

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук

На правах рукописи

КРААВ КИРИЛЛ ЮРЬЕВИЧ

**СВОЙСТВА РЕЛЯТИВИСТСКИХ R-МОД
И ВЛИЯНИЕ ДИФФУЗИИ НА ДИНАМИКУ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД**

Специальность: 1.3.1 – Физика космоса, астрономия

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н.
Гусаков Михаил Евгеньевич

Санкт-Петербург – 2026

Содержание

Введение	4
1 Элементы теории колебаний	11
1.1 Звездное вещество и модель нейтронной звезды	11
1.2 Бездиссипативная гидродинамика	16
1.2.1 Уравнения бездиссипативной гидродинамики	18
1.2.2 Нейтронная звезда в равновесии	23
1.2.3 Бездиссипативные уравнения колебаний	28
1.2.4 Закон сохранения энергии	37
1.3 Диссипация и гравитационное излучение	47
1.3.1 Диссипативные механизмы	47
1.3.2 Определение ζ и γ из уравнений непрерывности	50
1.3.3 Диссипативные энергопотери	58
1.3.4 Излучение гравитационных волн и CFS неустойчивость	65
1.3.5 Эволюционные времена колебаний	69
1.4 О влиянии нуклонного спаривания	70
1.4.1 Влияние на диффузию частиц	70
1.4.2 Влияние на коэффициент сдвиговой вязкости	71
1.4.3 Влияние на скорости реакций	72
1.5 Уравнения колебаний в ньютоновской теории	78
2 Усиленная диффузия в сверхпроводящих нейтронных звездах . .	82
2.1 Краткое введение и постановка задачи	82
2.2 Усиление диффузии сверхпроводимостью	83
2.3 Эффективность диффузии как диссипативного механизма	90
2.3.1 Микрофизические входные данные	90
2.3.2 Подавление звуковых волн	90
2.3.3 Подавление глобальных колебаний невращающихся звезд	95
2.4 Обсуждение результатов главы 2	97

3	Моделирование г-мод	99
3.1	Кратко об г-модах и проблемах их моделирования	99
3.2	R-моды в ньютоновской теории	103
3.2.1	Стандартный подход к моделированию г-мод	103
3.2.2	Уравнения ньютоновских г-мод	105
3.3	R-моды в общей теории относительности	112
3.3.1	Релятивистские уравнения колебаний	112
3.3.2	Проблема непрерывного спектра г-мод	113
3.3.3	Уравнения релятивистских г-мод	119
3.4	Особенности релятивистских г-мод	133
3.4.1	Результаты численных расчетов	133
3.4.2	Неаналитичность и ордеринг г-мод в ОТО	138
3.4.3	Релятивистские г-моды в пределе $\kappa \rightarrow 0$	149
3.4.4	Объяснение численных результатов	161
3.4.5	О влиянии коры на собственные функции г-мод	164
3.5	Обсуждение результатов главы 3	168
4	Окна неустойчивости г-мод	176
4.1	Об окнах неустойчивости и параметрах звезд в LMXB системах	176
4.2	Энергия г-мод и темпы ее изменения	182
4.2.1	Обзор общих выражений	182
4.2.2	Применение к г-модам	184
4.3	Роль диффузии в подавлении г-мод	195
4.3.1	Микрофизические входные данные	196
4.3.2	Эволюционные времена г-мод	196
4.3.3	Окна неустойчивости г-мод	200
4.4	Подавление г-мод гиперонной вязкостью	204
4.4.1	Микрофизические входные данные	204
4.4.2	R-моды в гиперонных звездах	209
4.4.3	Окна неустойчивости г-мод в гиперонных звездах	210
4.5	Обсуждение результатов главы 4	220
	Заключение	229
	Список литературы	232

Введение

Актуальность темы диссертации

Нейтронные звезды (НЗ) представляют собой компактные астрофизические объекты с массой порядка массы Солнца и радиусом порядка 12 км [1–3]. Плотность вещества в их внутренних слоях может достигать 10^{14} – 10^{15} г/см³, тогда как температура существенно ниже температуры вырождения $T_F \sim 10^{12}$ – 10^{13} К. Такую «холодную» сверхплотную материю в настоящее время невозможно воспроизвести в земных лабораториях, а ее теоретическое исследование затруднено отсутствием точных методов описания сильных ядерных многочастичных взаимодействий. В этих условиях наблюдения НЗ являются уникальным источником информации о физических свойствах сверхплотного вещества. Ограничения на свойства такого вещества могут быть получены, в частности, путем сопоставления наблюдаемых характеристик звездных колебаний с предсказаниями теоретических моделей [4–10]. Применение такого подхода требует детального понимания физики колебаний: их типов, механизмов затухания, а также их эволюции под действием излучения гравитационных волн. Исследованию этих актуальных вопросов и посвящена данная работа. Существенная часть работы сосредоточена на изучении r -мод — квазитороидальных колебаний вращающихся звезд, для которых основной возвращающей силой служит сила Кориолиса [11, 12]. Вследствие неустойчивости, обусловленной излучением гравитационных волн [13, 14], эти колебания представляют значительный интерес с точки зрения наблюдений [10, 15, 16]. В диссертации представлен оригинальный метод, позволяющий исследовать влияние эффектов общей теории относительности (ОТО) на физические свойства r -мод в НЗ. Долгое время этот вопрос оставался недостаточно изученным из-за отсутствия надежного подхода к описанию релятивистских r -мод. Кроме того, в работе выявлена важная роль диффузии частиц в подавлении колебаний НЗ. Полученные результаты указывают на необходимость пересмотреть ряд устоявшихся представлений о физике колебаний НЗ, прежде всего о свойствах r -мод.

Цели и задачи работы

В работе представлены результаты двух взаимосвязанных направлений исследований. Цель первого направления – изучить роль диффузии частиц в подавлении колебаний НЗ и сравнить подавление диффузией с подавлением сдвиговой и объемной вязкостью – диссипативными механизмами, которые наиболее часто рассматриваются в литературе. Основным интересом представляет сравнение диффузии со сдвиговой вязкостью, которая обеспечивает доминирующий вклад в диссипацию энергии колебаний при температурах $T \lesssim 10^8$ К [17–19]. Цель второго направления – изучить влияние релятивистских эффектов на свойства r -мод, в том числе на их гравитационно-волновую неустойчивость и подавление сдвиговой вязкостью, объемной вязкостью и диффузией. В частности, ставится цель исследовать возможность подавления r -мод в звездах с параметрами, типичными для НЗ в маломассивных рентгеновских двойных (LMXB) системах. Для достижения этих целей были поставлены следующие задачи:

1. Рассчитать и сравнить между собой времена подавления диффузией и сдвиговой вязкостью для звуковых волн, а также f -мод, p -мод и g -мод в невращающихся НЗ. Оценить влияние эффектов нуклонного спаривания на эффективность подавления диффузией.
2. Разработать подход к описанию релятивистских r -мод, рассчитать их спектр и собственные функции (с.ф.), сравнить результаты с предсказаниями ньютоновской теории.
3. Для релятивистских и ньютоновских r -мод рассчитать времена гравитационно-волновой раскачки и подавления сдвиговой вязкостью, объемной вязкостью (нуклонной и гиперонной) и диффузией.
4. Рассчитать «окна неустойчивости» r -мод (диапазон угловых скоростей вращения и температур НЗ, при которых гравитационно-волновая неустойчивость эффективнее диссипативных механизмов [11, 20–26]) в НЗ с нуклонными и гиперонными ядрами. Оценить влияние эффектов нуклонного спаривания и релятивистских эффектов на окна неустойчивости и возможность подавления r -мод в звездах в LMXB системах.

Научная новизна

Большинство результатов, представленных в работе, были получены впервые. В частности:

1. Впервые рассчитаны диффузионные времена подавления звуковых волн, f -мод, p -мод и g -мод в НЗ с нуклонным составом вещества. Показано, что диссипация за счет диффузии значительно усиливается протонной сверхпроводимостью, из-за чего в сверхпроводящих не слишком горячих НЗ ($T \lesssim 10^8$ К) с нуклонным составом именно диффузия оказывается ведущим диссипативным механизмом для звука, p -мод и g -мод.
2. Предложен подход к разрешению «проблемы непрерывного спектра» – качественных противоречий, возникающих при использовании разных подходов к релятивистскому моделированию r -мод. В рамках этого подхода получены приближенные уравнения, описывающие релятивистское обобщение ньютоновских r -мод. С их помощью впервые рассчитаны спектр и с.ф. релятивистских r -мод.
3. Показано, что релятивистский эффект увлечения инерциальных систем отсчета (и.с.о.) существенно модифицирует спектр r -мод и геометрию соответствующих потоков вещества, а при уменьшении угловой скорости вращения звезды приводит к локализации r -мод во внешних слоях звезды. Установлено, что эти особенности релятивистских r -мод связаны с тем, что увлечение и.с.о. приводит к неаналитической зависимости их с.ф. и спектра от угловой скорости вращения звезды. Получены не имеющие ньютоновских аналогов формулы для спектра и с.ф. неаналитических r -мод в пределе медленного вращения.
4. Впервые получены формулы для расчета энергии релятивистских r -мод и темпов ее изменения за счет излучения гравитационных волн и диссипации, обусловленной сдвиговой вязкостью, объемной вязкостью и диффузией. Показано, что особенности r -мод в ОТО модифицируют зависимость данных величин от угловой скорости вращения звезды. Установлен явный вид этой зависимости в пределе медленного вращения звезды.

5. Впервые для релятивистских r -мод в НЗ с нуклонным составом рассчитаны времена гравитационно-волновой раскачки и времена подавления сдвиговой вязкостью, объемной вязкостью и диффузией. Показано, что особенности с.ф. релятивистских r -мод приводят к значительному усилению их подавления диффузией и объемной вязкостью. Показано, что для релятивистских r -мод в сверхпроводящих не слишком горячих НЗ ($T \lesssim 10^8$ К) с нуклонным составом диффузия частиц оказывается ведущим диссипативным механизмом.
6. Впервые рассчитаны окна неустойчивости релятивистских r -мод в НЗ с нуклонным составом. Рассмотрена роль диффузии как возможного разрешения «LMXB парадокса» [20]: звезды в LMXB системах показывают стабильное вращение на тех частотах, при которых простейшие модели предсказывают неустойчивость r -мод и стремительное замедление вращения из-за обусловленного r -модами излучения гравитационных волн. Показано, что диссипация за счет диффузии недостаточно велика, чтобы подавить r -моды и тем самым объяснить наблюдаемые параметры НЗ в LMXB системах.
7. Впервые рассчитаны окна неустойчивости релятивистских r -мод в НЗ с гиперонным составом. Обнаружено, что комбинированное влияние особенностей с.ф. релятивистских r -мод и усиления коэффициента объемной вязкости в гиперонном веществе приводят к сильному подавлению r -мод объемной вязкостью. Показано, что даже с учетом эффектов нуклонного спаривания гиперонная объемная вязкость способна обеспечить диссипацию, достаточную для подавления r -мод в LMXB системах.

Достоверность полученных результатов

Достоверность результатов обеспечивается использованием апробированных методов аналитического и численного моделирования, а также физически обоснованных предположений, границы применимости которых строго оговорены. В доступных предельных случаях полученные результаты сопоставлялись и показали согласие с ранее опубликованными аналитическими и численными расчетами.

Научная и практическая значимость работы

В работе предложены решения ряда актуальных проблем физики колебаний НЗ. Детально исследована природа проблемы непрерывного спектра, которая с 1997 года затрудняла изучение физических свойств релятивистских r -мод и делала его практически невозможным. Оригинальный подход к анализу уравнений колебаний, разработанный в диссертации, позволил выявить ряд специфических свойств релятивистских r -мод, в частности их усиленное подавление объемной вязкостью. Этот механизм подавления в совокупности с повышенным за счет гиперонов коэффициентом объемной вязкости позволяет при консервативных предположениях о свойствах звездного вещества разрешить еще одну проблему – объяснить наблюдаемые параметры НЗ в LMXB системах. Кроме того, в работе показано, что диссипация за счет диффузии частиц, ранее не рассматривавшаяся в контексте подавления звездных колебаний, существенно усиливается протонной сверхпроводимостью и для ряда колебаний становится ведущим диссипативным механизмом при не слишком высоких температурах. Таким образом, многие результаты, представленные в диссертации, являются неожиданными и обращают внимание на новые аспекты физики колебаний НЗ, которые необходимо учитывать как в теоретическом моделировании, так и при достоверной интерпретации наблюдений.

Положения, выносимые на защиту

1. Усиление диффузии частиц протонной сверхпроводимостью приводит к определяющей роли диффузии в подавлении звуковых волн, p -мод, g -мод и r -мод в сверхпроводящих нейтронных звездах с нуклонным составом вещества при температурах $T^\infty \lesssim 10^8$ К.
2. Эффект увлечения инерциальных систем отсчета существенно влияет на собственные функции r -мод, изменяет геометрию соответствующих потоков вещества и приводит к неаналитической зависимости r -мод от угловой скорости вращения звезды Ω . Спектр и собственные функции релятивистских r -мод в пределе $\Omega \rightarrow 0$ и слабого увлечения инерциальных систем отсчета описываются явными выражениями, не имеющими ньютоновских аналогов.

3. Неаналитичность релятивистских r -мод и связанная с ней нестандартная геометрия потоков вещества приводят к более сильному, чем в ньютоновском случае, подавлению r -мод диффузией и объемной вязкостью.
4. Гиперонная объемная вязкость способна подавить релятивистские r -моды в нейтронных звездах с параметрами, характерными для звезд в LMXB системах.

Апробация работы

Результаты работы были представлены на астрофизических семинарах ФТИ им. А.Ф. Иоффе (Санкт-Петербург; 2020, 2021, 2023 и 2024) и института Вейцмана (Rehovot; 2024), а также на международных и российских конференциях: «The Modern Physics of Compact Stars and Relativistic Gravity» (Yerevan; 2021 и 2025), «Infinite and Finite Nuclear Matter» (Дубна; 2023 и 2025), «Физика нейтронных звезд» (Санкт-Петербург; 2023), «High Energy Astrophysics» (Москва; 2022), «Всероссийская астрономическая конференция» (Москва; 2021), «ФизикА.СПб» (Санкт-Петербург; 2020, 2021 и 2024). Опубликовано 6 статей в рецензируемых изданиях, входящих в международную базу цитирований Web of Science, пять из которых входят в первый и второй уровень Белого списка Российского центра научной информации.

Публикации

Во всех работах вклад диссертанта является определяющим.

- [A1] Kraav K., Gusakov M. Diffusion as a damping mechanism for neutron-star oscillations // Journal of Physics Conference Series. — 2020. — Vol. 1967. — Id. 012023.
- [A2] Kraav K.Y., Gusakov M.E., Kantor E.M. Diffusion as a leading dissipative mechanism in superconducting neutron stars // MNRAS. — 2021. — Vol. 506, no. 1. — P. L74-L78.
- [A3] Kraav K. Y., Gusakov M. E., Kantor E. M. Nonanalytic behavior of the relativistic r -modes in slowly rotating neutron stars // Phys. Rev. D. — 2022. — Vol. 106, no. 10. — Id. 103009.

- [A4] Kraav K. Y., Gusakov M. E., Kantor E. M. Nonanalytic Relativistic r-Modes of Slowly Rotating Nonbarotropic Neutron Stars // Universe. — 2022. — Vol. 8, no. 10. — Id. 542.
- [A5] Kraav K. Y., Gusakov M. E., Kantor E. M. Instability windows of relativistic r -modes // Phys. Rev. D. — 2024. — Vol. 109, no. 4. — Id. 043012.
- [A6] Kraav K. Y., Gusakov M. E., Kantor E. M. Instability windows of relativistic r-modes in stably stratified neutron stars with hyperonic cores // Phys. Rev. D. — 2025. — Vol. 112, no. 4. — Id. 043012.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения, содержит 249 страниц, включая 24 рисунка, 2 таблицы и список литературы, насчитывающий 201 наименование.

Глава 1. Элементы теории колебаний

Данная диссертация посвящена изучению физики гидродинамических колебаний нейтронных звезд. Перед тем, как приступить непосредственно к изложению оригинальных результатов, мы хотели бы кратко обсудить ряд центральных элементов теории и представлений о нейтронных звездах, которые лежат в основе проведенных исследований. Изложение в предлагаемой вводной главе опирается на недавно разработанный формализм релятивистской диссипативной гидродинамики нормальных [27] и сверхтекучих/сверхпроводящих [28] смесей. По существу оно объединяет в себе несколько расширенные теоретические обзоры из оригинальных работ [29–31].

1.1 Звездное вещество и модель нейтронной звезды

Нейтронные звезды (НЗ) часто называют природными лабораториями для исследования свойств материи в экстремальных условиях, нереализуемых в земных экспериментах. По существу НЗ представляет собой гравитационно связанную смесь различных сортов частиц, свойства и состав которой значительно меняются по мере продвижения вглубь звезды, то есть с увеличением плотности [1–3]. Во внешних слоях звезды, именуемых *внешней корой*, вещество состоит из электронов и атомных ядер (ионов). Под внешней корой располагается *внутренняя кора*, состоящая из электронов, свободных нейтронов и обогащенных нейтронами атомных ядер. Целиком вся кора (внутренняя и внешняя) является относительно легкой и обладает толщиной порядка 0.1 радиуса звезды R . Остальную часть НЗ занимает массивное (содержащее практически всю массу) *ядро*, располагающееся под корой. Ядро делится на *внешнее*, состоящее из нейтронов, протонов и электронов, и *внутреннее*, в котором появляются мюоны, а в некоторых моделях вещества – также и более экзотические сорта частиц, такие как, например, *гипероны* – частицы, состоящие из u -, d - и обязательно s -кварков.

Звездное вещество называют *стандартным* или *нуклонным* в том случае, когда оно не содержит экзотических частиц и из барионов содержит только нейтроны и протоны. Наряду с нуклонным веществом мы также будем рассматривать *гиперонное*, в котором с ростом плотности допускается появление гиперонов. Порядок появления гиперонов разных сортов в таком веществе может варьироваться в зависимости от используемой для его описания модели. Согласно многим современным исследованиям [32–36], в первую очередь с ростом плотности ожидается появление Λ -гиперонов (uds) и Ξ^- -гиперонов (dss). Соответствующие физические условия могут встречаться в НЗ с массами $M \gtrsim 1.4 - 1.6 M_{\odot}$, где M_{\odot} – масса Солнца. Появление других сортов гиперонов в звездном веществе в принципе не исключено, однако в соответствующих моделях оно, как правило, происходит при более высоких плотностях, характерных для существенно более массивных звезд с $M \gtrsim 1.9 M_{\odot}$. Ниже мы не будем рассматривать столь массивные звезды, а потому ограничимся обсуждением случая, когда в веществе допускается появление только Λ - и Ξ^- -гиперонов.

Считается, что при температурах ниже 10^9 К нейтроны и протоны в недрах нейтронных звезд могут находиться в *сверхтекучем/сверхпроводящем* состоянии (см., например, работы [37–39]). Сверхтекучесть нейтронов предсказывается в большей части внешнего ядра и внутренней коры, в то время как сверхпроводимость протонов ожидается только в ядре звезды. Хотя зависимость критических температур сверхтекучего/сверхпроводящего перехода от плотности вещества демонстрирует сильную модельную зависимость, она, как правило, имеет колоколообразную форму и указывает на то, что при фиксированной температуре данные эффекты могут возникать лишь в ограниченном диапазоне плотностей. Согласно микроскопическим расчетам [40–43], в ядре звезды нейтроны переходят в сверхтекучее состояние при существенно более низких температурах, чем протоны – в сверхпроводящее. Таким образом, при не слишком низких температурах нейтроны в ядре НЗ могут быть нормальными, в то время как существенная часть протонов может быть в сверхпроводящем состоянии. В то же время может встречаться и обратная ситуация, когда протоны являются нормальными, а нейтроны – сверхтекучими: она может реализовываться при высоких плотностях, при которых температура сверхпроводящего перехода протонов может оказаться ниже температуры сверхтекучего перехода нейтронов.

