tau_{ee,2}$ отвечает собственной функции $F(x)\cos(2\alpha)$, у которой с $F(x) \approx 1$, при этом $\lambda^{(2)}$ намного меньше по модулю, чем другие собственные значения $\lambda_i^{(2)}$ отвечающие функциям вида $F_i(x)\cos(2\alpha)$, у которых $F_i(x) \neq 1$. Именно эти утверждения позволяют использовать “приближение времени релаксации” (С.106) для всех задач вязкого транспорта и соответствующую формулу для $\tau_{ee,2}$ (С.127).

Во-вторых, пренебрежение в работе [129] передачей энергии частицы в законе сохранения импульса, определяющим вид энергетической дельта-функции (2.51), не позволяет использовать регуляризацию операторов St_0 (С.60) и St_π (С.79) в пределах $\varphi \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow \pi$ при вычислении скоростей релаксации чётных гармоник [эта регуляризация определяется множителями $1/\sqrt{\varphi^2 + \zeta^2\Delta(\check{x})}$ и $1/\sqrt{s^2 + \Delta(\check{x})}$]. Такая регуляризация имеет решающее значение для расчёта $1/\tau_{ee,2}$ при не очень низких температурах, $r_s \sim \zeta$ и $r_s \ll \zeta$ [см. формулу (С.142)].

В работе [39] была изучена релаксация сдвиговых напряжений в сильно неидеальной двумерной ферми-жидкости. Была получена зависимость (2.62) скорости релаксации второй гармоники распределения квазичастиц от температуры. Для рассмотренной в [39] системы параметр межчастичного взаимодействия r_s предполагался малым, $r_s \ll 1$, или умеренно большим, $r_s \sim 1$. Сверху величина r_s ограничена, по крайней мере, значением $r_{s,cr}$, когда происходит вигнеровская кристаллизация двумерных электронов.

В ферми-жидкости ядро интегрального уравнения для энергетической части функции распределения $[F(x)$ во введённых выше обозначениях] очень похоже на ядро $Q = 2Q_0 + Q_1$ уравнения (С.111). Было выполнено подробное сопоставление уравнения (С.111) и аналогичного уравнения работы [39] для ферми-жидкости для предела $r_s \ll 1$. Этот анализ показывает, что результат (С.142) для $\tau_{ee,2}$ следует из итоговой формулы работы [39] и сопоставления выра-

жений для ядер этих уравнений, представленных выше в этом Приложении С и в работе [39]. Такой метод получения $\tau_{ee,2}$ (С.142) является значительно более сложным, чем развитый выше метод, однако он важен для дополнительной проверки результата (С.142), поэтому ниже кратко приводим основные моменты такого вывода формулы (С.142) из результатов работы [39].

Время релаксации сдвиговых напряжений в работе [39] получено в виде ряда [уравнение (23) той работы]. Параметр α в интегральном уравнении, решённой в работе [39], для рассматриваемого предела ферми-газа, $r_s \ll 1$, соответствует параметру:

$$\alpha_N = 2 \left[1 - \frac{8 r_s^2 \ln(1/r_s)}{\ln(1/\zeta)} \right] \quad (\text{С.143})$$

{это следует из сравнения уравнения (С.86) с уравнением (22) работы [39]}. Для таких $\alpha_N \approx 2$ уравнение (23) из статьи [39], вместе с уравнением (С.137) для уходящего времени $\tau_{ee,q}$ (С.137), приводят к времени релаксации сдвиговых напряжений $\tau_{ee,2}$ (С.142).

При больших значениях r_s становятся важными ферми-жидкостные эффекты, и приближение случайных фаз (RPA), в частности, уравнения (2.49) и (2.50) для вероятности рассеяния, оказывается неприменимыми. Вероятность рассеяния $W(\varphi, \theta, \epsilon)$ квазичастиц в сильно неидеальной ферми-жидкости должна быть вычислена с помощью вершинной функции $\Gamma(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ с учётом купероновских вкладов [39, 211]. Верхний предел для параметра r_s , когда рассмотрение в рамках приближения случайных фаз является применимым, может быть получен из сравнения разложения вершинной функции Γ по гармоникам от угла рассеяния θ {см. уравнение (15) работы [39]} и формулу для аналогичного разложения по гармоникам от θ экранированного кулоновского потенциала приближения RPA (2.50).

В рамках такой процедуры, на основе формул работы [39] и формул настоящего Приложения, было показано, что при малых параметрах взаимодействия, $r_s \ll r_{s,0}$, где

$$r_{s,0} \sim \frac{1}{\ln(1/\zeta) \ln[\ln(1/\zeta)]} \quad (\text{С.144})$$

купероновской перенормировкой вероятности рассеяния можно пренебречь и нужно использовать потенциал (2.50).

При $r_s \gtrsim 1$ оказывается важна купероновская перенормировка многих угловых гармоник в вероятности рассеяния W . Вероятность рассеяния с такой перенормировкой имеет вид [39]:

$$W \sim \frac{1}{\ln^2(1/|\varphi - \pi|)} \quad (\text{С.145})$$

и должна использоваться в интеграле столкновений (2.47) вместо вероятности рассеяния для слабо взаимодействующих электронов [формулы (2.48)-(2.50)]. Кинетическое уравнение с вероятностью рассеяния (С.145); формулы (2.54)-(2.58), определяющие вязкость; и формулы (С.18)

и (С.19) для углов рассеяния $\theta_{\pm}(\varphi, \varepsilon)$, $\psi_{\pm}(\varphi, \varepsilon)$ в пределе $\varphi \rightarrow \pi$ (см. Раздел С.1) приводят к результату (2.62) для времени $\tau_{ee,2}$ в ферми-жидкости.

Таким образом, полученный результат (С.142) справедлив в интервале достаточно малых r_s , $r_s \ll r_{s,0}$, где предельное значение $r_{s,0}$, $r_{s,0} \ll 1$, задается формулой (С.144). По-видимому, релаксационные процессы за счёт столкновений квазичастиц в промежуточном интервале r_s :

$$r_{s,0} \ll r_s \ll 1, \quad (\text{С.146})$$

к настоящему времени не изучены. В таком диапазоне r_s , перенормировка вершинной части $\Gamma(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ и соответствующей вероятности рассеяния W за счёт корреляции пар электронов с противоположными импульсами (аналог куперовских пар для потенциала отталкивания) может быть существенна. В этой связи, рассмотрение этого режима, по-видимому, представляет большую трудность и большой интерес. Вероятность рассеяния W в этом режиме должна осуществлять интерполяцию между формулами (2.48)-(2.50) для слабо неидеального ферми-газа и формулой (С.145) для ферми-жидкости.

С.4.3 Релаксация старших гармоник по углу скорости

Для того, чтобы выяснить критерии применимости гидродинамического описания, необходимо знать не только времена релаксации сдвиговых напряжений, но и времена релаксации функций распределения, пропорциональных гармоникам по углу скорости старше второй: $\Psi_m(\varepsilon, \phi) = \cos(m\phi)$ (С.110), $m > 2$. Ниже приведём основные моменты решения этой задачи и результаты для случая очень низких температур, $\zeta \ll r_s$.

В Разделе С.3 было показано, что релаксация чётных гармоник Ψ_m (С.110) с $m \geq 4$ обусловлена, в основном, встречными столкновениями. Соответствующие скорости релаксации $1/\tau_{ee,m}$ вычисляются по формуле (С.132), в которой $St_{\zeta} = St_{\pi}$. Из этой формулы и формулы (С.86) для St_{π} получаем результат:

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee,m}} \sim r_s^2 \ln\left(\frac{1}{r_s}\right) m^2 \frac{T^2}{\varepsilon_F} \quad (\text{С.147})$$

для не слишком больших m , $m \ll 1/r_s$, и результат

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee,m}} \sim r_s^2 \ln(m) \frac{T^2}{\varepsilon_F} \quad (\text{С.148})$$

для больших m , $1/r_s \ll m \ll 1/\zeta$. Формула (С.148) совпадает с результатом работы [129] для $1/\tau_{ee,m}$ для чётных умеренно больших m , $1/r_s \ll m \ll 1/\zeta$. Результат (С.147) в интервале $m \ll 1/r_s$ в работе [129] не был получен из-за использования в ней модельного потенциала

взаимодействия электронов, который не учитывает резкую угловую зависимость матричного элемента $\tilde{M}_{\pm}^2(\varphi, \varepsilon)$, и не учитывает конечное значение величины $\Delta = \Delta(\tilde{x})$ в множителе $1/\sqrt{s^2 + \Delta}$, возникающем в операторе (С.79).

Более сложной задачей является расчёт скоростей релаксации функций распределения, пропорциональных третьей и более высоким нечётным гармоникам. В работах [25, 136, 137] было показано, что релаксация таких возмущений является медленным процессом по сравнению с релаксацией чётных гармоник. В работе [129] было получено, что для нечётных m , $m \geq 3$, интеграл столкновений St (2.47) для электронов с модельным потенциалом взаимодействия имеет собственные функции:

$$\Psi_m^X(x, \varphi) = X_m(x) \cos(m\varphi), \quad (\text{С.149})$$

с нетривиальной зависимостью от энергии у множителя $X_m(x)$. Скорости релаксации $1/\tau_{ee,m}$ функций Ψ_m^X оказываются гораздо меньшими, в меру множителя ζ^2 , чем скорости релаксации чётных гармоник [129]. Этот результат связан с особенностями кинематики столкновений двумерных электронов, связанными с факторами Ферми (С.1) [25, 136, 137].

Для того, чтобы оценить скорости $1/\tau_{ee,m}$ для нечётных m , приведём свойства оператора St и исследуем поведение множителя S для нечётных m (для чётных m свойства S были описаны в Разделе С.1.3).

Во-первых, рассмотрение Раздела С.3.2 показывает, что, в пределе малой величины зависящей от угла части оператора $Q^{(m)}$, энергетическая зависимость соответствующей собственной функции оператора St , пропорциональной нечётной гармонике $m = 2l + 1$ и отвечающей минимальному собственному числу $\lambda^{(m)}$ оператора $Q^{(m)}$, близка к $\Psi_m^F(x, \alpha) = F(x) \cos(m\alpha)$, где $F(x) \approx \text{const}$ [см. уравнение (С.130)]. Таким образом, остается открытым вопрос: насколько наличие энергетической зависимости у функции $X_m(x)$ (С.149), полученной в работе [129] для модельного потенциала взаимодействия электронов, соответствует или противоречит тому факту, что собственная функция Ψ_m^F для случая экранированного кулоновского потенциала [который приводит к (С.130)], имеет коэффициент энергии $F(x)$, близкий к константе.

Во-вторых, анализ, основанный на формуле (С.42) для множителя S (С.38), показывает, что проинтегрированная по x_i величина S для функций Ψ_m^F (С.110) с нечётным номером гармоники $m = 2l + 1$ и $F(x) \approx \text{const}$ оценивается как ζ^2 при углах φ в интервале $\zeta \ll \pi - \varphi \lesssim 1$ [так как слагаемые порядка $\sim \zeta$ в уравнении (С.42) асимметричны относительно замены $x_j \leftrightarrow -x_j$ и поэтому дают нуль при интегрировании по x_i]. Таким образом, вклад $St_{\pi}^{dep}[\Psi_m^F]$ в интеграл столкновений от встречных столкновений, $\varphi \rightarrow \pi$, пропорционален произведению вклада второго порядка по ζ в S , $[S]_2 \sim \zeta^2 a_{ij}$, сингулярному множителю от плотности состояний

$1/\sqrt{s^2 + \Delta}$, и матричному элементу $\tilde{M}_{\pm}^2(\varphi, \check{x})$ статического экранированного кулоновского потенциала. Это приводит к логарифмической расходимости по φ , похожей на содержащуюся в формуле (С.82), с точностью до общего множителя ζ^2 :

$$I_{odd,\pi}(\check{x}) = \int_1^{1/\zeta} \frac{ds}{s} \frac{[S(\varphi, \check{x})]_2}{[1 + |a - b|/(\sqrt{2}r_s s)]^2}. \quad (\text{C.150})$$

В силу оценки $[S]_2 \sim \zeta^2$ при $x_i \sim 1$ [следующей из оценки $a_{ij} \sim 1$] получаем:

$$I_{odd,\pi} \sim \zeta^2 \ln(r_s/\zeta). \quad (\text{C.151})$$

В-третьих, анализ, основанный на уравнениях (С.15)-(С.17), показывает, что в окрестности угла $\varphi = 0$ ($\varphi \ll \sqrt{\zeta}$) множитель S для функций $\Psi_m = \cos(m\varphi)$ становится независимым от φ в главном порядке по φ и принимает вид:

$$S(\varphi, \check{x}) = m^2 \frac{\zeta^2 \Delta(\check{x})}{4}. \quad (\text{C.152})$$

Из вида оператора (2.47) следует, что соответствующий зависящий от угла вклад St_0^{dep} в интеграл столкновений от окрестности точки $\varphi = 0$ становится пропорциональным выражению:

$$\text{St}_0^{dep}[\Psi_m] \sim m^2 \zeta^2 \int \frac{dx_2 dx_3}{f_1 f_2 f_3 f_4} \int_{\zeta}^{r_s} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \zeta^2 \Delta(\check{x})}} \Delta(\check{x}). \quad (\text{C.153})$$

С учётом результата (С.132) скорость релаксации нечетных гармоник $1/\tau_{ee,m}$ выражается через интеграл $\int dx_1 \text{St}^{dep}[\Psi_m]$, где St^{dep} содержит сумму вкладов St_0^{dep} и St_{π}^{dep} , пропорциональных выражениям (С.150) и (С.153). Из-за асимметричности выражения $\Delta(\check{x}) = x_3 x_4 - x_1 x_2$ относительно замены $x_3, x_4 \leftrightarrow x_1, x_2$ интегрирование выражения (С.153) по x_1 даёт нуль [для получения этого удобно, следуя формуле (С.136), ввести множитель $\delta(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) dx_4$].

Таким образом, основной вклад в интеграла $\int dx_1 \text{St}^{dep}[\Psi_m]$ происходит от St_{π}^{dep} и пропорционален множителю (С.151). Этот вклад обусловлен встречными столкновениями, для которых $\zeta \ll \pi - \varphi \ll 1$. Скорость релаксации $1/\tau_{ee,m}$ вычисляется по формулам (С.79), (С.132) и (С.150). При низких температур, $\zeta \ll r_s$, для нечётных номеров гармоник $m = -2l + 1$ в диапазоне $3 \leq m \ll 1/r_s$ окончательный результат приобретает вид:

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee,m}} \sim \zeta^2 \ln(r_s/\zeta) m^2 \frac{T^2}{\varepsilon_F} \propto T^4 \ln\left(\frac{r_s \varepsilon_F}{T}\right). \quad (\text{C.154})$$

Этот результат отличается от полученного в работе [129] результата для $\tau_{ee,m}$ на логарифмический множитель $\ln(r_s/\zeta)$. По-видимому, такое различие связано с тем, что в работе [129] использовался модельный потенциал взаимодействия сталкивающихся электронов, отвечающий отсутствию зависимости матричного элемента рассеяния \tilde{M}_{\pm}^2 от переменных φ и \check{x} , в то время как в проведённом выше расчёте $\tau_{ee,m}$ важна резкая зависимость \tilde{M}_{\pm}^2 от s (то есть, от φ), возникающая благодаря учёту точного вида экранированного кулоновский потенциала (2.50).

Приложение D

Транспорт в реалистичных электрон-дырочных системах

D.1 Симметричные непараболические спектры носителей

Подход для описания магнетотранспорта в электрон-дырочной системе, развитый в Разделах 3.2.2-3.2.4, может быть обобщен на случай двухкомпонентных систем с произвольными непараболическими спектрами носителей $\varepsilon(\mathbf{p})$ и произвольной зависимостью их времён релаксации импульса $\tau(\varepsilon)$ от энергии.

В этом разделе будем рассматривать только случай, когда энергетический спектр и времена релаксации электронов и дырок одинаковы и система находится в точке электронейтральности (плотности электронов и дырок и их распределения по энергиям одинаковы).

Будем также считать, что спектр носителей симметричен относительно поворотов в плоскости \mathbf{p} : $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \varepsilon_p$, $p = |\mathbf{p}|$. Циклотронная частота приобретает вид:

$$\omega_h = -\omega_e = \omega_c, \quad \omega_c(\varepsilon) = e\mathbf{B} v(\varepsilon)/p(\varepsilon), \quad (\text{D.1})$$

где e – абсолютная величина заряда электрона, зависимость скорости носителей $v(\varepsilon)$ и импульса $p(\varepsilon)$ от энергии даётся соотношениями:

$$v(\varepsilon) = \left| \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p} \right|, \quad p = p(\varepsilon), \quad \varepsilon_{p(\varepsilon)} = \varepsilon. \quad (\text{D.2})$$

Подставляя функцию распределения в виде (3.21) в уравнение (3.19) и выделив анизотропную часть, получаем:

$$\mathbf{v} \nabla f_{\alpha}^i + e_{\alpha} \mathbf{E} \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha}^i}{\partial \varepsilon} + \omega_{\alpha}(\varepsilon) \frac{\partial f_{\alpha}^a}{\partial \varphi} = - \frac{f_{\alpha}^a}{\tau(\varepsilon)}, \quad (\text{D.3})$$

где $\alpha = h, e$ для дырок и электронов и $\varphi = \angle(\hat{\mathbf{v}})$ – угол скорости.

В отличие от случая носителей с квадратичным спектрами и не зависящего от энергии времени релаксации τ , интегрирование уравнения (D.3) по импульсу больше не позволит нам получить замкнутую систему уравнений относительно токов \mathbf{j}_{α} . Вместо этого нужно использовать уравнение (D.3), чтобы выразить анизотропную часть функции распределения f_{α}^a через

изотропную f_α^i . Искомое соотношение имеет вид:

$$f_\alpha^a = \sum_{j,k} v_j \tau_{jk,\alpha} \left(-\frac{\partial}{\partial x_k} - e_\alpha E_k \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) f_\alpha^i, \quad (\text{D.4})$$

где $j, = x, y, k = x, y$; v_j и E_k обозначают компоненты вектора скорости и электрического поля.

Компоненты тензора $\tau_{jk,\alpha} = (\hat{\tau}_\alpha)_{jk}$ упорядочены в матрицу:

$$\hat{\tau}_\alpha = \frac{\tau(\varepsilon)}{1 + \omega_c^2(\varepsilon) \tau^2(\varepsilon)} \begin{pmatrix} 1 & \omega_\alpha(\varepsilon) \tau(\varepsilon) \\ -\omega_\alpha(\varepsilon) \tau(\varepsilon) & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.5})$$

Умножая уравнения (D.4) на вектор \mathbf{v} и усредняя по углу скорости $\varphi = \angle(\hat{v})$, для потоков носителей при заданной энергии:

$$\mathbf{j}_\alpha(\varepsilon) = \langle \mathbf{v} f_\alpha^a(\varepsilon, \varphi) \rangle_{\varphi=\angle(\mathbf{v})}, \quad (\text{D.6})$$

получим:

$$\mathbf{j}_\alpha(\varepsilon) = \hat{D}_\alpha^B(\varepsilon) \left(-\nabla - e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) f_\alpha^i, \quad (\text{D.7})$$

где $\hat{D}_\alpha^B(\varepsilon) = v^2 \hat{\tau}_\alpha / 2$ – коэффициент диффузии при заданной энергии. С помощью уравнения (3.28) перепишем выражения (D.7) в виде:

$$\mathbf{j}_\alpha(\varepsilon) = \hat{D}_\alpha^B(\varepsilon) [\nabla \delta \mu_\alpha(\mathbf{r}) - e_\alpha \mathbf{E}] \frac{\partial f_F}{\partial \varepsilon}. \quad (\text{D.8})$$

Умножим это уравнение на плотность состояний, проинтегрируем по энергии и используем формулы (3.29) и (3.30). В результате получим:

$$\mathbf{j}_\alpha = \hat{D}_\alpha^B [-\nabla \delta n_\alpha + e_\alpha \langle 1 \rangle \mathbf{E}], \quad (\text{D.9})$$

где введён тензор диффузии:

$$\hat{D}_{e,h}^B = \frac{\langle \hat{D}_\alpha^B(\varepsilon) \rangle}{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} D_{xx} & \pm D_{xy} \\ \mp D_{xy} & D_{xx} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.10})$$

знаки $+$ и $-$ отвечают соответственно дыркам и электронам и

$$D_{xx} = \frac{1}{\langle 1 \rangle} \left\langle \frac{v^2(\varepsilon)}{2} \frac{\tau(\varepsilon)}{1 + \omega_c^2(\varepsilon) \tau^2(\varepsilon)} \right\rangle, \quad D_{xy} = \frac{1}{\langle 1 \rangle} \left\langle \frac{v^2(\varepsilon)}{2} \frac{\omega_c(\varepsilon) \tau^2(\varepsilon)}{1 + \omega_c^2(\varepsilon) \tau^2(\varepsilon)} \right\rangle. \quad (\text{D.11})$$

Для случая произвольного спектра носителей уравнение (D.9) играет роль уравнения баланса потоков. Уравнение баланса плотностей носителей можно записать в виде:

$$\text{div } \mathbf{j}_\alpha = -\frac{\delta n_e + \delta n_h}{\tau_R}, \quad (\text{D.12})$$

где вводятся усредненные по энергии ε потоки носителей \mathbf{j}_α и возмущения плотности δn_α , а также эффективная скорость рекомбинации $1/\tau_R$. Для того, чтобы строго вывести уравнение (D.12) из кинетического уравнения необходимо задать конкретный механизм рекомбинации, описываемый соответствующими слагаемыми в интеграле столкновений. Такие слагаемые приведут к определённой зависимости скорости рекомбинации от энергии частиц:

$\sum_{\alpha'} \int d\varepsilon' \Gamma_{R, \alpha, \alpha'}(\varepsilon, \varepsilon') \delta n_{\alpha'}(\varepsilon')$, что для квазиравновесного распределения, в котором $\delta n_{\alpha}(\varepsilon) \sim -f'_F(\varepsilon) \delta \mu_{\alpha}$, приведёт к формуле (D.12) [см. подробности в следующем Приложении E].