Что касается гиперонов, свойства их сверхтекучести и сверхпроводимости известны значительно хуже. Согласно некоторым исследованиям (см., например, работы [44, 45], основанные на экспериментальном наблюдении [46]), Λ -гипероны могут становиться сверхтекучими лишь при достаточно низких температурах, $T \lesssim 10^7$ К. В то же время, однако, нельзя с уверенностью исключить и другую возможность, согласно которой температура сверхтекучего перехода Λ -гиперонов может оказаться не столь низкой (см. обзор [47] и ссылки на указанные в нем источники). Что касается Ξ^- -гиперонов, существуют указания, что их сверхпроводимость, вероятно, возникает при температурах выше тех, что требуются для сверхтекучести Λ -гиперонов, и вполне возможно, что в НЗ они находятся в сверхпроводящем состоянии [47].

При типичных для НЗ значениях массы $M \simeq 1.4 M_\odot$ и радиуса $R \simeq 12$ км плотность вещества в их недрах превышает плотность материи в атомных ядрах. Из-за столь высокой плотности практически во всей звезде температуры Ферми $T_F \sim 10^{12} - 10^{13}$ К различных составляющих вещества оказываются существенно выше температур $T \lesssim 10^{10}$ К, характерных для не слишком горячих/молодых НЗ. Таким образом, звездное вещество является *вырожденным*, то есть описывающие его термодинамические функции (давление, плотность энергии и другие) практически не зависят от температуры.

Кроме вырожденности вещества следует также отметить, что на макроскопических масштабах, характерных для гидродинамических явлений, его с хорошей точностью можно считать электрически нейтральным. Это связано с тем, что малейшее отклонение от электрической нейтральности ведет к возникновению сильного *самосогласованного электрического поля*, которое стремится ее восстановить (см., например, [27, 48–50]). Помимо отсутствия электрических зарядов можно также с высокой точностью считать, что на гидродинамических масштабах отсутствуют и значимые электрические токи. В самом деле, пользуясь уравнениями электродинамики, несложно оценить, что разность скоростей движения заряженных частиц, соответствующая наблюдаемым в НЗ значениям магнитного поля, является пренебрежимо малой с гидродинамической точки зрения. Описанные свойства вещества – электрическую нейтральность и отсутствие токов – мы в дальнейшем будем для краткости называть его *квзинейтральностью*¹.

¹Обратим внимание, что используемое в литературе понятие квазинейтральности, как правило, не подразумевает отсутствие электрических токов.

Свойства звездного вещества кодируются в его *уравнении состояния*, которое предоставляется микроскопической теорией и, как правило, может быть записано в виде $\varepsilon = \varepsilon(\{n_k\})$ или $p = p(\{n_k\})$, где ε – плотность энергии вещества, p – давление, а $\{n_k\}$ – набор концентраций n_k различных сортов частиц k . Уравнения состояния бывают *баротропными* или *небаротропными*. В баротропном случае термодинамические функции оказывается возможным рассматривать как функции одной единственной переменной (например, плотности энергии или барионной концентрации). В небаротропном случае подобная параметризация, напротив, является принципиально невозможной. Как мы увидим, баротропность вещества существенно модифицирует его гидродинамические свойства. Она может радикальным образом влиять на физические свойства колебаний (геометрию потоков вещества, их спектр и т.д.), а в ряде случаев и вовсе приводит к тому, что доступные в небаротропных звездах классы колебаний перестают существовать. Так, например, в баротропных звездах перестают существовать так называемые *g-моды* – колебания, управляемые преимущественно силой Архимеда. Также в баротропном веществе перестают существовать $l \neq m$ *r-моды*, управляемые преимущественно силой Кориолиса, а свойства «выживающих» $l = m$ *r-мод* разительно отличаются от свойств их аналогов в небаротропных звездах. Собственно изучению влияния небаротропности вещества на *r-моды* посвящена существенная часть данной работы.

Кору нейтронной звезды можно описывать баротропным уравнением состояния всюду за исключением небольших областей вблизи ее химических неоднородностей (скачков химического состава) [51]. В случае глобальных гидродинамических колебаний звезды, затрагивающих не только кору, но и ядро, на эти области приходится лишь малая часть колебательной энергии, и их влиянием можно пренебречь. Во внешнем ядре, состоящем из нейтронов, протонов и электронов, давление зависит от двух переменных (концентрации трех сортов частиц связаны одним условием квазинейтральности), а потому, строго говоря, вещество здесь является небаротропным. Однако, как мы упоминали ранее, нейтроны в большей части внешнего ядра являются сверхтекучими. Оказывается, что уравнения, описывающие колебания небаротропного вещества со сверхтекучими нейтронами, обладают свойствами, схожими со свойствами уравнений колебаний баротропного вещества с нормальными нейтронами. То есть из-за нейтронной сверхтекучести внешнее ядро является *эффективно ба-*

ротропным. В частности, в таком веществе, как и в нормальном баротропном, перестают существовать g -моды [52–55]. Наконец, та часть внешнего ядра, в которой нейтроны нормальные (если имеется), является небаротропной, как и все внутреннее ядро. При этом, в отличие от внешнего ядра, внутреннее ядро не становится эффективно баротропным из-за сверхтекучести нейтронов [56].

Опираясь на все вышесказанное, в этой работе мы предлагаем упрощенно моделировать НЗ как состоящую из двух областей с существенно различающимися физическими свойствами: (1) внешней баротропной, которую мы будем называть *корой* звезды, и (2) внутренней небаротропной, которую мы будем называть ее *ядром*. Вещество во всей звезде будет считаться вырожденным и квазинейтральным. Также мы не будем рассматривать сильно замагниченные НЗ, такие как магнитары, что позволяет нам пренебрегать влиянием магнитного поля на форму звезды и на ее колебания.

Как было упомянуто выше, кора является относительно тонкой и практически вся масса звезды сосредоточена в ее ядре. По этой причине вполне адекватное описание свойств глобальных колебаний, затрагивающих всю звезду, часто можно построить, опираясь на достаточно приближенную модель коры. В наших исследованиях, помимо того, что мы будем считать кору баротропной и описывать ее уравнением состояния $p = p(\varepsilon)$, мы также будем пренебрегать ее упругими свойствами и моделировать ее исключительно гидродинамически, тем самым игнорируя сдвиговые, торсионные и прочие моды колебаний, связанные с ее кристаллической решеткой. Что касается ядра звезды, оно будет моделироваться более точно – как небаротропная жидкая смесь различных сортов частиц, описываемая уравнением состояния $\varepsilon = \varepsilon(\{n_k\})$.

Для простоты мы также будем игнорировать крупномасштабные проявления нейтронной сверхтекучести и формально считать, что нейтроны движутся примерно с той же скоростью, что и нормальные компоненты вещества. Такое упрощенное описание позволяет оценить свойства так называемых *нормальных мод* колебаний, в которых нормальная и сверхтекучая компоненты действительно движутся почти одинаково (см., например, [52, 57–60]). Что касается протонов, для них, в свою очередь, мы рассмотрим два предельных случая: когда протоны являются нормальными, либо когда протоны являются сильно сверхпроводящими, то есть все протоны образуют куперовские пары. Наконец, Λ - и Ξ^- -гипероны для простоты будут считаться нормальными (в ре-

шаемых задачах влияние вероятной сверхпроводимости Ξ^- -гиперонов слабое и будет обсуждаться ниже). Таким образом, при сделанных приближениях нам необходимо рассмотреть гидродинамику в двух случаях: *несверхпроводящее* вещество, когда все *заряженные* сорта частиц нормальные, и *сверхпроводящее* вещество, в котором один из заряженных сортов частиц (на практике – протоны) является сильно сверхпроводящим. При этом в обоих пределах нейтроны могут быть как нормальными, так и сверхтекучими, а потому *нормальное* вещество, в котором *все* сорта частиц являются нормальными, оказывается частным случаем несверхпроводящего вещества и не требует отдельного рассмотрения. Как мы увидим ниже, в сделанных приближениях в бездиссипативном пределе сверхпроводимость не влияет на вид гидродинамических уравнений и в результате бездиссипативная гидродинамика сверхпроводящего и несверхпроводящего вещества эффективно совпадает с нормальной гидродинамикой, а нуклонное спаривание влияет только на кинетические свойства вещества.

Теперь мы готовы приступить к обсуждению формализма, который в рамках предложенной модели будет в последующих главах применяться для расчета конкретных гидродинамических колебаний НЗ. Нас будут интересовать прежде всего два класса задач: 1) как моделировать колебания НЗ и 2) как описывать влияние диссипативных эффектов и эффектов излучения гравитационных волн на динамику данных колебаний. В качестве диссипативных механизмов мы будем рассматривать сдвиговую вязкость (трение между жидкими слоями), диффузию частиц (трение между отдельными сортами частиц из-за разности в их скоростях) и объемную вязкость (неравновесное протекание химических реакций в ходе колебаний). Применимость сделанных выше приближений будет обсуждаться отдельно для каждой из рассматриваемых задач.

1.2 Бездиссипативная гидродинамика

Как правило, влияние диссипативных эффектов на динамику колебаний является слабым и может быть учтено по теории возмущений. Поэтому мы начнем с обсуждения уравнений бездиссипативной гидродинамики, а рассмотрение диссипативных эффектов отложим до раздела 1.3. Здесь и далее под бездиссипативными уравнениями подразумеваются такие, в которых отброшены слагаемые, приводящие к диссипации энергии в тепло, в нашем случае – связанные со сдвиговой вязкостью, объемной вязкостью и диффузией частиц.

Понятие объемной вязкости тесно связано с протеканием химических реакций в веществе. В ходе колебаний вещество отклоняется от химического равновесия, и, с физической точки зрения, можно рассматривать два предельных случая, когда та или иная химическая реакция не приводит к диссипации. В первом случае ее протекание происходит столь медленно, что характерное время релаксации вещества к химическому равновесию относительно данной реакции оказывается много больше периода колебаний и вещество «не успевает» среагировать на связанные с колебаниями изменения (сжатие/расширение). Во втором случае ситуация ровно противоположная: реакция протекает столь быстро, что в каждый момент времени вещество мгновенно подстраивается и потому находится практически в химическом равновесии относительно данной реакции. Как будет обсуждаться ниже, различные реакции в звездном веществе могут протекать с существенно различными скоростями. С этой точки зрения, полное отсутствие диссипации, связанной с химическими реакциями, реализуется только в том случае, когда каждая из реакций является либо очень медленной, либо очень быстрой. В действительности такая ситуация маловероятна, а потому в общем случае нам необходимо допускать существование реакций с промежуточными скоростями, приводящими к диссипации в системе, которая описывается введением объемной вязкости вещества. Здесь важно отметить, что, хотя данная диссипация является слабой и может учитываться по теории возмущений, в общем случае влияние химических реакций само по себе не обязательно является слабым и потому не всегда может учитываться таким способом. Это связано с тем, что в общем случае химические реакции приводят не только к слабой диссипации, но также модифицируют ряд физических характеристик вещества (например, его сжимаемость или адиабатический индекс) – эффект, который может оказаться достаточно существенным (см. раздел 1.3.2).

Таким образом, чтобы получить наиболее общие бездиссипативные уравнения, необходимо учесть активное протекание химических реакций, а затем идентифицировать и отбросить те слагаемые, которые приводят к диссипации. Получающиеся при этом уравнения колебаний очень похожи на уравнения колебаний в *веществе с замороженным составом*, в котором все реакции считаются очень медленными. Поэтому мы поначалу будем рассматривать этот более простой случай, а в удобный момент обсудим обобщение соответствующих уравнений на случай активных реакций.

Частица	Тип	Состав	e_k/e	b_k	s_k
n	барион, нуклон	udd	0	1	0
p	барион, нуклон	uud	1	1	0
Λ	барион, гиперон	uds	0	1	-1
Ξ^-	барион, гиперон	dss	-1	1	-2
e	лептон	-	-1	0	0
μ	лептон	-	-1	0	0

Таблица 1.1: Свойства встречающихся в звезде частиц: тип, кварковый заряд, электрический заряд e_k в единицах элементарного (положительного) заряда e , барионное число b_k и странность s_k .

1.2.1 Уравнения бездиссипативной гидродинамики

Начнем с того, что введем наиболее важные для изложения обозначения. Основными характеристиками звездного вещества, которые мы будем использовать, являются давление p , плотность энергии ε , плотность вещества $\rho \equiv \varepsilon/c^2$ (где c – скорость света), плотность энтальпии $w \equiv p + \varepsilon$, плотность энтропии s и температура T . Чтобы различать физические величины, относящиеся к разным сортам частиц, мы будем помечать их латинскими индексами (i, j, k, m, \dots). В таких обозначениях частицы сорта k характеризуются электрическим зарядом e_k , барионным числом b_k , странностью s_k (числом s-кварков в их составе, взятым со знаком минус), концентрацией n_k и химическим потенциалом μ_k . Также нам иногда будет удобно работать с барионной концентрацией n_b , концентрацией странности n_s , долями y_k различных сортов частиц и долей странности y_s , которые по определению вводятся следующими равенствами:

$$n_b \equiv b_k n_k, \quad n_s \equiv s_k n_k, \quad y_k \equiv \frac{n_k}{n_b}, \quad y_s \equiv \frac{n_s}{n_b}. \quad (1.1)$$

Здесь и далее, если не оговорено обратное, подразумевается суммирование по повторяющимся латинским индексам.

Некоторые из перечисленных характеристик различных сортов частиц для справки собраны в таблице 1.1. В случае сверхпроводящего вещества для сверхпроводящего сорта частиц (протонов) мы зарезервируем индекс «s». При необходимости апеллировать к конкретным сортам частиц мы будем использовать краткие обозначения этих частиц в качестве индексов: «n» – для нейтронов, «p» – для протонов, «e» – для электронов, « μ » – для мюонов и так далее.

Макроскопически сверхпроводимость/сверхтекучесть выбранного сорта частиц проявляется в том, что эти частицы могут без трения двигаться относительно остальных нормальных сортов частиц. В рамках нашей упрощенной модели данный эффект учитывается только для сверхпроводящих протонов, а сверхтекучие нейтроны для простоты считаются движущимися совместно с нормальными сортами частиц. Поэтому в *бездиссипативном* случае мы будем описывать плотности потока $j_{(k \neq s)}^\mu$ несверхпроводящих сортов частиц (в том числе нейтронов, даже если они сверхтекучие) коллективной *нормальной* 4-скоростью u^μ , в то время как для плотности потока сверхпроводящих частиц $j_{(s)}^\mu$, если такой рассматривается, мы введем *сверхпроводящую* 4-скорость $u_{(s)}^\mu$:

$$j_{(k \neq s)}^\mu = j_{(k \neq s)\text{nondiss}}^\mu \equiv n_k u^\mu, \quad j_{(s)}^\mu = j_{(s)\text{nondiss}}^\mu \equiv n_s u_{(s)}^\mu. \quad (1.2)$$

Относительное движение несверхпроводящей и сверхпроводящей компонент вещества нам будет удобно описывать вектором

$$w_{(s)}^\mu \equiv \mu_s [u_{(s)}^\mu - u^\mu]. \quad (1.3)$$

Здесь и далее мы используем греческие буквы ($\mu, \nu, \lambda, \eta, \dots$) для тензорных индексов. Если выбранная величина помимо тензорных индексов также имеет латинские (ассоциирующиеся с частицами), то последние для лучшей читаемости мы заключаем в круглые скобки. Всюду, где не оговорено обратное, мы подразумеваем суммирование по повторяющимся тензорным индексам.

Отметим, что даже в принятых приближениях формулы (1.2) все еще не отражают общий вид потоков в веществе со сверхтекучими нейтронами и сверхпроводящими протонами. Более точное описание должно учитывать эффект Андреева-Башкина [61], согласно которому движение одной сверхпроводящей/сверхтекучей компоненты индуцирует потоки другой. В результате потоки нейтронов и протонов ($s = p$) приобретают следующий вид [28]:

$$j_{(n)}^\mu = n_n u^\mu + Y_{np} w_{(p)}^\mu, \quad j_{(p)}^\mu = n_p u^\mu + Y_{pp} w_{(p)}^\mu, \quad Y_{pp} \mu_p + Y_{np} \mu_n = n_p, \quad (1.4)$$

где коэффициент Y_{np} описывает нейтрон-протонное увлечение. Обычно этот коэффициент является относительно малым, $|Y_{np}| \ll |Y_{pp}|$ (см., например, [62]), поэтому здесь мы для простоты кладем $Y_{np} = 0$ и получаем (1.2).

В общем случае, когда допускается сверхпроводимость одного сорта частиц $k = s$, тензор энергии-импульса вещества можно записать в виде [28]

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{nondiss}}^{\mu\nu} \equiv (w - \mu_s n_s) \mathbf{u}^\mu \mathbf{u}^\nu + \mu_s n_s \mathbf{u}_{(s)}^\mu \mathbf{u}_{(s)}^\nu + p \mathbf{g}^{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ – метрический тензор с сигнатурой $\{-, +, +, +\}$. Термодинамические функции в этом случае связаны соотношениями [28]²

$$d\varepsilon = \mu_k dn_k + T ds + \frac{n_s}{2\mu_s} d[w_{(s)\mu} w_{(s)}^\mu], \quad (1.6)$$

$$dp = n_k d\mu_k + s dT - \frac{n_s}{2\mu_s} d[w_{(s)\mu} w_{(s)}^\mu], \quad (1.7)$$

$$w \equiv p + \varepsilon = \mu_k n_k + Ts, \quad (1.8)$$

где первое уравнение – второй закон термодинамики, второе – уравнение Гиббса-Дюгема, а третье следует из первых двух. В используемом здесь формализме все термодинамические величины по определению измеряются в системе отсчета (с.о.), сопутствующей нормальной компоненте вещества:

$$\varepsilon = \mathbf{u}_\mu \mathbf{u}_\nu T^{\mu\nu}, \quad \mathbf{u}_\mu \mathbf{j}_{(k)}^\mu = -n_k. \quad (1.9)$$

Подставляя во второе соотношение токи (1.2) несверхпроводящих и сверхпроводящих частиц, получаем:

$$\mathbf{u}_\mu \mathbf{u}^\mu = -1, \quad \mathbf{u}_\mu \mathbf{u}_{(s)}^\mu = -1, \quad \mathbf{u}_\mu w_{(s)}^\mu = 0, \quad (1.10)$$

где последнее равенство следует из первых двух с учетом определения (1.3) вектора $w_{(s)}^\mu$. Легко убедиться, что с учетом этих равенств первое соотношение (1.9) выполняется автоматически. Также мы видим, что при таком определении n_k и ε нормальная 4-скорость \mathbf{u}^μ удовлетворяет стандартному условию нормировки. При этом сверхпроводящая скорость в общем случае не обязана удовлетворять такому условию: $\mathbf{u}_{(s)\mu} \mathbf{u}_{(s)}^\mu \neq -1$. Это связано с тем, что концентрация сверхпроводящего сорта частиц n_s измеряется в с.о., которая в общем случае может не являться сопутствующей для этого сорта.

²Тензор $T^{\mu\nu}$ (1.5) совпадает с тензором энергии-импульса из работы [28] (в бездиссипативном режиме с одним сверхпроводящим сортом частиц) с точностью до переобозначений $\mu_s \rightarrow \mu_p$, $n_s \rightarrow \mu_p Y_{pp}$ и $\mathbf{u}_{(s)}^\mu \rightarrow \mathbf{u}^\mu + w_{(p)}^\mu / \mu_p$. То же самое относится и к термодинамическим соотношениям (1.6)-(1.8). При этом замена $n_s \rightarrow \mu_p Y_{pp}$ использует приближение $Y_{np} = 0$ [см. формулу (1.4)].