Чтобы найти распределения токов и концентраций для произвольного симметричного спектра, перепишем уравнение (D.9) в компонентах, воспользовавшись тем, что электрон-дырочная симметрия приводит к $\delta n_h = \delta n_e = \delta \rho / 2$ и $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x$ в точке электронейтральности:

$$\begin{aligned} j_{h,x} &= -j_{e,x} = e D_{xx} E_0 \langle 1 \rangle - \frac{1}{2} D_{xy} \frac{\partial \delta \rho}{\partial y}, \\ j_{h,y} &= j_{e,y} = -e D_{xy} E_0 \langle 1 \rangle - \frac{1}{2} D_{xx} \frac{\partial \delta \rho}{\partial y}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Подставляя вторую из этих формул в уравнение (D.12), получим:

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial y^2} = \frac{4 \delta \rho}{\ell_R^2}, \quad \ell_R = 2 \sqrt{D_{xx} \tau_R}. \quad (\text{D.14})$$

Решение этого уравнения (D.14) с нулевыми граничными условиями $j_{\alpha,y}(\pm W/2) = 0$ даёт:

$$\delta \rho(y) = -e E_0 \ell_R \langle 1 \rangle \frac{D_{xy} \sinh(2y/\ell_R)}{D_{xx} \cosh(W/\ell_R)}. \quad (\text{D.15})$$

Наконец, подставляя этот результат (D.15) в первое из уравнений (D.13) для $j_{\alpha,x}$ и интегрируя по y получим усреднённое значение плотности тока:

$$\bar{J} = 2e^2 E_0 \left(D_{xx} + \frac{D_{xy}^2 \tanh(W/\ell_R)}{D_{xx} W/\ell_R} \right). \quad (\text{D.16})$$

Общий вид кривых магнетосопротивления $R_{\square}(B)$, отвечающих уравнению (D.16), аналогичен таковым для случая носителей с квадратичным спектром и постоянными временами релаксации [см. уравнение (3.38) и Рис. 3.4].

В пределе больших магнитных полей, $B \rightarrow \infty$, из формулы (D.11) получаем:

$$D_{xx} = \frac{1}{(eB)^2} \frac{\langle p^2/2\tau \rangle}{\langle 1 \rangle}, \quad D_{xy} = \frac{1}{eB} \frac{\langle vp/2 \rangle}{\langle 1 \rangle}, \quad \ell_R = \frac{1}{eB} \sqrt{\frac{2\langle p^2/\tau \rangle \tau_R}{\langle 1 \rangle}}. \quad (\text{D.17})$$

Используя эти асимптотики, из формулы для тока (D.16) получаем для усредненного продольного сопротивления длинного образца $R_{\square} = E_0/\bar{J}$:

$$R_{\square}|_{B \rightarrow \infty} = \frac{B}{e} \sqrt{\frac{\langle 1 \rangle \langle p^2/\tau \rangle}{2\tau_R} \frac{\langle 1 \rangle W}{\langle vp \rangle^2}}. \quad (\text{D.18})$$

Таким образом, формирование приграничных слоёв с токами, направленными вдоль образца, за счёт рекомбинации и диффузии носителей приводит к линейному по B сопротивлению и для систем с произвольными зависимостями $\varepsilon(\mathbf{p})$ и $\tau(\varepsilon)$.

В Разделе 3.2 был выполнен анализ экспериментальных данных по магнетотранспорту двухслойного графена. Для объяснения экспериментальных кривых были использованы предсказания теории по эффекту линейного магнетосопротивления в симметричных электрон-дырочных системах с квадратичным спектром, при этом подвижность μ в выражении для длины рекомбинации ℓ_R заменялась на эффективную подвижность $\tilde{\mu}$.

С помощью анализа выражения $D_{xx}(B)$ (D.11) при различных типах зависимостей циклотронной частоты $\omega_c(\varepsilon)$ и времени релаксации $\tau(\varepsilon)$ от энергии было показано, что для широкого класса этих зависимостей коэффициент диффузии D_{xx} (D.11) является похожим по своей зависимости от магнитного поля B на простейшую интерполяционную формулу:

$$D_{xx} = \frac{D}{1 + \langle \omega_c(\varepsilon)\tau(\varepsilon) \rangle^2} = \frac{D}{1 + \langle \mu(\varepsilon) \rangle^2 B^2}, \quad (\text{D.19})$$

содержащую коэффициент диффузии в нулевом магнитном поле $D = \langle v^2(\varepsilon)\tau(\varepsilon) \rangle / (2\langle 1 \rangle)$ и среднее значение произведения $\omega_c(\varepsilon)\tau(\varepsilon) = \mu(\varepsilon)B$. Величина D_{xx} (D.11), однако, оказывается несколько большей, чем выражение (D.19). Таким образом, при расчёте магнетосопротивления $R_{\square}(B)$ зависимость параметров $\omega_c(\varepsilon)$ и $\tau(\varepsilon)$ от энергии может быть грубо учтена с помощью формулы (D.19), в которой средняя подвижность $\langle \mu(\varepsilon) \rangle$ в знаменателе заменена на некоторую эффективную подвижность $\tilde{\mu}$, несколько меньшую, чем $\langle \mu(\varepsilon) \rangle$. Это обосновывает сделанную в Разделе 3.2.5 замену в выражении для длины рекомбинации $\ell_R = \sqrt{D_{xx}\tau_R}$ величины μ на $\tilde{\mu}$.

D.2 Нарушение электронейтральности и симметрии свойств носителей

Теперь рассмотрим двухкомпонентную систему, в которой электрон-дырочная симметрия отсутствует, то есть все параметры носителей: массы m_{α} , времена релаксации импульса τ_{α} и равновесные концентрации $n_{0,\alpha}$, – различны для электронов и дырок. Для простоты ограничимся случаем параболических спектров носителей, $\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) = \Delta/2 + p^2/2m_{\alpha}$ [см. Рис. 3.1(c)]. Равновесные химические потенциалы электронов и дырок $\mu_{0,\alpha}$ могут быть смещены из середины запрещённой зоны, например, путем легирования или приложения напряжения на затворе.

В такой системе операция усреднений $\langle \dots \rangle$, использовавшаяся выше для составления балансовых уравнений, становится различной для электронов и дырок:

$$\langle \dots \rangle_{\alpha} = - \int_{\Delta/2}^{\infty} d\varepsilon \nu_{\alpha}(\varepsilon) \frac{\partial f_{F,\alpha}}{\partial \varepsilon} (\dots), \quad (\text{D.20})$$

где $\nu_{\alpha}(\varepsilon) = \text{const}$ – плотности состояний носителей; $f_{F,\alpha}$ – функции распределения носителей, отвечающие химическим потенциалам $\mu_{0,\alpha}$. Коэффициенты диффузии в отсутствии магнитного поля приобретают вид [в предположении, что $\tau_{\alpha}(\varepsilon) = \text{const}$]:

$$D_{\alpha} = \frac{\langle v^2/2 \rangle_{\alpha} \tau_{\alpha}}{\langle 1 \rangle_{\alpha}}. \quad (\text{D.21})$$

Вдали от точки электронейтральности коэффициенты диффузии для электронов и дырок становятся разными, даже если их массы и скорости рассеяния на примесях одинаковы. А

именно, из уравнения (D.21) для этого частного случая имеем:

$$D_\alpha = \frac{\tau}{m} \left\{ T \left[1 + e^{(\Delta/2 \pm \mu)/T} \right] \ln \left[1 + e^{(\Delta/2 \pm \mu)/T} \right] - \left(\Delta/2 \pm \mu \right) \right\}, \quad (\text{D.22})$$

где верхний знак в $\pm\mu$ соответствует дыркам, $\alpha = h$, а нижний знак соответствует электронам, $\alpha = e$ (ниже будем обозначать равновесный химический потенциал дырок просто как μ). При $\Delta \gg T$, μ формула (D.22) принимает вид: $D_\alpha = (\tau T/m) [1 + (1/2) e^{-(\Delta/2 \pm \mu)/T}]$.

Скорости рекомбинации электронов и дырок в асимметричной системе различны и зависят от равновесных концентраций носителей противоположного типа:

$$\Gamma_e = 2\gamma n_{0,h}, \quad \Gamma_h = 2\gamma n_{0,e}, \quad (\text{D.23})$$

где коэффициент γ является функцией температуры и зависит от конкретной модели электрон-дырочной рекомбинации.

Повторяя шаги, описанные уравнениями (3.23-3.32) для случая полной электрон-дырочной симметрии, приходим к следующим балансовым уравнениям:

$$\begin{aligned} D_\alpha \nabla \delta n_\alpha - e_\alpha \mathbf{E} n_{0,\alpha} \tau_\alpha / m_\alpha - \mathbf{j}_\alpha \times \boldsymbol{\omega}_\alpha \tau_\alpha &= -\mathbf{j}_\alpha, \\ \text{div } \mathbf{j}_\alpha &= -(\Gamma_e \delta n_e + \Gamma_h \delta n_h) / 2, \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

где $m_e \neq m_h$, $\tau_e \neq \tau_h$, $\boldsymbol{\omega}_\alpha = e_\alpha \mathbf{B} / m_\alpha c$ и D_α даются формулой (D.21). Для вывода уравнений (D.24) важно, что для параболического спектра циклотронные частоты носителей ω_α не зависят от химического потенциала.

При отсутствии электрон-дырочной симметрии в образце появляется неоднородное распределение плотности заряда по образцу, что приводит к появлению холловского напряжения и y -компоненты электрического поля \mathbf{E} . В приближении плавного канала (в пределе сильного экранирования электродом затвора) соотношение между электрическим полем и плотностью заряда имеет вид [см. формулу (1.43)]:

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x - \frac{e}{C} \frac{\partial \delta n}{\partial y} \mathbf{e}_y, \quad (\text{D.25})$$

где $\delta n = \delta n_h - \delta n_e$ – величина, пропорциональная плотности заряда, E_0 – внешнее электрическое поле, $C = \epsilon / 4\pi d$ – емкость двумерного слоя на единицу площади, d – расстояние до затвора, ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, окружающей двумерную систему.

Следует отметить, что предел сильного экранирования электродом затвора применим только в том случае, если характерный масштаб распределений потоков и концентрации носителей в направлении y (в первую очередь, длина l_R) много больше, чем расстояние d между плоскостью 2D носителей и затвором.

Ниже выводятся формулы для продольного и холловского сопротивлений двумерной электрон-дырочной системы в прямоугольном образце путём решения балансовых уравнений (D.24) с учётом (D.25) при произвольных соотношениях между параметрами m_α , τ_α , D_α , Γ_α и $n_{0,\alpha}$. Такое общее решение является весьма громоздким, однако оно приводит к понятным результатам, полученным качественно в Разделе 3.2.1: в точке электронейтральности, $n_{0,e} = n_{0,h}$, появляется линейное магнетосопротивление при условии $\ell_0/(\mu B/c) \ll W \ll \ell_0 \mu B/c$ и исчезает при отклонении равновесных концентраций друг от друга, $n_{0,e} \neq n_{0,h}$ (μ - некоторая усреднённая подвижность электронов и дырок). Холловское электрическое поле становится ненулевым как вне точки электронейтральности, так и непосредственно в ней за счёт асимметричности динамики электронов и дырок.

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\omega_\pm &= \frac{\omega_e \tau_e \pm \omega_h \tau_h}{2}, & D_\pm &= \frac{D_e \pm D_h}{2}, \\ \sigma_\pm &= \frac{en_{0,e}\tau_e}{m_e} \pm \frac{en_{0,h}\tau_h}{m_h}, & \gamma_\pm &= \frac{\Gamma_e \pm \Gamma_h}{4}.\end{aligned}\tag{D.26}$$

Запишем балансовые уравнения (D.24) через симметричные и асимметричные компоненты потоков, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_e - \mathbf{j}_h$, $\mathbf{P} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_h$, и возмущений плотности, $\delta n = \delta n_e - \delta n_h$ и $\delta \rho = \delta n_e + \delta n_h$. Уравнение непрерывности $\text{div } \mathbf{j} = 0$ и граничные условия $j_y|_{y=\pm W/2} = 0$ приводят к тому, что y -компонента разности потоков частиц \mathbf{j} , пропорциональная плотности электрического тока, равна нулю. Компоненты потоков j_x , P_x и P_y зависят от координаты вдоль сечения образца:

$$\mathbf{j} = (j(y), 0), \quad \mathbf{P} = (P_x(y), P_y(y)).\tag{D.27}$$

В результате уравнения (D.24) записываются в виде:

$$j = \sigma_+ E_0 + \omega_+ P_y, \quad P_x = \sigma_- E_0 + \omega_- P_y,\tag{D.28}$$

$$(D_+ + \kappa \sigma_+) \frac{\partial \delta n}{\partial y} + D_- \frac{\partial \delta \rho}{\partial y} + \omega_+ P_x + \omega_- j = 0,\tag{D.29}$$

$$(D_- + \kappa \sigma_-) \frac{\partial \delta n}{\partial y} + D_+ \frac{\partial \delta \rho}{\partial y} + \omega_- P_x + \omega_+ j = 0,$$

где введено обозначение $\kappa = e/C$ и использовано уравнение (D.25) для исключения y -компоненты электрического поля $E_y(y)$. Подставляя формулы (D.28) для j и P_x в уравнения (D.29), приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned}D_0^2 \frac{\partial \delta n}{\partial y} + s_0 E_0 + b_0 P_y &= 0, \\ D_0^2 \frac{\partial \delta \rho}{\partial y} + s_1 E_0 + b_1 P_y &= 0,\end{aligned}\tag{D.30}$$

где введены дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}
D_0 &= \sqrt{D_+(D_+ + \kappa\sigma_+) - D_-(D_- + \kappa\sigma_-)}, \\
s_0 &= (\sigma_+\omega_- + \sigma_-\omega_+)D_+ - (\sigma_+\omega_+ + \sigma_-\omega_-)D_-, \\
s_1 &= (\sigma_+\omega_+ + \sigma_-\omega_-)(D_+ + \kappa\sigma_+) - (\sigma_+\omega_- + \sigma_-\omega_+)(D_- + \kappa\sigma_-), \\
b_0 &= 2\omega_+\omega_-D_+ - (1 + \omega_+^2 + \omega_-^2)D_-, \\
b_1 &= (1 + \omega_+^2 + \omega_-^2)(D_+ + \kappa\sigma_+) - 2\omega_+\omega_-(D_- + \kappa\sigma_-).
\end{aligned} \tag{D.31}$$

Из уравнений (D.24) получаем также формулу для $\text{div } \mathbf{P}$, которую перепишем в виде:

$$\delta\rho = -\frac{1}{\gamma_+} \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\gamma_-}{\gamma_+} \delta n. \tag{D.32}$$

Наконец, подставляем $\delta\rho$ из уравнения (D.32) в уравнения (D.30) и исключим из них δn .

Приходим к следующему дифференциальному уравнению на P_y :

$$\frac{\partial^2 P_y}{\partial^2 y} = \frac{4}{\ell_R^2} P_y + \frac{s_0\gamma_- + s_1\gamma_+}{D_0^2} E_0, \tag{D.33}$$

в котором длина рекомбинации ℓ_R имеет вид:

$$\ell_R = \frac{2D_0}{\sqrt{b_0\gamma_- + b_1\gamma_+}}. \tag{D.34}$$

Решение уравнение (D.33) с граничными условиями $P_y(\pm W/2) = 0$ выражается через гиперболический косинус с характерно длиной ℓ_R . Усредненный по y результат решения имеет вид:

$$\overline{P_y} = \left[F\left(\frac{W}{\ell_R}\right) - 1 \right] \frac{s_0\gamma_- + s_1\gamma_+}{b_0\gamma_- + b_1\gamma_+} E_0, \tag{D.35}$$

где $F(x) = \tanh(x)/x$ – та же функция, что в основном тексте. Усреднение по сечению образца определяется обычным образом: $\overline{P_y} = \int_{-W/2}^{W/2} dy P_y(y)/W$. Из соотношения для тока $\overline{J} = -e\overline{j}$, первой из формул (D.28) и формулы (D.35), получаем для среднего удельного сопротивления образца $R_{\square} = E_0/\overline{J}$:

$$R_{\square}^{-1} = e \left\{ \sigma_+ + \omega_+ \left[F\left(\frac{W}{\ell_R}\right) - 1 \right] \frac{s_0\gamma_- + s_1\gamma_+}{b_0\gamma_- + b_1\gamma_+} \right\}. \tag{D.36}$$

Аналогично, усредняя y -компоненту электрического поля, получаем из уравнений (D.25), (D.29) и (D.35) для холловского поля получаем:

$$\overline{E_y} = -\kappa \frac{\overline{\partial \delta n}}{\partial y} = \Xi E_0, \quad \Xi = \frac{\kappa}{D_0^2} \left\{ s_0 + b_0 \left[F\left(\frac{W}{\ell_R}\right) - 1 \right] \frac{s_0\gamma_- + s_1\gamma_+}{b_0\gamma_- + b_1\gamma_+} \right\}. \tag{D.37}$$

Отсюда для усредненного по образцу холловского удельного сопротивления находим:

$$R_{\square}^{\text{Hall}} = \overline{E_y} / \overline{J} = \Xi R_{\square}. \tag{D.38}$$

Упростим выражение для магнетосопротивления $R_{\square}(B)$ в пределе классически сильных магнитных полей, $\omega_{\pm} \gg 1$. Для этого введем дополнительные обозначения для описания поведения величин (D.31) в сильных магнитных полях $\omega_{\pm} \gg 1$. Значения $s_{0,1}$ и $b_{0,1}$ в этом пределе пропорциональны первой и второй степеням магнитного поля, $s_{0,1} = S_{0,1}B$ и $b_{0,1} \rightarrow B_{0,1}B^2$, при этом:

$$\begin{aligned} S_0 &= (\sigma_+\mu_- + \sigma_-\mu_+)D_+ - (\sigma_+\mu_+ + \sigma_-\mu_-)D_-, \\ S_1 &= (\sigma_+\mu_+ + \sigma_-\mu_-)(D_+ + \kappa\sigma_+) - (\sigma_+\mu_- + \sigma_-\mu_+)(D_- + \kappa\sigma_-), \\ B_0 &= 2\mu_+\mu_-D_+ - (\mu_+^2 + \mu_-^2)D_-, \\ B_1 &= (\mu_+^2 + \mu_-^2)(D_+ + \kappa\sigma_+) - 2\mu_+\mu_-(D_- + \kappa\sigma_-). \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

$$\mu_{\pm} = \frac{e}{2c} \left(\frac{\tau_e}{m_e} \pm \frac{\tau_h}{m_h} \right).$$

Из формулы (D.36) получается следующее разложение R_{\square} по степеням $1/B$ в пределе $B \rightarrow \infty$:

$$R_{\square}^{-1} = e \left(\sigma_0 + \frac{M}{B} \right), \quad (\text{D.40})$$

$$\sigma_0 = \sigma_+ - \frac{\mu_+(S_0\gamma_- + S_1\gamma_+)}{B_0\gamma_- + B_1\gamma_+}, \quad M = \frac{2D_0\sigma_+(S_0\gamma_- + S_1\gamma_+)}{W(B_0\gamma_- + B_1\gamma_+)^{3/2}}. \quad (\text{D.41})$$

В точке электронейтральности, $n_{0,e} = n_{0,h} = \varrho_0/2$, имеем $\sigma_{\pm} = \varrho_0\mu_{\pm}/2$, поэтому $S_{0,1} = \varrho_0B_{0,1}/2$. Это приводит к отсутствию слагаемого нулевого порядка по $1/B$ в формуле (D.40), $\sigma_0 = 0$, и к линейному магнетосопротивлению.

Используя соотношение $\Gamma_{h,e} = 2n_{0,e,h}\gamma$, изучим поведение величины σ_0 и отвечающего ей магнетосопротивления в окрестности точки электронейтральности. Для случая одинаковых параметров электронов и дырок, $m_e = m_h$, $D_e = D_h$, $\mu_e = \mu_h$, из уравнений (D.39)-(D.41) следует, что σ_0 пропорциональна квадрату плотности заряда, n_0^2 , в пределе $n_0 \rightarrow 0$ и поэтому:

$$R_{\square}^{-1} = \sigma_+ \left(\xi + \frac{\ell_R}{W} \right), \quad (\text{D.42})$$

где $\xi = n_0^2/\varrho_0^2$. Напротив, для асимметричных характеристик электронов и дырок и сравнимых величин D_{\pm} и $\kappa\sigma_{\pm}$ из (D.39)-(D.41) получаем, что σ_0 обращается в нуль при $n_0 \rightarrow 0$ как $\sim n_0$. Напомним, что для асимметричной электрон-дырочной системы зарядовая нейтральность не приводит к обращению в нуль холловского электрического поля [см. Рис. 3.1(b), 3.3(b) и 3.5(b)].

Приложение Е

Электрон-дырочная система с неоднородной температурой

Е.1 Кинетическое уравнение для носителей, рассеивающихся на фононах

Рассмотрим двумерную проводящую систему, состоящую из носителей заряда двух типов: электронов и дырок. Особый интерес такая система представляет в случае электронейтральности, когда в равновесии концентрации электронов и дырок одинаковы. Дополнительно, будем считать, что энергетический спектр и релаксационные характеристики электронов и дырок также одинаковы. Составим кинетическое уравнение для таких носителей, взаимодействующих с равновесными объёмными акустическими фононами.