В сильно вырожденном квазинейтральном веществе приведенные выше выражения существенно упрощаются. Во-первых, из-за вырожденности вещества в термодинамических соотношениях можно пренебречь слагаемыми с температурой. Во-вторых, из-за квазинейтральности вещества имеем

$$e_k j_{(k)}^\mu = 0, \quad e_k n_k = 0, \quad (1.11)$$

где второе равенство получается из первого сверткой со скоростью u_μ и использованием второго условия (1.9). Из этих уравнений следует, что $u_{(s)}^\mu = u^\mu$ и $w_{(s)}^\mu = 0$, то есть несверхпроводящая и сверхпроводящая компоненты вещества движутся вместе, а потому слагаемые с $w_{(s)}^\mu$ обращаются в ноль. По этим причинам термодинамические функции зависят только от концентраций различных сортов частиц, что оправдывает использованную ранее запись уравнения состояния вещества в виде $\varepsilon = \varepsilon(\{n_k\})$. Тензор энергии-импульса, плотности потока частиц и термодинамические соотношения в рассматриваемом случае приобретают такой же вид, как в случае нормального вырожденного вещества:

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{perfect fluid}}^{\mu\nu} \equiv w u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad j_{(k)}^\mu = j_{(k)\text{perfect fluid}}^\mu \equiv n_k u^\mu, \quad (1.12)$$

$$d\varepsilon = \mu_k dn_k, \quad dp = n_k d\mu_k, \quad w \equiv p + \varepsilon = \mu_k n_k, \quad df = (\partial f / \partial n_k) dn_k, \quad (1.13)$$

где f – произвольная термодинамическая функция. Это приводит к тому, что, как было анонсировано выше, сверхпроводимость в рассматриваемом бездиссипативном случае не влияет на уравнения гидродинамики нейтронной звезды. В частности, ее гидродинамическое равновесие и колебания описываются в точности теми же уравнениями, что и в случае нормального/несверхпроводящего вещества. Это, однако, вовсе не означает, что и диссипация в сверхпроводящем веществе будет такой же, как в несверхпроводящем. Как будет обсуждаться в разделах 1.3.3 и 1.4, сверхпроводимость модифицирует кинетические коэффициенты, описывающие диссипативные эффекты (коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости, коэффициенты диффузии, скорости химических реакций), а также самосогласованное электрическое поле, поддерживающее квазинейтральность вещества. В ряде случаев эти изменения кинетических коэффициентов могут значительно подавить или усилить соответствующие диссипативные энергопотери.

Обозначим ковариантную производную через ∇_μ , введем для удобства ортогональный проектор $\perp^{\mu\nu}$, выделяющий из тензоров часть, ортогональную 4-скорости, и введем ортогональную ковариантную производную $\perp\nabla^\mu$:

$$\perp^{\mu\nu} \equiv \mathbf{g}^{\mu\nu} + \mathbf{u}^\mu \mathbf{u}^\nu, \quad \perp\nabla^\mu \equiv \perp^{\mu\nu} \nabla_\nu, \quad \perp^{\mu\nu} \mathbf{u}_\nu = 0. \quad (1.14)$$

В сделанных предположениях бездиссипативная гидродинамика описывается уравнением состояния $\varepsilon = \varepsilon(\{n_k\})$, термодинамическими соотношениями (1.13), а также уравнением Эйлера (1.15) и уравнениями непрерывности (1.16):

$$\perp_\rho^\mu \nabla_\eta T^{\eta\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}^\rho \nabla_\rho \mathbf{u}^\mu = -(1/w) \perp\nabla^\mu p, \quad (1.15)$$

$$\nabla_\mu j_{(k)}^\mu = \Gamma_k/c \quad \Rightarrow \quad \nabla_\mu (n_k \mathbf{u}^\mu) = 0. \quad (1.16)$$

В общем случае в уравнения непрерывности входят числа Γ_k частиц сорта k , производимых в химических реакциях в единицу времени в единице объема. В приведенных уравнениях мы пренебрегли данными слагаемыми, поскольку мы пока что рассматриваем вещество с замороженным химическим составом.

Перед тем, как двинуться дальше, приведем для справки формулы вычисления ковариантной производной. Как правило, нам будут встречаться производные от тензоров не выше второго ранга:

$$\nabla_\rho f = \partial_\rho f, \quad (1.17)$$

$$\nabla_\rho A^\mu = \partial_\rho A^\mu + \Gamma_{\rho\eta}^\mu A^\eta, \quad (1.18)$$

$$\nabla_\rho A_\mu = \partial_\rho A_\mu - \Gamma_{\rho\mu}^\eta A_\eta, \quad (1.19)$$

$$\nabla_\rho A^{\mu\nu} = \partial_\rho A^{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\eta}^\mu A^{\eta\nu} + \Gamma_{\rho\eta}^\nu A^{\mu\eta}, \quad (1.20)$$

$$\nabla_\rho A_{\mu\nu} = \partial_\rho A_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\eta A_{\eta\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\eta A_{\mu\eta}. \quad (1.21)$$

где мы ввели символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\rho\eta}^\mu \equiv \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\mu\lambda} \left[\partial_\rho \mathbf{g}_{\lambda\eta} + \partial_\eta \mathbf{g}_{\lambda\rho} - \partial_\lambda \mathbf{g}_{\eta\rho} \right], \quad \partial_\rho \equiv \frac{\partial}{\partial x^\rho}. \quad (1.22)$$

Также упомянем полезную формулу для расчета ковариантной дивергенции:

$$\nabla_\mu A^\mu = (1/\sqrt{-\mathbf{g}}) \partial_\mu (\sqrt{-\mathbf{g}} A^\mu), \quad \mathbf{g} \equiv \det \mathbf{g}_{\mu\nu}. \quad (1.23)$$

1.2.2 Нейтронная звезда в равновесии

В данной работе под равновесием звезды мы будем подразумевать ситуацию, когда звезда одновременно находится в *гидростатическом*, *химическом* и *тепловом* равновесии. Такое равновесие соответствует состоянию системы с наибольшей энтропией, а потому в нем по определению отсутствует диссипация энергии, поскольку последняя связана с неизбежным ростом энтропии (см. раздел 1.3.3). Поэтому звезду в равновесии можно описывать сформулированными выше уравнениями бездиссипативной гидродинамики. Равновесные значения f_0 физических величин f мы будем отмечать индексом «0».

Химическое равновесие

Когда звезда находится в химическом равновесии, уравнение состояния можно записать в баротропном виде $p_0 = p_0(\varepsilon_0)$ не только в баротропной коре, но и в небаротропном ядре. Это связано с тем, что в химическом равновесии концентрации различных сортов частиц $n_{k0} = n_{k0}(n_{b0})$ могут рассматриваться как функции, зависящие только от равновесной барионной концентрации n_{b0} . Это позволяет рассматривать давление $p_0 = p_0(\{n_{k0}\})$ и плотность энергии $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\{n_{k0}\})$ как функции единственной переменной n_{b0} , которые параметрическим образом задают «баротропную» зависимость $p_0(\varepsilon_0)$ в равновесном ядре звезды. Чтобы определить концентрации n_{k0} в выбранной точке ядра, мы следуем [1] и ищем минимальное значение плотности энергии $\varepsilon(\{n_k\})$ при условиях квазинейтральности вещества, $e_k n_k = 0$, и фиксированной барионной концентрации, $n_b = b_k n_k$, соответствующей выбранной точке. Эта задача решается введением множителей Лагранжа $a_{1,2}$ и минимизацией функционала

$$\varepsilon(\{n_k\}) - a_1 e_k n_k - a_2 (b_k n_k - n_b) \mapsto \min, \quad (1.24)$$

что с учетом уравнения состояния и термодинамических соотношений (1.13) приводит к следующим равенствам:

$$\mu_{n0} b_k = \mu_{k0} + \frac{e_k}{e} \mu_{e0}, \quad \mu_{k0} = \mu_{k0}(\{n_{m0}\}), \quad e_k n_{k0} = 0, \quad b_k n_{k0} = n_{b0} \quad (1.25)$$

Эти уравнения образуют замкнутую систему, позволяющую определить концентрации $n_{k0} = n_{k0}(n_{b0})$ как функции барионной концентрации n_{b0} .

С помощью полученных уравнений легко показать, что в химическом равновесии имеют место следующие равенства:

$$w_0 = \mu_{n0} n_{b0}, \quad dp_0 = n_{b0} d\mu_{n0}, \quad d\varepsilon_0 = \mu_{n0} dn_{b0}. \quad (1.26)$$

Для их доказательства достаточно подставить химические потенциалы μ_{k0} из условия химического равновесия (1.25) в общие термодинамические соотношения (1.13), а затем воспользоваться квазинейтральностью вещества и определением барионной концентрации.

При благоприятных физических условиях частицы в ядре НЗ могут участвовать в различных химических реакциях. В нуклонном веществе важную роль играют так называемые *слабые лептонные процессы*. К таким реакциям относятся модифицированные урка (mUrca) процессы [63],

$$n + N \rightarrow p + N + l + \bar{\nu}_l, \quad n + N + \nu_l \leftarrow p + N + l, \quad (1.27)$$

и, при достаточно высоких плотностях (возможно реализующихся в наиболее массивных звездах), прямые урка (dUrca) процессы [64],

$$n \rightarrow p + l + \bar{\nu}_l, \quad n + \nu_l \leftarrow p + l, \quad (1.28)$$

где N обозначает любой нуклон, l – любой лептон, а $\nu_l/\bar{\nu}_l$ – соответствующее лептону l нейтрино/антинейтрино. Если же используемое уравнение состояния вещества допускает появление гиперонов, то последние также могут принимать участие в реакциях, аналогичных mUrca и dUrca процессам. Кроме таких реакций в гиперонном веществе открывается еще один класс химических реакций – так называемые *слабые безлептонные процессы*, обусловленные слабым и/или комбинированным слабым и сильным взаимодействием [65–68]:

$$n + n \leftrightarrow \Lambda + n, \quad (1.29)$$

$$n + p \leftrightarrow \Lambda + p, \quad (1.30)$$

$$n + \Lambda \leftrightarrow \Lambda + \Lambda, \quad (1.31)$$

$$n + \Xi^- \leftrightarrow \Lambda + \Xi^-, \quad (1.32)$$

$$n + \Lambda \leftrightarrow \Xi^- + p. \quad (1.33)$$

Наконец, при определенных условиях гипероны также могут принимать участие в *сильных процессах*, обусловленных сильным взаимодействием. В случае вещества с *прем* $\Lambda\Xi^-$ -составом, которое мы будем рассматривать, единственным таким процессом является следующая реакция:



Следует иметь в виду, что перечисленные реакции протекают только в том случае, когда они разрешены законами сохранения энергии и импульса частиц. В общем случае, поскольку импульсы вовлеченных в заданную реакцию частиц локализованы вблизи соответствующих поверхностей Ферми, удовлетворить указанным законам сохранения для выбранного процесса может оказаться возможным только начиная с некоторой пороговой плотности вещества.

Выше для удобства все реакции были разбиты на пары прямых (\rightarrow) и обратных (\leftarrow) процессов. В каждой паре предпочтительное направление можно определить по соответствующему химическому дисбалансу, который вводится как разность между химическими потенциалами частиц, вступивших в прямую реакцию (in), и частиц, полученных в результате ее протекания (out):

$$\mu_{\text{in}\leftrightarrow\text{out}} \equiv \sum_{\text{in}} \mu_k - \sum_{\text{out}} \mu_k. \quad (1.35)$$

Положительное значение $\mu_{\text{in}\leftrightarrow\text{out}}$ указывает, что прямой процесс энергетически выгоднее обратного и что число $\Gamma_{\text{in}\rightarrow\text{out}}$ прямых реакций, протекающих в единицу времени в единице объема, превышает соответствующее число обратных реакций $\Gamma_{\text{in}\leftarrow\text{out}}$. И наоборот, если значение $\mu_{\text{in}\leftrightarrow\text{out}}$ отрицательно, то предпочтительной является уже обратная реакция. Разность

$$\Gamma_{\text{in}\leftrightarrow\text{out}} \equiv \Gamma_{\text{in}\rightarrow\text{out}} - \Gamma_{\text{in}\leftarrow\text{out}} \quad (1.36)$$

в литературе носит название *скорости реакций*. В химическом равновесии, как следует из (1.25), для всех реакций имеем $\mu_{\text{in}\leftrightarrow\text{out}0} = 0$ и, следовательно, число прямых и число обратных реакций (если их протекание разрешено законами сохранения энергии и импульса) совпадают: $\Gamma_{\text{in}\leftrightarrow\text{out}0} = 0$.

Гидростатическое равновесие

При известном уравнении состояния гидростатическая структура НЗ – то есть равновесные гравитационное поле, 4-скорость и термодинамические величины как функции координат – находятся из уравнений Эйнштейна и термодинамических соотношений. Здесь мы рассматриваем медленно вращающиеся НЗ, у которых скорость вращения $\Omega = \text{const}$ много меньше скорости $\Omega_K \equiv \sqrt{GM/R^3}$ порядка кеплеровской, где G – гравитационная постоянная.

Гравитационное поле $g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu 0}$ медленно вращающейся НЗ в сферических координатах $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$ описывается интервалом [69]³

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta [d\varphi - \Omega \omega(r) dt]^2 + O(\Omega^2/\Omega_K^2), \quad (1.37)$$

а соответствующая равновесная скорость $u^\mu \equiv u_0^\mu$ имеет вид

$$\begin{aligned} u^\mu &= \Lambda(r, \theta) k^\mu, & k^\mu &= (1, 0, 0, \Omega/c), \\ \Lambda(r, \theta) &= (-k_\mu k^\mu)^{-1/2} = e^{-\nu(r)} + O(\Omega^2/\Omega_K^2). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Легко видеть, что функция Λ описывает красное гравитационное смещение в с.о. $x^{\hat{\mu}} = (\hat{c}t, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$, вращающейся вместе со звездой со скоростью Ω :

$$\hat{c}t = ct, \quad \hat{r} = r, \quad \hat{\theta} = \theta, \quad \hat{\varphi} = \varphi - (\Omega/c)ct. \quad (1.39)$$

Действительно, в этой с.о. $k^{\hat{\mu}} = (\partial x^{\hat{\mu}}/\partial x^\mu) k^\mu = \delta_{\hat{t}}^{\hat{\mu}}$ и, поскольку Λ , согласно (1.38), является скаляром, получаем⁴:

$$\Lambda = (-k_\mu k^\mu)^{-1/2} = (-k_{\hat{\mu}} k^{\hat{\mu}})^{-1/2} = (-g_{\hat{t}\hat{t}})^{-1/2}. \quad (1.40)$$

Поскольку вращение звезды считается медленным, метрические коэффициенты в формуле (1.37) находятся с помощью теории возмущений по Ω/Ω_K . Функции $\nu(r)$ и $\lambda(r)$ определяются из уравнений Эйнштейна в нулевом порядке по Ω/Ω_K , которые сводятся к известным уравнениям Толмена-Оппенгеймера-

³Наши обозначения отличаются от принятых в оригинальной работе [69]. Для удобства мы явно выделяем множитель Ω , поэтому у нас $\omega \sim 1$, в то время как в оригинальной работе этот множитель не выделяется и $\omega \sim \Omega$. Кроме этого для перехода к обозначениям работы [69] необходимо заменить $\nu \rightarrow \nu/2$ и $\lambda \rightarrow \lambda/2$.

⁴Для краткости для временных компонент тензоров вместо индексов ct и $\hat{c}t$ мы используем сокращенные t и \hat{t} .

Волкова [70, 71]. Уравнение, определяющее функцию $\omega(r)$, выводится из уравнений Эйнштейна в линейном порядке по Ω/Ω_K и имеет вид [69]

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left[r^4 e^{-(\nu+\lambda)} \frac{d\bar{\omega}}{dr} \right] + \frac{4\bar{\omega}}{r} \frac{d}{dr} e^{-(\nu+\lambda)} = 0, \quad \bar{\omega} \equiv 1 - \omega. \quad (1.41)$$

Функции $\omega(r)$ и $\bar{\omega}(r)$ описывают *эффект увлечения инерциальных систем отсчета* (и.с.о.): в релятивистской теории с точки зрения удаленного наблюдателя, локальные и.с.о. в точке r увлекаются с угловой скоростью $\Omega\omega(r)$ вокруг вращающейся звезды. Доказывается, что в общем случае функция $\omega(r)$ является положительной и монотонно убывает с ростом r [69].

Прямой проверкой можно убедиться, что для метрики (1.37) вектор k^μ является *вектором Киллинга*, то есть удовлетворяет уравнению Киллинга:

$$\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0. \quad (1.42)$$

Этот результат является прямым следствием того, что рассматриваемое пространство-время является стационарным ($\partial_t g_{\mu\nu} = 0$) и осесимметричным ($\partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0$). Как легко видеть, из уравнения Киллинга и формулы (1.38) для красного смещения вытекают следующие полезные соотношения:

$$\nabla_\mu k^\mu = 0, \quad k^\mu \nabla_\mu k_\nu = -k^\mu \nabla_\nu k_\mu = -(1/\Lambda^3) \nabla_\nu \Lambda. \quad (1.43)$$

Подставляя равновесную скорость (1.38) в уравнение Эйлера (1.15) и пользуясь данными соотношениями, получаем:

$$\nabla_\mu p_0 = -w_0 \Lambda^2 k^\rho \nabla_\rho k_\mu = (w_0/\Lambda) \nabla_\mu \Lambda. \quad (1.44)$$

Из этого равенства, в свою очередь, с учетом равновесных термодинамических соотношений (1.26), следует, что

$$\mu_{n0}^\infty \equiv \mu_{n0}/\Lambda = \text{const}. \quad (1.45)$$

Наконец, пользуясь (1.45) и химическим равновесием (1.25), получаем:

$$e_k \mu_{m0}^\infty - e_m \mu_{k0}^\infty = \text{const}, \quad \mu_{k0}^\infty \equiv \mu_{k0}/\Lambda. \quad (1.46)$$

Тепловое равновесие

Условие теплового равновесия можно вывести, например, из условия максимума энтропии при фиксированной энергии системы или из релятивистского кинетического уравнения (см., например, [72]). Оказывается, что, в отличие от ньютоновской теории, в релятивистском случае тепловому равновесию соответствует постоянство не локальной температуры T_0 , а температуры T^∞ с учетом красного смещения (далее – *красносмещенной* температуры):

$$T^\infty \equiv T_0/\Lambda = \text{const.} \quad (1.47)$$

1.2.3 Бездиссипативные уравнения колебаний

Обозначения и вспомогательные соотношения

В общем случае возмущенную НЗ можно изучать с помощью *точных* отклонений $\hat{\delta}f \equiv f - f_0$ физических величин f от их равновесных значений f_0 . Например, точное отклонение произведения двух функций (fg) равно $\hat{\delta}(fg) = \hat{\delta}fg_0 + f_0\hat{\delta}g + \hat{\delta}f\hat{\delta}g$. Однако, если возмущения являются слабыми, в уравнениях можно учитывать только слагаемые, линейные по амплитуде возмущения. В этом случае приближенное решение ищется в виде $f \approx f_0 + \delta f$, где величину δf часто называют *эйлеровым* возмущением величины f . По определению, эйлерово возмущение линейно по амплитуде возмущения и удовлетворяет правилу Лейбница: $\delta(fg) = \delta fg_0 + f_0\delta g$. Эйлеровыми возмущениями можно ограничиваться до тех пор, пока нас не интересуют квадратичные по амплитуде величины, такие как энергия возмущения. Как мы убедимся в разделе 1.2.4, в этом случае необходимо по крайней мере на начальном этапе рассматривать точные возмущения.