Введем следующие обозначения. Заряды электронов и дырок e_α , $\alpha = e, h$, будем записывать через абсолютную величину элементарного заряда $e > 0$: $e_e = -e$, $e_h = e$. Энергетический спектр носителей, $\varepsilon_p^e = \varepsilon_p^h = \varepsilon_p$, считаем изотропным относительно направлений импульса носителей $\mathbf{p} = p (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Абсолютную величину импульса p можно записать как функцию энергии: $p(\varepsilon)$, так что: $\varepsilon_{p(\varepsilon)} = \varepsilon$. Скорость носителей $\mathbf{v}_p = \partial \varepsilon_p / \partial \mathbf{p}$ сонаправлена с импульсом \mathbf{p} и имеет абсолютную величину $v_p = \partial \varepsilon_p / \partial p$, $v(\varepsilon) = v_{p(\varepsilon)}$. Равновесные концентрации электронов и дырок имеют вид:

$$n_0 = \int d\Gamma_{\mathbf{p}} f_F(\varepsilon_p) = \int d\varepsilon \nu(\varepsilon) f_F(\varepsilon), \quad (\text{E.1})$$

где $d\Gamma_{\mathbf{p}} = N_g d^2\mathbf{p} / (2\pi\hbar)^2$, N_g – фактор вырождения, равный 4 для однослойного и двухслойного графена, $\nu(\varepsilon)$ – плотность состояний электронов и дырок, фермиевская функция распределения $f_F(\varepsilon) = 1/[1 + e^{(\varepsilon - \mu_0)/T_0}]$ соответствует равновесным значениям химического потенциала μ_0 и температуры T_0 , одинаковым для электронов и дырок.

Неравновесные функции распределения электронов и дырок $f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ в каждой точке образца могут быть представлены в виде суммы изотропной и анизотропной частей (относительно

направлений \mathbf{p}):

$$f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f_\alpha^i(\varepsilon, \mathbf{r}) + f_\alpha^a(\varepsilon, \varphi, \mathbf{r}). \quad (\text{E.2})$$

Неравновесные поправки к концентрациям и температурам носителей связаны с изотропными частями функций распределения f_α^i ; анизотропные части f_α^a описывают неравновесные потоки частиц, вызванные внешними полями \mathbf{E} и \mathbf{B} .

Будем изучать возмущения системы, которые не нарушают симметрию относительно замены электронов на дырки и изменения знака всех зарядов. Для таких возмущений симметричные части функций распределения электронов и дырок одинаковы: $f_e^i = f_h^i = f^i$. Анизотропные части функций распределения электронов и дырок различны: $f_e^a \neq f_h^a$. Различие f_e^a и f_h^a обусловлено тем, что электрическое поле действует на электроны и дырки в противоположных направлениях. Сосуществование зарядовой нейтральности в каждой точке \mathbf{r} и ненулевого электрического поля, стремящегося разделить в пространстве электроны и дырки, то есть нарушить равенство $f_e^i(\varepsilon, \mathbf{r}) = f_h^i(\varepsilon, \mathbf{r})$, возможно при следующем условии. Электрическое поле должно быть перпендикулярно градиенту от изотропных частей функций распределения $f^i(\varepsilon, \mathbf{r})$ при любых значениях ε и \mathbf{r} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial f^i(\varepsilon, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (\text{E.3})$$

Исследуем линейный отклик, возникающий на внешнее электрическое поле \mathbf{E} . В такой ситуации основная часть функций распределения электронов и дырок f_α есть фермиевская функция f_F , поправка к ней δf^α пропорциональна приложенному полю: $f^\alpha = f_F + \delta f_\alpha$, $\delta f_\alpha \sim E$. Для введённых в (E.2) симметричных и асимметричных частей функций распределения получаем: $f^i = f_F + \delta f^i$, $f_\alpha^a \equiv \delta f_\alpha^a$, $\delta f_\alpha = \delta f^i + \delta f_\alpha^a$.

Рассмотрим систему в режиме, когда характерные времена релаксации удовлетворяют условию:

$$\tau \ll \tau_{ee} \ll \tau_{ph}, \quad (\text{E.4})$$

где τ_{ph} – время термализации носителей за счёт взаимодействия носителей с фононами, τ_{ee} – время термализации носителей за счёт межчастичного взаимодействия, τ – время релаксации анизотропной части f_α^a , определяемое преимущественно рассеянием носителей на беспорядке.

Условие (E.4) приводит к тому, что изотропные части функций распределения электронов и дырок f^i являются локально-равновесной фермиевской функцией:

$$f_{is}(\varepsilon, \mathbf{r}) = \frac{1}{1 + e^{(\varepsilon - \mu(\mathbf{r}))/T(\mathbf{r})}}, \quad (\text{E.5})$$

формирующейся за счёт быстрых межчастичных столкновений. Здесь температура $T(\mathbf{r})$ и химический потенциал $\mu(\mathbf{r})$ отличны от невозмущённых значений T_0 и μ_0 . Более медленные

процессы теплообмена с фононами приводят к релаксации температуры носителей T к температуре решётки T_0 . Пусть возмущения химического потенциала, $\delta\mu(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r}) - \mu_0$, и температуры, $\delta T(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r}) - T_0$, малы по сравнению с величиной $\max(\mu_0, T_0)$. Тогда изотропные части функций распределения в линейном приближении по возмущениям имеют вид: $f^i = f_F + \delta f^i$, где:

$$\delta f^i(\varepsilon, \mathbf{r}) = -f'_F(\varepsilon) \delta\mu(\mathbf{r}) - f'_F(\varepsilon) \frac{\varepsilon - \mu_0}{T_0} \delta T(\mathbf{r}). \quad (\text{E.6})$$

Будем изучать эффекты, связанные только с первыми угловыми гармониками анизотропных частей функций распределения, то есть везде будем предполагать, что $\delta f_\alpha^a(\varepsilon, \varphi) = C^\alpha(\varepsilon) \cos(\varphi) + S^\alpha(\varepsilon) \sin(\varphi)$. Условие (E.4) означает, что релаксация δf_α^a – самая быстрая. Поэтому значения δf_α^a малы в меру величины τ : $\delta f_\alpha^a \sim \tau$, что приводит к соотношению $\delta f_\alpha^a \ll \delta f^i$.

Уравнения Больцмана для функций f_e и f_h имеют вид:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = \text{St}_{ee}^\alpha[f_\alpha, f_{\bar{\alpha}}] + \text{St}_{ph}^\alpha[f_\alpha, f_{\bar{\alpha}}] + \text{St}_{imp}^\alpha[f_\alpha], \quad (\text{E.7})$$

где символ $\bar{\alpha}$ означает h при $\alpha = e$ и e при $\alpha = h$. Силы $\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{r})$ при наличие электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ в плоскости xy и магнитного поля $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$ имеют вид: $\mathbf{F}_\alpha = e_\alpha(E_x - Bv_y/c, E_y + Bv_x/c)$. Интегралы столкновений St_{ee}^α , St_{ph}^α и St_{imp}^α описывают взаимодействие носителей друг с другом, с фононами и с беспорядком. Считаем все интегралы столкновений операторами, линеаризованными по δf_α вблизи $f_{0,\alpha} = f_F$.

Рассеяние на беспорядке является упругим, поэтому интегралы столкновений St_{imp}^α зависят только от функции распределения носителей данного типа f_α . При этом изотропные части функций распределения не релаксирует за счёт взаимодействия с беспорядком, $\text{St}_{imp}^\alpha[f_i] = 0$, а анизотропные части $\delta f_{an}^\alpha(\varepsilon, \varphi)$ при различных энергиях ε релаксирует независимо. В случае, когда δf_α^a содержит только первую гармонику, оператор St_{imp}^α принимает хорошо известный диагональный по ε и φ вид:

$$\text{St}_{imp}^\alpha[\delta f_\alpha^a] = -\frac{\delta f_\alpha^a(\varepsilon, \varphi)}{\tau(\varepsilon)}. \quad (\text{E.8})$$

Межчастичные и электрон-фононные интегралы столкновений $\text{St}_{ee,ph}^\alpha$, во-первых, состоят из слагаемых описывающих процессы без рождения и гибели частиц [слагаемые типа “(1)”. Такие слагаемые для оператора St_{ee}^α учитывают столкновения двух электронов или двух дырок, а для оператора St_{ph}^α – рассеяние электрона или дырки на фононах. Слагаемые типа “(1)” действуют только на функцию распределения данного типа частиц α и сохраняют полное число частиц. Во-вторых, St_{ee}^α и St_{ph}^α содержат вклады от процессов, сопровождающихся рождением и гибелью электрон-дырочных пар [слагаемые типа “(2)”. Для оператора St_{ee}^α это процессы оже-рекомбинации с участием электрон-дырочной пары и дополнительного электрона или дырки;

для оператора St_{ph}^α это процессы фононной рекомбинации с участием электрон-дырочной пары и фонона. Слагаемые типа “(2)” в St_{ee}^α и St_{ph}^α зависят как от функции распределения частиц данного типа α , так и от функции распределения частиц другого типа $\bar{\alpha}$ и не сохраняют концентрации электронов и дырок. Таким образом, имеем:

$$St_{ee,ph}^\alpha [f_\alpha, f_{\bar{\alpha}}] = St_{ee,ph}^{(1)} [f_\alpha] + St_{ee,ph}^{\alpha,(2)} [f_\alpha, f_{\bar{\alpha}}], \quad (E.9)$$

$$\int d\Gamma_{\mathbf{p}} St_{ee,ph}^{(1)} [f_\alpha](\mathbf{p}) = 0. \quad (E.10)$$

Изотропные равновесные части функций распределения f^i вида (E.5) не релаксируют за счёт процессов межчастичных столкновений: $St_{ee}^{(1)} [f^i] = 0$. Заметим, что анизотропные функции распределения вида: $f_\alpha^{a,eq}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f'_F(\varepsilon_p) \mathbf{p} \cdot \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{r})$, также не релаксируют за счёт межчастичных столкновений: $St_{ee}^{(1)} [f_\alpha^{a,eq}] = 0$. Выражения $f_\alpha^{a,eq}$ есть анизотропные части функций распределения, которые являются равновесными в системах отсчёта, движущихся со скоростями \mathbf{V}_α ; они отвечает наличию потоков частиц, но отсутствию потоков тепла. При межчастичных столкновениях сохраняются также импульс и энергия пары сталкивающихся частиц, поэтому для скоростей релаксации суммарных импульса и энергии за счёт межчастичных столкновений имеем:

$$\int d\Gamma_{\mathbf{p}} \mathbf{p} St_{ee}^{(1)} [f_\alpha](\mathbf{p}) = 0, \quad \int d\Gamma_{\mathbf{p}} \varepsilon_p St_{ee}^{(1)} [f_\alpha](\mathbf{p}) = 0. \quad (E.11)$$

При взаимодействии электронов и дырок с фононами в процессах типа “(1)” сохраняется число частиц [см. (E.10)], но происходит релаксация энергии. Поэтому для локально-равновесных изотропных функций распределения вида (E.6) получаем:

$$\int d\Gamma_{\mathbf{p}} \varepsilon_p St_{ph}^{(1)} [\delta f^i](\mathbf{p}) = -L \delta T, \quad (E.12)$$

$$St_{ph}^{(1)} [-f'_F(\varepsilon_{p'}) \delta \mu] = 0, \quad (E.13)$$

где константа $L = L(T_0)$ характеризует скорость теплообмена с фононами и имеет вид:

$$L = \int d\Gamma_{\mathbf{p}} \varepsilon_p St_{ph}^{(1)} \left[f'_F(\varepsilon_{p'}) \frac{\varepsilon_{p'} - \mu_0}{T_0} \right](\mathbf{p}). \quad (E.14)$$

К соотношениям (E.10), (E.12) и (E.13) приводит, например, интеграл столкновений, описывающий взаимодействие двумерных электронов (или дырок) с трехмерными акустическими фононами:

$$St_{ph}^{(1)} [\delta f](\mathbf{p}) = \int d\Gamma_{\mathbf{p}'} M_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \left[-F_-(\varepsilon_p, \varepsilon_{p'}) \delta f(\mathbf{p}) + F_+(\varepsilon_p, \varepsilon_{p'}) \delta f(\mathbf{p}') \right], \quad (E.15)$$

где $M_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = M(\varepsilon_p, \mathbf{p} - \mathbf{p}')$ – вероятность перехода электрона между состояниями \mathbf{p} и \mathbf{p}' с излучением или поглощением фонона, усреднённая по волновому вектору фонона в направлении z ;

$$F_-(\varepsilon, \varepsilon') = N_B(|\varepsilon - \varepsilon'|) + \begin{cases} 1 - f_F(\varepsilon'), & \varepsilon' < \varepsilon \\ f_F(\varepsilon'), & \varepsilon' > \varepsilon \end{cases}; \quad (\text{E.16})$$

$$F_+(\varepsilon, \varepsilon') = N_B(|\varepsilon - \varepsilon'|) + \begin{cases} f_F(\varepsilon), & \varepsilon' < \varepsilon \\ 1 - f_F(\varepsilon), & \varepsilon' > \varepsilon \end{cases}; \quad (\text{E.17})$$

$N_B(E) = 1/[e^{E/T_0} - 1]$ – функция распределения равновесных фононов с температурой T_0 . Свойства ядра $M_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = M(\varepsilon, \Delta\mathbf{p})$ зависят от соотношения между температурой и различными характеристиками двумерных электронов [100].

Релаксация анизотропных частей функций распределения δf_α^a , содержащих только первую угловую гармонику, за счёт межчастичных и электрон-фононных процессов типа “(1)” описывается оператором вида:

$$\sum_{\sigma=ee, ph} \text{St}_\sigma^{(1)}[\delta f_\alpha^a](\varepsilon, \varphi) = \int d\varepsilon' W^{(1)}(\varepsilon, \varepsilon') \delta f_\alpha^a(\varepsilon', \varphi). \quad (\text{E.18})$$

Однако, в силу условия (E.4), этим вкладом в релаксацию δf_α^a можно пренебречь по сравнению с примесным вкладом (E.8).

Слагаемые типа “(2)” межчастичного и электрон-фононного интегралов столкновений, описывающие процессы с рождением и гибелью частиц, представляют собой операторы вида:

$$\sum_{\sigma=ee, ph} \text{St}_\sigma^{\alpha, (2)}[\delta f_\alpha, \delta f_{\bar{\alpha}}](\mathbf{p}) = \int d\Gamma_{\mathbf{p}'} [W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^s \delta f_\alpha(\mathbf{p}') + W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^o \delta f_{\bar{\alpha}}(\mathbf{p}')] , \quad (\text{E.19})$$

где ядра $W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^s$ и $W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^o$, аналогично (E.15), содержат уходные и приходные слагаемые. Оператор (E.19) приводит к релаксации как изотропных, так и анизотропных частей функций распределения $\delta f_\alpha = \delta f^i + \delta f_\alpha^a$. Однако в силу соотношения (E.4) релаксация δf_α^a определяется преимущественно рассеянием на беспорядке. Поэтому в операторе (E.19) будем учитывать только те слагаемые, которые содержат δf^i и приводят к изменению числа частиц в изучаемом состоянии (α, \mathbf{p}) . В операторе $\text{St}_{ph}^{\alpha, (2)}$, например, для таких слагаемых можно вывести выражение:

$$\text{St}_{ph}^{\alpha, (2)}[\delta f^i, \delta f^i](\mathbf{p}) = - \int d\Gamma_{\mathbf{p}'} W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(2)} [G_{pp'} \delta f^i(\varepsilon_p) + H_{pp'} \delta f^i(\varepsilon_{p'})], \quad (\text{E.20})$$

$$G_{pp'} = N_B(\Delta\varepsilon_{pp'}) + f_F(\varepsilon_{p'}), \quad H_{pp'} = N_B(\Delta\varepsilon_{pp'}) + f_F(\varepsilon_p),$$

где $\Delta\varepsilon_{pp'} = \varepsilon_p - \mu_0 + \varepsilon_{p'} - \mu_0$ – энергия фонона; $W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(2)} = W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}^{(2)}$ – вероятность рекомбинации электрон-дырочной пары с импульсами \mathbf{p} и \mathbf{p}' за счёт электрон-фононного взаимодействия.

В дальнейшем нам потребуются скорости релаксации концентраций и тепловых энергий частиц за счет рассеяния. Эти величины вычисляются путём суммирования по \mathbf{p} интегралов столкновений St_{σ}^{α} , $\sigma = ph, ee$, умноженных на единицу или на величину $\varepsilon_p - \mu_0$. С учётом выражения (E.20), скорости релаксации концентраций и тепловых энергий за счет электрон-фононных процессов типа “(2)” при δf^i вида (E.6) даются формулами:

$$\int d\Gamma_{\mathbf{p}} St_{ph}^{\alpha,(2)}[\delta f^i, \delta f^i](\varepsilon_p) = -R \delta\mu - R^{\varepsilon} \delta T, \quad (E.21)$$

$$\int d\Gamma_{\mathbf{p}} (\varepsilon_p - \mu_0) St_{ph}^{\alpha,(2)}[\delta f^i, \delta f^i](\varepsilon_p) = -T_0 R^{\varepsilon} \delta\mu - R^{\varepsilon\varepsilon} \delta T,$$

где коэффициенты разложения можно привести к виду:

$$\begin{pmatrix} R \\ R^{\varepsilon} \\ R^{\varepsilon\varepsilon} \end{pmatrix} = \int \int d\Gamma_{\mathbf{p}} d\Gamma_{\mathbf{p}'} K_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \begin{pmatrix} 2 \\ \Delta\varepsilon_{pp'}/T_0 \\ \Delta\varepsilon_{pp'}^2/2T_0 \end{pmatrix}, \quad (E.22)$$

$$K_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = K_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(2)}[1 - f_F(\varepsilon_p)][1 - f_F(\varepsilon_{p'})] N_B(\Delta\varepsilon_{pp'}).$$

Величины R , R^{ε} , $R^{\varepsilon\varepsilon}$ характеризуют скорости рекомбинации. Примечательно, что первое и второе уравнения (E.21) содержат один и тот же коэффициент R^{ε} ; это есть микроскопическое выражения принципа Онсагера симметрии кинетических коэффициентов.

Уравнения Больцмана (E.7) для $\delta f_{\alpha} = \delta f_{\alpha}^a + \delta f^i$ содержат слагаемые двух типов: изотропные и анизотропные относительно направлений \mathbf{p} . Как отмечалось выше, мы считаем, что время релаксации $\tau(\varepsilon)$ в примесном интеграле столкновений (E.8) много меньше всех остальных времен релаксации, а также характерного времени изменения внешнего поля. Тогда с помощью уравнения (E.7) можно показать, что выполнено неравенство $\delta f_{\alpha}^a \ll \delta f^i$. Благодаря этому неравенству в анизотропных слагаемых уравнения (E.7) функции δf_{α}^a следует удерживать только в слагаемых: $-\delta f_{\alpha}/\tau(\varepsilon)$ и $(e_{\alpha}B/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z] \cdot [\partial f_{\alpha}/\partial \mathbf{p}]$. Последнее слагаемое можно переписать в виде $-\omega_{\alpha,c}(\varepsilon)[\partial f_{\alpha}/\partial \varphi]$, где $\omega_{\alpha,c}(\varepsilon) = e_{\alpha}Bv(\varepsilon)/[cp(\varepsilon)]$ – циклотронная частота. Таким образом, анизотропная часть (E.7) представляет собой дифференциальное уравнение по переменной φ для поиска δf_{α}^a . Решение этого уравнения приводит к следующему соотношению между δf_{α}^a и δf^i :

$$\delta f_{\alpha}^a(\varepsilon, \varphi, \mathbf{r}) = -\frac{\tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} 1 & \omega_c^{\alpha} \tau \\ -\omega_c^{\alpha} \tau & 1 \end{pmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e_{\alpha} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right] f^i(\varepsilon, \mathbf{r}), \quad (E.23)$$

где $\tau = \tau(\varepsilon)$, $\omega_c^{\alpha} = \omega_{\alpha,c}(\varepsilon)$, $\omega_c = |\omega_{\alpha,c}(\varepsilon)|$ и $\mathbf{v} = v(\varepsilon)[\cos(\varphi), \sin(\varphi)]$.

Для линейных по электрическому полю \mathbf{E} возмущений имеем: $\delta f^i, \delta f_{\alpha}^a \sim E$. Поле \mathbf{E} явно входит в уравнении (E.7) только в слагаемое $e_{\alpha} \mathbf{E} \cdot [\partial f_{\alpha}/\partial \mathbf{p}]$, поэтому в этом слагаемом нужно учесть только равновесную невозмущенную часть функции распределения $f_{\alpha,0} = f_F$. С

учётom этого соображения и вида выражения (E.6) для f^i , из уравнения (E.23) окончательно получаем:

$$\delta f_\alpha^a = \frac{-f'_F(\varepsilon)\tau}{1+\omega_c^2\tau^2} \mathbf{v}^T \begin{pmatrix} 1 & \omega_{\alpha,c}\tau \\ -\omega_{\alpha,c}\tau & 1 \end{pmatrix} \left[-\nabla\delta\mu(\mathbf{r}) - \frac{\varepsilon-\mu_0}{T_0}\nabla\delta T(\mathbf{r}) + e_\alpha\mathbf{E} \right]. \quad (\text{E.24})$$

Последнее соотношение является аналогом уравнений (D.8) для потоков частиц при заданной энергии $j_\alpha(\varepsilon)$ за счёт наличия неоднородных плотностей частиц δn_α и электрического поля \mathbf{E} .

E.2 Вывод балансовых уравнений гидродинамического типа

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести поток частиц данного вида при фиксированной энергии:

$$\mathbf{j}_\alpha(\varepsilon, \mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \mathbf{v}(\varepsilon, \varphi) \delta f_\alpha^a(\varepsilon, \varphi, \mathbf{r}). \quad (\text{E.25})$$

На основе этого выражения легко вычислить потоки частиц данного вида \mathbf{j}_α и потоки тепловой энергии \mathbf{q}_α , переносимой частицами данного вида α :

$$\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}) = \int d\varepsilon \nu(\varepsilon) \mathbf{j}_\alpha(\varepsilon, \mathbf{r}), \quad \mathbf{q}_\alpha(\mathbf{r}) = \int d\varepsilon \nu(\varepsilon) \mathbf{j}_\alpha(\varepsilon, \mathbf{r})(\varepsilon - \mu_0). \quad (\text{E.26})$$

Из выражений (E.24) и (E.25) получаем:

$$j_\alpha(\varepsilon, \mathbf{r}) = \hat{\sigma}_\alpha(\varepsilon) \left[-\nabla\delta\mu(\mathbf{r}) - \frac{\varepsilon-\mu_0}{T_0}\nabla\delta T(\mathbf{r}) + e_\alpha\mathbf{E} \right], \quad (\text{E.27})$$

где введён тензор проводимости при данной энергии:

$$\hat{\sigma}_\alpha(\varepsilon) = \frac{-f'_F(\varepsilon)\tau}{1+\omega_c^2\tau^2} \frac{v(\varepsilon)^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_{\alpha,c}\tau \\ -\omega_{\alpha,c}\tau & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.28})$$

Используя (E.26) и (E.27), выразим потоки $\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r})$ и $\mathbf{q}_\alpha(\mathbf{r})$ через электрическое поле, градиенты химического потенциала и температуры:

$$\mathbf{j}_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha(e_\alpha\mathbf{E} - \nabla\delta\mu) - \hat{\alpha}_\alpha\nabla\delta T, \quad (\text{E.29})$$

$$\mathbf{q}_\alpha = \hat{\beta}_\alpha(e_\alpha\mathbf{E} - \nabla\delta\mu) - \hat{\kappa}_\alpha\nabla\delta T. \quad (\text{E.30})$$

Здесь введены следующие обозначения для коэффициентов проводимости, термоэлектрических коэффициентов и коэффициентов теплопроводности:

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_\alpha \\ \hat{\alpha}_\alpha \\ \hat{\beta}_\alpha \\ \hat{\kappa}_\alpha \end{pmatrix} = \int d\varepsilon \nu(\varepsilon) \hat{\sigma}_\alpha(\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ (\varepsilon - \mu_0)/T_0 \\ \varepsilon - \mu_0 \\ (\varepsilon - \mu_0)^2/T_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.31})$$

Из формул (E.31) видно, что выполняется соотношение Онсагера для термоэлектрических коэффициентов: $\hat{\beta}_\alpha = T_0 \hat{\alpha}_\alpha$.

Для вывода соотношения (E.23) между δf_α^a и δf^i и следующих из него формул (E.29) и (E.30) для потоков \mathbf{j}_α и \mathbf{q}_α была использована только анизотропная часть уравнений Больцмана (E.7). Теперь используем изотропную часть (E.7) для получения уравнений на изотропные части δf^i функций распределения f_α . Искомые уравнения являются уравнениями баланса концентраций частиц и переносимой ими тепловой энергии. Они и выражения (E.29) и (E.30) составят полную систему уравнений для нахождения величин $\delta\mu$, δT , \mathbf{j}_α и \mathbf{q}_α .

Для получения уравнений баланса концентраций усредним уравнение (E.7) по импульсу \mathbf{p} с учётом соотношений (E.21) для $St_{ph}^{\alpha,(2)}$. Характерное время изменения макроскопических величин и неупругие времена релаксации могут быть сравнимы между собой. В результате получим:

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j}_\alpha = -R \delta\mu - R^\varepsilon \delta T, \quad (\text{E.32})$$

где $\delta n = \int d\varepsilon \nu(\varepsilon) \delta f^i(\varepsilon)$ – неравновесная концентрация электронов и дырок. Эти уравнения описывают изменения концентраций частиц каждого сорта α за счёт наличия потоков $\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r})$ и за счёт рождения и гибели частиц при рекомбинации.

Усредняя кинетическое уравнение (E.7), умноженное на $\varepsilon_p - \mu_0$, получим уравнения баланса тепловой энергии:

$$\frac{\partial \delta n_\varepsilon}{\partial t} + \text{div} \mathbf{q}_\alpha - e_\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_\alpha = -T_0 R^\varepsilon \delta\mu - R^{\varepsilon\varepsilon} \delta T - L \delta T, \quad (\text{E.33})$$

где $\delta n_\varepsilon = \int d\varepsilon \nu(\varepsilon) (\varepsilon - \mu_0) \delta f^i(\varepsilon)$ – неравновесная плотность тепловой энергии электронов и дырок. Слагаемое $-e_\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_\alpha$ описывает работу внешних сил в единицу времени по перемещению зарядов (то есть, рассеиваемое джоулево тепло). При изучении линейного отклика на поле \mathbf{E} это слагаемое нужно не учитывать.

Выше везде рассматривались возмущения, сохраняющие электрон-дырочную симметрию системы в каждой точке, то есть наряду с соотношениями $\delta\mu_e = \delta\mu_h$, $\delta T_e = \delta T_h$, $\delta n_e = \delta n_h$, также выполнено соотношение $\delta n_{\varepsilon,e} = \delta n_{\varepsilon,h}$. Однако, в уравнениях (E.32) и (E.33) слагаемые $\text{div} \mathbf{j}_\alpha$, $\text{div} \mathbf{q}_\alpha$ и $-e_\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_\alpha$ зависят от типа частиц $\alpha = e, h$. Можно показать, что независимость этих слагаемых от α обеспечивается видом выражений для потоков (E.29) и (E.30), видом коэффициентов (E.31) и условием существования зарядово-нейтрального возмущения (E.3), которое ввиду разложения (E.6) сводится к соотношениям $\mathbf{E} \cdot \nabla \delta\mu = 0$ и $\mathbf{E} \cdot \nabla \delta T = 0$.

Возмущения концентраций и плотностей тепловых энергий частиц δn и δn_ε выражаются

как линейные комбинации $\delta\mu$ и δT :

$$\begin{aligned}\delta n &= a \delta\mu + a^\varepsilon \delta T, \\ \delta n_\varepsilon &= T_0 a^\varepsilon \delta\mu + a^{\varepsilon\varepsilon} \delta T,\end{aligned}\tag{E.34}$$

с коэффициентами:

$$\begin{pmatrix} a \\ a^\varepsilon \\ a^{\varepsilon\varepsilon} \end{pmatrix} = - \int d\varepsilon \nu(\varepsilon) f'_F(\varepsilon) \begin{pmatrix} 1 \\ (\varepsilon - \mu_0)/T_0 \\ (\varepsilon - \mu_0)^2/T_0 \end{pmatrix}.\tag{E.35}$$

В рассматриваемой задаче электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ является внешним и считается однородным, поэтому $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. С учетом этого факта и формул (E.28) и (E.31) подстановка выражений (E.29) и (E.30) в уравнения (E.32) и (E.33) приводит к уравнениям баланса:

$$\begin{cases} a \frac{\partial \delta\mu}{\partial t} + a^\varepsilon \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \sigma_{xx,\alpha} \Delta \delta\mu + \alpha_{xx,\alpha} \Delta \delta T = R \delta\mu + R^\varepsilon \delta T \\ T_0 a^\varepsilon \frac{\partial \delta\mu}{\partial t} + a^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial \delta T}{\partial t} + T_0 \alpha_{xx,\alpha} \Delta \delta\mu + \kappa_{xx,\alpha} \Delta \delta T = T_0 R^\varepsilon \delta\mu + (R^{\varepsilon\varepsilon} + L) \delta T \end{cases}.\tag{E.36}$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – двумерный оператор Лапласа.

Полученную систему уравнений (E.36) на величины $\delta\mu(\mathbf{r})$ и $\delta T(\mathbf{r})$ нужно дополнить граничными условиями на краях изучаемой двумерной области G . Если некоторый участок границы ∂G^c является закрытым (частицы не могут пройти через него), то на этом участке потоки в перпендикулярном к нему направлении отсутствуют:

$$\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})|_{\partial G^c} = 0, \quad \mathbf{q}_\alpha(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})|_{\partial G^c} = 0.\tag{E.37}$$

Здесь $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ – единичная нормаль к кривой ∂G^c . При этом, в соответствии с условием (E.3), необходимо потребовать, чтобы электрическое поле и градиенты $\nabla \delta\mu$ и $\nabla \delta T$ на этом участке границы удовлетворяли соотношениям $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \parallel \mathbf{t}(\mathbf{r})|_{\partial G^c}$, $\nabla \delta\mu(\mathbf{r}) \parallel \mathbf{n}(\mathbf{r})|_{\partial G^c}$, $\nabla \delta T(\mathbf{r}) \parallel \mathbf{n}(\mathbf{r})|_{\partial G^c}$, где $\mathbf{t}(\mathbf{r})$ – единичная касательная к кривой ∂G^c . На открытом участке границы ∂G^o отсутствуют градиенты всех величин в перпендикулярном к границе направлении, поэтому они могут быть направлены только вдоль касательных: $\nabla \delta\mu(\mathbf{r}) \parallel \mathbf{t}(\mathbf{r})|_{\partial G^o}$, $\nabla \delta T(\mathbf{r}) \parallel \mathbf{t}(\mathbf{r})|_{\partial G^o}$. При этом на поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ в этой области границы необходимо наложить условие $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \parallel \mathbf{n}(\mathbf{r})|_{\partial G^o}$.

Из определений (E.31) видно, что для каждого типа носителей $\alpha = e, h$ диагональные и недиагональные кинетические коэффициенты связаны соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy,\alpha} &= \sigma_{xx,\alpha} & \sigma_{yx,\alpha} &= -\sigma_{xy,\alpha} \\ \alpha_{yy,\alpha} &= \alpha_{xx,\alpha} & \alpha_{yx,\alpha} &= -\alpha_{xy,\alpha} \\ \kappa_{yy,\alpha} &= \kappa_{xx,\alpha} & \kappa_{yx,\alpha} &= -\kappa_{xy,\alpha}\end{aligned}\tag{E.38}$$

При этом диагональные кинетические коэффициенты одинаковы для электронов и дырок, а недиагональные отличаются знаком:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,e} &= \sigma_{xx,h} & \sigma_{xy,e} &= -\sigma_{xy,h} \\ \alpha_{xx,e} &= \alpha_{xx,h} & \alpha_{xy,e} &= -\alpha_{xy,h} \\ \kappa_{xx,e} &= \kappa_{xx,h} & \kappa_{xy,e} &= -\kappa_{xy,h}\end{aligned}\tag{E.39}$$

Поэтому удобно ввести следующие обозначения кинетических коэффициентов без индекса α :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx,\alpha} > 0 & \sigma_{xy} &= \sigma_{xy,h} > 0 \\ \alpha_{xx} &= \alpha_{xx,\alpha} > 0 & \alpha_{xy} &= \alpha_{xy,h} > 0 \\ \kappa_{xx} &= \kappa_{xx,\alpha} > 0 & \kappa_{xy} &= \kappa_{xy,h} > 0 \end{aligned} \quad . \quad (\text{E.40})$$

С учётом введённых определений (E.35) и (E.40) система уравнений (E.36) приобретет вид:

$$\begin{cases} a^\mu \frac{\partial \delta \mu}{\partial t} + a^T \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \sigma_{xx} \Delta \delta \mu + \alpha_{xx} \Delta \delta T = R \delta \mu + R^\varepsilon \delta T \\ a^T \frac{\partial \delta \mu}{\partial t} + \tilde{a}_\varepsilon^T \frac{\partial \delta T}{\partial t} + \alpha_{xx} \Delta \delta \mu + \tilde{\kappa}_{xx} \Delta \delta T = R^\varepsilon \delta \mu + \tilde{L} \delta T \end{cases} \quad . \quad (\text{E.41})$$

Здесь введены обозначения: $\tilde{a}_\varepsilon^T = a_\varepsilon^T/T_0$, $\tilde{\kappa}_{xx} = \kappa_{xx}/T_0$, $\tilde{L} = (R_\varepsilon^T + L)/T_0$. Граничные условия на замкнутой границе (E.37) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} [\sigma_{xy} e \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} - (\sigma_{xx} \nabla \delta \mu + \alpha_{xx} \nabla \delta T) \cdot \mathbf{n}]|_{\partial G^c} = 0 \\ [\alpha_{xy} e \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} - (\alpha_{xx} \nabla \delta \mu + \tilde{\kappa}_{xx} \nabla \delta T) \cdot \mathbf{n}]|_{\partial G^c} = 0 \end{cases} \quad . \quad (\text{E.42})$$

Тот факт, что балансовые уравнения (E.41) и граничные условия (E.42) для каждого из типов носителей получились одинаковыми, означает, что решение, сохраняющее зарядовую нейтральность (соотношения $\delta \mu_e = \delta \mu_h$, $\delta T_e = \delta T_h$), существует. Тем самым, показано, что выполнение условия (E.3) на закрытой части ∂G^c границы области G обеспечивает существование решения, сохраняющего это условие и зарядовую нейтральность всюду внутри образца.

В основном тексте диссертации (Раздел 3.3) описаны результаты решения полученных балансовых уравнений (E.41) с граничными условиями (E.42) для длинного образца $G = [0, L] \times [-W/2, W/2]$, $L \gg W$ с замкнутыми продольными краями, $y = \pm W/2$, и открытыми контактами при $x = 0, L$.

Приложение F

Качественное рассмотрение баллистического течения

F.1 “Кинематический” эффект Холла

В этом приложении приводим наглядный вывод части результатов по баллистическому транспорту взаимодействующих электронов в нулевом и очень малом магнитном поле: А именно, будет выполнен “кинематический” расчет плотности тока $j(y) \approx const$ и холловского поля $E_H(y) \approx const$ в центральной области $W/2 - |y| \gg v_F \omega_c / \gamma^2$ (4.40) длинного образца. Эти результаты были получены в Разделе 4.3 путём решения кинетического уравнения, однако их наглядный вывод без кинетического уравнения представляется важным для лучшего понимания природы баллистического режима транспорта слабо взаимодействующих электронов. Этот вывод основан на рассмотрении траекторий отдельных “путешествующих” электронов (тех, которые после рассеяния на одном крае достигают другого края или рассеиваются в объёме) и усреднении по ним величин тока и холловского электрического поля [см. см. Рис. 4.3(а), 4.4(а) и F.1]. В настоящее время ведётся работа над аналогичным наглядным выводом вклада “скачущих” электронов в прикраевых областях $W/2 - |y| \lesssim v_F \omega_c / \gamma^2$ (4.42).

Для получения результатов для тока в нулевом магнитном поле (4.15) и эффекта Холла в предельно малом поле в объёмной части образца (4.47) и (4.48) рассмотрим кинематику “путешествующих” электронов. Как обсуждалось в Разделе 4.3, основной вклад в ток (4.15), магнитная поправка к нему (4.57) и холловское поле (4.47) происходят от электронов с углами скорости $\gamma W \lesssim |\pi/2 - |\varphi|| \ll 1$ на траекториях с длиной меньше длины свободного пробега относительно рассеяния в объёме, $l = 1/\gamma$. При этом в кинетическом уравнении (4.30) учитывались слагаемые: $\cos \varphi \partial f / \partial y$, $-\gamma f$, и слагаемое с магнитным полем, $\omega_c \partial f / \partial \varphi$.

В пределе $\omega_c \rightarrow 0$ и $E_0 \rightarrow 0$, траектории электронов $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$ являются почти прямыми линиями. Для x -компоненты скорости $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ электрона, отражённого от левого

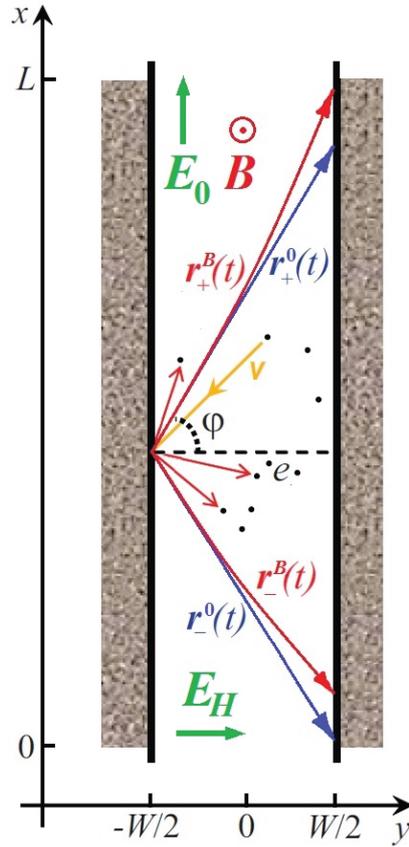


Рис. F.1: Длинный образец с прямыми шероховатыми краями без дефектов в объёме и баллистические траектории “путешествующих” электронов в отсутствии магнитного поля [синие кривые $\mathbf{r}_{\pm}^0(t)$] и в предельно малом магнитном поле [красные кривые $\mathbf{r}_{\pm}^B(t)$]. Поправки от внешнего \mathbf{E}_0 и холловского \mathbf{E}_H электрических полей на траектории считаются очень малыми, поэтому не показаны.

края под углом φ имеем:

$$v_x(t, \varphi) = v_F \sin \varphi + \frac{eE_0}{m} t, \quad (\text{F.1})$$

где время t отсчитывается с момента отражения. Аналогичная формула справедлива для электронов, отражённых от правого края. В уравнении (F.1) и всюду ниже в этом приложении явно учитываются множители v_F и e для большей прозрачности изложения.

Согласно определению средней плотности тока j (среднее число частиц, проходящих через сечение образца в единицу времени на единицу длины сечения), её значение в баллистическом режиме вычисляется по аналогу формулы Друде:

$$j = \frac{n_0 e^2 t_0}{m} E_0, \quad (\text{F.2})$$

где t_0 – среднее время свободного движения электронов. Такое t_0 для “путешествующих” электронов вычисляется усреднением времён $t_{\pm}(y = \pm W/2, \varphi)$ бесстолкновительного движения электронов по углам φ . Здесь величина $t_{\pm}(y, \varphi)$ обозначает время движения электрона по невозмущенной траектории [отвечающей $E_0, B = 0$] из точки $y_0 = \mp W/2$ с начальным углом

скорости φ до точки y , $-W/2 < y < W/2$:

$$t_{\pm}(y, \varphi) = \frac{W/2 \pm y}{v_F |\cos \varphi|}. \quad (\text{F.3})$$

Чтобы найти t_0 , нужно проинтегрировать $t_{\pm}(y = \pm W/2, \varphi)$ по φ до предельных значений $\varphi_m^{\pm} \approx \pm\pi/2$, при которых разность $|\pi/2 - |\varphi||$ становится порядка малой величины $\delta_m^{\pm}(y = \pm W/2) = \gamma W$. Такие пределы отвечают баллистическим траекториям с максимальной длиной, равной длине свободного пробега относительно объёмного рассеяния, $l = 1/\gamma$. После интегрирования получаем $j \approx j_{\gamma}$ в главном порядке по γW , где $j_{\gamma} = (2/\pi)j_0 \ln[1/(\gamma W)]$, $j_0 = en_0 W E_0/m$, как было определено в уравнении (4.15).

Теперь вычислим холловское поле E_H в объёмной области (4.40) в рамках аналогичного подхода. Этот вывод основан на том, что считается применимой эргодическая гипотеза, дающая возможность от усреднения по распределению электронов в данный момент времени перейти к усреднению для каждого электрона по времени его движения между краями.

Предполагаем, что поле E_H однородно в объёмной области (4.40): $E_H(y) \approx E_H$. Запишем y -компоненту уравнения Ньютона:

$$m\dot{v}_y = eE_H - \frac{eB}{c} v_x. \quad (\text{F.4})$$

После усреднения этого уравнения при каждом значении y по углам φ (вплоть до предельных значений $\varphi_m^{\pm} \approx \pm\pi/2$) от магнитного слагаемого $(eB/c)v_x$ останется только вклад от неравновесной части скоростей электронов, $\Delta v_x(t) = (eE_0/m)t$, связанной с ускорением электронов полем E_0 [см. уравнение (F.1)]. Ускорение в направлении y всего ансамбля “путешествующих” электронов внутри центральной области отсутствует:

$$\sum_{\pm} \Re \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_{-y_{ne}}^{y_{ne}} \frac{dy}{W} m \dot{v}_y[t_{\pm}(y, \varphi), \varphi] = 0, \quad (\text{F.5})$$

где $y_{ne} = W/2 - C\omega_c/\gamma^2$ – граница правого прикраевого слоя (C – некоторое число порядка единицы, отражающие детали строения прикраевого слоя), а символ \Re означает исключение окрестностей углов $\pm\pi/2$ шириной порядка γW в интеграле по $d\varphi$. Это исключение отвечает пренебрежению электронами, рассеянными в объёме на других электронах. Формула (F.5) эффективно учитывает усреднение по всем электронам с разными начальными φ и по времени движения каждого электрона от момента его отражения от края [последнее учитывается функциями $v_y(t)$ и $t_{\pm}(y, \varphi)$]. При этом учитывается, что среднее значение компонент скорости v_y и импульса mv_y всех электронов при отражении их от краёв меняется на противоположное [для выполнения условия $j_y \equiv 0$]. Из равенства (F.5) и уравнения (F.4) получаем, с точностью

до отличия ширины объёмной области $2y_{ne}$ от ширины всего образца W :

$$E_H \approx \frac{B}{c} \sum_{\pm} \Re \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_{-W/2}^{W/2} \frac{dy}{W} v_x[t_{\pm}(y, \varphi), \varphi]. \quad (\text{F.6})$$

В пределе $E_0, B \rightarrow 0$ это уравнение вместе с уравнениями (F.1)-(F.3) даёт в главном порядке по γW : $E_H = (1/2)(B/c)[j_{\gamma}/(en_0)]$, что совпадает с полученным из кинетического уравнения результатом (4.47).

Из приведенного рассмотрения видно, что множитель $1/2$ в уравнениях для E_H (4.47) и ρ_{xy} (4.48) имеет “кинематическое” происхождение. Действительно, такое значение E_H следует из условия (F.6) компенсации линейно возрастающего во времени вклада в магнитную силу Лоренца, $(eB/c)\Delta v_x(t)$, силой от холловского поля, eE_H . Получающееся поле E_H содержит среднее время пролёта между краями образца t_0 и множитель $1/2$ из-за интегрирования $\Delta v_x[t_{\pm}(y, \varphi)]$ по y [см. уравнения (F.1), (F.3) и (F.6)]. Выражение (F.2) для средней плотности тока j содержит то же время t_0 без числовых множителей. Таким образом, локальное холловское сопротивление Холла $\rho_{xy} = E_H(y)/j(y)$ приобретает дополнительный множитель $1/2$ по сравнению со стандартным холловским сопротивлением $\rho_{xy}^{(0)} = B/(n_0ec)$ в омическом и гидродинамическом режимах.