Возмущения метрического тензора приводят к возмущениям символов Кристоффеля и, следовательно, «возмущениям» ковариантной производной. Здесь и далее под величиной ∇_ρ , если она не стоит под знаком возмущения δ , мы будем понимать ковариантную производную, ассоциированную с равновесной метрикой (1.37). В таких обозначениях возмущение ковариантной производной, например, произвольного вектора A^μ (1.18) вычисляется по формуле

$$\delta(\nabla_\rho A^\mu) = \nabla_\rho \delta A^\mu + \delta \Gamma_{\rho\eta}^\mu A_0^\eta. \quad (1.48)$$

Также можно показать (см., например, [73]), что возмущения символов Кристоффеля (1.22) записываются в следующей ковариантной форме:

$$\delta\Gamma_{\rho\eta}^{\mu} = \frac{1}{2}\mathbf{g}^{\mu\lambda} \left[\nabla_{\rho}\delta\mathbf{g}_{\lambda\eta} + \nabla_{\eta}\delta\mathbf{g}_{\lambda\rho} - \nabla_{\lambda}\delta\mathbf{g}_{\eta\rho} \right]. \quad (1.49)$$

Ниже мы часто будем использовать не возмущение скорости $\delta\mathbf{u}^{\mu}$, а лагранжево смещение ξ^{μ} , которое показывает вариацию мировых линий жидких элементов, вызванную возмущением. В общем случае эти величины связаны равенством (см., например, [74])

$$\delta\mathbf{u}^{\mu} = \perp_{\rho}^{\mu} \mathcal{L}_u \xi^{\rho} - u^{\mu} \delta\Phi, \quad \delta\Phi \equiv -\frac{1}{2}u^{\eta}u^{\rho}\delta\mathbf{g}_{\eta\rho}, \quad (1.50)$$

где \mathcal{L}_u – производная Ли вдоль вектора u^{μ} , а под величиной \perp_{ρ}^{μ} , если она не стоит под знаком возмущения δ , здесь и ниже мы понимаем равновесный проектор (1.14). Кроме лагранжева смещения нам также понадобятся лагранжевы возмущения, которые выражаются через эйлеровы следующим равенством [74]:

$$\Delta f \equiv \delta f + \mathcal{L}_{\xi} f_0. \quad (1.51)$$

Легко убедиться, что возмущение скорости (1.50) автоматически удовлетворяет возмущенному условию нормировки (1.10). При этом лагранжево смещение, как видно из (1.50), определено с точностью до калибровочного преобразования $\xi^{\rho} \rightarrow \xi^{\rho} + f u^{\rho}$ с произвольной функцией f . Пользуясь этой свободой, наложим дополнительное калибровочное условие:

$$u_{\mu}\xi^{\mu} = \Lambda k_{\mu}\xi^{\mu} = 0. \quad (1.52)$$

Тогда, раскрывая производную Ли $\mathcal{L}_u \xi^{\mu} = u^{\lambda}\partial_{\lambda}\xi^{\mu} - \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}u^{\mu}$ и подставляя равновесную скорость u^{μ} (1.38), мы получаем, что в выбранной калибровке

$$\delta\mathbf{u}^{\mu} = \Lambda\dot{\xi}^{\mu} - u^{\mu}\delta\Phi, \quad \dot{f} \equiv k^{\rho}\partial_{\rho}f = \frac{\partial f}{\partial \hat{c}t}. \quad (1.53)$$

Здесь мы обозначили оператор $k^{\rho}\partial_{\rho}$ точкой из тех соображений, что он (с точностью до $1/c$) сводится к производной по времени во вращающейся с.о. (1.39). Легко видеть, что этот оператор коммутирует с равновесной производной ∇_{ρ} .

Можно показать, что возмущения метрического тензора, символов Кристоффеля и величины $\delta\Phi$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Lambda^3 k_\mu k^\rho k^\eta \delta\Gamma_{\rho\eta}^\mu = -\Lambda\delta\dot{\Phi} - k_\mu \delta\mathbf{g}^{\mu\rho} \nabla_\rho \Lambda, \quad k^\rho \delta\Gamma_{\mu\rho}^\mu = \delta\dot{\Phi} + \frac{1}{2} \perp^{\mu\lambda} \delta\dot{\mathbf{g}}_{\mu\lambda}. \quad (1.54)$$

Они доказываются прямой подстановкой возмущений символов Кристоффеля (1.49) с использованием уравнения Киллинга (1.42), связи Λ и k^μ (1.38), а также равенства $\delta\mathbf{g}_{\mu\rho} \mathbf{g}^{\rho\lambda} = -\mathbf{g}_{\mu\rho} \delta\mathbf{g}^{\rho\lambda}$. Кроме того отметим, что производные лагранжева смещения удовлетворяют равенствам

$$k^\rho \nabla_\rho \dot{\xi}^\mu = \ddot{\xi}^\mu + \dot{\xi}^\rho \nabla_\rho k^\mu, \quad \perp \nabla_\mu \xi^\mu = \frac{1}{\Lambda} \nabla_\mu (\Lambda \xi^\mu). \quad (1.55)$$

Чтобы доказать первое равенство, достаточно раскрыть ковариантную производную и использовать, что $k^\rho = \text{const}$. Чтобы доказать второе, необходимо заметить, что, в силу выбранной калибровки (1.52), $u_\mu \nabla_\rho \xi^\mu = -\xi^\mu \nabla_\rho u_\mu$, затем подставить скорость (1.38) и воспользоваться уравнением Киллинга (1.42).

Бездиссипативные колебания: вещество с замороженным составом

Пользуясь приведенными соотношениями, мы можем записать возмущенные уравнения гидродинамики в относительно простом виде. С помощью (1.38), (1.43), (1.44), (1.48), (1.53), первого равенства (1.54) и первого равенства (1.55) возмущение уравнения Эйлера (1.15) приводится к виду

$$\Lambda^2 \ddot{\xi}^\mu + 2\Lambda \dot{\xi}^\rho \nabla_\rho u^\mu = \frac{\delta w}{w_0} \frac{\perp \nabla^\mu p_0}{w_0} - \frac{1}{w_0} \perp \nabla^\mu \delta p + \Lambda^2 \mathcal{G}^\mu, \quad (1.56)$$

$$\mathcal{G}^\mu = - \perp_\lambda^\mu \left[k^\rho k^\eta \delta\Gamma_{\rho\eta}^\lambda + \frac{\delta\mathbf{g}^{\lambda\rho}}{\Lambda^2} \frac{\nabla_\rho \Lambda}{\Lambda} + \frac{2\delta\Phi}{\Lambda^2} \frac{\nabla^\lambda \Lambda}{\Lambda} \right]. \quad (1.57)$$

Здесь все слагаемые, содержащие возмущения метрики, собраны в единый вектор \mathcal{G}^μ , который можно трактовать как «ускорение» жидкого элемента, связанное с возмущениями гравитационного поля. Отметим, что из четырех проекций полученного уравнения только три являются линейно независимыми. На линейную зависимость проекций указывает тот факт, что, умножая уравнение Эйлера на u^μ и пользуясь калибровкой (1.52), мы приходим к тождественному равенству. По этой причине в дальнейшем при моделировании колебаний мы будем рассматривать только пространственные проекции уравнения Эйлера.

Далее, с помощью (1.38), (1.43), (1.44), (1.48), (1.53), второго равенства (1.54) и второго равенства (1.55) можно показать, что возмущение уравнений непрерывности (1.16) в случае вещества с замороженным составом может быть записано в виде

$$\Delta \dot{n}_k + n_{k0} \left[{}^\perp \nabla_\rho \dot{\xi}^\rho + \frac{1}{2} {}^\perp \mu^\rho \delta \dot{\mathbf{g}}_{\mu\rho} \right] = 0. \quad (1.58)$$

Пользуясь перестановочностью операторов ${}^\perp \nabla_\rho$ и $k^\rho \partial_\rho$ (1.53), а затем интегрируя это уравнение по времени, мы получаем

$$\Delta n_k + n_{k0} \left[{}^\perp \nabla_\rho \xi^\rho + \frac{1}{2} {}^\perp \mu^\rho \delta \mathbf{g}_{\mu\rho} \right] = 0, \quad (1.59)$$

что совпадает с классическим результатом [74]⁵.

С помощью линеаризованных уравнений непрерывности (1.59), уравнения состояния $\varepsilon = \varepsilon(\{n_k\})$, термодинамических соотношений (1.13) и следующих из них равенств

$$\delta \varepsilon = \mu_{k0} \delta n_k, \quad \delta p = n_{k0} \delta \mu_k, \quad \delta w \equiv \delta p + \delta \varepsilon, \quad \delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial n_k} \right)_0 \delta n_k, \quad (1.60)$$

можно получить ряд полезных уравнений на возмущения различных термодинамических величин. Так, умножая (1.59) на $(\partial p / \partial n_k)_0$, μ_{k0} или $(\partial \mu_m / \partial n_k)_0$, суммируя по всем сортам частиц и пользуясь уравнением состояния и термодинамическими соотношениями, можно показать, что лагранжевы возмущения давления, плотности энергии и химических потенциалов удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\Delta p + \gamma p_0 \left[{}^\perp \nabla_\rho \xi^\rho + \frac{1}{2} {}^\perp \mu^\rho \delta \mathbf{g}_{\mu\rho} \right] = 0, \quad (1.61)$$

$$\Delta \varepsilon + w_0 \left[{}^\perp \nabla_\rho \xi^\rho + \frac{1}{2} {}^\perp \mu^\rho \delta \mathbf{g}_{\mu\rho} \right] = 0, \quad (1.62)$$

$$\Delta \mu_m + \left(\frac{\partial p}{\partial n_m} \right)_0 \left[{}^\perp \nabla_\rho \xi^\rho + \frac{1}{2} {}^\perp \mu^\rho \delta \mathbf{g}_{\mu\rho} \right] = 0, \quad (1.63)$$

⁵Отметим, что в литературе встречаются разные в общем случае неэквивалентные определения лагранжевых возмущений. Мы в данной работе следуем определению (1.51), используемому в работе [74]. Альтернативное определение $\Delta_U f \equiv \delta f + \xi \nabla f$ можно встретить, например, в работе [75]. Для скалярных величин данное определение эквивалентно используемому в данной работе: $\Delta_U f = \Delta f$. Для тензорных величин более высокого ранга, однако, данные определения перестают быть эквивалентными.

Величина γ , появившаяся в уравнении на Δp , носит название *адиабатического индекса*. В рассматриваемом здесь случае вещества с замороженным химическим составом она вычисляется по следующей формуле:

$$\gamma = \frac{w_0}{p_0} \left(\frac{c_s}{c} \right)^2 = \frac{1}{p_0} n_{k0} \left(\frac{\partial p}{\partial n_k} \right)_0, \quad c_s = c \sqrt{\frac{1}{w_0} \left(\frac{\partial p}{\partial n_k} \right)_0 n_{k0}}, \quad (1.64)$$

которая автоматически получается при изложенном выше выводе уравнения на Δp из уравнений непрерывности (1.59). Величина c_s , как мы увидим в дальнейшем (см. раздел 2.3.2), представляет собой скорость звука в веществе с замороженным составом. Здесь же отметим, что в случае баротропного вещества, когда все термодинамические величины могут рассматриваться как функции плотности энергии, выражения для адиабатического индекса и скорости звука упрощаются и сводятся к следующим:

$$\gamma_{\text{barotropic}} = \frac{w_0}{p_0} \left(\frac{c_s}{c} \right)^2 = \frac{w_0}{p_0} \left(\frac{dp}{d\varepsilon} \right)_0, \quad c_{s \text{ barotropic}} = c \sqrt{\left(\frac{dp}{d\varepsilon} \right)_0}. \quad (1.65)$$

Как следует из полученных уравнений (1.61)-(1.62) для Δp и $\Delta \varepsilon$, адиабатический индекс показывает, насколько сильно вещество сопротивляется при его адиабатическом сжатии, то есть при каком изменении давления Δp оно изменит энергию (плотность) на $\Delta \varepsilon$ при условии отсутствия диссипации («ad»):

$$\gamma = \frac{w_0}{p_0} \left(\frac{\Delta p}{\Delta \varepsilon} \right)_{\text{ad}}. \quad (1.66)$$

Собственно говоря, именно формула (1.66) представляет собой наиболее общее определение адиабатического индекса, которое, как правило, используется при моделировании колебаний. Удобство определения (1.66) заключается в том, что оно *не предполагает, что состав вещества является замороженным, а потому может использоваться и в веществе с протекающими химическими реакциями*⁶. При этом в данном более общем случае адиабатический индекс уже не определяется простой формулой (1.64) и начинает зависеть от скоростей протекающих в веществе реакций. Мы вернемся к подробному обсуждению этого эффекта в разделах 1.3.1-1.3.2.

⁶Применимость такого описания ограничена ситуациями, когда каждая из рассматриваемых реакций является либо экстремально быстрой, либо слабо отклоняется от равновесия: $|\Delta \mu_{\text{in} \leftrightarrow \text{out}}| \ll k_B T$ (см. разделы 1.3.1-1.3.2).

Из уравнений (1.59) и (1.61)-(1.63) видно, что в веществе с замороженным составом возмущения термодинамических величин удовлетворяют равенствам

$$\frac{\Delta n_k}{n_{k0}} = \frac{\Delta \mu_m}{(\partial p / \partial n_m)_0} = \frac{\Delta \varepsilon}{w_0} = \frac{\Delta p}{\gamma p_0} = \frac{\Delta w}{w_0 + \gamma p_0}. \quad (1.67)$$

Следовательно, если известно лагранжево возмущение хотя бы одной термодинамической величины, то автоматически находятся и лагранжевы возмущения всех остальных величин. Если к тому же известно лагранжево смещение, то можно найти и все эйлеровы возмущения. В частности, выражая лагранжевы возмущения плотности энергии, плотности энтальпии и давления через их эйлеровы возмущения и подставляя результат в соотношения (1.67), несложно показать, что выполняются равенства

$$\delta \varepsilon = \frac{w_0}{\gamma p_0} \delta p - w_0 \xi^\rho \mathcal{A}_\rho, \quad (1.68)$$

$$\delta w = \left(1 + \frac{w_0}{\gamma p_0}\right) \delta p - w_0 \xi^\rho \mathcal{A}_\rho, \quad (1.69)$$

$$\mathcal{A}_\rho \equiv \frac{1}{w_0} \nabla_\rho w_0 - \frac{1}{w_0} \left(1 + \frac{w_0}{\gamma p_0}\right) \nabla_\rho p_0. \quad (1.70)$$

Вектор \mathcal{A}_ρ в литературе называют *дискриминантом Шварцшильда* (см., например, [76]). Его можно использовать как естественную меру небаротропности вещества, поскольку в баротропном веществе он обращается в ноль. Чтобы в этом убедиться, заметим, что, вне зависимости от того, является вещество баротропным или нет, дифференциал равновесной плотности энтальпии можно представить в виде $dw_0 = (1 + dp_0/d\varepsilon_0)d\varepsilon_0$. С помощью этого равенства и формулы (1.65) для баротропного адиабатического индекса несложно получить следующее эквивалентное выражение для дискриминанта Шварцшильда:

$$\mathcal{A}_\rho = \frac{1}{p_0} \left[\frac{1}{\gamma_{\text{barotropic}}} - \frac{1}{\gamma} \right] \nabla_\rho p_0 = \frac{w_0}{p_0} \left[\frac{1}{\gamma_{\text{barotropic}}} - \frac{1}{\gamma} \right] \frac{\nabla_\rho \Lambda}{\Lambda}. \quad (1.71)$$

Отсюда сразу же следует, что в баротропном веществе, в котором $\gamma = \gamma_{\text{barotropic}}$, мы имеем $\mathcal{A}_\rho = 0$. Для нашей модели НЗ (см. раздел 1.1) это означает, что в коре звезды $\mathcal{A}_\rho = 0$, в то время как в ядре $\mathcal{A}_\rho \neq 0$. При этом следует отметить, что небаротропность вещества в ядре, как правило, является слабой, то есть компоненты вектора \mathcal{A}_ρ близки к нулю (но не нулевые).

Из всего вышесказанного следует, что моделирование слабых гидродинамических возмущений нейтронной звезды в случае вещества с замороженным составом сводится к решению системы, состоящей из трех уравнений

$$\begin{cases} \Lambda^2 \ddot{\xi}^\mu + 2\Lambda \dot{\xi}^\rho \nabla_\rho u^\mu = \frac{\delta w}{w_0} \frac{\perp \nabla^\mu p_0}{w_0} - \frac{1}{w_0} \perp \nabla^\mu \delta p + \Lambda^2 \mathcal{G}^\mu \\ \Delta p + \gamma p_0 \left[\perp \nabla_\rho \xi^\rho + \frac{1}{2} \perp^{\mu\rho} \delta g_{\mu\rho} \right] = 0 \\ \Delta \varepsilon + w_0 \left[\perp \nabla_\rho \xi^\rho + \frac{1}{2} \perp^{\mu\rho} \delta g_{\mu\rho} \right] = 0, \end{cases} \quad (1.72)$$

а возмущения всех термодинамических функций, не входящих в данную систему, находятся с помощью равенств (1.67).

Отметим, что система (1.72) не является замкнутой, поскольку неизвестными в ней являются не только гидродинамические и термодинамические переменные, но также и возмущения гравитационного поля. В общем случае, чтобы определить все неизвестные функции, необходимо вместо уравнения Эйлера (1.15) рассматривать уравнения Эйнштейна⁷. На практике, однако, расчеты гидродинамических колебаний часто проводятся в *приближении Каулинга* [77], то есть когда возмущения гравитационного поля, *генерируемые в ходе колебаний*, не учитываются в гидродинамических уравнениях. В случае *свободных колебаний* приближение Каулинга означает, что в системе (1.72) выбрасываются слагаемые с $\delta g_{\mu\nu}$ и \mathcal{G}^μ . В случае *вынужденных колебаний* приближение Каулинга означает, что слагаемые с $\delta g_{\mu\nu}$ и \mathcal{G}^μ описывают только заданное «внешнее» гравитационное поле, действующее на звезду (например, со стороны удаленной звезды-компаньона в двойной системе). Таким образом, в приближении Каулинга система (1.72) становится замкнутой, что позволяет не обращаться к уравнениям Эйнштейна и значительно упрощает моделирование колебаний. В то же время приближение Каулинга позволяет с разумной точностью оценить свойства глобальных колебаний НЗ (см., например, [12, 78–82]). По этим причинам в данной работе мы будем ограничиваться моделированием колебаний в рамках приближения Каулинга.

⁷Напомним, что уравнения общей теории относительности содержат в себе уравнение Эйлера. Поэтому, строго говоря, необязательно полностью отказываться от гидродинамических уравнений, необходимо лишь найти уравнения Эйнштейна, которые замыкали бы гидродинамическую систему уравнений.