Для прикраевых слоёв $W/2 - |y| \lesssim v_F\omega_c/\gamma^2$ (4.42) аналогичный кинематический вывод величины холловского поля $E_H(y)$ должен быть основан на расчёте влияния холловского поля на траектории как “путешествующих”, так и “скачущих” электронов. При этом важно учесть, что холловское поле оказывается неоднородным и магнитное поле нельзя рассматривать как возмущение, так как без него “скачущих” траекторий не существует. Как и для “путешествующих” электронов, межэлектронные столкновения ограничивают максимальную длину “скачущих” траекторий величиной l . В результате, для прикраевых слоёв является недостаточным использование только пертурбативных уравнений по $B \rightarrow 0$ [аналогов уравнений (F.4) и (F.5)], и для наглядного вывода результата $E_H \sim E_0$ (4.53) необходим более сложный расчёт.

Г.2 “Кинематическое” магнетосопротивление

В настоящем разделе с помощью наглядного кинематического рассмотрения, аналогичного рассмотрению прошлого раздела, выводится зависящая от магнитного поля поправка к плотности тока в объёмной части образца, $W/2 - |y| \gg v_F\omega_c/\gamma^2$, и соответствующий вклад в магнетосопротивление образца.

Для того, чтобы вычислить среднюю плотность тока, $j(B) \sim E_0$, с учётом поправки от пре-

дельно малого магнитного поля необходимо более точно рассчитать среднее значение неравновесной скорости электронов $\Delta v_x(t) = (eE_0/m)t$ для “путешествующих” электронов, движущихся между краями образца, чем это было сделано при выводе формулы (F.2). При заданном угле начальной скорости электрона φ , для среднего по траектории значения поправки к скорости имеем:

$$\langle \Delta v_x \rangle(\varphi) = \frac{1}{t^*(\varphi)} \int_0^{t^*(\varphi)} dt \Delta v_x(t, \varphi) = \frac{eE_0}{m} \frac{t^*(\varphi)}{2}, \quad (\text{F.7})$$

где $t^*(\varphi) = t_{\pm}(y = \pm W/2, \varphi) = W/(v_F \cos \varphi)$ полное время движения по траекториям, возмущенным магнитным полем (см. Рис. F.1). Далее необходимо усреднить эту величину по всем начальным углам электронов. Аналогично рассмотрению предыдущего раздела, имеем:

$$j = \Re \int_0^{2\pi} \frac{dj(\varphi)}{2\pi} = e n_0 \Re \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{eE_0}{m} \frac{t^*(\varphi)}{2}. \quad (\text{F.8})$$

Таким образом, чтобы вычислить $j = j(B)$ (F.8), нужно рассчитать зависимость времени $t^*(\varphi)$ от начального угла скорости электрона φ и магнитного поля B [то есть, уточнить формулу (F.3)]. Как обсуждалось в Главе 4, для длинных образцов, $L \gg W$, основной вклад в полный ток дают электроны с начальными углами скорости почти вдоль края: $\varphi \approx \pm\pi/2$. Поэтому для средней плотности тока имеем:

$$j \approx \sum_{\pm} \left[\int_{-1}^{-\delta_m} \frac{dj_{\pm}(\delta)}{2\pi} + \int_{\delta_m}^1 \frac{dj_{\pm}(\delta)}{2\pi} \right], \quad (\text{F.9})$$

где $\delta_m \ll 1$ – характерное минимально возможное значение параметра $\delta = |\pi/2 - |\varphi||$. Если образец длиннее, чем длина свободного пробега, $L \gg 1/\gamma$, углы траекторий с направлениями, близкими к оси x , ограничиваются рассеянием в объёме и поэтому $\delta_m \sim \gamma W$ (как считалось в предыдущем Разделе F.1). Для не слишком длинных образцов, $W \ll L \ll 1/\gamma$, максимальное значение параметра δ определяется длиной образца: $\delta_m \sim W/L$.

Уравнение для времени движения между краями, $t^*(\varphi)$, имеет вид

$$y_{\pm}(t^*) = \frac{W}{2} \quad (\text{F.10})$$

для “путешествующих” электронов, движущихся слева направо, и аналогично $y_{\pm}(t^*) = -W/2$ для электронов, движущихся справа налево (см. Рис. F.1). Здесь $\mathbf{r}_{\pm}(t) = [x_{\pm}(t), y_{\pm}(t)]$ – траектории электрона с углом начальной скорости $\mathbf{v}|_{t=0}$, равным φ , и положительным (+) или отрицательным (–) значением компоненты v_x . Начальные условия (при $t = 0$) для траекторий электронов $\mathbf{r}_{\pm}(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= -W/2, \\ v_x/v_F &= \pm 1, & v_y/v_F &= \delta > 0, \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

для электронов, двигающихся слева направо, и

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= W/2, \\ v_x/v_F &= \pm 1, & v_y/v_F &= \delta < 0, \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

для электронов, двигающихся справа налево. Соответствующие начальные углы скорости приобретают вид: $\varphi \approx \pm(\pi/2 - \delta)$, где $|\delta| \ll 1$.

Решение уравнения Ньютона с учётом только магнитного поля и начальными условиями (F.11) имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = \pm A [\cos(\omega_c t + \phi_0) - \cos(\phi_0)] \\ y(t) = -W/2 + A [\sin(\omega_c t + \phi_0) - \sin(\phi_0)] \end{cases}, \quad (\text{F.13})$$

где $A = v_F \sqrt{1 + \delta^2}/\omega_c$ и $\phi_0 = \mp \text{atan}(1/\delta)$. Для начальных условий (F.12) решение получается из формул (F.13) заменой $y \leftrightarrow -y$.

С помощью решения (F.13) уравнение (F.10) записывается как:

$$\frac{W\omega_c}{v_F} = \delta \sin(\omega_c t) \pm [1 - \cos(\omega_c t)]. \quad (\text{F.14})$$

Если $\omega_c \ll \delta^2/(W/v_F)$, его решение ищется по теории возмущений по малому параметру $\omega_c(W/v_F)/\delta^2 \ll 1$. Для времени пролёта получается результат:

$$t^*(\delta) = t_0^* + \Delta t_1^* + \Delta t_2^* = \frac{W}{v_F \delta} \mp \frac{\omega_c W^2}{2 v_F^2 \delta^3} + \frac{\omega_c^2 W^3}{2 v_F^3 \delta^5}. \quad (\text{F.15})$$

Используя формулы (F.8), (F.9) и (F.15), можно рассчитать среднюю плотность тока от “путешествующих” электронов, $j(B)$, до второго порядка по малому магнитному полю. Поправка первого порядка $j_1 \sim \Delta t_1^*$, исчезает из-за симметричности “+” и “-” траекторий (см. Рис. F.1). Поправка второго порядка $j_2 \sim \Delta t_2^*$, как и основной независимый от магнитного поля вклад $j_0 \sim t_0^*$, преимущественно действительно происходит от электронов со скоростью почти вдоль образца, $\varphi \approx \pm\pi/2$. В итоге получаем:

$$j = 2E_0 W^2 \left[\ln \left(\frac{1}{\delta_m} \right) + C_B \frac{\omega_c^2 W^2}{\delta_m^4} \right], \quad (\text{F.16})$$

где C_B - числовая константа порядка единицы, которая зависит от точного значения δ_m и не может быть определена в рамках настоящего качественного рассмотрения. Для применимости этой формулы необходимо, чтобы неравенство $\omega_c \ll \delta^2/(W/v_F)$ было выполнено для всех учитываемых траекторий, то есть: $\omega_c \ll \delta_m^2/(W/v_F)$.

Формулы (F.2) и (F.16) приводят к магнетосопротивлениям (4.58) и (4.64).

Приложение G

Переход между баллистическим и гидродинамическим течениями

G.1 “Полубаллистическое” решение вблизи перехода

Модель, сформулированная в Главе 4, позволяет рассматривать системы, являющиеся смешанными вариантами двух крайних случаев: (i) в объёме образца дефектов нет; электроны внутри образца редко рассеиваются друг на друге, сохраняя импульс; (ii) нет межэлектронных столкновений, но внутри образца происходит рассеяние электронов на слабом беспорядке, приводящее к медленной релаксации импульса. Для прозрачности изложения, будем рассматривать только эти крайние типы образцов с одним из механизмов рассеяния: только с электрон-электронными столкновениями ($\gamma = \gamma_{ee}$, $\gamma' = 0$) или только с рассеянием на беспорядке ($\gamma = \gamma'$, $\gamma_{ee} = 0$). При этом будем всегда считать, что рассеяние в объёме слабое:

$$\gamma W \ll 1. \quad (\text{G.1})$$

В этом разделе выполним анализ баллистического решения (4.33) в нижней окрестности критической точки $0 < 2 - \omega_c W \ll 1$, включая область $2 - \omega_c W \sim \gamma W$. Это решение учитывает только уходящее слагаемое $-\gamma f$ в операторе столкновений. Поэтому функция распределения (4.33) даёт точное описание течения при $\omega_c W < 2$ в неупорядоченных образцах без электрон-электронного рассеяния (то есть в нижней окрестности баллистически-омического фазового перехода). В следующем разделе будет изучена нижняя окрестность баллистически-гидродинамического фазового перехода в чистых образцах с одними только межчастичными столкновениями. При этом функция распределения (4.33), подробно изученная в этом разделе в области $0 < 2 - \omega_c W \lesssim \gamma W$, будет использована в качестве “пробного решения” для построения модели среднего поля, необходимой для описания течения в чистых образцах.

Решение (4.33) в окрестности критического поля B_c имеет следующие свойства. Коэффициенты I_{ll} , I_{lr} системы линейных уравнений (4.36) стремятся к нулю при $2 - \omega_c W \rightarrow 0$. Из формул (4.37) и (4.38) для I_{ll} и I_{lr} в основном порядке по малым параметрам $2 - \omega_c W \ll 1$ и

$\gamma/\omega_c \ll 1$ имеем:

$$I_{ll} = 2 - \omega_c W + \frac{2\pi\gamma}{\omega_c}, \quad I_{lr} = 2 - \omega_c W. \quad (\text{G.2})$$

Из формул (4.39) следует, что коэффициенты в правой части уравнения (4.36) остаются конечными при $B \rightarrow B_c$: $I_l = -\pi\omega$. Уравнения (4.36) с указанными выше значениями $I_{ll,lr,l}$ приводят к следующим выражениям для параметров c_{\pm} в функции распределения (4.33):

$$c_{\pm} = \pm \frac{\omega_c^2}{2\gamma + u\omega_c}, \quad (\text{G.3})$$

где малый параметр $u = u(B)$ имеет вид:

$$u = \frac{2}{\pi} (2 - \omega_c W), \quad 0 < u \ll 1. \quad (\text{G.4})$$

Он обусловлен видом величин $I_{ll,lr,l}$, характеризует близость магнитного поля к критическому полю перехода, $\omega_c^{cr} = 2/W$, и пропорционален малой относительной плотности $\alpha_{tr} \sim u$ “путешествующих” электронов [см. Рис. 4.2(b)]. Коэффициенты c_{\pm} (G.3) расходятся при $\omega_c \rightarrow \omega_c^{cr}$, становясь намного больше, чем их значения в середине баллистического интервала, $c_{\pm}|_{\omega_c W \sim 1}$. При этом другие слагаемые в общем решении f_{\pm} (4.33) не имеют расходимости при $\omega_c \rightarrow \omega_c^{cr}$. Таким образом, функция распределения (4.33) в главном порядке по малым параметрам $2 - \omega_c W$ и γW имеет вид:

$$f_{\pm}(y, \varphi) = \pm \frac{E_0}{2\gamma + u\omega_c}. \quad (\text{G.5})$$

Такая функция f_{\pm} является обобщением чисто баллистического решения (4.83) и дополнительно учитывает рассеяние электронов в объёме. В верхней части третьего баллистического режима, $\gamma W \ll u \ll 1$, рассеяние в объёме даёт гораздо большие поправки в функции f_{\pm} (относительного порядка $\gamma W/u \ll 1$, где $u \ll 1$), чем поправки в промежуточных полях, $u \sim 1$, имеющие порядок γW . Эффекты рассеяния в объёме и на краях становятся сравнимы друг с другом в окрестности $u \sim \gamma W$ критической точки ω_c^{cr} [см. формулу (G.5)].

Выражения f_{\pm} (G.5) описывают перераспределение “скачущих” и “путешествующих” электронов между левой и правой областями (см. Рис. 4.2). Неравновесные “путешествующие” электроны вносят вклад в ток j_y , компенсируя ЕН-дрейф. Неравновесные “скачущие” электроны не дают вклада в j_y из-за симметрии их траекторий по отношению к инверсии координаты x относительно горизонтальных линий, проходящих через центры траекторий (см. Рис. 4.1). Поскольку $\alpha_{tr} \sim u$ и $c_{\pm} \sim 1/u$, полная плотность “путешествующих” электронов, $\sim \alpha_{tr} c_{\pm}$, соответствует по порядку величины слагаемому в решении (4.33), отвечающему ЕН-дрейфу. Из-за равных вероятностей рассеяния электронов на краях во все углы φ только малая часть

электронов становится путешествующими и может компенсировать ЕН-дрейф. Остальные рассеянные на краю электроны становятся “скачущими”, имеют относительную плотность $\alpha_{sk} \sim 1$ и расходящуюся полную плотность $\alpha_{sk} c_{\pm} \sim 1/u$.

Помимо этого, есть также небольшая группа электронов с долей $\alpha_{\gamma} \sim \gamma W$, которые вернулись бы на тот же край или достигли бы другого края, но из-за рассеяния в объёме изменяют тип своих траекторий. Такие электроны приводят к дополнительной компенсации ЕН-дрейфа и, таким образом, ослабляют дисбаланс между левым и правым “скачущими” электронами. Таким образом, расходимость коэффициентов c_{\pm} (G.3) при $u \rightarrow 0$ ограничивается интенсивностью объёмного рассеяния γ .

Плотность тока и холловское поле для функции (G.5) в главных порядках по γ и u равны:

$$j(y) = \frac{4nE_0}{\pi m} \frac{1}{2\gamma + u\omega_c} \sqrt{1 - \omega_c^2 y^2}, \quad (\text{G.6})$$

$$E_H(y) = \frac{2E_0}{\pi} \frac{1}{2\gamma + u\omega_c} \frac{\omega_c}{\sqrt{1 - \omega_c^2 y^2}}. \quad (\text{G.7})$$

Для усредненной плотности тока $j = \int_{-W/2}^{W/2} dy j(y)/W$ и усредненного холловского поля $E_H = \int_{-W/2}^{W/2} dy E_H(y)/W$ получаем:

$$j = \frac{n_0 E_0 / m}{2\gamma + u\omega_c}, \quad E_H = \frac{E_0 \omega_c}{2\gamma + u\omega_c}. \quad (\text{G.8})$$

Для анализа экспериментов окажется важным провести более точный расчёт плотности тока j и холловского электрического поля E_H для критической функции распределения (G.5). В следующем порядке по малому параметру \sqrt{u} для j получаем такое же уравнение, как первое из уравнений (G.8), и уточнённый результат для E_H :

$$E_H = \frac{E_0 \omega_c}{2\gamma + u\omega_c} F(u), \quad F(u) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi} u}. \quad (\text{G.9})$$

Множитель $F(u)$ описывает поправку за счёт отклонения формы левой и правой баллистических областей от их предельной формы при $u = 0$ (см. Рис. 4.2).

Для краткости ниже опускаем множитель n_0/m во всех величинах плотности тока. Иными словами, вводятся новые единицы измерения плотности тока по правилу: $j \rightarrow j/(n_0/m)$.

Полученные значения j и E_H (G.8) в самой критической точке, $u = 0$, оказываются равными половине результатов расчёта по формулам Друде для объёмного образца той же ширины со скоростью рассеяния импульса на беспорядке в объёме $\gamma' = \gamma$. Этот факт имеет следующую интерпретацию. Для образцов с диффузным рассеянием электронов на краях и с медленным рассеянием на объёмном беспорядке, для которых формулы (G.8) являются точными, оба эти процесса при $u = 0$ дают одинаковые вклады в общую скорость релаксации импульса, 2γ .

G.2 Модель среднего поля в баллистической окрестности перехода

В этом разделе строится модель “переходного” баллистически-гидродинамического течения в чистых образцах со взаимодействующими электронами в ближайшей нижней окрестности критического поля,

$$0 < 2 - \omega_c W \lesssim \gamma W . \quad (\text{G.10})$$

При таких ω_c подстановка функции распределения f_{\pm} (G.5) в уходящее и приходное слагаемые интеграла столкновений, $-\gamma f$ и $\gamma \hat{P}[f]$, приводит к значениям того же порядка величины, $\sim E_0$, что и величины других слагаемых в кинетическом уравнении (4.12). Это означает, что оба слагаемые $-\gamma f$ и $\gamma \hat{P}[f]$ одинаково важны в интервале (G.10).

Вместо точного решения уравнения (4.12), которое, вероятно, возможно только численно, выполним приближённое описание динамики электронов в интервале полей (G.10) с помощью метода, аналогичного методам среднего поля в теории фазовых переходов между равновесными состояниями разной симметрии. Предлагаемый метод основан на приближённом учёте приходного слагаемого $\gamma \hat{P}[f]$ в интеграле столкновений. А именно, будем рассматривать возникающее из $\gamma \hat{P}[f]$ продольное слагаемое:

$$\gamma \hat{P}_{\sin}[f](y, \varphi) = \gamma j(y) \sin \varphi , \quad (\text{G.11})$$

как результат появления дополнительного “внутреннего электрического поля” $\Delta E_0(y) \sim \gamma j(y)$ в усечённом кинетическом уравнении (4.30). При этом не будем учитывать точную зависимость плотности тока $j(y)$ от координаты y , заменив в формуле (G.11) величину $j(y)$ на её усреднённое по сечению значение $j = \int_{-W/2}^{W/2} dy j(y) / W$.

Подстановка функции f_{\pm} (G.5) в приходную часть интеграла столкновений $\gamma \hat{P}[f]$ приводит также к дополнительным слагаемым $\gamma f^{m=0}(y)$ и $\gamma \cos \varphi j_y(y)$ с малым нефизическим током $j_y(y) \sim u$, возникающим из-за неточности решения (G.5) по параметру u . Такие слагаемые $j_y(y)$ и $f^{m=0}(y)$ могут быть интерпретированы в рамках подхода среднего поля как другие внутренние поля в усечённом кинетическом уравнении (4.30). Однако, проведённый анализ показывает, что эти слагаемые приводят к вкладам в функцию распределения f_{\pm} и в характеристики течения j и E_H , которые относительно малы по параметрам γW и u в интервале (G.10) по сравнению с эффектом от главного слагаемого, (G.11), содержащего $j = j_x$.

В Разделе 4.2.2 было показано, что для первого баллистического подрежима, $\omega_c \ll \gamma^2 / W$,

аналогичный подход к решению уравнения (4.12), основанный на аппроксимации приходного слагаемого $\gamma\hat{P}[f]$ его усреднённым по y значением, является асимптотически точным по параметру $\ln[1/(\gamma W)] \gg 1$ [см. уравнение (4.20)]. В окрестности перехода, $|\omega_c - \omega_c^{cr}| \ll \omega_c^{cr}$, баллистическая плотность тока $j(y)$ (G.6) сильно неоднородна, поэтому такой подход должен приводить к результатам для всех величин с точностью до коэффициента порядка единицы. Однако, учитывая успех подобных методов среднего поля для термодинамических фазовых переходов, можно ожидать, что и в настоящей задаче будут получены качественно правильные результаты для описания перехода.

Замена приходного слагаемого $\gamma\hat{P}[f]$ его усреднённым по y значением может интерпретироваться как использование нелокального по y интеграла столкновений следующего вида:

$$\text{St}'[f] = -\gamma \left\{ f(y, \varphi) - \int_{-W/2}^{W/2} \frac{d\tilde{y}}{W} \hat{P}[f](\tilde{y}, \varphi) \right\}. \quad (\text{G.12})$$

Такой оператор сохраняет импульс и количество электронов только в пределах всего образца, но не в окрестности каждой точки y .

Таким образом, уравнение среднего поля для усредненного тока $j = j(u)$, определяющего в развиваемом подходе состояние системы, основано на замене:

$$E_0 \rightarrow \tilde{E}_0 = E_0 + \gamma j \quad (\text{G.13})$$

в кинетическом уравнении (4.30) и, следовательно, в полубаллистическом результате (G.8) для средней плотности тока j , отвечающей “пробной” функции распределения (G.5). После такой подстановки получаем самосогласованное уравнение для j в баллистически-гидродинамической области (G.10):

$$j = \frac{E_0 + \gamma j}{2\gamma + u\omega_c}. \quad (\text{G.14})$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$j = \frac{E_0}{\gamma + u\omega_c}. \quad (\text{G.15})$$

В самой точке перехода, $u = 0$, полученное значение j вдвое больше по сравнению с чисто баллистическим результатом (G.8), который был получен в пренебрежении приходным слагаемым $\gamma\hat{P}[f]$.

Как обсуждалось выше, полубаллистическая функция распределения (G.5) описывает уменьшение электронов, отражённых от одного из краёв образца, и появление избыточных электронов, отражённых от другого (по сравнению с состоянием равновесия). Ток (G.15), полученный в рамках метода среднего поля, дополнительно учитывает сохранение импульса при

межчастичных столкновениях. Обе величины (G.5) и (G.15) отвечают компенсации $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{V}$ -дрейфа в направлении y . Эта компенсация реализуется за счет: (i) наличия малого количества “путешествующих” электронов на траекториях, соединяющих противоположные края образца; (ii) перераспределения электронов между баллистическими траекториями за счёт их столкновений друг с другом. Эти два процесса соответствуют слагаемым $\sim u\omega_c$ и $\sim \gamma$ в знаменателях уравнений (G.5), (G.8) и (G.15).

В неупорядоченных образцах каждое рассеяние электрона на дефекте приводит к потере его неравновесного импульса и изменению центра его траектории. В чистых образцах каждое столкновение двух электронов вызывает только смещения центров их траекторий. В результате рассеяние на объёмном беспорядке оказывается в два раза более эффективным (в критической точке $u = 0$) относительно результирующей релаксации импульса по сравнению с эффектом от электрон-электронного рассеяния с той же скоростью, $\gamma = \gamma'$ [сравните уравнения (G.8) и (G.15)].

Холловское поле в ближайшей окрестности (G.10) баллистически-гидродинамического перехода вычисляется заменой $E_0 \rightarrow E_0 + \gamma j$ в полубаллистическом результате (G.9):

$$E_H = (E_0 + \gamma j) \frac{\omega_c}{2\gamma + u/W} F(u). \quad (\text{G.16})$$

Подчеркнем, что это уравнение, в отличие от уравнений (G.13) и (G.14), не участвует в самосогласованной процедуре определения состояния системы. Подставляя ток j (G.15), вычисленный в рамках метода среднего поля, в уравнение (G.16), получаем:

$$E_H = E_0 \frac{\omega_c}{\gamma + u\omega_c} F(u). \quad (\text{G.17})$$

Благодаря множителю $F(u)$ эта функция, как и полубаллистический результат $E_H(u)$ (G.9), имеет сильную корневую особенность при $\omega_c W \rightarrow 2$.

Приведенные выше результаты для третьего баллистического подрежима, $\gamma W \ll 2 - \omega_c W \lesssim 1$, и для ближайшей окрестности (G.10) критического поля, $0 < 2 - \omega_c W \lesssim \gamma W$, по-видимому, качественно применимы и к течениям электронов в не очень длинных, $W \ll L \ll l$, и даже коротких, $W \sim L \ll l$, образцах. Действительно, размер всех электронных траекторий в направлении x при $1 \lesssim \omega_c W < 2$ ограничен циклотронным диаметром. Поэтому функция распределения формируется в областях с длинами $\Delta L \sim W \approx 2/\omega$ и поэтому можно независимо рассматривать участки образца с длинами $\sim \Delta L$. Их вклады в общее сопротивление длинного образца суммируются, аналогично сопротивлению нескольких последовательно подключаемых омических резисторов.

G.3 Модель среднего поля в гидродинамической окрестности перехода

Когда диаметр циклотронной окружности становится меньше ширины образца, $2R_c < W$, возникает группа “центральных электронов”, траектории которых не пересекают краёв образца [см. Рис. 4.1(с) и 4.2(с)]. Такие электроны долгое время, $\sim 1/\gamma \gg W$ проводят на своих траекториях без столкновений. В этом разделе показывается, что они образуют “преджидкостную” коллективизированную фракцию внутри доминирующего количества остальных полубаллистических “краевых” электронов, которые рассеиваются по краях. “Центральные” электроны имеют решающее значение как для баллистически-гидродинамического, так и для баллистически-омического фазовых переходов.

По аналогии с данным выше описанием баллистической окрестности критической точки, $0 < 2 - \omega_c W \lesssim \gamma W$, сформулируем двухкомпонентную модель среднего поля на основе кинетического уравнения (4.12) для описания динамики “центральных” и “краевых” электронов в верхней окрестности критической точки:

$$0 < \omega_c W - 2 \ll 1. \quad (\text{G.18})$$

Относительная плотность центральных электронов:

$$\alpha_c = \frac{W - 2R_c}{W} \sim B - B_c, \quad \alpha_c \ll 1, \quad (\text{G.19})$$

может считаться параметром порядка для баллистически-гидродинамического и для баллистически-омического фазовых переходов. Для построения теории среднего поля очень важно, что в рассматриваемой ближайшей окрестности критического поля (G.18) доля краевых электронов $\alpha_e = 1 - \alpha_c$ близка к единице.

Функции распределения f_e и f_c “краевых” (“e”) и “центральных” (“c”) электронов определены в двух различных областях в плоскости (y, φ) [см. Рис. 4.2(с)]. Чтобы описать течение в диапазоне (G.18), необходимо решить полное кинетическое уравнение (4.12) в таких областях с учётом неоднородных по y уходящего и приходного слагаемых интеграла столкновений.

Для нахождения распределения “центральных” электронов f_c , удобно заменить переменные y, φ на новые переменные y_c, φ , где y_c - координата центра циклотронной траектории электрона. Новые переменные центральных электронов лежат в интервале:

$$-W/2 + R_c < y_c < W/2 - R_c, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (\text{G.20})$$

Для координат центров траекторий “краевых” электронов имеем:

$$|y_c| > W/2 - R_c, \quad (\text{G.21})$$

а угол их скорости φ лежит в диапазонах $[\varphi_l(y_c), \varphi_u(y_c)]$, зависящих от y_c . Как будет видно из дальнейшего, распределение f_e “краевых” электронов аналогично распределению “скачущих” электронов в баллистической окрестности перехода (G.10), поэтому форма краёв $\varphi_l(y_c), \varphi_u(y_c)$ явно не входит в дальнейшие формулы.

Решение $f_{c,e}(y_c, \varphi)$ точного кинетического уравнения (4.12) с нелокальным приходным слагаемым $\gamma\hat{P}[f_e + f_c]$ (или $\gamma\hat{P}_0[f_e + f_c]$) – непрерывная функция в диапазоне (G.20). Следовательно, угловые гармоники $f_{c,m} \sim \int d\varphi f_c(y_c, \varphi) e^{-im\varphi}$ функции f_c быстро убывают с ростом их номера m , а именно: как геометрическая прогрессия. Напротив, изученные выше баллистические решения f_{\pm} (4.33) и (G.5) уравнения (4.30) имеют разрывы на краевых траекториях, показанных на Рис. 4.2 толстыми линиями. Поэтому угловые гармоники функции f_{\pm} (4.33) и (G.5) медленно падают с ростом m , а именно, как $\sim 1/m$. Таким образом, центральные электроны имеют функцию распределения гидродинамического типа, существенно отличную от баллистической функции f_{\pm} (G.5), и поэтому представляют собой ядро формирования вязкого или омического течений.

Вместо точного решения кинетического уравнения (4.12) построим, следуя Разделу G.2, двухкомпонентную модель среднего поля, в которой приходное слагаемое интеграла столкновений $\gamma\hat{P}[f_e + f_c]$ (или $\gamma\hat{P}_0[f_e + f_c]$) учитывается путём замены его на его усреднённое по y значение. Эта модель является качественно применимой в ближайшей верхней окрестности фазового перехода (G.18), где относительная доля центральных электронов мала, $\alpha_c \ll 1$. Конкретный вид такой модели различен для чистого и неупорядоченного образцов.

Во-первых, исследуем баллистически-гидродинамический переход в чистых образцах, в которых электроны претерпевают только электрон-электронное рассеяние.

Когда доля центральных электронов мала, $\alpha_c \ll 1$, центры y_c их циклотронных орбит лежат примерно в центре образца, $y = 0$ [см. неравенство (G.20) и Рис. 4.1(c)]. Центральные электроны чаще всего рассеиваются на краевых электронах, которые имеют распределение $f_e(y_c, \varphi)$, существенно меняющееся при изменении переменной y_c на масштабе порядка W . Поэтому свойства всех центральных электронов в главных порядках по γW и α_c одинаковы, то есть описываются функцией f_c , почти не зависящей от y_c :

$$f_c(y_c, \varphi) \approx f_c(0, \varphi). \quad (\text{G.22})$$

В рамках развиваемого подхода среднего поля единственным параметром, описывающим со-

стояние центральных электронов, является их вклад $j_e \sim f_e$ в усредненную плотность тока j . Соответственно, аналогичный средне-полевой параметр для краевых электронов – их вклад j_e в усредненную плотность тока j . Приходное слагаемое интеграла столкновений $\gamma \hat{P}[f_e + f_c]$ заменяется на его среднее значение $\gamma(j_e + j_c) \sin \varphi$, что означает замену в кинетическом уравнении внешнего поля E_0 на эффективное поле \tilde{E}_0 :

$$E_0 \rightarrow \tilde{E}_0 = E_0 + \gamma(j_e + j_c). \quad (\text{G.23})$$

Для того, чтобы найти вклад краевых электронов j_e в плотность тока j , заметим, что кинетическое уравнение (4.12) с приходным слагаемым, упрощённым согласно уравнению (G.23), в области на плоскости (y, φ) , где двигаются “краевые” электроны [см. Рис. 4.2(с)], а также граничные условия на краях образца $y = \pm W/2$ совпадают с уравнением (4.12) и граничными условиями в самой точке перехода, $u = 0$. Поэтому в рамках метода среднего поля распределение f_e “краевых” электронов даётся функцией f_{\pm} (G.5) при $u = 0$, в которой также сделаны соответствующие сдвиги переменной y , и замена $E_0 \rightarrow \tilde{E}_0$ (G.23). Интегрирование такой функции f_e с множителем $\sin \varphi$ по левой и правой полубаллистическим краевым областям ширинами $\tilde{W} = 2R_c$ приводит к следующей формуле для краевого вклада j_e в полный ток j :

$$j_e = \alpha_e \frac{E_0 + \gamma(j_e + j_c)}{2\gamma}, \quad (\text{G.24})$$

где множитель α_e учитывает относительную плотность “краевых” электронов [сравните с аналогичным уравнением (G.14) в баллистической окрестности критической точки].

Чтобы вычислить вклад j_c в плотность тока j , умножим кинетическое уравнение (4.12), выраженное в переменных φ, y_c , на множитель $\sin \varphi$ и проинтегрируем его по φ и y_c по области, отвечающей краевым электронам: $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ и $-W/2 + R_c < y_c < W/2 - R_c$ [см. Рис. 4.2(с)]. Как обсуждалось выше, функция распределения f_c слабо зависит от y_c согласно формуле (G.22). Для вклада в плотность тока получается следующий результат:

$$j_c = \alpha_c \frac{E_0 + \gamma(j_e + j_c)}{\gamma}. \quad (\text{G.25})$$

По своему физическому смыслу полученная формула есть формула Друде для вклада в полный ток от “центральных” электронов, которые рассеиваются на краевых электронах со скоростью γ и ускоряются эффективным полем (G.23).

Решая вместе получившуюся систему уравнений среднего поля (G.24) и (G.25) и учитывая, что $\alpha_e + \alpha_c = 1$, получаем в нулевом и первом порядках по α_c :

$$j_e = \frac{E_0}{\gamma}, \quad j_c = 2\alpha_c \frac{E_0}{\gamma}. \quad (\text{G.26})$$

Для полного тока $j = j_e + j_c$ из уравнений (G.26) получаем:

$$j = (1 + 2\alpha_c) \frac{E_0}{\gamma}. \quad (\text{G.27})$$

Согласно формуле (G.19) для α_c , эта функция имеет линейный вклад по разности $B - B_c$, характеризующей отклонение от критической точки.

Физическая картина, отвечающая второму из уравнений (G.26), выглядит следующим образом. Динамика “центральных” электронов в системе отсчёта, движущейся с эффективной дрейфовой скоростью краевых электронов $V_e^{dr} = 1/\gamma$ [см. первое из уравнений (G.26)] аналогична омическому режиму транспорта в образце с беспорядком, а именно: “краевые” электроны выглядят как статические дефекты для “центральных” электронов в движущейся системе отсчёта. Эффективное время релаксации импульса “краевых” электронов за счёт рассеяния на краях и на других электронах составляет $1/\gamma$ [см. первое из уравнений (G.26)]. Время рассеяния “центральных” электронов на “краевых” также равно $1/\gamma$ (следует из вида интеграла столкновений). Поскольку дрейфовая скорость центральных электронов V_c^{dr} является суммой их дрейфовой скорости в движущейся системе отсчёта $V_c^{dr'} = 1/\gamma$ и скорости самой системы отсчёта, V_e^{dr} , возникает удвоение эффективного времени рассеяния $1/\gamma$ в уравнении для j_c [см. второе из уравнений (G.26)].

Холловское поле в диапазоне полей (G.18) также содержит вклады от “краевых” и от “центральных” электронов. Так как баллистическое решения f_{\pm} (G.5) при $u = 0$ с эффективным полем \tilde{E}_0 и заменой $W \rightarrow \tilde{W} = 2/\omega_c$ в развитом подходе описывает средне-полевое распределение краевых электронов f_e , вклад “краевых” электронов в холловское поле E_H даётся полу-баллистической формулой (G.9), в которой нужно положить $u = 0$, а также учесть перенормировку поля $E_0 \rightarrow \tilde{E}_0$ (G.23) и эффективной ширины области $W = 2/\omega_c^{cr} \rightarrow \tilde{W} = 2/\omega_c$. При этом в эффективном поле \tilde{E}_0 (G.23) нужно использовать формулы (G.26) и (G.27) для полной плотности тока j . В итоге получается следующий результат:

$$E_{H,e} = \alpha_e (1 + \alpha_c) \frac{\omega_c}{\gamma} E_0. \quad (\text{G.28})$$

В соответствии с точностью приближения (G.22), в формуле (G.28) нужно оставить только нулевой и первый порядки по α_c : $\alpha_e (1 + \alpha_c) = 1 - \alpha_c^2 \approx 1$ и поэтому $E_{H,e} = (\omega_c/\gamma) E_0$.

Вклад центральных электронов в холловское поле рассчитывается с помощью независимой от y функции распределения f_c (G.22). Умножая кинетическое уравнения (4.12) на $\cos \varphi$ и интегрируя по $-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ и $-W/2 + R_c < y_c < W/2 - R_c$, получаем вклад в холловское поле, аналогичный выражению модели Друде:

$$E_{H,c} = \omega_c j_c. \quad (\text{G.29})$$

Подставляя уравнение (G.26) для j_c в эту формулу, получаем для полного усредненного холловского поля $E_H = E_{H,e} + E_{H,c}$:

$$E_H = (1 + 2\alpha_c) \frac{\omega_c}{\gamma} E_0. \quad (\text{G.30})$$

Для продольного $\varrho_{xx} = E_0/j$ и холловского $\varrho_{xy} = E_H/j$ сопротивлений из формул (G.15), (G.17), (G.27) и (G.30) в обеих окрестностях баллистически-гидродинамического фазового перехода, $|\omega_c W - 2| \ll 1$ получаем:

$$\varrho_{xx}(B) = \frac{m\gamma}{n_0 e^2} \begin{cases} 1 + 2u/(\gamma W), & B < B_c \\ 1 - 2\alpha_c, & B > B_c \end{cases}, \quad (\text{G.31})$$

$$\varrho_{xy}(B) = \frac{B}{n_0 e c} \begin{cases} 1 - \sqrt{u/\pi}, & B < B_c \\ 1, & B > B_c \end{cases}. \quad (\text{G.32})$$

В этих итоговых формулах снова использованы обычные единицы для большей прозрачности. Напоминаем, что $u(B) = (2/\pi)(2 - \omega_c W) = (4/\pi)(B_c - B)/B_c$ и $\alpha_c(B) = (W - 2R_c)/W = (B - B_c)/B_c$. Примечательно, что холловское сопротивление $\varrho_{xy}(B)$ над точкой перехода, $B > B_c$, совпадает с его значением в омическом режиме при нулевой температуре $\varrho_{xy}^{(0)} = B/(n_0 e c)$, по крайней мере, в основном порядке по γW , в котором были выполнены все вычисления.

Во-вторых, рассмотрим баллистически-омический фазовый переход в длинном образце с шероховатыми краями, в объёмной части которого существенно рассеяние электронов только на редких дефектах. Для наглядности, будем использовать явное обозначение γ' (вместо полной вероятности рассеяния γ) для скорости рассеяния электронов.

Анализ показывает, что учёт приходного слагаемого интеграла столкновений $\gamma' \hat{P}_0[f_e + f_c]$ в такой системе приводит к малым поправкам (по параметрам $\gamma' W \ll 1$ и $\alpha_c \ll 1$) к полубаллистической функции распределения (G.5). В пренебрежении этими поправками, вклады в ток от “краевых” и от “центральных” электронов выше критического поля B_c независимы.

Таким образом, для расчёта главных вкладов в величины j и E_H от “краевых” электронов следует использовать полубаллистические результаты (G.8) при $u = 0$, умноженные на относительную долю краевых электронов α_e :

$$j_e = \alpha_e \frac{E_0}{2\gamma'}, \quad E_{H,e} = \alpha_e \frac{\omega_c}{2\gamma'} E_0. \quad (\text{G.33})$$

Как и для окрестности баллистически-гидродинамического перехода, формулы (G.33) учитывают уменьшение ширины области с краевыми электронами с ростом магнитного поля.

Для вклада j и E_H от центральных электронов при $\alpha_c \ll 1$ следует использовать формулы Друде с внешним полем E_0 и множителем α_c , учитывающим их относительную плотность:

$$j_c = \alpha_c \frac{E_0}{\gamma'}, \quad E_{H,c} = \alpha_c \frac{\omega_c E_0}{\gamma'}. \quad (\text{G.34})$$

Ввиду того, что $\alpha_c + \alpha_e = 1$, для средней плотности тока и усредненного холловского поля получаем:

$$j = \frac{1 + \alpha_c}{2} \frac{E_0}{\gamma'}, \quad E_H = \frac{1 + \alpha_c}{2} \frac{\omega_c E_0}{\gamma'}. \quad (\text{G.35})$$

В отличие от чистых образцов, в которых происходит только электрон-электронное рассеяние в объёме, результаты (G.35) для неупорядоченных образцов остаются качественно справедливыми при любом соотношении долей α_c и α_e “центральных” и “краевых” электронов, так как в рассматриваемом приближении электроны этих двух групп не взаимодействуют между собой. В частности, в пределе очень больших магнитных полей, когда $W \gg R_c$ и $\alpha_c \approx 1$, уравнения (G.35) превращаются в обычные формулы Друде для длинных омических образцов.

Уравнения (G.8), (G.9) и (G.35) приводят к следующему результату для продольного сопротивления в окрестностях баллистически-омического перехода $|B - B_c| \ll B_c$:

$$\varrho_{xx}(B) = \frac{2m\gamma'}{n_0 e^2} \begin{cases} 1 + u / (\gamma' W), & B < B_c \\ 1 - \alpha_c, & B > B_c \end{cases}. \quad (\text{G.36})$$

Холловское сопротивление оказывается таким же в главном порядке по $\gamma' W$ как и результат (G.32) для баллистически-гидродинамического перехода (при совпадающих скоростях электрон-электронных и электрон-примесных столкновений $\gamma = \gamma'$).

Таким образом, как в баллистически-гидродинамическом, так и в баллистически-омическом фазовых переходах ток $j(\omega_c)$ и продольное сопротивление $\varrho_{xx}(\omega_c)$ имеют скачок производных (излом) при критическое поле $\omega_c^{cr} = 2/W$. При этом холловское поле $E_H(\omega_c)$ и сопротивление $\varrho_{xy}(\omega_c)$ имеют при приближении к этой точке слева также корневую сингулярность, $\sim (B_c - B)^{1/2}$.

В-третьих, кратко обсудим поведение гидродинамического и омического течения далеко за пределами точки перехода, то есть, при магнитных полях, соответствующих соотношениям $W - 2R_c \sim W$ и $W \gg R_c$. В этих режимах доля “центральных” электронов сравнима и больше доли “краевых” электронов: $\alpha_c \sim \alpha_e \sim 1$ и $\alpha_c \approx 1$, $\alpha_e \ll 1$ соответственно. Столкновения между “центральными” электронами становятся существенны. Чем дальше “центральные” электроны от краёв, тем с меньшей вероятностью они сталкиваются с “краевыми” электронами и с большей вероятностью сталкиваются друг с другом. Это приводит к образованию неоднородного параболического профиля течения: $j(y) \sim [(W/2)^2 - y^2]$.

Область $W/R_c - 2 \gtrsim 1$ смешанных гидродинамически-баллистических и омически-баллистических течений изучалась в работах [61, 198] численным решением кинетического уравнения. Для второго течения, как упоминалось выше, полученные формулы (G.35) и (G.36) для j , E_H , $\varrho_{xx,xy}$ качественно справедливы при любом соотношении между R_c и W .

При больших магнитных полях, $\omega_c \gg 1/W$, радиус траекторий электронов становится мал: $R_c \ll W$. Поэтому в чистых образцах преобладает гидродинамический вклад в ток от центральных электронов. Усредненное сопротивление определяется формулой: $\varrho_P = 12\eta_{xx}/W^2$ (см. Главу 1), где η_{xx} – диагональный коэффициент вязкости, который в обозначениях настоящего Приложения имеет вид: $\eta_{xx} = \gamma/(16\omega_c^2)$ [в единицах, в которых $e = 1$ и $n_0/m = 1$]. Для среднего сопротивления образца при $W \gg 1/\omega_c$ получаем:

$$\varrho_P(\omega_c) = \frac{3\gamma}{4\omega_c^2 W^2}. \quad (\text{G.37})$$

В этой формуле пренебрегается вкладом от прикраевых областей $W/2 - |y| \gtrsim R_c$, в которых профиль тока отличается от идеального течения Пуазейля $j(y) \sim [(W/2)^2 - y^2]$ благодаря баллистическому вкладу отражённых от края электронов.

В пределе $\omega_c \gg 1/W$ для неупорядоченных образцов из формулы (G.35) получаем обычный результат теории Друде длинных (холловских) образцов:

$$\varrho_D(\omega_c) = \gamma', \quad (\text{G.38})$$

то есть нулевое магнетосопротивление. Примечательно, что как гидродинамическое, так и омическое сопротивления ϱ_P и ϱ_D пропорциональны скоростям рассеяния γ и γ' .

На Рис. G.1 построено продольное сопротивление $\varrho_{xx}(B)$ во всем интервале магнитных полей для образца без беспорядка при различных скоростях межчастичного рассеяния γ [панели (a,c)] и для образца без межчастичного рассеяния при тех же значениях скорости рассеяния на объёмном беспорядке γ' [панели (b,d)].