В дальнейшем мы будем интересоваться свободными колебаниями, для которых зависимость от времени t и угла φ определяется экспонентой

$$\xi^\mu \propto \delta f \propto \Delta f \propto e^{i\sigma t + im\varphi} = e^{i\sigma_r \hat{t} + im\hat{\varphi}}, \quad \sigma_r \equiv \sigma + m\Omega, \quad (1.73)$$

где σ и σ_r – частоты колебания в инерциальной и вращающейся системах отсчета (1.39), соответственно. Как следует из уравнений (1.72), в приближении Каулинга такие колебания описываются следующей системой (см. также [76]):

$$\begin{cases} \Lambda^2 \sigma_r^2 \xi^\mu - 2ic\sigma_r \Lambda \xi^\rho \nabla_\rho u^\mu = c^2 \left(\frac{1}{w_0} {}^\perp \nabla^\mu \delta p - \frac{\delta w}{w_0} \frac{{}^\perp \nabla^\mu p_0}{w_0} \right) \\ \Delta p + \gamma p_0 {}^\perp \nabla_\rho \xi^\rho = 0 \\ \Delta \varepsilon + w_0 {}^\perp \nabla_\rho \xi^\rho = 0. \end{cases} \quad (1.74)$$

Бездиссипативные колебания: вещество с активными реакциями

Хотя уравнения (1.68)-(1.72) и (1.74) были получены для случая вещества с замороженными реакциями, уравнения *точно такого же вида* описывают и *бездиссипативные* колебания в веществе с активно протекающими химическими реакциями (напомним, что по определению в бездиссипативных уравнениях выброшены слагаемые, приводящие к диссипации энергии). Чтобы в этом убедиться, прежде всего заметим, что соотношения

$$\frac{\Delta \varepsilon}{w_0} = \frac{\Delta p}{\gamma p_0} = \frac{\Delta w}{w_0 + \gamma p_0}, \quad (1.75)$$

использованные для вывода равенств (1.68)-(1.70), сохраняются и в присутствии реакций, если под адиабатическим индексом γ понимать величину, определенную равенством (1.66), то есть модифицированную химическими реакциями (см. разделы 1.3.1-1.3.2). Тогда, с учетом данных соотношений, нам остается проверить, что полученное для замороженного вещества уравнение на возмущение плотности энергии $\Delta \varepsilon$ сохраняет вид даже в присутствии химических реакций. Чтобы показать это, рассмотрим уравнения непрерывности (1.16) с учетом источников Γ_k , описывающих превращения частиц в ходе реакций:

$$\delta[\nabla_\mu (n_k \mathbf{u}^\mu) = \Gamma_k/c] \quad \Rightarrow \quad \Lambda[\Delta \dot{n}_k + n_{k0} {}^\perp \nabla_\mu \dot{\xi}^\mu] = \Gamma_k/c. \quad (1.76)$$

Умножая это уравнение на μ_{k0} и пользуясь термодинамическими соотношениями (1.13) и (1.60), получаем

$$\Lambda[\Delta\dot{\varepsilon} + w_0^\perp \nabla_\mu \dot{\xi}^\mu] = \mu_{k0} \Gamma_k / c. \quad (1.77)$$

Покажем, что правая часть этого уравнения обращается в ноль. Обозначим через $N_{k(a)}$ число частиц сорта k , которое производится за одну прямую химическую реакцию (in \rightarrow out), входящую в выбранную пару $(a) = (\text{in} \leftrightarrow \text{out})$, а через $\Gamma_{(a)}$ – соответствующую скорость реакций (1.36). Тогда скорость производства частиц сорта k и отклонение пары (a) от химического равновесия, определенное согласно (1.35), можно записать в виде

$$\Gamma_k = N_{k(a)} \Gamma_{(a)}, \quad \mu_{(a)} = -\mu_k N_{k(a)}, \quad (1.78)$$

где в первой формуле подразумевается суммирование по всем рассматриваемым парам реакций (a) . С учетом этих равенств, получаем:

$$\mu_{k0} \Gamma_k = \mu_{k0} N_{k(a)} \Gamma_{(a)} = -\mu_{(a)0} \Gamma_{(a)} = 0, \quad (1.79)$$

где мы воспользовались тем, что в химическом равновесии $\mu_{(a)0} = 0$.

Таким образом, мы показали, что *бездиссипативные* уравнения на возмущения давления и плотности энергии в присутствии химических реакций имеют с точностью до значения адиабатического индекса тот же вид, что и в веществе с замороженным составом. Уравнение Эйлера, в свою очередь, не модифицируется химическими реакциями (они полностью описываются введением в уравнения непрерывности источников Γ_k) и также сохраняет свой вид. Следовательно, моделирование бездиссипативных колебаний в присутствии химических реакций может проводиться с помощью системы (1.74) с модифицированными реакциями адиабатическим индексом (1.66). При этом следует отметить, что линеаризованные уравнения непрерывности и уравнения на возмущения химических потенциалов в веществе с активными реакциями приобретают более сложный вид и отличаются от своих аналогов (1.59) и (1.63). По этой причине нарушается и та часть соотношений (1.67), в которой явно участвуют Δn_k и $\Delta \mu_m$. Также оговоримся, что само описание в терминах модифицированного адиабатического индекса применимо не всегда (см. разделы 1.3.1-1.3.2).

1.2.4 Закон сохранения энергии

Определение энергии с помощью уравнения Киллинга

С фундаментальной точки зрения, закон сохранения энергии является следствием однородности времени. Другими словами, энергия системы сохраняется только в том случае, когда рассматриваемое пространство-время стационарно, то есть метрические коэффициенты не зависят от времени. Рассуждая таким образом, можно прийти к выводу, что, поскольку метрика в общем случае не обязана быть стационарной, энергия системы в общей теории относительности (ОТО) не обязана сохраняться. Здесь, однако, необходимо оговориться, что в ОТО отсутствует четкое понятие энергии гравитационного поля, поскольку самому гравитационному полю нельзя приписать какой-либо собственный вклад в тензор энергии импульса системы $T^{\mu\nu}$, как это можно сделать, например, для электромагнитного поля⁸. Поэтому упомянутое несохранение энергии системы как раз отражает тот факт, что она может обмениваться энергией с гравитационным полем. Подобное «несохранение» энергии имеет место даже в нерелятивистской теории гравитации: например, при свободных колебаниях кинетическая энергия звезды может перетекать в потенциальную гравитационную и обратно, а над колеблющейся звездой в двойной системе совершается работа со стороны гравитационного поля звезды-компаньона. Принципиальным отличием ОТО от нерелятивистской теории, однако, является возможность излучения гравитационных волн, которые безвозвратно уносят энергию из системы.

Строгое моделирование эффектов, связанных с возмущением гравитационного поля, требует работы с уравнениями Эйнштейна, что выходит за рамки используемого в данной работе гидродинамического подхода. Поскольку мы в дальнейшем будем проводить расчеты колебаний в рамках приближения Каулинга, то и в этом разделе мы можем с интересующей нас точностью ограничиться этим приближением и пренебречь возмущениями гравитационного поля. Для простоты мы рассмотрим здесь только свободные колебания и будем считать, что пространство-время определяется интервалом (1.37), то есть является стационарным и осесимметричным.

⁸Гравитационному полю можно приписать лишь псевдотензор энергии-импульса, который преобразуется как тензор только по отношению к преобразованиям Лоренца. При этом выбор такого псевдотензора не является единственным. В связи с этим термин энергия по отношению к гравитационному полю необходимо применять с осторожностью.

Энергию звезды нам будет удобно измерять во вращающейся с.о. (1.39). Начнем с того, что перепишем условие стационарности $\partial_{\hat{c}t}\mathbf{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$ в этой с.о. в ковариантной форме. Для этого заметим, что, поскольку $k^{\hat{\rho}} = \delta_{\hat{t}}^{\hat{\rho}} = \text{const}$, мы имеем

$$0 = \partial_{\hat{c}t}\mathbf{g}_{\hat{\mu}\hat{\rho}} = k^{\hat{\eta}}\partial_{\hat{\eta}}\mathbf{g}_{\hat{\mu}\hat{\rho}} = \mathcal{L}_k\mathbf{g}_{\hat{\mu}\hat{\rho}} = \nabla_{\hat{\mu}}k_{\hat{\rho}} + \nabla_{\hat{\rho}}k_{\hat{\mu}}. \quad (1.80)$$

Так как правая часть этого равенства записана в ковариантной форме, мы можем снять шляпки и записать условие стационарности, пользуясь при этом метрическим тензором, определенным в инерциальной с.о.:

$$\nabla_{\mu}k_{\rho} + \nabla_{\rho}k_{\mu} = 0. \quad (1.81)$$

При этом следует отметить, что данное уравнение выражает условие стационарности $\partial_{\hat{c}t}\mathbf{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$ именно во вращающейся с.о. и не совпадает с условием стационарности $\partial_{ct}\mathbf{g}_{\mu\nu} = 0$ в инерциальной с.о. Чтобы записать последнее в ковариантной форме необходимо проделать все те же вычисления (1.80), что и во вращающейся системе, только вместо вектора k^{ρ} использовать вектор $t^{\rho} \equiv \delta_t^{\rho}$.

Пользуясь уравнением Киллинга, уравнениями движения $\nabla_{\mu}T^{\mu\rho} = 0$ и симметричностью тензора энергии-импульса, мы получаем

$$\nabla_{\mu}(k_{\rho}T^{\mu\rho}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{\mu}(\sqrt{-\mathbf{g}}k_{\rho}T^{\mu\rho}) = 0, \quad \mathbf{g} \equiv \det \mathbf{g}_{\mu\nu}, \quad (1.82)$$

где мы выразили ковариантную дивергенцию по формуле (1.23). Данное уравнение, как несложно видеть, представляет собой искомый закон сохранения энергии во вращающейся с.о. Чтобы убедиться в этом, проинтегрируем его по пространственным координатам $d^3x \equiv dr d\theta d\varphi$ и воспользуемся теоремой Гаусса. Слагаемые с частными производными по пространственным координатам при этом исчезнут, поскольку границу интегрирования всегда можно вынести за пределы звезды, и мы получим

$$\frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{E}} = 0, \quad \tilde{\mathcal{E}} \equiv \int (-k_{\rho})T^{t\rho}\sqrt{-\mathbf{g}}d^3x = \int (-k^{\rho})T_{\rho}^t\sqrt{-\mathbf{g}}d^3x, \quad (1.83)$$

где множитель (-1) был введен для удобства.

Полученный выше интеграл $\tilde{\mathcal{E}}$ представляет собой энергию звезды во вращающейся с.о. Например, согласно полученной формуле, энергия звезды в равновесии, измеренная во вращающейся с.о., равна

$$\tilde{\mathcal{E}}_0 = \int \varepsilon_0 \sqrt{-g} d^3x. \quad (1.84)$$

Как и должно быть, она определяется только внутренней энергией звезды и не содержит кинетического вклада, связанного с ее вращением. Нас в дальнейшем будет интересовать не полная энергия звезды, а ее возмущение

$$\tilde{E} \equiv \tilde{\mathcal{E}} - \tilde{\mathcal{E}}_0, \quad (1.85)$$

связанное с отклонением звезды от равновесия. Чтобы определить \tilde{E} , можно рассмотреть возмущение закона сохранения в интегральной форме (1.83), однако удобнее работать с его возмущением в дифференциальной форме (1.82):

$$\nabla_\mu (k_\rho \hat{\delta} T^{\mu\rho}) = 0. \quad (1.86)$$

Отметим, что здесь нам необходимо по крайней мере на начальном этапе рассматривать не эйлеровы возмущения величин δf , а их *точные* возмущения $\hat{\delta} f$ (см. обсуждение в разделе 1.2.3). Это связано с тем, что, как мы увидим ниже, все линейные по возмущениям слагаемые сокращаются.

Возмущение энергии в веществе с замороженным составом

Для простоты мы начнем с рассмотрения вещества с замороженным составом. Прежде всего нам понадобятся точные возмущения условия нормировки скорости (1.10) и уравнений непрерывности (1.16):

$$2u_\rho \hat{\delta} u^\rho + \hat{\delta} u_\rho \hat{\delta} u^\rho = 0, \quad \nabla_\mu \hat{\delta} j_{(k)}^\mu = \nabla_\mu [\hat{\delta} (n_k u^\mu)] = 0. \quad (1.87)$$

С помощью этих уравнений легко показать, что дивергенция $\nabla_\mu F^\mu$ вектора $F^\mu \equiv \mu_{k0}^\infty \hat{\delta} j_{(k)}^\mu$ равна нулю. Для этого заметим, что в силу квазинейтральности и равенств (1.25), вектор F^μ можно преобразовать к следующему виду:

$$F^\mu = \mu_{k0}^\infty \hat{\delta} j_{(k)}^\mu = (\mu_{k0}^\infty + e_k/e \mu_{e0}^\infty) \hat{\delta} j_{(k)}^\mu = \mu_{n0}^\infty \hat{\delta} j_{(b)}^\mu, \quad j_{(b)}^\mu \equiv b_k j_{(k)}^\mu. \quad (1.88)$$

Величина $j_{(b)}^\mu \equiv b_k j_{(k)}^\mu$, введенная выше, представляет собой плотность потока барионов. Поскольку $\mu_{n0}^\infty = \text{const}$ (1.45), из представления (1.88) и уравнений непрерывности (1.87) мгновенно следует, что $\nabla_\mu F^\mu = 0$. Интегрируя данное уравнение по пространственным координатам, мы получаем, что интеграл

$$\mathcal{F} \equiv \int F^t \sqrt{-g} d^3x = \text{const} \quad (1.89)$$

сохраняется во времени. Более того, легко убедиться, что он строго равен нулю. Для этого заметим, что он может быть представлен в следующем виде:

$$\mathcal{F} = \mu_{n0}^\infty \hat{\delta} N_b = \text{const}, \quad \hat{\delta} N_b \equiv \int \hat{\delta} j_{(b)}^t \sqrt{-g} d^3x, \quad (1.90)$$

где N_b – полное число барионов, которое всегда сохраняется: $\hat{\delta} N_b = 0$.

Теперь, мы можем приступить к вычислению возмущения энергии. Подставляя $k^\rho = u^\rho / \Lambda$ и тензор энергии-импульса (1.12) в явном виде, пользуясь точным условием нормировки скорости (1.87) и удерживая слагаемые вплоть до второго порядка по точным возмущениям $\hat{\delta}$, мы получаем

$$k_\rho \hat{\delta} T^{\mu\rho} = -\frac{u^\mu}{\Lambda} \left[\frac{w_0}{2} \hat{\delta} \mathbf{u}_\rho \hat{\delta} \mathbf{u}^\rho + \hat{\delta} \mu_k n_{k0} + \hat{\delta} \mu_k \hat{\delta} n_k - \hat{\delta} p \right] - \frac{1}{\Lambda} n_{k0} \hat{\delta} \mu_k \hat{\delta} \mathbf{u}^\mu - F^\mu. \quad (1.91)$$

С интересующей нас точностью в слагаемых второго порядка по $\hat{\delta}$ можно точные возмущения $\hat{\delta} f$ заменить на эйлеровы δf . Однако в слагаемых первого порядка по $\hat{\delta}$ необходимо использовать более точные соотношения, пригодные вплоть до второго порядка:

$$\begin{aligned} \hat{\delta} p &\approx n_{n0} \left(\frac{\partial \mu_n}{\partial n_k} \right)_0 \hat{\delta} n_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial n_m} n_n \frac{\partial \mu_n}{\partial n_k} \right)_0 \delta n_k \delta n_m, \\ \hat{\delta} \mu_n &\approx \left(\frac{\partial \mu_n}{\partial n_k} \right)_0 \hat{\delta} n_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mu_n}{\partial n_k \partial n_m} \right)_0 \delta n_k \delta n_m. \end{aligned} \quad (1.92)$$

С помощью этих формул и термодинамических соотношений (1.60), находим:

$$k_\rho \hat{\delta} T^{\mu\rho} \approx -\frac{u^\mu}{2\Lambda} \left[w_0 \delta \mathbf{u}_\rho \delta \mathbf{u}^\rho + \delta \mu_k \delta n_k \right] - \frac{1}{\Lambda} \delta p \delta \mathbf{u}^\mu - F^\mu. \quad (1.93)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.86), выражая $u^\mu = \Lambda k^\mu$, интегрируя по пространственным переменным и учитывая, что интеграл (1.89) от F^t равен нулю, мы приходим к следующему закону сохранения:

$$\frac{d}{dt}\tilde{E} = 0, \quad \tilde{E} = \int \left[\frac{w_0}{2} \delta u_\rho \delta u^\rho + \frac{1}{2} \delta \mu_k \delta n_k + \frac{1}{\Lambda} \delta p \delta u^t \right] \sqrt{-g} d^3x. \quad (1.94)$$

Чтобы переписать второе слагаемое в выражении для энергии \tilde{E} в более удобной форме, заметим, что в силу условия квазинейтральности и условий равновесия (1.46) имеет место равенство

$$\delta \mu_k \delta n_k = (\Delta \mu_k - \mu_{k0} \xi^\rho \nabla_\rho \ln \Lambda) \delta n_k. \quad (1.95)$$

Далее, выражая $\Delta \mu_k$ через Δp с помощью (1.67), а затем, используя термодинамические соотношения (1.60), связь (1.68) возмущения энергии с возмущением давления, а также выражение (1.44) для градиента давления, получаем

$$\delta \mu_k \delta n_k = \frac{(\delta p)^2}{\gamma p_0} + w_0 (\xi^\rho \mathcal{A}_\rho) (\xi^\lambda \nabla_\lambda \ln \Lambda). \quad (1.96)$$

С учетом этого равенства энергия приводится к окончательному виду:

$$\tilde{E} = \int \left[\frac{w_0}{2} \delta u_\rho \delta u^\rho + \frac{1}{2} \frac{(\delta p)^2}{\gamma p_0} + \frac{1}{\Lambda} \delta p \delta u^t + \frac{1}{2} w_0 (\xi^\rho \mathcal{A}_\rho) (\xi^\lambda \nabla_\lambda \ln \Lambda) \right] \sqrt{-g} d^3x. \quad (1.97)$$

Возмущение энергии с учетом химических реакций

Рассмотрение закона сохранения энергии в веществе с протекающими химическими реакциями представляет собой несколько более сложную задачу. Прежде всего следует иметь в виду, что реакции приносят диссипацию в систему, что обязывает использовать более общие термодинамические соотношения, учитывающие возмущения плотности энтропии и температуры⁹:

$$d\varepsilon = T ds + \mu_k dn_k, \quad dp = s dT + n_k d\mu_k, \quad w \equiv p + \varepsilon = \mu_k n_k + T s. \quad (1.98)$$

⁹Поскольку определение энергии в данном случае требует выхода за рамки бездиссипативной гидродинамики, данный раздел можно воспринимать как первое знакомство с диссипацией энергии, детальному рассмотрению которой будет посвящен следующий раздел (1.3).

Необходимость учитывать возмущения энтропии, в свою очередь, увеличивает число неизвестных и требует дополнить систему гидродинамических уравнений еще одним – так называемым *уравнением генерации энтропии*:

$$\nabla_{\mu}(su^{\mu}) = -(1/cT)\mu_k\Gamma_k. \quad (1.99)$$

Это уравнение легко получить из уравнения $u_{\mu}\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0$, пользуясь общими соотношениями (1.98). С точностью до слагаемых второго порядка по амплитуде, его возмущение можно записать в следующем виде

$$cT_0\hat{\delta}[\nabla_{\mu}(su^{\mu})] = -\delta\mu_k\Gamma_k, \quad (1.100)$$

где мы воспользовались свойством (1.79) и равенством $\Gamma_{k0} = 0$. И наконец, теперь нам необходимо рассматривать уравнения непрерывности (1.16) с источниками Γ_k , описывающими превращения частиц в химических реакциях, как мы это делали в конце раздела 1.2.3:

$$\hat{\delta}[\nabla_{\mu}j_{(k)}^{\mu} = \Gamma_k/c] \Rightarrow \nabla_{\mu}\hat{\delta}j_{(k)}^{\mu} = \nabla_{\mu}[\hat{\delta}(n_k u^{\mu})] = \Gamma_k/c. \quad (1.101)$$

Несмотря на все перечисленные изменения, дивергенция вспомогательного вектора F^{μ} по-прежнему обращается в ноль. Действительно, пользуясь представлением (1.88), постоянством μ_{n0}^{∞} (1.45) и уравнениями непрерывности с источниками (1.101), находим:

$$\nabla_{\mu}F^{\mu} = \mu_{n0}^{\infty}\nabla_{\mu}\hat{\delta}j_{(b)}^{\mu} = (1/c)\mu_{n0}^{\infty}b_k\Gamma_k = 0. \quad (1.102)$$

Здесь в последнем равенстве мы воспользовались равенством $b_k\Gamma_k = 0$, которое выражает сохранение числа барионов в химических реакциях:

$$\nabla_{\mu}\hat{\delta}j_{(b)}^{\mu} = (1/c)b_k\Gamma_k = 0. \quad (1.103)$$

Далее, интегрируя уравнение $\nabla_{\mu}F^{\mu} = 0$ по пространству и повторяя рассуждения из предыдущего раздела, мы снова приходим к равенству

$$\mathcal{F} \equiv \int F^t \sqrt{-g} d^3x = \mu_{n0}^{\infty}\hat{\delta}N_b = 0. \quad (1.104)$$

Вернемся теперь к рассмотрению закона сохранения энергии. Пользуясь возмущением условия нормировки (1.87) и термодинамическими соотношениями (1.98), получаем, что вплоть до слагаемых второго порядка по амплитуде

$$k_\rho \hat{\delta} T^{\mu\rho} = -\frac{1}{\Lambda} \left[\frac{w_0 u^\mu}{2} \delta \mathbf{u}_\rho \delta \mathbf{u}^\rho + \hat{\delta} \varepsilon u^\mu + (\mu_{k0} n_{k0} + T_0 s_0) \hat{\delta} u^\mu \right]. \quad (1.105)$$

Далее, раскладывая точное возмущение энергии вплоть до слагаемых второго порядка по амплитуде и пользуясь соотношениями (1.98), находим:

$$\hat{\delta} \varepsilon = \mu_{k0} \hat{\delta} n_k + T_0 \hat{\delta} s + \frac{1}{2} (\delta \mu_k \delta n_k + \delta T \delta s). \quad (1.106)$$

Подставляя этот результат в выражение выше, группируя слагаемые и пользуясь равенством $\delta p = n_{k0} \delta \mu_k + s_0 \delta T$, получаем

$$k_\rho \hat{\delta} T^{\mu\rho} = -\frac{u^\mu}{\Lambda} \left[\frac{w_0}{2} \delta \mathbf{u}_\rho \delta \mathbf{u}^\rho + \frac{1}{2} (\delta \mu_k \delta n_k + \delta T \delta s) \right] - \frac{1}{\Lambda} \delta p \delta \mathbf{u}^\mu - T^\infty \hat{\delta} (s u^\mu) - F^\mu. \quad (1.107)$$

Теперь, подставляя (1.107) в уравнение (1.86), интегрируя результат по пространству и выражая получающуюся генерацию энтропии $\hat{\delta} [\nabla_\mu (s u^\mu)]$ с помощью уравнения (1.100), получаем

$$\frac{d}{dt} \tilde{E} = - \int T^\infty \hat{\delta} [\nabla_\mu (s u^\mu)] c \sqrt{-\mathbf{g}} d^3 x = \int \frac{1}{\Lambda} \delta \mu_k \Gamma_k \sqrt{-\mathbf{g}} d^3 x, \quad (1.108)$$

где энергия \tilde{E} определена равенством

$$\tilde{E} \equiv \int \left[\frac{w_0}{2} \delta \mathbf{u}_\rho \delta \mathbf{u}^\rho + \frac{1}{2} (\delta \mu_k \delta n_k + \delta T \delta s) + \frac{1}{\Lambda} \delta p \delta \mathbf{u}^t \right] \sqrt{-\mathbf{g}} d^3 x. \quad (1.109)$$

Данный закон сохранения представляет собой искомое обобщение закона (1.94), полученного нами в предыдущем разделе для вещества с замороженными химическими реакциями. Правая часть описывает изменение энергии \tilde{E} , связанное с протекающими в веществе химическими реакциями. Этот эффект, как будет показано в разделе 1.3.3, можно (с некоторыми оговорками) эквивалентным образом описать введением объемной вязкости вещества. Здесь нам пока что будет удобно оставить запись в терминах источников частиц.

Чтобы сократить дальнейшие выкладки, нам будет удобно обозначить $s = n_*$ и $T = \mu_*$, то есть формально представить плотность энтропии и температуру как «концентрацию» и «химический потенциал» еще одного эффективно-го сорта частиц с индексом-звездочкой (*). Чтобы нумеровать все сорта частиц вместе с данным эффективным сортом, мы будем пользоваться заглавными латинскими индексами (A, B, \dots). В данных обозначениях термодинамические соотношения (1.98) могут быть переписаны в виде:

$$d\varepsilon = \mu_A dn_A, \quad dp = n_A d\mu_A, \quad w = \mu_A n_A, \quad df = (\partial f / \partial n_A) dn_A. \quad (1.110)$$

Кроме того, в данных обозначениях линейризованные уравнения непрерывности вместе с линейризованным уравнением (1.100) для генерации энтропии записываются в объединенном виде

$$\Delta \dot{n}_A + n_{A0} {}^\perp \nabla_\mu \dot{\xi}^\mu = \frac{1}{\Lambda c} \Gamma_A, \quad (1.111)$$

где можно положить $\Gamma_* = 0$, поскольку это величина второго порядка по амплитуде колебания. Наконец, закон сохранения энергии приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{E} &= \int \frac{1}{\Lambda} \delta \mu_A \Gamma_A \sqrt{-g} d^3 x, \\ \tilde{E} &= \int \left[\frac{w_0}{2} \delta u_\rho \delta u^\rho + \frac{1}{2} \delta \mu_A \delta n_A + \frac{1}{\Lambda} \delta p \delta u^t \right] \sqrt{-g} d^3 x. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Как и в предыдущем разделе, нам хотелось бы переписать второе слагаемое в законе сохранения энергии в более удобной для расчетов форме. Рассмотрим для этого соответствующий вклад в уравнении (1.112):

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\equiv \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \delta \mu_A \delta n_A \sqrt{-g} d^3 x = c \frac{d}{d\hat{c}t} \int \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu_A}{\partial n_B} \right)_0 \delta n_B \delta n_A \sqrt{-g} d^3 x = \\ &= c \int \left(\frac{\partial \mu_A}{\partial n_B} \right)_0 \delta \dot{n}_B \delta n_A \sqrt{-g} d^3 x = c \int \delta \dot{\mu}_A \delta n_A \sqrt{-g} d^3 x. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Здесь сначала мы представили $\delta \mu_A = (\partial \mu_A / \partial n_B)_0 \delta n_B$ и перешли от d/dt к производной по времени $d/d\hat{c}t$ во вращающейся с.о. (1.53) [эта замена законна, поскольку \mathcal{M} зависит только от t]. Затем мы внесли $d/d\hat{c}t$ под интеграл и воспользовались равенствами $\partial f / \partial \hat{c}t \equiv \dot{f}$ и $(\partial \mu_A / \partial n_B)_0 = (\partial \mu_B / \partial n_A)_0$.

Далее заметим, что с помощью условия квазинейтральности, соотношений (1.46) для равновесных химических потенциалов, условия теплового равновесия (1.47) и равенства $\delta\varepsilon = \mu_{A0}\delta n_A$ подынтегральное выражение может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mu}_A\delta n_A &= (\Delta\dot{\mu}_A - \dot{\xi}^\rho\nabla_\rho\mu_{A0})\delta n_A = (\Delta\dot{\mu}_A - \mu_{A0}\dot{\xi}^\rho\nabla_\rho\ln\Lambda)\delta n_A = \\ &= \Delta\dot{\mu}_A\delta n_A - \delta\varepsilon\dot{\xi}^\rho\nabla_\rho\ln\Lambda. \quad (1.114)\end{aligned}$$

В качестве следующего шага, пользуясь термодинамическими соотношениями (1.110) и уравнениями непрерывности (1.111), несложно показать, что

$$\Delta\dot{\mu}_A\delta n_A = \left(\frac{\partial\mu_A}{\partial n_B}\right)_0\Delta\dot{n}_B\delta n_A = -\delta p^\perp\nabla_\mu\dot{\xi}^\mu + \frac{1}{\Lambda c}\delta\mu_A\Gamma_A. \quad (1.115)$$

Подставляя это равенство в (1.114), получаем:

$$\delta\dot{\mu}_A\delta n_A = -\delta p^\perp\nabla_\mu\dot{\xi}^\mu - \delta\varepsilon\dot{\xi}^\rho\nabla_\rho\ln\Lambda + \frac{1}{\Lambda c}\delta\mu_A\Gamma_A. \quad (1.116)$$

Теперь представим возмущение давления в виде $\delta p = \delta p_{\text{ad}} + \delta p_{\text{diss}}$, где δp_{diss} – некоторая диссипативная поправка (см. обсуждение в разделе 1.3.1), а δp_{ad} – адиабатический вклад, который *по определению* удовлетворяет соотношениям (1.68)-(1.70) и уравнению на Δp из системы (1.74):

$$\Delta p_{\text{ad}} + \gamma p_0^\perp\nabla_\mu\dot{\xi}^\mu = 0, \quad \delta\varepsilon = \frac{w_0}{\gamma p_0}\delta p_{\text{ad}} - w_0\dot{\xi}^\rho\mathcal{A}_\rho. \quad (1.117)$$

Представляя δp в указанном виде, а затем подставляя $\delta\varepsilon$ и ${}^\perp\nabla_\mu\dot{\xi}^\mu$ из приведенных выше уравнений, получаем:

$$\delta\dot{\mu}_A\delta n_A = \frac{\delta p_{\text{ad}}\delta\dot{p}_{\text{ad}}}{\gamma p_0} + w_0(\dot{\xi}^\rho\mathcal{A}_\rho)(\dot{\xi}^\lambda\nabla_\lambda\ln\Lambda) + \frac{\delta p_{\text{diss}}\Delta\dot{p}_{\text{ad}}}{\gamma p_0} + \frac{1}{\Lambda c}\delta\mu_A\Gamma_A. \quad (1.118)$$

Наконец, пользуясь коллинеарностью \mathcal{A}_ρ и $\nabla_\rho\Lambda$ [см. (1.71)], находим

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mu}_A\delta n_A &= \frac{\partial}{\partial\hat{c}t}\left[\frac{1}{2}\frac{(\delta p_{\text{ad}})^2}{\gamma p_0} + \frac{1}{2}w_0(\dot{\xi}^\rho\mathcal{A}_\rho)(\dot{\xi}^\lambda\nabla_\lambda\ln\Lambda)\right] + \\ &+ \frac{\delta p_{\text{diss}}\Delta\dot{p}_{\text{ad}}}{\gamma p_0} + \frac{1}{\Lambda c}\delta\mu_A\Gamma_A. \quad (1.119)\end{aligned}$$

Подставляя этот результат в \mathcal{M} (1.113), а затем подставляя \mathcal{M} в закон сохранения энергии (1.112), получаем, что последний может быть представлен в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\tilde{E}_{\text{ad}} = - \int \frac{c}{\gamma p} \delta p_{\text{diss}} \Delta \dot{p}_{\text{ad}} \sqrt{-g} d^3x, \quad (1.120)$$

где величина \tilde{E}_{ad} с точностью до значения адиабатического индекса γ и замены $\delta p \rightarrow \delta p_{\text{ad}}$ имеет абсолютно такой же вид, как энергия \tilde{E} (1.97) в случае вещества с замороженным химическим составом:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\text{ad}} = \int \left[\frac{w_0}{2} \delta u_\rho \delta u^\rho + \frac{1}{2} \frac{(\delta p_{\text{ad}})^2}{\gamma p_0} + \frac{1}{\Lambda} \delta p \delta u^t + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} w_0 (\xi^\rho \mathcal{A}_\rho) (\xi^\lambda \nabla_\lambda \ln \Lambda) \right] \sqrt{-g} d^3x. \quad (1.121) \end{aligned}$$

Обратим внимание, что при выводе закона сохранения в данной форме мы опирались на описание в терминах адиабатического индекса, модифицированного химическими реакциями. Поэтому область применимости закона сохранения в форме (1.120) ограничена областью применимости такого описания (см. разделы 1.3.1-1.3.2). Закон сохранения в форме (1.112), однако, на такое описание не опирается и потому является более общим.

Как правило, если не оговорено обратное, мы будем работать в области применимости описания с помощью модифицированного реакциями адиабатического индекса. В этом случае, как будет обсуждаться в разделе 1.3.3, подынтегральное выражение в правой части закона сохранения (1.120) представляет собой эквивалентный способ записи скорости производства энтропии, то есть имеет место равенство

$$cT^\infty \hat{\delta}[\nabla_\mu (s u^\mu)] = -\frac{1}{\Lambda} \delta \mu_k \Gamma_k = \frac{c}{\gamma p_0} \delta p_{\text{diss}} \Delta \dot{p}_{\text{ad}}. \quad (1.122)$$

Поэтому в данном случае последние два слагаемых в формуле (1.119) сокращаются и мы приходим к равенству $\tilde{E}_{\text{ad}} = \tilde{E}$ величины \tilde{E}_{ad} , рассчитанной по формуле (1.121) и энергии \tilde{E} , рассчитанной по формуле (1.112).

1.3 Диссипация и гравитационное излучение

В предыдущем разделе мы обсуждали упрощенное моделирование колебаний, при котором звезда описывается тензором энергии-импульса идеальной жидкости и движение всех сортов частиц характеризуется единой гидродинамической скоростью u^μ . За исключением рассмотрения в разделе 1.2.4, предложенное описание не учитывает протекание различных процессов, приводящих к необратимой диссипации энергии в тепло. К тому же используемый в предыдущем разделе гидродинамический подход обязывает нас использовать приближение Каулинга, то есть пренебрегать возмущениями гравитационного поля в гидродинамических уравнениях. При этом мы пренебрегаем и тем, что колеблющаяся НЗ излучает гравитационные волны, которые уносят энергию из системы. В данном разделе мы обсуждаем влияние диссипации и излучения гравитационных волн на динамику колебаний. При описании диссипативных явлений мы будем опираться на релятивистскую диссипативную гидродинамику многокомпонентных смесей, предлагаемую в работах [27, 28]. Влияние излучения гравитационных волн мы будем описывать, опираясь на стандартный мультипольный подход [83].

1.3.1 Диссипативные механизмы

Наиболее «популярными» и хорошо изученными механизмами диссипации в контексте колебаний НЗ являются сдвиговая и объемная вязкости¹⁰. Наряду с ними мы также будем рассматривать диффузию частиц, влияние которой на колебания, насколько нам известно, практически не изучалось.

Сдвиговая вязкость (η) описывает трение при движении слоев жидкости друг относительно друга. Включение данного эффекта достигается с помощью введения дополнительного слагаемого $T_{\text{shear}}^{\mu\nu}$ в тензор энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{perfect fluid}}^{\mu\nu} + T_{\text{shear}}^{\mu\nu} = wu^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} - c\eta\sigma^{\mu\nu}, \quad (1.123)$$

где $\eta > 0$ – коэффициент сдвиговой вязкости, а $\sigma^{\mu\nu}$ – сдвиговый тензор:

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \perp^\mu \nabla^\nu u^\nu + \perp^\nu \nabla^\mu u^\mu - \frac{2}{3} \perp^{\mu\nu} (\perp^\lambda \nabla_\lambda u^\lambda). \quad (1.124)$$

¹⁰Диссипация за счет теплопроводности незначительна по сравнению с вязкой и обычно не рассматривается.

Далее, вследствие *диффузии частиц* (\mathcal{D}) различные сорта частиц движутся с немного разными скоростями и потому испытывают трение. Диффузию можно описывать в рамках многожидкостной гидродинамики (см., например, [27, 48, 84–88]). В нерелятивистской теории при таком подходе каждому сорту частиц k присваивается индивидуальная скорость \mathbf{v}_k , а в соответствующие уравнения Эйлера (суммирование по повторяющимся индексам *не ведется!*)

$$n_k \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_k \nabla) \right] \frac{\mu_k \mathbf{v}_k}{c^2} = e_k n_k \mathbf{E} - n_k \nabla \mu_k - \frac{\mu_k n_k}{c^2} \nabla \phi - \sum_m J_{km} \mathbf{v}_{km} \quad (1.125)$$

вводятся силы трения, которые представляются в следующем виде:

$$\mathbf{f}_k = - \sum_m J_{km} \mathbf{v}_{km}, \quad \mathbf{v}_{km} \equiv \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_m. \quad (1.126)$$

Здесь \mathbf{E} – электрическое поле, ϕ – гравитационный потенциал, а J_{km} – *темпы переноса импульса*, кодирующие информацию о трении частиц. Хотя такое описание, вероятно, является наиболее наглядным, на практике с ростом числа сортов частиц оно оказывается неудобным из-за связанного с ним роста числа уравнений. Поэтому, как правило, мы будем пользоваться эквивалентным подходом, предложенным в работах [27, 28] и применимым в релятивистском случае. В этих работах для описания диффузии вместо индивидуальных скоростей и сил трения вводятся поправки $j_{(k)\text{diff}}^\mu$ к плотностям потока (1.2) частиц:

$$j_{(k)}^\mu = j_{(k)\text{nondiss}}^\mu + j_{(k)\text{diff}}^\mu = j_{(k)\text{nondiss}}^\mu - \mathcal{D}_{km} d_{(m)}^\mu. \quad (1.127)$$

Здесь *коэффициенты диффузии* \mathcal{D}_{km} выражаются через темпы переноса импульса J_{pq} [27], а вспомогательные векторы $d_{(k)}^\mu$ определены равенством

$$d_{(k)}^\mu \equiv \perp \nabla^\mu \left(\frac{\mu_k}{T} \right) - \frac{e_k E^\mu}{T}, \quad E_\mu \equiv \mathbf{u}^\nu F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (1.128)$$

где A_μ – электромагнитный потенциал, $F_{\mu\nu}$ – тензор электромагнитного поля, а E^μ – электрический 4-вектор (в сопутствующей с.о. его пространственные компоненты совпадают с компонентами 3-вектора электрического поля). При этом включение диффузии частиц не приводит к увеличению числа уравнений: остается одно уравнение Эйлера и то же число уравнений непрерывности.

Коэффициенты диффузии \mathcal{D}_{km} обладают рядом полезных свойств, которые нам понадобятся в дальнейших выкладках. Доказывается, что они являются симметричными и образуют неотрицательно определенную матрицу:

$$\mathcal{D}_{km} = \mathcal{D}_{mk}, \quad \mathcal{D}_{mk} d_{(m)}^{\mu} d_{(k)\mu} \geq 0. \quad (1.129)$$

Кроме того в вырожденном веществе они связаны соотношениями

$$\mu_k \mathcal{D}_{km} = 0. \quad (1.130)$$

И наконец отметим, что в случае сверхпроводящего вещества все коэффициенты диффузии, ассоциирующиеся со сверхпроводящим сортом частиц, следует положить равными нулю: $\mathcal{D}_{sm} = 0$ (см. обсуждение в разделе 1.4).

Что касается *объемной вязкости* (ζ), она описывает энергопотери, связанные с неравновесным протеканием химических реакций при сжатии и расширении звездного вещества. Данный эффект можно приближенно включить в теорию, вводя еще одну поправку $T_{\text{bulk}}^{\mu\nu}$ к тензору энергии-импульса:

$$T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} + T_{\text{bulk}}^{\mu\nu} = w u^{\mu} u^{\nu} + p g^{\mu\nu} - c \eta \sigma^{\mu\nu} - \zeta c^{\perp \mu\nu} \perp \nabla_{\lambda} u^{\lambda}, \quad (1.131)$$

что эквивалентно формальной замене

$$p \rightarrow p + p_{\text{diss}} = p - \zeta c^{\perp} \nabla_{\lambda} u^{\lambda}, \quad (1.132)$$

где p_{diss} – та самая диссипативная поправка к давлению, с которой мы встречались в разделе 1.2.4. При этом вся информация о реакциях оказывается закодированной в *коэффициенте объемной вязкости* $\zeta > 0$.