Рисунок G.1 является более реалистичной и точной версией схематических графиков на Рис. 4.10. Графики на Рис. G.1 отвечают длинным образцам с малыми значениями параметров γW , поэтому первый баллистический подрежим не виден на масштабе рисунка. Кривые на панелях (a,b) построены по интерполяционным формулам, основанным на представленных выше асимптотах для ϱ_{xx} во втором и третьем баллистических подрежимах, в верхней и нижней окрестностях точки перехода $B = B_c$, и в объёмном пределе. При $|\omega_c W - 2| \ll 1$ эти кривые описываются уравнениями (G.31) и (G.36). В области больших полей, $\omega_c \gg 1/W$ они следуют асимптотам ϱ_P (G.37) и ϱ_D (G.38). На панелях (c,d) построены кривые панелей (a,b), сглаженные сверткой с гауссовой весовой функцией $G_\Delta(B)$ с шириной $\Delta_{W/R_c} = 0.2$. Такая свёртка моделирует вклад нескольких участков длинного образца с различной шириной W , сложную форму краёв и другие неидеальности образца.

Из Рис. G.1 видно, что баллистически-гидродинамический и баллистически-омический фазовые переходы можно различить в экспериментальных данных, прежде всего, по соотноше-

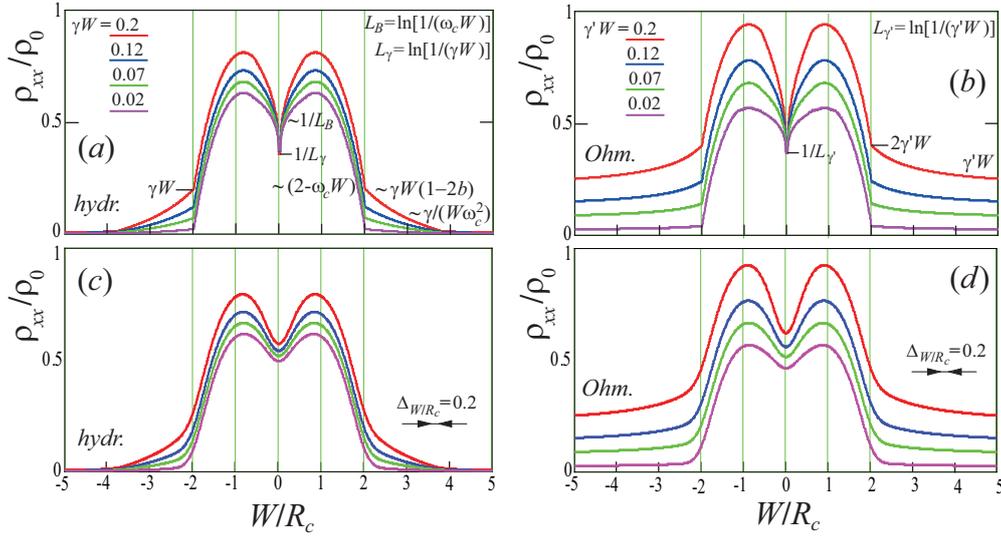


Рис. G.1: Продольное сопротивление ϱ_{xx} длинных образцов как функция параметра $W/R_c \propto B$, нормированное на номинальное баллистическое сопротивление $\varrho_0 = m/(n_0 e^2 W)$. (a,c): случай чистых образцов для нескольких различных скоростей межэлектронного рассеяния γ . (b,d): случай неупорядоченных образцов для нескольких различных скоростей рассеяния на беспорядке γ' при отсутствии межэлектронного рассеяния. Кривые на панелях (c,d) построены путем свёртки кривых на панелях (a,b) с гауссовой шириной $\Delta_{W/R_c} = 0.2$, что качественно учитывает неидеальности образца.

нию между величиной продольного сопротивления в точке перехода $\varrho_{xx}|_{\omega_c W=2}$ и в пределе сильных магнитных полей $\varrho_{xx}|_{\omega_c W \gg 1}$. Для баллистически-гидродинамического перехода последнее значение уменьшается до нуля как $1/B^2$ с ростом магнитного поля [см. Рис. G.1(a)] и быстро становится намного меньше, чем $\varrho_{xx}|_{\omega_c W=2}$, а для баллистически-омического перехода значение $\varrho_{xx}|_{\omega_c W=2}$ в два раза больше предельного значения $\varrho_{xx}|_{\omega_c W \gg 1}$ [см. Рис. G.1(b)].

G.4 Сопоставление с другими теориями и обсуждение точности модели

В работе [61] было выполнено численное решение кинетического уравнения (4.5) для той же системы, которая изучается в диссертации: двумерные электроны в длинном образце с шероховатыми краями. Одновременно учитывалось рассеяние электронов на дефектах в объёме образца и межчастичное рассеяние. Изломы в зависимостях сопротивлений ϱ_{xx} и ϱ_{xy} от магнитного поля B в точке перехода $B = B_c$ были получены в работе [61] для случая, когда в объёме образца доминирует рассеяние на дефектах, но его соответствующая длина свободного пробега $l = l_{MR}$ больше ширины образца [см. Рис. G.2(a,b)].

Хотя авторы работы [61] обсуждали появление “центральных” электронов при магнитных полях выше B_c , не была рассмотрена полубаллистическая динамика “скачущих” и “путешествующих” электронов в полях непосредственно ниже перехода [в третьем баллистическом под-

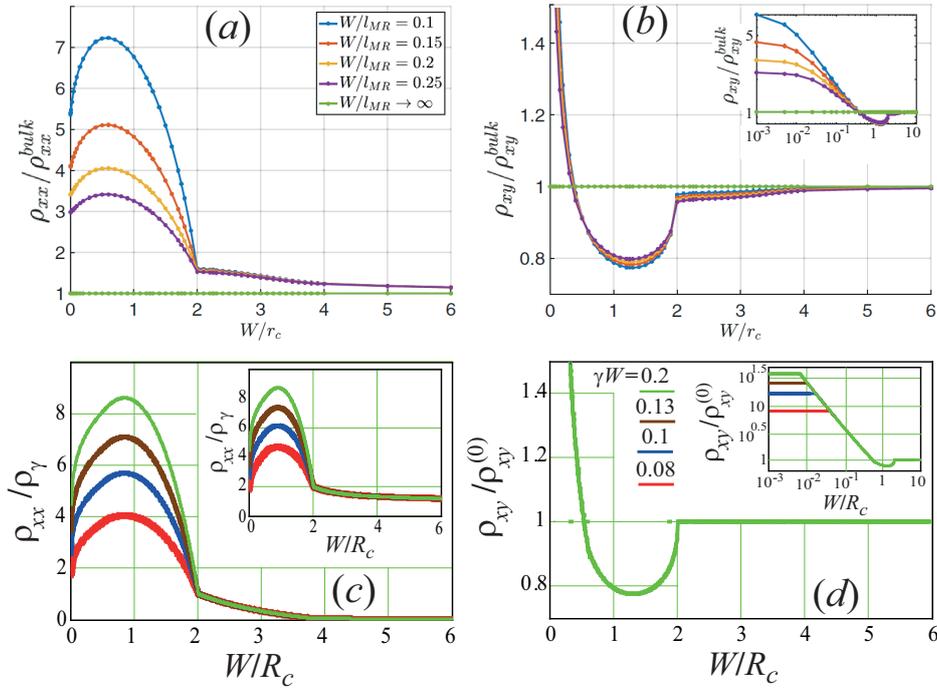


Рис. G.2: Сравнение результатов численного решения кинетического уравнения (4.5), выполненного в работе [61], с результатами развитой аналитической теории. Панели (a,b), взятые из работы [61], показывают продольное сопротивление ϱ_{xx} и холловское сопротивление ϱ_{xy} как функции магнитного поля для узких образцов, $W < l_{MR}$, где доминирует рассеяние электронов на беспорядке (l_{MR} – соответствующая длина рассеяния). Панели (c,d) представляют полученные в диссертации результаты для ϱ_{xx} и ϱ_{xy} , построенные в тех же единицах, что результаты на панелях (a,b). Графики на основных панелях (c,d) соответствуют чистым образцам с одним только межчастичным рассеянием с разными скоростями γ , приведёнными на панели (d). На вставке на панели (c) построена функция $\varrho_{xx}(B)$ для неупорядоченных образцов без межчастичного рассеяния и при скоростях рассеяния на беспорядке γ' , равных значениям γ для кривых на главной панели (c). Результаты для ϱ_{xy} , показанные на панели (d), в главном приближении по γW и $\gamma' W$ одинаковы для чистых образцов и для неупорядоченных образцов при $\gamma = \gamma'$. На вставках на панелях (b) и (d) показаны в логарифмическом масштабе те же функции $\varrho_{xy}(B)$, что и на основной панелях.

режиме, $\gamma W B_c \ll B_c - B \ll B_c$, и в баллистической окрестности перехода, $0 < B_c - B \lesssim \gamma W B_c$], а также не изучалось взаимодействие между “краевыми” и “центрными” электронами в гидродинамической окрестности перехода, $0 < B - B_c \ll B_c$.

Формы зависимостей $\varrho_{xx}(B)$ и $\varrho_{xy}(B)$, полученные в рамках развитой в диссертации аналитической модели для баллистически-гидродинамического и баллистически-омического переходов аналогичны по форме полученным в работе [61] зависимостям для баллистически-омического перехода в узких образцах, $W \ll 1/\gamma$ (см. Рис. G.2) [за исключением области $\omega_c W > 2$ для чистых образцов с малой интенсивностью межэлектронных столкновений, которая не изучалась в работе [61] и в которой формирование гидродинамического течения приводит к зависимости $\varrho_{xx}(B)$, сильно отличной от $\varrho_{xx}(B)$ в неупорядоченном образце]. Как и для кривых на Рис. G.1, для построения кривых на Рис. G.2(c,d) использованы интерполяционные формулы, основанные на полученных выше асимптотах для $\varrho_{xx}(B)$ и $\varrho_{xy}(B)$ в трёх

баллистических подрежимах, в верхней и в нижней окрестностях точки перехода $B = B_c$, а также и в объёмном пределе $W \gg R_c$.

Отметим, что результаты для ϱ_{xx} и ϱ_{xy} в чистых образцах с большой длиной межчастичного рассеяния и без рассеяния на беспорядке не были представлены в работе [61], хотя, по всей видимости, их можно было бы рассчитать тем же методом, который использовался в [61] для получения сопротивлений ϱ_{xx} и ϱ_{xy} в неупорядоченном образце [см. Рис. G.2(a,b)]. Напомним, что в диссертации получены зависимости $\varrho_{xx}(B)$ и $\varrho_{xy}(B)$ в окрестности перехода, $B \ll B_c$ и $|B - B_c| \ll B_c$, как для чистых образцов ($\gamma \gg \gamma'$, $\gamma W \ll 1$), так и для неупорядоченных образцов ($\gamma \ll \gamma'$, $\gamma' W \ll 1$) в аналитическом виде.

В работе [198] также теоретически изучался баллистический и гидродинамический транспорт двумерных электронов в длинном образце с шероховатыми краями. Была получена общая формула для функции распределения в баллистическом режиме, аналогичная формуле (4.33), а также чисто баллистической функция распределения во втором подрежиме (4.49). Было также выполнено численное описание гидродинамически-баллистического режима переноса в магнитных полях над критическим полем, $\omega_c W - 2 \sim 1$. В работе [198] обсуждалась эволюция динамики двумерных электронов в длинном образце с увеличением магнитного поля, в частности, влияние “краевых” и “центральных” электронов при $\omega_c W > 2$ на профиль холловского поля $E_y(y)$. Основное внимание в той работе было уделено изучению эволюции кривизны холловского поля $E_H(y)$, характеризующей тип течения. Переход в окрестности точки $\omega_c^{cr} = 2/W$ от баллистического течения к течению с зарождающейся гидродинамической фазой, а также полубаллистическая динамика электронов в первом и третьем баллистических подрежимах в работе [198] не изучались.

В заключение, отметим, что развитая в разделах G.2 и G.3 модель среднего поля, по видимому, обладает обычной точностью методов этого типа, а именно описывает все величины в окрестностях фазового перехода с точностью до численных множителей порядка единицы. Разумно ожидать, что такое рассмотрение может быть уточнено только численными расчетами, аналогичными выполненным в работах [61, 198]. Заметим, однако, что оператор столкновений (4.3), используемый как в диссертации, так и в работах [61, 198], уже является значительным упрощением точного оператора электрон-электронных столкновений. Например, даже для слабо взаимодействующих вырожденных электронов скорости релаксации γ_m гармоник функции распределения по углам скорости электронов, $f^m(\varphi) \sim e^{im\varphi}$, имеют разные порядки величин для чётных и нечётных m (см. Приложение С), в то время как упрощённый оператор (4.3) отвечает одинаковым скоростям релаксации, $\gamma_m = \gamma$, при всех $|m| \geq 2$.

Литература

- [1] Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941).
- [2] В. П. Пешков, *ЖЭТФ* **16**, 1000 (1946).
- [3] J. C. Ward, J. Wilks, *Phil. Mag.* **42**, 314 (1951).
- [4] M. Chester, *Phys. Rev.* **131**, 2013 (1963).
- [5] C. C. Ackerman, B. Bertman, H. A. Fairbank, R. A. Guyer, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 789 (1966).
- [6] Л. П. Питаевский, *УФН* **95**, 139(1968).
- [7] Электронная энциклопедия wikipedia.org, статья Второй звук.
- [8] J. A. Sussmann, A. Thellung, *Proc. Phys. Soc.* **81**, 1122 (1963).
- [9] Р. Н. Гуржи, *ЖЭТФ* **46**, 719 (1964).
- [10] В. Л. Гуревич, Б. И. Шкловский, *ФТТ* **8**, 3050 (1966).
- [11] Kh. Nil'sen, B. I. Shklovskii, *Sov. Phys. Solid State* **10**, 2857 (1969).
- [12] И. Б. Левинсон, *ЖЭТФ* **73**, 318 (1977).
- [13] В. Л. Гуревич, Кинетика фононных систем (Москва, Наука, 1980).
- [14] Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **30**, 1058 (1956).
- [15] Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **32**, 59 (1957).
- [16] Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, *ЖЭТФ* **23**, 151 (1952).
- [17] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, Статистическая физика, часть 2. (Москва, Физматлит, 2004).
- [18] Р. Н. Гуржи, *Sov. Phys. JETP* **17**, 521 (1963).
- [19] Р. Н. Гуржи, *ЖЭТФ* **47**, 1415 (1964).
- [20] Р. Н. Гуржи, *ЖЭТФ* **47**, 1822 (1964).
- [21] R. N. Gurzhi, S. I. Shevchenko, *JETP* **27**, 1019 (1968).
- [22] Р. Н. Гуржи, *УФН* **94**, 689 (1968).
- [23] Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, *ЖЭТФ* **7**, 379 (1937).

- [24] L. W. Molenkamp, M. J. M. de Jong, *Phys. Rev. B* **49**, 5038 (1994).
- [25] R. N. Gurzhi, A. N. Kalinenko, A. I. Kopeliovich, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3872 (1995).
- [26] D. A. Bandurin, I. Torre, R. Krishna Kumar, M. Ben Shalom, A. Tomadin, A. Principi, G. H. Auton, E. Khestanova, K. S. Novoselov, I. V. Grigorieva, L. A. Ponomarenko, A. K. Geim, M. Polini, *Science* **351**, 1055 (2016).
- [27] R. Krishna Kumar, D. A. Bandurin, F. M. D. Pellegrino, Y. Cao, A. Principi, H. Guo, G. H. Auton, M. Ben Shalom, L. A. Ponomarenko, G. Falkovich, K. Watanabe, T. Taniguchi, I. V. Grigorieva, L. S. Levitov, M. Polini, A. K. Geim, *Nature Physics* **13**, 1182 (2017).
- [28] A. I. Berdyugin, S. G. Xu, F. M. D. Pellegrino, R. Krishna Kumar, A. Principi, I. Torre, M. Ben Shalom, T. Taniguchi, K. Watanabe, I. V. Grigorieva, M. Polini, A. K. Geim, D. A. Bandurin, *Science* **364**, 162 (2019).
- [29] M. Polini, A. K. Geim, *Physics Today* **73**, 6, 28 (2020).
- [30] L. Levitov, G. Falkovich, *Nature Physics* **12**, 672 (2016).
- [31] P. J. W. Moll, P. Kushwaha, N. Nandi, B. Schmidt, A. P. Mackenzie, *Science* **351**, 1061 (2016).
- [32] J. Gooth, F. Menges, C. Shekhar, V. Suess, N. Kumar, Y. Sun, U. Drechsler, R. Zierold, C. Felser, B. Gotsmann, *Nature Commun.* **9**, 4093 (2018).
- [33] J. A. Sulpizio, L. Ella, A. Rozen, J. Birkbeck, D. J. Perello, D. Dutta, M. Ben-Shalom, T. Taniguchi, K. Watanabe, T. Holder, R. Queiroz, A. Principi, A. Stern, T. Scaffidi, A. K. Geim, S. Ilani, *Nature* **576**, 75 (2019).
- [34] M. J. H. Ku, T. X. Zhou, Q. Li, Y. J. Shin, J. K. Shi, C. Burch, L. E. Anderson, A. T. Pierce, Y. Xie, A. Hamo, U. Vool, H. Zhang, F. Casola, T. Taniguchi, K. Watanabe, M. M. Fogler, P. Kim, A. Yacoby, R. L. Walsworth, *Nature* **583**, 537 (2020).
- [35] M. Dyakonov, M. Shur, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2465 (1993).
- [36] V. Umansky, R. de-Picciotto, M. Heiblum, *Appl. Phys. Lett.* **71**, 683 (1997).
- [37] V. Umansky, M. Heiblum, Y. Levinson, J. Smet, J. Nubler, M. Dolev, *Journal of Crystal Growth* **311**, 1658 (2009).
- [38] V. Umansky, M. Heiblum MBE growth of high-mobility 2DEG, Molecular Beam Epitaxy: from Research to Mass Production, Editor M. Henini, p. 121-137 (Elsevier, 2012).
- [39] D. S. Novikov, arXiv:cond-mat/0603184v1 (2006).
- [40] A. T. Hatke, M. A. Zudov, J. L. Reno, L. N. Pfeiffer, K. W. West, *Phys. Rev. B* **85**, 081304 (2012).

- [41] R. G. Mani, A. Kriisa, W. Wegscheider, *Sci. Rep.* **3**, 2747 (2013).
- [42] L. Bockhorn, P. Barthold, D. Schuh, W. Wegscheider, R. J. Haug *Phys. Rev. B* **83**, 113301 (2011).
- [43] L. Bockhorn, A. Hodaiei, D. Schuh, W. Wegscheider, R. J. Haug, *Journal of Physics: Conference Series* **456**, 012003 (2013).
- [44] Q. Shi, P. D. Martin, Q. A. Ebner, M. A. Zudov, L. N. Pfeiffer, K. W. West, *Phys. Rev. B* **89**, 201301 (2014).
- [45] L. Bockhorn, I. V. Gornyi, D. Schuh, C. Reichl, W. Wegscheider, R. J. Haug, *Phys. Rev. B* **90**, 165434 (2014).
- [46] G. M. Gusev, A. D. Levin, E. V. Levinson, A. K. Bakarov, *AIP Advances* **8**, 025318 (2018).
- [47] A. D. Levin, G. M. Gusev, E. V. Levinson, Z. D. Kvon, A. K. Bakarov, *Phys. Rev. B* **97**, 245308 (2018).
- [48] G. M. Gusev, A. D. Levin, E. V. Levinson, A. K. Bakarov, *Phys. Rev. B* **98**, 161303 (2018).
- [49] Y. Dai, R. R. Du, L. N. Pfeiffer, K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 246802 (2010).
- [50] A. T. Hatke, M. A. Zudov, L. N. Pfeiffer, K. W. West, *Phys. Rev. B* **83**, 121301 (2011).
- [51] M. Bialek, J. Lusakowski, M. Czapkiewicz, J. Wrobel, V. Umansky, *Phys. Rev. B* **91**, 045437 (2015).
- [52] H. Predel, H. Buhmann, L.W. Molenkamp, R. N. Gurzhi, A. N. Kalinenko, A. I. Kopeliovich, A. V. Yanovsky, *Phys. Rev. B* **62**, 2057 (2000).
- [53] A. Tomadin, G. Vignale, M. Polini, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 235901 (2014).
- [54] M. Mendoza, H. J. Herrmann, S. Succi, *Sci. Rep.* **3**, 1052 (2013).
- [55] A. V. Andreev, S. A. Kivelson, B. Spivak, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 256804 (2011).
- [56] M. Hruska, B. Spivak, *Phys. Rev. B* **65**, 033315 (2002).
- [57] H. Guo, E. Ilseven, G. Falkovich, L. Levitov, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **114**, 3068 (2017).
- [58] A. Lucas, *Phys. Rev. B* **95**, 115425 (2017).
- [59] A. Lucas, K. C. Fong, *Journal of Physics: Cond. Matter* **30**, 053001 (2018).
- [60] F. M. D. Pellegrino, I. Torre, M. Polini, *Phys. Rev. B* **96**, 195401 (2017).
- [61] T. Scaffidi, N. Nandi, B. Schmidt, A. P. Mackenzie, J. E. Moore, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 226601 (2017).
- [62] R. Moessner, P. Surowka, P. Witkowski, *Phys. Rev. B* **97**, 161112 (2018).
- [63] M. Semenyakin, G. Falkovich, *Phys. Rev. B* **97**, 085127 (2018).