Отметим, что в общем случае влияние химических реакций на динамику системы не ограничивается появлением объемной вязкости ζ и сводится к последнему только в том случае, когда реакции являются медленными (то есть время релаксации к химическому равновесию много больше рассматриваемых гидродинамических времен, таких как, скажем, период колебаний) и практически не меняют химического состава вещества. Наиболее точное описание влияния химических реакций достигается не с помощью замен (1.131)-(1.132), а с помощью введения в уравнения непрерывности источников частиц Γ_k , как это

делалось в разделах 1.2.3-1.2.4:

$$\nabla_{\mu} j_{(k)}^{\mu} = \frac{1}{c} \Gamma_k = \frac{1}{c} N_{k(a)} \Gamma_{(a)}, \quad (1.133)$$

где, напомним, $N_{k(a)}$ – число частиц сорта k , производимых за одну прямую реакцию ($\text{in} \rightarrow \text{out}$) в паре реакций $(a) = (\text{in} \leftrightarrow \text{out})$, а $\Gamma_{(a)}$ – скорость реакций для пары (a) , определенная согласно (1.36). Оказывается, что, помимо появления диссипативных слагаемых, которые можно учесть введением объемной вязкости ζ , включение источников также приводит к появлению бездиссипативных вкладов, модифицирующих адиабатический индекс γ (1.66), что не учитывается заменами (1.131)-(1.132).

Здесь, однако, следует оговориться, что описание в терминах объемной вязкости ζ и модифицированного адиабатического индекса γ применимо только в предположении, что каждая из протекающих химических реакций либо (1) является экстремально быстрой, то есть находится в равновесии на гидродинамических временах, либо (2) слабо отклоняется от равновесия, то есть выполнено неравенство $|\mu_{\text{in} \leftrightarrow \text{out}}| \ll k_B T$, где k_B – постоянная Больцмана. Дело в том, что в общем случае источники Γ_k нелинейным образом зависят от величин $\mu_{\text{in} \leftrightarrow \text{out}}/k_B T$, и отказ от указанного выше условия делает задачу сугубо нелинейной, что существенно усложняет моделирование. Здесь мы не будем рассматривать данные нелинейные эффекты и будем считать, что амплитуда колебания является достаточно малой, чтобы вклады в источники Γ_k от не слишком быстрых реакций можно было линеаризовать по $\mu_{\text{in} \leftrightarrow \text{out}}/k_B T$. В этом случае описание в терминах источников действительно эквивалентно описанию в терминах объемной вязкости ζ и адиабатического индекса γ .

1.3.2 Определение ζ и γ из уравнений непрерывности

Общая стратегия вывода

Рассмотрим колебания вида (1.73), характеризующиеся азимутальным квантовым числом m и частотой σ , измеренной удаленным инерциальным наблюдателем. Из обсуждения в предыдущем разделе следует, что, по крайней мере когда возможно описание влияния химических реакций в терминах модифицированного адиабатического индекса γ (1.66) и объемной вязкости ζ , в ходе колебаний возмущение давления в веществе с активно протекающими ре-

акциями должно удовлетворять уравнению¹¹

$$\Delta p - \Delta p_{\text{ad}} = \Delta p_{\text{diss}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta p + \gamma p_0^\perp \nabla_\mu \xi^\mu = -\zeta c \nabla_\mu \delta u^\mu, \quad (1.134)$$

которое с учетом формул (1.53) и (1.55) для рассматриваемых колебаний можно переписать в эквивалентном виде

$$\Delta p + \gamma p_0^\perp \nabla_\mu \xi^\mu = -i\zeta \sigma_{\text{loc}}^\perp \nabla_\mu \xi^\mu, \quad \sigma_{\text{loc}} \equiv \Lambda(\sigma + m\Omega), \quad (1.135)$$

где σ_{loc} – локальная частота колебаний. Действительно, если применить к данному уравнению формальное правило замены (1.132), то правая его часть обратится в ноль, а тензор энергии-импульса приобретет дополнительную поправку $T_{\text{bulk}}^{\mu\nu}$ (1.131). В то же время уравнение вида (1.135) можно получить независимым способом, стартуя с линеаризованных уравнений непрерывности с источниками (1.76) и пользуясь термодинамическими соотношениями:

$$i\sigma_{\text{loc}}[\Delta n_k + n_{k0}^\perp \nabla_\mu \xi^\mu] = N_{k(a)} \Gamma_{(a)}, \quad \Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial n_k} \right)_0 \Delta n_k. \quad (1.136)$$

Получив такое уравнение и сравнив его с уравнением (1.135), можно установить искомые выражения для коэффициентов γ и ζ . При этом, естественно, необходимо конкретизировать вид скоростей реакций $\Gamma_{(a)}$.

Отметим, что на практике для поиска γ и ζ зачастую в качестве независимых термодинамических переменных вместо концентраций частиц выбираются более удобные величины, такие как, например, барионная концентрация, доли лептонов и другие. При таком описании в качестве дополнительного шага надо, пользуясь уравнениями непрерывности, получить уравнения на возмущения новых термодинамических переменных. Дальнейший подход к определению γ и ζ по существу совпадает с описанным выше: необходимо, пользуясь термодинамическими соотношениями в новых переменных, получить уравнение на Δp и сравнить его с уравнением (1.135). Ниже мы применяем описанный подход к нуклонному и гиперонному веществу, рассмотрением которых мы ограничиваемся в данной работе.

¹¹Здесь для простоты рассматриваются уравнения без диффузии, поскольку она никак не влияет на процедуру определения объемной вязкости и адиабатического индекса.

Определение ζ и γ в нуклонном веществе

В нуклонном веществе источники Γ_k в уравнениях непрерывности определяются протеканием модифицированных [63] и (в наиболее массивных звездах) прямых [64] урка процессов (1.27)-(1.28). При низких температурах, $T \ll T_F$, скорости данных реакций $\Gamma_{(a)}$ подавлены (в отсутствие спаривания нуклонов, см. раздел 1.4) факторами $(T/T_F)^6$ и $(T/T_F)^4$, соответственно, а потому слагаемые Γ_k являются относительно малыми и слабо влияют на химический состав. Далее, при слабых отклонениях $\mu_{(a)} \equiv -\mu_k N_{k(a)}$ от химического равновесия, когда выполнено неравенство $|\mu_{(a)}| \ll k_B T$, скорости реакций можно линеаризовать по данным отклонениям и записать

$$\Gamma_{(a)} = \lambda_{(a)} \cdot \mu_{(a)} = \lambda_{(a)} \cdot \Delta\mu_{(a)}, \quad (1.137)$$

где точка (\cdot) указывает, что здесь *не предполагается суммирование по повторяющемуся индексу* (a) . Коэффициенты $\lambda_{(a)}$ в литературе также носят название скоростей реакций и предоставляются микроскопической теорией.

Чтобы сделать дальнейшие выкладки более компактными, введем диагональную матрицу $\lambda_{(a)(b)} \equiv \lambda_{(a)} \cdot \delta_{(a)(b)}$ со скоростями реакций на диагонали. Тогда, подразумевая суммирование по повторяющимся индексам реакций, разложение (1.137) можно переписать в виде

$$\Gamma_{(a)} = \lambda_{(a)(b)} \Delta\mu_{(b)} = \lambda_{(a)(b)} \left(\frac{\partial \mu_{(b)}}{\partial n_m} \right)_0 \Delta n_m. \quad (1.138)$$

Подставляя данные выражения в линеаризованные уравнения непрерывности (1.136) и группируя слагаемые, получаем:

$$\left[\delta_{km} - i \frac{\sigma_{km}}{\sigma_{\text{loc}}} \right] \Delta n_m + n_{k0}^\perp \nabla_\mu \xi^\mu = 0, \quad (1.139)$$

где мы для краткости ввели матрицу

$$\sigma_{km} \equiv -N_{k(a)} \lambda_{(a)(b)} \left(\frac{\partial \mu_{(b)}}{\partial n_m} \right)_0 = N_{k(a)} \lambda_{(a)(b)} N_{q(b)} \left(\frac{\partial \mu_q}{\partial n_m} \right)_0. \quad (1.140)$$

Поскольку в нуклонном веществе реакции слабо влияют на химический состав, величины $(\sigma_{km}/\sigma_{\text{loc}})$ являются относительно маленькими и с точностью до ли-

нейного порядка по $(\sigma_{km}/\sigma_{\text{loc}})$ это уравнение эквивалентно следующему:

$$\Delta n_k + n_{k0} \perp \nabla_{\mu} \xi^{\mu} = -i \frac{\sigma_{km}}{\sigma_{\text{loc}}} n_{m0} \perp \nabla_{\mu} \xi^{\mu}. \quad (1.141)$$

Домножая это уравнение на $(\partial p / \partial n_{k0})$, мы получаем уравнение ожидаемого вида (1.135), в котором адиабатический индекс совпадает с адиабатическим индексом вещества с замороженным составом (1.64), а коэффициент объемной вязкости вычисляется по формуле

$$\zeta = \frac{1}{\sigma_{\text{loc}}^2} \left(\frac{\partial p}{\partial n_k} \right)_0 \sigma_{km} n_{m0}. \quad (1.142)$$

Определение ζ и γ в гиперонном веществе

Как обсуждалось в разделе (1.2.2), химические реакции в гиперонном веществе можно разбить на три группы: сильный процесс (1.34), слабые безлептонные процессы (1.29)-(1.33) и слабые лептонные процессы, такие как (1.27)-(1.28). Каждая из этих групп обладает особыми физическими свойствами и ниже будет учитываться соответствующим образом.

Начнем с рассмотрения сильного процесса (1.34). В случае нормальных протонов этот процесс можно с высокой точностью считать находящимся в равновесии, поскольку сильное взаимодействие устанавливает равновесие на временах много меньше периода гидродинамических колебаний. Если же протоны являются сверхпроводящими, это может быть не так, поскольку сверхпроводимость сильно подавляет эту реакцию при достаточно низких температурах. Мы вернёмся к обсуждению этого вопроса в разделе 1.4, а здесь для простоты будем формально считать, что сильный процесс находится в равновесии даже в случае сверхпроводящих протонов. Также для простоты мы ограничимся рассмотрением случая, когда сильный процесс активизируется сразу же с появлением Ξ^- -гиперонов, как это имеет место по крайней мере для тех уравнений состояния, которые мы будем использовать для описания гиперонного вещества (см. раздел 4.4). Тогда можно считать, что химический потенциал Ξ^- -гиперонов с высокой точностью удовлетворяет соответствующему условию химического равновесия:

$$\mu_{\Lambda+\Lambda \leftrightarrow \Xi^-+p} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{\Xi^-} = 2\mu_{\Lambda} - \mu_p. \quad (1.143)$$

Это условие, вместе с условием квазинейтральности ($e_k n_k = 0$), позволяет сократить число независимых термодинамических переменных с шести $\{n_n, n_p, n_e, n_\mu, n_\Lambda, n_{\Xi^-}\}$ до четырёх. В настоящей работе мы, следуя [68], используем набор переменных $\{n_b, y_e, y_\mu, y_S\}$, определённых равенствами (1.1):

$$n_b \equiv b_k n_k, \quad y_e \equiv \frac{n_e}{n_b}, \quad y_\mu \equiv \frac{n_\mu}{n_b}, \quad y_S \equiv \frac{n_S}{n_b}, \quad n_S \equiv s_k n_k. \quad (1.144)$$

При использовании данных переменных нам достаточно рассмотреть только источники барионов $\Gamma_b \equiv b_k \Gamma_k$, лептонов $\Gamma_{e,\mu}$ и странности $\Gamma_S \equiv s_k \Gamma_k$. При этом, поскольку число барионов сохраняется в реакциях, барионный источник $\Gamma_b = 0$ обращается в ноль и нам остается рассмотреть только $\Gamma_{e,\mu,S}$. Кроме того, можно показать, что в данных переменных выполняются следующие равенства

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_b}\right)_0 = \frac{w_0}{n_{b0}}, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y_S}\right)_0 = 0, \quad (1.145)$$

а лагранжевы возмущения рассчитываются по формуле

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial n_b}\right)_0 \Delta n_b + \left(\frac{\partial f}{\partial y_S}\right)_0 \Delta y_S + \left(\frac{\partial f}{\partial y_e}\right)_0 \Delta y_e + \left(\frac{\partial f}{\partial y_\mu}\right)_0 \Delta y_\mu. \quad (1.146)$$

Слабые лептонные и безлептонные реакции, обусловленные слабым и комбинированным слабым и сильным взаимодействием, протекают значительно медленнее сильного процесса, и их отклонение от равновесия в общем случае необходимо учитывать. При этом при низких температурах скорости слабых лептонных реакций (в отсутствие спаривания нуклонов, см. раздел 1.4) подавлены фактором $(T/T_F)^6$, в то время как слабые безлептонные – фактором $(T/T_F)^2$, то есть существенно слабее. По этой причине мы в дальнейшем будем пренебрегать вкладом слабых лептонных процессов в источники Γ_k . С физической точки зрения, это означает, что, хотя эти реакции и выводятся из равновесия, они слишком медленные, чтобы давать заметный вклад в Γ_k . В частности, поскольку именно эти процессы изменяют число лептонов, это означает, что в данном приближении лептоны сохраняются: $\Gamma_e = \Gamma_\mu = 0$.

Наконец, слабые безлептонные процессы $12 \leftrightarrow 34$ будут рассматриваться как протекающие с произвольной скоростью, однако сопровождающиеся не слишком большими отклонениями от равновесия, при которых выполнено условие $|\mu_{12 \leftrightarrow 34}| \ll k_B T$. В этом случае соответствующие скорости реакций

$\Gamma_{12\leftrightarrow 34}$ можно представить в виде $\Gamma_{12\leftrightarrow 34} \equiv \lambda_{12\leftrightarrow 34}\mu_{12\leftrightarrow 34} = \lambda_{12\leftrightarrow 34}\Delta\mu_{12\leftrightarrow 34}$. При этом легко видеть, что, ввиду условия равновесия сильного процесса (1.143), отклонения $\mu_{12\leftrightarrow 34}$ от химического равновесия для всех слабых безлептонных реакций совпадают, что позволяет записать их скорости в следующем виде:

$$\Gamma_{12\leftrightarrow 34} = \lambda_{12\leftrightarrow 34}\Delta\mu, \quad \mu_{12\leftrightarrow 34} = \mu \equiv \mu_n - \mu_\Lambda. \quad (1.147)$$

Таким образом, источник странности Γ_S оказывается единственным неисчисляющим источником. Он определяется слабыми безлептонными процессами (1.29)-(1.33), причем каждый прямой процесс меняет странность на (-1) . Тогда, учитывая все вышесказанное, мы получаем окончательные выражения:

$$\Gamma_b = \Gamma_e = \Gamma_\mu = 0, \quad \Gamma_S = -\lambda_{\text{tot}}\Delta\mu, \quad \lambda_{\text{tot}} \equiv \sum_{12\leftrightarrow 34} \lambda_{12\leftrightarrow 34}, \quad (1.148)$$

где сумма берется по всем слабым безлептонным процессам.

Теперь мы можем приступить к определению адиабатического индекса и объемной вязкости. Сначала, пользуясь уравнениями непрерывности (1.136), определением новых термодинамических переменных (1.144), формулами для источников (1.148) и общей формулой (1.146), получаем

$$\begin{cases} \Delta n_b + n_{b0}^\perp \nabla_\mu \xi^\mu = 0 \\ \Delta y_e = \Delta y_\mu = 0 \\ \Delta y_S = i(\lambda_{\text{tot}}/n_{b0}\sigma_{\text{loc}})\Delta\mu \\ \Delta\mu = (\partial\mu/\partial n_b)_0 \Delta n_b + (\partial\mu/\partial y_S)_0 \Delta y_S. \end{cases} \quad (1.149)$$

Далее, исключая из этой системы возмущение $\Delta\mu$, получаем

$$\begin{cases} \Delta n_b = -n_{b0}^\perp \nabla_\mu \xi^\mu \\ \Delta y_e = \Delta y_\mu = 0 \\ \Delta y_S = -i \frac{(\lambda_{\text{tot}}/\lambda_{\text{max}})}{1 - i(\lambda_{\text{tot}}/\lambda_{\text{max}})} \frac{(\partial\mu/\partial n_b)_0}{(\partial\mu/\partial y_S)_0} n_{b0}^\perp \nabla_\mu \xi^\mu, \end{cases} \quad (1.150)$$

где мы ввели вспомогательное обозначение

$$\lambda_{\text{max}} \equiv n_{b0}\sigma_{\text{loc}} \left(\frac{\partial\mu}{\partial y_S} \right)_0^{-1}. \quad (1.151)$$

Наконец, вычисляя лагранжево возмущение давления Δp по общей формуле (1.146), подставляя полученные выражения (1.150) для возмущений новых термодинамических переменных и группируя слагаемые, мы приходим к уравнению искомого вида (1.135) с адиабатическим индексом

$$\gamma = \frac{n_{b0}}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial n_b} \right)_0 \left[1 - \beta \frac{(\lambda_{\text{tot}}/\lambda_{\text{max}})^2}{1 + (\lambda_{\text{tot}}/\lambda_{\text{max}})^2} \right], \quad \beta \equiv \frac{(\partial p/\partial y_s)_0 (\partial \mu/\partial n_b)_0}{(\partial p/\partial n_b)_0 (\partial \mu/\partial y_s)_0}, \quad (1.152)$$

и объемной вязкостью

$$\zeta = \zeta_{\text{max}} \frac{2(\lambda_{\text{tot}}/\lambda_{\text{max}})}{1 + (\lambda_{\text{tot}}/\lambda_{\text{max}})^2}, \quad \zeta_{\text{max}} \equiv \frac{n_{b0}\beta}{2\sigma_{\text{loc}}} \left(\frac{\partial p}{\partial n_b} \right)_0. \quad (1.153)$$

Введенные выше величины λ_{max} , ζ_{max} и β имеют прозрачный физический смысл. Видно, что, как функция скорости реакций λ_{tot} , объемная вязкость достигает своего максимального значения $\zeta = \zeta_{\text{max}}$ в точке $\lambda_{\text{tot}} = \lambda_{\text{max}}$ и стремится к нулю при удалении от этой точки, где реакции являются слишком медленными ($\lambda_{\text{tot}} \ll \lambda_{\text{max}}$) или слишком быстрыми ($\lambda_{\text{tot}} \gg \lambda_{\text{max}}$)¹². Что касается параметра β , он описывает разницу в значениях адиабатического индекса между данными предельными случаями.

Описанное поведение объемной вязкости и адиабатического индекса ожидаемо и легко объясняется. Рассмотрим сначала случай медленных реакций ($\lambda_{\text{tot}} \ll \lambda_{\text{max}}$). В этом пределе вещество не успевает отреагировать на изменения (расширение/сжатие) в ходе колебаний, и его химический состав остается таким, словно слабые безлептонные реакции и вовсе не протекают, то есть являются замороженными: $\Delta y_{s,e,\mu} = 0$. По этой причине объемная вязкость стремится к нулю, а адиабатический индекс стремится к значению

$$\gamma_{\text{frozen}} \equiv \frac{n_{b0}}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial n_b} \right)_0. \quad (1.154)$$

Здесь и далее мы будем использовать метку «*frozen*», чтобы указать, что адиабатический индекс вычисляется в пределе пренебрежимо медленных (замороженных) слабых безлептонных реакций. При этом следует иметь в виду, что в данном пределе все еще учитывается влияние быстро протекающего сильного

¹²Заметим, что, строго говоря, частота σ и, следовательно, локальная частота σ_{loc} могут в общем случае принимать комплексные значения из-за наличия диссипации в системе. В условиях НЗ, однако, диссипация обычно является слабой и мнимой частью частоты в формулах для γ и ζ можно пренебречь. Это позволяет нам считать λ_{max} и ζ_{max} вещественными величинами.

процесса (1.34), а потому этот предел в общем случае может не соответствовать веществу с полностью замороженным химическим составом ($\Delta y_k = 0$ для всех сортов частиц), когда *все* реакции являются медленными. Если же мы рассматриваем гиперонное вещество при плотностях, при которых еще нет Ξ^- -гиперонов и сильный процесс недоступен, то в таком веществе в сделанных предположениях предел медленных безлептонных реакций действительно соответствует пределу вещества с замороженным составом.