- [64] R. Cohen, M. Goldstein, *Phys. Rev. B* **98**, 235103 (2018).
- [65] O. Kashuba, B. Trauzettel, L. W. Molenkamp, *Phys. Rev. B* **97**, 205129 (2018).
- [66] J. Y. Khoo, I. S. Villadiego, *Phys. Rev. B* **99**, 075434 (2019).
- [67] A. Lucas, S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* **97**, 115449 (2018).
- [68] Е. М. Лифшиц , Л. П. Питаевский, Физическая кинетика (Москва, Наука, 1979).
- [69] Yu. M. Aliev, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **3**, 11 (1965).
- [70] E. M. Baskin, L. N. Magarill, M. V. Entin, *JETP* **48**, 365 (1978).
- [71] A. D. Mirlin, D. G. Polyakov, F. Evers, P. Wolfle, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 126805 (2001).
- [72] A. Dmitriev, M. Dyakonov, R. Jullien, *Phys. Rev. B* **64**, 233321 (2001).
- [73] P. Goswami, J. H. Pixley, S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* **92**, 075205 (2015).
- [74] D. T. Son, B. Z. Spivak, *Phys. Rev. B* **88**, 104412 (2013).
- [75] B. Horn-Cosfeld , J. Schluck , J. Lammert, M. Cerchez, T. Heinzl, K. Pierz, H. W. Schumacher, D. Mailly *Phys. Rev. B* **104**, 045306 (2021).
- [76] D. A. Khudaiberdiev, G. M. Gusev, E. B. Olshanetsky, Z. D. Kvon, N. N. Mikhailov, *Phys. Rev. Research* **3**, L032031 (2021).
- [77] S. Conti, G. Vignale, *Phys. Rev. B* **60**, 7966 (1999).
- [78] Z. Qian, G. Vignale, *Phys. Rev. B* **71**, 075112 (2005).
- [79] M. I. Dyakonov, V. I. Perel, *JETP Lett.* **13**, 467 (1971).
- [80] M. I. Dyakonov, V. I. Perel, *Phys. Lett.* **A35**, 459 (1971).
- [81] N. S. Averkiev, M. I. Dyakonov, *Sov. Phys. Semicond.* **17**, 393 (1983).
- [82] A. A. Bakun, B. P. Zakharchenya, A. A. Rogachev, M. N. Tkachuk, V. G. Fleisher, *JETP Lett.* **40**, 1293 (1984).
- [83] Y. K. Kato, R. C. Myers, A. C. Gossard, D. D. Awschalom, *Science* **306**, 1910 (2004).
- [84] J. Wunderlich, B. Kaestner, J. Sinova, T. Jungwirth, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 047204 (2005).
- [85] M. I. Dyakonov, A. V. Khaetskii, In: *Spin Physics in Semiconductors*, ed. M. I. Dyakonov, 2nd edition, (Springer, 2017), Ch. 8.
- [86] M. I. Dyakonov, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 126601 (2007).
- [87] S. Velez, V. N. Golovach, A. Bedoya-Pinto, M. Isasa, E. Sagasta, M. Abadia, C. Rogero, L. E. Hueso, F. S. Bergeret, F. Casanova, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 016603 (2016).

- [88] H. Nakayama, M. Althammer, Y.-T. Chen, K. Uchida, Y. Kajiwara, D. Kikuchi, T. Ohtani, S. Geprags, M. Opel, S. Takahashi, R. Gross, G. E. W. Bauer, S. T. B. Goennenwein, E. Saitoh, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 206601 (2013).
- [89] D. Wei, M. Obstbaum, M. Ribow, C. H. Back, G. Woltersdorf, *Nature Comm.* **5**, 3768 (2014).
- [90] P. Hyde, Lihui Bai, D. M. J. Kumar, B. W. Southern, C.-M. Hu, S. Y. Huang, B. F. Miao, C. L. Chien, *Phys. Rev. B* **89**, 180404 (2014).
- [91] M. Weiler, J. M. Shaw, H. T. Nembach, T. J. Silva, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 157204 (2014).
- [92] C. Hahn, G. de Loubens, M. Viret, O. Klein, V. V. Naletov, J. Ben Youssef, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 217204 (2013).
- [93] T. Chiba, G. E. W. Bauer, S. Takahashi, *Phys. Rev. Appl.* **2**, 034003 (2014).
- [94] W. Chen, M. Sigrist, J. Sinova, D. Manske, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 217203 (2015).
- [95] C. Ulloa, R. A. Duine, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 177202 (2018).
- [96] F. S. M. Guimares, M. dos Santos Dias, J. Bouaziz, A. T. Costa, R. B. Muniz, S. Lounis, *Sci. Rep.* **7**, 3686 (2017).
- [97] A. Hoffmann, *IEEE Transactions on Magnetics* **49**, 5172 (2013).
- [98] M. B. Jungfleisch, W. Zhang, R. Winkler, A. Hoffmann, In: *Spin Physics in Semiconductors*, ed. M. I. Dyakonov, 2nd edition, (Springer, 2017), Ch. 11.
- [99] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред* (Москва, Физматлит, 2005).
- [100] V. Karpus, *Semiconductors* **20**, 12 (1986).
- [101] П. С. Алексеев, М. С. Кипа, В. И. Перель, И. Н. Ясиевич, *ЖЭТФ* **133**, 921 (2008).
- [102] A. V. Bobylev, F. A. Маао, A. Hansen, E. H. Hauge, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 197 (1995).
- [103] Y. M. Beltukov, M. I. Dyakonov, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 176801 (2016).
- [104] M. S. Steinberg, *Phys. Rev.* **109**, 1486 (1958).
- [105] R. Haug, Negative magnetoresistance in high-mobility heterostructures, Workshop: Quantum transport in 2D systems, Luchon, France, May 23-30, 2015.
- [106] G. M. Gusev, A. S. Jaroshevich, A. D. Levin, Z. D. Kvon, A. K. Bakarov, *Sci. Rep.* **10**, 7860 (2020).
- [107] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика* (Москва, Наука, 1986).
- [108] A. N. Kaufman, *Physics of Fluids* **3**, 610 (1960).
- [109] I. M. Khalatnikov, A. A. Abrikosov, *JETP* **6**, 84 (1958).

- [110] V. I. Fal'ko, D. E. Khmel'nitskii, *JETP* **68**, 1150 (1989).
- [111] V. A. Volkov, A. A. Zabolotnykh, *Phys. Rev. B* **89**, 121410 (2014).
- [112] J. H. Smet, B. Gorshunov, C. Jiang, L. Pfeiffer, K. West, V. Umansky, M. Dressel, R. Meisels, F. Kuchar, K. von Klitzing *Phys. Rev. Lett.* **95**, 116804 (2005).
- [113] J. H. Smet, B. Gorshunov, C. Jiang, L. Pfeiffer, K. West, V. Umansky, M. Dressel, R. Meisels, F. Kuchar, K. von Klitzing, *Physica E* **35**, 315 (2006).
- [114] T. Herrmann, I. A. Dmitriev, D. A. Kozlov, M. Schneider, B. Jentzsch, Z. D. Kvon, P. Olbrich, V. V. Bel'kov, A. Bayer, D. Schuh, D. Bougeard, T. Kuczmik, M. Oltcher, D. Weiss, S. D. Ganichev *Phys. Rev. B* **94**, 081301 (2016).
- [115] T. Herrmann, Z. D. Kvon, I. A. Dmitriev, D. A. Kozlov, B. Jentzsch, M. Schneider, L. Schell, V. V. Bel'kov, A. Bayer, D. Schuh, D. Bougeard, T. Kuczmik, M. Oltcher, D. Weiss, S. D. Ganichev, *Phys. Rev. B* **96**, 115449 (2017).
- [116] D. A. Bandurin, E. Monch, K. Kapralov, I. Y. Phinney, K. Lindner, S. Liu, J. H. Edgar, I. A. Dmitriev, P. Jarillo-Herrero, D. Svintsov, S. D. Ganichev, arXiv: 2106.02117 (2021).
- [117] M. G. Vavilov, I. L. Aleiner, *Phys. Rev. B* **69**, 035303 (2004).
- [118] Д. Пайнс, Ф. Нозьер, Теория квантовых жидкостей (Москва, Мир, 1967).
- [119] J. Sykes, G. A. Brooker, *Annals of Physics* **56**, 1 (1970).
- [120] И. В. Кукушкин, В. А. Волков, Двумерная электронная жидкость в сильном магнитном поле (Москва, Физматкнига, 2016).
- [121] I. V. Kukushkin, S. Schmult, *JETP Letters* **101**, 693 (2015).
- [122] A. V. Shchepetilnikov, D. D. Frolov, Yu. A. Nefyodov, I. V. Kukushkin, S. Schmult *Phys. Rev. B* **95**, 161305 (2017).
- [123] X. Fu, Q. A. Ebner, Q. Shi, M. A. Zudov, Q. Qian, M. J. Manfra, *Phys. Rev. B* **95**, 235415 (2017).
- [124] E. I. Rashba, V. I. Sheka, Electric-dipole spin resonance Landau Level Spectroscopy, ed. G. Landwehr and E. I. Rashba (Amsterdam: Elsevier, 1991), Ch. 4.
- [125] D. Svintsov, *Phys. Rev. B* **97**, 121405 (2018).
- [126] J. M. Link, D. E. Sheehy, B. N. Narozhny, J. Schmalian, *Phys. Rev. B* **98**, 195103 (2018).
- [127] W. Kohn, *Phys. Rev.* **123**, 1242 (1961).
- [128] P. J. Ledwith, H. Guo, L. Levitov, arXiv:1708.01915v1 (2017).
- [129] P. J. Ledwith, H. Guo, L. Levitov, *Annals of Physics* **411**, 167913 (2019).

- [130] P. J. Ledwith, H. Guo, L. Levitov, arXiv:1708.01915v2 (2019).
- [131] A. Principi, G. Vignale, M. Carrega, M. Polini, *Phys. Rev. B* **93**, 125410 (2016).
- [132] A. Principi, G. Vignale, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 056603 (2015).
- [133] J. Sykes, G. A. Brooker, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 279 (1968).
- [134] B. N. Narozhny, G. Zala, I. L. Aleiner, *Phys. Rev. B* **64**, 214204 (2001).
- [135] B. N. Narozhny, G. Zala, I. L. Aleiner, *Phys. Rev. B* **65**, 180202 (2002).
- [136] R. N. Gurzhi, A. N. Kalinenko, A. I. Kopeliovich, *Sov. J. Low Temp. Phys.* **17**, 514 (1991).
- [137] R. N. Gurzhi, A. N. Kalinenko, A. I. Kopeliovich, *Phys. Low-Dim. Struct.* **2**, 75 (1994).
- [138] A. V. Chaplik, *JETP* **33**, 997 (1971).
- [139] I. M. Khalatnikov, A. A. Abrikosov, *JETP* **5**, 887 (1957).
- [140] P. L. Kapitza, *P. L. Proc. R. Soc. London A* **119**, 358 (1928).
- [141] A. L. Friedman, J. L. Tedesco, P. M. Campbell, J. C. Culbertson, E. Aifer, F. K. Perkins, R. L. Myers-Ward, J. K. Hite, C. R. Eddy, G. G. Jernigan, D. K. Gaskill, *Nano Lett.* **10**, 3962 (2010).
- [142] R. S. Singh, X. Wang, W. C. Ariando, A. T. S. Wee, *App. Phys. Lett.* **101**, 183105 (2012).
- [143] M. Veldhorst, M. Snelder, M. Hoek, C. G. Molenaar, D. P. Leusink, A. A. Golubov, H. Hilgenkamp, A. Brinkman, *Phys. Status Solidi RRL* **7**, 26 (2013).
- [144] W. Wang, Y. Du, G. Xu, X. Zhang, E. Liu, Z. Liu, Y. Shi, J. Chen, G. Wu, X. Zhang, *Sci. Rep.* **3**, 2181 (2013).
- [145] G. M. Gusev, E. B. Olshanetsky, Z. D. Kvon, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretzky, *Phys. Rev. B* **87**, 081311 (2013).
- [146] S. Wiedmann, A. Jost, C. Thienel, C. Brüne, P. Leubner, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, J. C. Maan, U. Zeitler, *Phys. Rev. B* **91**, 205311 (2015).
- [147] C. M. Wang, X. L. Lei, *Phys. Rev. B* **92**, 125303 (2015).
- [148] F. Kisslinger, C. Ott, C. Heide, E. Kampert, B. Butz, E. Spiecker, S. Shallcross, H. B. Weber, *Nature Phys.* **11**, 650 (2015).
- [149] M. N. Ali, J. Xiong, S. Flynn, Q. Gibson, L. Schoop, N. Haldolaarachchige, N. P. Ong, J. Tao, R. J. Cava, *Nature* **514**, 205 (2014).
- [150] I. Pletikovic, M. N. Ali, A. Fedorov, R. J. Cava, T. Valla, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 216601 (2014).
- [151] C. Shekhar, A. K. Nayak, Y. Sun, M. Schmidt, M. Nicklas, I. Leermakers, U. Zeitler, Z. Liu, Y. Chen, W. Schnelle, J. Grin, C. Felser, B. Yan, *Nat. Phys.* **11**, 645 (2015).

- [152] N. Kumar, C. Shekhar, S.-C. Wu, I. Leermakers, O. Young, U. Zeitler, B. Yan, C. Felser, *Phys. Rev. B* **93**, 241106 (2016).
- [153] P.-J. Guo, H.-C. Yang, K. Liu, Z.-Y. Lu, *Phys. Rev. B* **93**, 235142 (2016).
- [154] R. Singha, A. Pariari, B. Satpati, P. Mandal, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **114**, 2468 (2017).
- [155] Y.-Y. Lv, B.-B. Zhang, X. Li, S.-H. Yao, Y. B. Chen, J. Zhou, S.-T. Zhang, M.-H. Lu, Y.-F. Chen, *Appl. Phys. Lett.* **108**, 244101 (2016).
- [156] K. Gopinadhan, Y. J. Shin, R. Jalil, T. Venkatesan, A. K. Geim, A. H. Castro Neto, H. Yang, *Nat. Comm.* **6**, 8337 (2015).
- [157] X. Zhang, Q. Z. Xue, D. D. Zhu, *Phys. Lett. A* **320**, 471 (2004).
- [158] F. Arnold, C. Shekhar, S.-C. Wu, Y. Sun, R. D. dos Reis, N. Kumar, M. Naumann, M. O. Ajeesh, M. Schmidt, A. G. Grushin, J. H. Bardarson, M. Baenitz, D. Sokolov, H. Borrmann, M. Nicklas, C. Felser, E. Hassinger, B. Yan, *Nat. Comm.* **7**, 11615 (2016).
- [159] M. Diez, A. M. R. V. L. Monteiro, G. Mattoni, E. Cobanera, T. Hyart, E. Mulazimoglu, N. Bovenzi, C. W. J. Beenakker, A. D. Caviglia, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 016803 (2015).
- [160] H. Li, H. He, H.-Z. Lu, H. Zhang, H. Liu, R. Ma, Z. Fan, S.-Q. Shen, J. Wang, *Nat. Comm.* **7**, 10301 (2016).
- [161] M. V. Yakunin, A. V. Suslov, M. R. Popov, E. G. Novik, S. A. Dvoretzky, N. N. Mikhailov, *Phys. Rev. B* **93**, 085308 (2016).
- [162] C. Zhang, S.-Y. Xu, I. Belopolski, Z. Yuan, Z. Lin, B. Tong, N. Alidoust, C.-C. Lee, S.-M. Huang, T.-R. Chang, H.-T. Jeng, H. Lin, M. Neupane, D. S. Sanchez, H. Zheng, G. Bian, J. Wang, C. Zhang, H.-Z. Lu, S.-Q. Shen, T. Neupert, M. Z. Hasan, S. Jia, *Nat. Comm.* **7**, 10735 (2016).
- [163] H. Li, H. He, H.-Z. Lu, H. Zhang, H. Liu, R. Ma, Z. Fan, S.-Q. Shen, J. Wang *Nat. Comm.* **7**, 10301 (2016).
- [164] Y. Li, L. Li, J. Wang, T. Wang, X. Xu, C. Xi, C. Cao, J. Dai, *Phys. Rev. B* **94**, 121115 (2016).
- [165] П. С. Киреев, *Физика полупроводников* (Москва, Высшая школа, 1975).
- [166] A. A. Abrikosov, *Sov. Phys. JETP* **29**, 746 (1969).
- [167] A. A. Abrikosov, *Phys. Rev. B* **58**, 2788 (1998).
- [168] A. A. Abrikosov, *Europhys. Lett.* **49**, 789 (2000).
- [169] A. M. Dykhne, *Sov. Phys. JETP* **32**, 348 (1971).
- [170] M. M. Parish, P. B. Littlewood, *Nature* **426**, 162 (2003).

- [171] Э. И. Рашба, З. С. Грибников, В. Я. Кравченко, *УФН* **119**, 3 (1976).
- [172] M. Titov, R. V. Gorbachev, B. N. Narozhny, T. Tudorovskiy, M. Schuett, P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, A. D. Mirlin, M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, A. K. Geim, L. A. Ponomarenko, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 166601 (2013).
- [173] X. Xu, L. F. C. Pereira, Y. Wang, J. Wu, K. Zhang, X. Zhao, S. Bae, C. T. Bui, R. Xie, J. T. L. Thong, B. H. Hong, K. P. Loh, D. Donadio, B. Li, B. Ozyilmaz, *Nat. Comm.* **5**, 3689 (2014).
- [174] B. N. Narozhny, I. V. Gornyi, M. Titov, M. Schütt, A. D. Mirlin, *Phys. Rev. B* **91**, 035414 (2015).
- [175] М. В. Черемисин, *ЖЭТФ* **119**, 409 (2001).
- [176] M. Müller, S. Sachdev, *Phys. Rev. B* **78**, 115419 (2008).
- [177] M. S. Foster, I. L. Aleiner, *Phys. Rev. B* **79**, 085415 (2009).
- [178] D. Svintsov, V. Vyurkov, S. Yurchenko, T. Otsuji, V. Ryzhii, *J. Appl. Phys.* **111**, 083715 (2012).
- [179] P. S. Alekseev, A. P. Dmitriev, I. V. Gornyi, V. Yu. Kachorovskii, *Phys. Rev. B* **87**, 65432 (2013).
- [180] Г. Ю. Васильева, П. С. Алексеев, Ю. Л. Иванов, Ю. Б. Васильев, Д. Смирнов, Х. Шмидт, Р. Ж. Хауг, Ф. Гойдер, Г. Начтвей, *Письма в ЖЭТФ* **96**, 519 (2012).
- [181] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrixes* (New York, Chelsea Publishing Company, 1959).
- [182] M. N. Kogan, *Rarefied Gas Dynamics* (Springer, New York, 1969).
- [183] J.-U. Lee, D. Yoon, H. Kim, S.W. Lee, H. Cheong, *Phys. Rev. B* **83**, 081419 (2011).
- [184] S. Yigen, A. R. Champagne, *Nano Lett.* **14**, 289 (2014).
- [185] G. Fugallo, A. Cepellotti, L. Paulatto, et., al, *Nano Lett.* **14**, 6109 (2014).
- [186] D. L. Nika, E. P. Pokatilov, A. S. Askerov, A. A. Balandin *Phys. Rev. B* **79**, 155413 (2009).
- [187] N. Bonini, J. Garg, N. Marzari, *Nano Lett.* **12**, 2673 (2012).
- [188] L. Lindsay, D. A. Broido, N. Mingo, *Phys. Rev. B* **82**, 115427 (2010).
- [189] K. H. Michel, S. Costamagna, F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **91**, 134302 (2015).
- [190] L. Paulatto, F. Mauri, M. Lazzeri, *Phys. Rev. B* **87**, 214303 (2013).
- [191] E. Pop, V. Varshney, A. K. Roy, *MRS Bull.* **37**, 1273 (2012).
- [192] K. Saito, J. Nakamura, A. Natori, *Phys. Rev. B* **76**, 115409 (2007).
- [193] A. V. Savin, Y. S. Kivshar, B. Hu, *Phys. Rev. B* **82**, 195422 (2010).

- [194] S. Lee, D. Broido, K. Esfarjani, G. Chen, *Nat. Comm.* **6**, 6290 (2015).
- [195] A. Cepellotti, G. Fugallo, L. Paulatto, M. Lazzeri, F. Mauri, N. Marzari, *Nat. Comm.* **6**, 6400 (2015).
- [196] K. H. Michel, P. Scuracchio, F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **96**, 094302 (2017).
- [197] C. W. J. Beenakker, H. van Houten, Quantum Transport in Semiconductor Nanostructures (review), in *Semiconductor Heterostructures and Nanostructures*, ed. H. Ehrenreich and D. Turnbull (Academic Press, 1991), vol. 44 of *Solid State Physics*, pp. 1-228.
- [198] T. Holder, R. Queiroz, T. Scaffidi, N. Silberstein, A. Rozen, J. A. Sulpizio, L. Ella, S. Ilani, A. Stern, *Phys. Rev. B* **100**, 245305 (2019).
- [199] K. E. Nagaev, O. S. Ayvazyan, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 216807 (2008).
- [200] K. E. Nagaev, T. V. Kostyuchenko, *Phys. Rev. B* **81**, 125316 (2010).
- [201] M. Yu. Melnikov, J. P. Kotthaus, V. Pellegrini, L. Sorba, G. Biasiol, V. S. Khrapai, *Phys. Rev. B* **86**, 075425 (2012).
- [202] Yu. O. Alekseev, A. P. Dmitriev, *Phys. Rev. B* **104**, 085434 (2021).
- [203] E. H. Sondheimer, *Phys. Rev.* **80**, 401 (1950).
- [204] D. K. C. MacDonald, R. Sarginson, *Proc. Roy. Soc. A (London)* **759**, 223 (1950).
- [205] E. Ditlefsen, J. Lothe, *Philos. Mag.* **14**, 759 (1966).
- [206] D. K. C. MacDonald, *Nature* **163**, 639 (1949).
- [207] T. J. Thornton, M. L. Roukes, A. Scherer, B. P. Van de Gaag, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2128 (1989).
- [208] A. C. Keser, D. Q. Wang, O. Klochan, D. Y. H. Ho, O. A. Tkachenko, V. A. Tkachenko, D. Culcer, S. Adam, I. Farrer, D. A. Ritchie, O. P. Sushkov, A. R. Hamilton, *Phys. Rev. X* **11**, 031030 (2021).
- [209] A. Gupta, J. J. Heremans, G. Kataria, M. Chandra, S. Fallahi, G. C. Gardner, M. J. Manfra, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 076803 (2021).
- [210] A. M. Dykhne, *JETP* **32**, 63 (1971).
- [211] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (Москва, Физматгиз, 1962).