Рассмотрим теперь противоположный предел, когда слабые безлептонные реакции являются очень быстрыми ($\lambda_{\text{tot}} \gg \lambda_{\text{max}}$). В этом пределе вещество мгновенно реагирует на изменения в ходе колебаний и, следовательно, слабые безлептонные реакции находятся практически в состоянии химического равновесия, что объясняет стремление объемной вязкости к нулю в этом пределе. Что касается адиабатического индекса, он модифицируется из-за быстрого протекания химических реакций и стремится к значению

$$\gamma_{\text{fast}} \equiv \gamma_{\text{frozen}}(1 - \beta). \quad (1.155)$$

Здесь и далее мы будем использовать метку «*fast*», чтобы указать, что адиабатический индекс вычисляется в приближении экстремально быстрых слабых безлептонных реакций, то есть когда они находятся в химическом равновесии.

Отметим, что предел $\lambda_{\text{tot}} \gg \lambda_{\text{max}}$ в общем случае не соответствует ситуации, когда реализуется полное химическое равновесие, то есть *все* химические реакции находятся в равновесии. Это связано с тем, что полное равновесие подразумевает и равновесие слабых лептонных процессов, которые выше считались замороженными. Если же в ходе колебаний поддерживается *полное* химическое равновесие, то вещество ведет себя как баротропное (см. обсуждение химического равновесия в разделе 1.2.2), и его адиабатический индекс определяется формулой (1.65):

$$\gamma_{\text{eq}} \equiv \frac{w_0}{p_0} \left(\frac{dp}{d\varepsilon} \right)_0 = \frac{n_{b0}}{p_0} \frac{dp_0}{dn_{b0}}, \quad (1.156)$$

где во втором равенстве мы воспользовались равновесными термодинамическими соотношениями (1.26). Здесь индекс «*eq*» указывает, что адиабатический индекс вычисляется для случая полного химического равновесия.

В завершение этого раздела отметим, что в общем случае в зависимости от температуры вещества скорости реакций могут пробегать весь диапазон значений от медленных ($\lambda_{\text{tot}} \ll \lambda_{\text{max}}$) до быстрых ($\lambda_{\text{tot}} \gg \lambda_{\text{max}}$). Поэтому, как следует из равенства (1.152), адиабатический индекс гиперонного вещества, несмотря на вырожденность последнего, в общем случае зависит от температуры и в сделанных предположениях лежит в диапазоне $\gamma_{\text{fast}} \leq \gamma \leq \gamma_{\text{frozen}}$.

1.3.3 Диссипативные энергопотери

Общие выражения для энергопотерь

Диссипативные эффекты приводят к необратимой конверсии энергии колебаний в тепло. С точки зрения локального наблюдателя, движущегося вместе с жидкостью, за время dt в малом (координатном) объеме жидкости $d^3x = dr d\theta d\varphi$ с локальной температурой T выделяется порция тепла [89]

$$dQ = T(\nabla_{\mu} s^{\mu}) c \sqrt{-g} dt d^3x, \quad (1.157)$$

где s^{μ} – вектор плотности потока энтропии. Далее, следуя [89], мы замечаем, что, согласно этому уравнению, величина dQ/T является релятивистским инвариантом. Пользуясь этим наблюдением и тем, что температура, измеряемая удаленным наблюдателем, испытывает красное смещение и равна $T^{\infty} = T/\Lambda$, мы получаем, что порция тепла, выделяемая в том же элементе жидкости, с точки зрения удаленного наблюдателя равна

$$dQ^{\infty} = T^{\infty}(\nabla_{\mu} s^{\mu}) c \sqrt{-g} dt d^3x. \quad (1.158)$$

Далее мы заимствуем общее выражение для генерации энтропии из [27, 28]:

$$\nabla_{\mu} s^{\mu} = \frac{c\eta}{2T} \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \frac{c\zeta}{T} (\perp \nabla_{\mu} \mathbf{u}^{\mu})^2 + \mathcal{D}_{km} d_{(k}^{\mu} d_{m)\mu}. \quad (1.159)$$

Первое слагаемое описывает генерацию энтропии сдвиговой вязкостью, второе – объемной вязкостью, а третье – диффузией. Подставляя данное выражение в (1.158) и интегрируя $(-dQ^{\infty}/dt)$ по объему звезды, получаем, что энергопотери

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{diss}} \equiv - \int \frac{dQ^{\infty}}{dt d^3x} d^3x = \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\eta} + \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\zeta} + \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\mathcal{D}} \quad (1.160)$$

разбиваются на три вклада, каждый из которых описывает потери за счет соответствующего механизма:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_\eta = - \int \frac{\eta}{2\Lambda} \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} c^2 \sqrt{-g} d^3x, \quad (1.161)$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_\zeta = - \int \frac{\zeta}{\Lambda} (\perp \nabla_\mu \mathbf{u}^\mu)^2 c^2 \sqrt{-g} d^3x, \quad (1.162)$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_\mathcal{D} = - \int \frac{T}{\Lambda} \mathcal{D}_{km} d_{(k)}^\mu d_{(m)\mu} c \sqrt{-g} d^3x. \quad (1.163)$$

Влияние диссипативных эффектов на гидродинамические колебания обычно слабое и проявляется на временах много больше их периода. Это обстоятельство позволяет учитывать диссипацию с помощью теории возмущений по соответствующим кинетическим коэффициентам. В ведущем порядке такой теории энергопотери можно рассчитать, подставив в (1.161)-(1.163) решения уравнений бездиссипативной гидродинамики (1.74).

Отметим, что полученный результат для энергопотерь за счет объемной вязкости согласуется с законом сохранения энергии (1.120) для колебаний в веществе с протекающими химическими реакциями, который мы рассматривали в разделе 1.2.4. Чтобы убедиться в этом, заметим, что ввиду нормировки скорости (1.10), формулы (1.55), равенства (1.53) и уравнения (1.117) дивергенция скорости может быть представлена в виде

$$\perp \nabla_\mu \mathbf{u}^\mu = \delta(\perp \nabla_\mu \mathbf{u}^\mu) = \nabla_\mu \delta \mathbf{u}^\mu = \Lambda \perp \nabla_\mu \dot{\xi}^\mu = - \frac{\Lambda \Delta \dot{p}_{\text{ad}}}{\gamma p_0}. \quad (1.164)$$

С другой стороны, согласно правилу замены (1.132), имеем

$$\perp \nabla_\mu \mathbf{u}^\mu = \delta(\perp \nabla_\mu \mathbf{u}^\mu) = - \frac{1}{c\zeta} \delta p_{\text{diss}}. \quad (1.165)$$

Подставляя эти представления дивергенции скорости в общую формулу (1.162), мы сразу же приходим к выражению для диссипации энергии, появившемся в законе сохранения (1.120). Что касается полученных выражений (1.161) и (1.163) для энергопотерь за счет сдвиговой вязкости и диффузии частиц, в принципе можно показать, что и они согласуются с законом сохранения энергии, который можно вывести с использованием уравнения Киллинга по аналогии с тем, как это делалось в разделе 1.2.4. При этом следует иметь в

виду, что выражение для энергии колебаний может видоизменяться и приобретать дополнительные вклады диссипативного происхождения. Однако в ведущем порядке теории возмущений по кинетическим коэффициентам, описывающим диссипацию, эти вклады могут быть отброшены как малые, и энергия приблизительно определяется бездиссипативными формулами.

Полученные выражения для диссипации за счет сдвиговой и объемной вязкости могут сразу использоваться в последующих расчетах. Они пригодны как для несверхпроводящего, так и для сверхпроводящего вещества с той оговоркой, что сверхпроводимость влияет на коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости (см. обсуждение в разделе 1.4). Выражение для диффузионных энергопотерь нам будет удобно преобразовать к другому, более приспособленному для расчетов виду, избавившись от самосогласованного электрического поля E^μ , входящего в диффузионные токи (1.127). Оказывается, что это поле сильно модифицируется сверхпроводимостью, а потому расчеты для несверхпроводящего и сверхпроводящего вещества мы проведем по отдельности.

Электрическое поле и диффузия в сверхпроводящем нуклонном веществе

Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать диффузию только в нуклонном веществе, где реакции являются медленными и практически не меняют химический состав вещества, в этом разделе для простоты мы ограничимся случаем, когда источниками частиц в уравнениях непрерывности можно пренебречь. В соответствии с этим здесь под величиной γ мы будем подразумевать адиабатический индекс вещества с замороженным составом (1.64).

Чтобы определить самосогласованное поле E^μ в сверхпроводящем веществе необходимо заметить, что *только в сверхпроводящем веществе* помимо описанных выше возникает еще одно гидродинамическое уравнение. Чтобы получить это уравнение, используем представление сверхпроводящей скорости в следующем виде [90, 91]¹³:

$$\mathbf{u}_{(s)\mu} = (1/\mu_s)[\nabla_\mu \phi_s - e_s A_\mu], \quad (1.166)$$

где скаляр ϕ_s пропорционален фазе волновой функции конденсата куперовских пар¹⁴. Упомянутое выше гидродинамическое уравнение можно получить, рас-

¹³Мы не учитываем формирование вихрей Абрикосова, поскольку мы изучаем немагнитное вещество.

¹⁴В литературе можно встретить определение $\mathbf{u}_{(s)\mu}^\mu$, немного отличное от приведенного (см., например, [92]).

смотрим условие потенциальности фазы ϕ_s :

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi_s = \nabla_\nu \nabla_\mu \phi_s \quad \Leftrightarrow \quad e_s F_{\mu\nu} = \nabla_\nu [\mu_s \mathbf{u}_{(s)\mu}] - \nabla_\mu [\mu_s \mathbf{u}_{(s)\nu}], \quad (1.167)$$

где мы использовали определение тензора электромагнитного поля (1.128). Именно это уравнение и позволяет определить самосогласованное электрическое поле в сверхпроводящем веществе. Причем, поскольку диссипация считается слабой, это поле можно с хорошей точностью найти, ограничившись бездиссипативным пределом. Поскольку в этом пределе в силу квазинейтральности $\mathbf{u}_{(s)}^\mu = \mathbf{u}^\mu$ (см. раздел 1.2.1), мы, сворачивая уравнение (1.167) с \mathbf{u}^ν , получаем:

$$E_\mu \equiv \mathbf{u}^\nu F_{\mu\nu} = (1/e_s) [\mathbf{u}^\nu \nabla_\nu (\mu_s \mathbf{u}_\mu) - \mathbf{u}^\nu \nabla_\mu (\mu_s \mathbf{u}_\nu)]. \quad (1.168)$$

Наконец, используя бездиссипативное уравнение Эйлера (1.15) и термодинамические соотношения (1.13), мы можем выразить электрический вектор в более удобной для дальнейших вычислений форме:

$$E_\mu = \frac{1}{e_s} \left[\delta_{sk} - \frac{\mu_s n_k}{w} \right] \perp \nabla_\mu \mu_k. \quad (1.169)$$

Теперь мы можем преобразовать выражение для диффузионных энергопотерь в сверхпроводящем веществе к более удобному виду. Для этого, подставляя в $d_{(k)}^\mu$ (1.128) электрическое поле (1.169) а затем пользуясь квазинейтральностью вещества ($e_k n_k = 0$) и условиями равновесия (1.46) для химических потенциалов с $m = s$, мы получаем:

$$d_{(k)\mu} = \frac{\Lambda}{T} \Phi_{km} \perp \nabla_\mu \left[\frac{\delta \mu_m - e_m/e_s \delta \mu_s}{\Lambda} \right], \quad (1.170)$$

где мы ввели вспомогательную матрицу

$$\Phi_{km} \equiv \delta_{km} - \frac{e_k}{e_s} \left[\delta_{sm} - \frac{\mu_{s0} n_{m0}}{w_0} \right]. \quad (1.171)$$

Легко видеть, что, ввиду квазинейтральности вещества и термодинамических соотношений (1.13), матрица Φ_{km} удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\Phi_{km} e_m = 0, \quad \Phi_{km} \mu_{m0} = \mu_{k0}. \quad (1.172)$$

Далее, выражая эйлеровы возмущения $\delta\mu_k$ через лагранжевы $\Delta\mu_k$, затем лагранжевы возмущения $\Delta\mu_k$ через лагранжево возмущение давления Δp согласно (1.67), а затем пользуясь свойствами (1.46) равновесных химических потенциалов с $m = s$, мы получаем:

$$\nabla_\mu \left[\frac{\delta\mu_m - e_m/e_s \delta\mu_s}{\Lambda} \right] = \nabla_\mu \left[\frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial p}{\partial n_m} - \frac{e_m}{e_s} \frac{\partial p}{\partial n_s} \right)_0 \frac{\Delta p}{\gamma p_0} \right] - \frac{\mu_{m0} - e_m/e_s \mu_{s0}}{\Lambda} \nabla_\mu (\xi^\rho \nabla_\rho \ln \Lambda). \quad (1.173)$$

Наконец, мы подставляем этот результат в (1.170) и, пользуясь свойствами (1.129)-(1.130) матрицы \mathcal{D}_{km} и свойствами (1.172) матрицы Φ_{km} , находим

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\mathcal{D}} = - \int \frac{\Lambda^2}{T} \hat{\mathcal{D}}_{pq} \hat{d}_{(p)}^\mu \hat{d}_{(q)\mu} c \frac{\sqrt{-g}}{\Lambda} d^3x, \quad (1.174)$$

где мы ввели вспомогательные обозначения

$$\hat{\mathcal{D}}_{pq} = \Phi_{pk}^T \mathcal{D}_{km} \Phi_{mq}, \quad \hat{d}_{(k)\mu} \equiv \perp \nabla_\mu (\pi_k \Delta p), \quad \pi_k = \frac{1}{\Lambda \gamma p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial n_k} \right)_0. \quad (1.175)$$

Электрическое поле и диффузия в несверхпроводящем нуклонном веществе

Чтобы записать диссипацию за счет диффузии в несверхпроводящем веществе, необходимо снова исключить самосогласованное электрическое поле. При этом мы не можем воспользоваться выражением (1.169), поскольку оно пригодно только для сверхпроводящего вещества. Чтобы найти электрическое поле в данном случае, необходимо записать условие квазинейтральности с учетом диффузионных поправок (1.127):

$$e_k j_{(k)}^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad e_k \mathcal{D}_{km} d_{(m)}^\mu = 0, \quad (1.176)$$

где мы воспользовались равенством $e_k n_k = 0$. Подставляя в явном виде $d_{(m)}^\mu$ (1.128) и выражая из полученного уравнения электрическое поле, находим:

$$\frac{E^\mu}{T} = \frac{e_k \mathcal{D}_{km}}{e_p \mathcal{D}_{pq} e_q} \perp \nabla^\mu \left(\frac{\mu_m}{T} \right). \quad (1.177)$$

Далее, подставляя это выражение в $d_{(m)}^\mu$, получаем

$$d_{(m)}^\mu = \frac{\Lambda}{T} H_{mk} \perp \nabla^\mu \left(\frac{\mu_k}{\Lambda} \right), \quad H_{mk} \equiv \delta_{mk} - \frac{e_m e_n \mathcal{D}_{nk}}{e_p \mathcal{D}_{pq} e_q}. \quad (1.178)$$

Матрица H_{mk} , как несложно видеть, выполняет ту же роль, что и матрица Φ_{mk} в сверхпроводящем случае, и обладает аналогичными свойствами:

$$H_{mk} e_k = 0, \quad H_{mk} \mu_{k0} = \mu_{m0}. \quad (1.179)$$

Поэтому дальнейший вывод с точностью до замены $\Phi_{km} \rightarrow H_{km}$ совпадает с выводом, проведенным для сверхпроводящего вещества. При этом вместо сверхпроводящего сорта «s» при выводе следует использовать любой фиксированный сорт частиц \tilde{m} с ненулевым зарядом. В результате получаем:

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_D = - \int \frac{\Lambda^2}{T} \overline{\mathcal{D}}_{pq} \hat{d}_{(p)}^\mu \hat{d}_{(q)\mu} c \frac{\sqrt{-g}}{\Lambda} d^3x, \quad \overline{\mathcal{D}}_{pq} \equiv H_{pk}^T \mathcal{D}_{km} H_{mq}, \quad (1.180)$$

где вспомогательные векторы $\hat{d}_{(p)}^\mu$ определены тем же равенством (1.175), что и в сверхпроводящем веществе.

Почему в несверхпроводящем веществе для определения самосогласованного электрического поля необходимо учитывать диффузию частиц, в то время как в сверхпроводящем веществе достаточно рассмотреть более простые бездиссипативные уравнения, не учитывающие этот эффект? Это связано с тем обстоятельством, что электрическое поле в первую очередь определяется наиболее эффективным механизмом, позволяющим относительно движение заряженных сортов частиц. В несверхпроводящем веществе таким механизмом является диффузия частиц, из-за которой частицы различных сортов движутся с отличающимися друг от друга скоростями. В сверхпроводящем веществе электрическое поле в первую очередь удерживает вместе не испытывающую трение сверхпроводящую компоненту и нормальные заряженные сорта частиц. В принципе можно было бы учесть диффузионные поправки к полученной формуле (1.169) для поля в сверхпроводящем веществе, однако такими поправками зачастую можно пренебречь из-за относительной малости диффузионных токов, приводящих к их появлению.

Об отсутствии диссипации и диффузионном равновесии

Ранее при обсуждении равновесия НЗ (см. раздел 1.2.2) мы пользовались уравнениями бездиссипативной гидродинамики, ссылаясь на то, что в этом состоянии отсутствует диссипация энергии. Теперь мы можем проверить, что это действительно так. Прямой подстановкой равновесной 4-скорости (1.38) с учетом уравнения Киллинга (1.42) и равенств (1.43) легко убедиться, что в равновесии дивергенция ${}^\perp\nabla_\mu u^\mu$ и сдвиговый тензор $\sigma_{\mu\nu}$ обращаются в ноль, а потому, согласно общим формулам (1.161)-(1.162), отсутствует и диссипация за счет объемной и сдвиговой вязкости. Диссипация за счет диффузии (1.163), в свою очередь, также отсутствует, поскольку в равновесии, согласно формулам (1.170) и (1.178), векторы $d_{(k)0}^\mu = 0$ обращаются в ноль как в сверхпроводящем, так и в несверхпроводящем веществе.

Из всего вышесказанного следует, что в нейтронной звезде, находящейся в состоянии теплового, химического и гидростатического равновесия, автоматически выполняется условие *диффузионного равновесия*, согласно которому диффузионные токи (1.127) должны обращаться в ноль:

$$j_{(k) \text{ diff}}^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}_{km} d_{(m)0}^\mu = 0. \quad (1.181)$$

Однако из одного этого условия вовсе не следует, что в диффузионном равновесии $d_{(m)0}^\mu = 0$. Действительно, рассмотрим, например, случай нормального вещества. Если некоторый набор векторов $d_{(m)0}^\mu$ удовлетворяет условию диффузионного равновесия (1.181), то в силу равенств $\mathcal{D}_{km} \mu_{m0} = 0$ данному условию удовлетворяет и набор векторов $d_{(m)0}^\mu + \mu_{m0} f^\mu$ с любым векторным полем f^μ . Кроме того, из-за равенств $\mathcal{D}_{km} \mu_{m0} = 0$ число независимых уравнений в условии диффузионного равновесия (1.181) оказывается на единицу меньше числа сортов частиц. Чтобы замкнуть систему (1.181), можно рассмотреть равновесное уравнение Эйлера (1.44), которое с помощью термодинамических соотношений (1.13), условия теплового равновесия (1.47) и условия квазинейтральности ($e_k n_{k0} = 0$) преобразуется к виду

$$(1/w_0) \nabla_\mu p_0 = (1/\Lambda) \nabla_\mu \Lambda \quad \Rightarrow \quad n_{m0} d_{(m)0}^\mu = 0. \quad (1.182)$$

Векторы $d_{(m)0}^\mu$, удовлетворяющие одновременно и условию диффузионного равновесия (1.127) и равновесному уравнению Эйлера (1.182) уже не облада-

ют «калибровочной свободой» $d_{(m)0}^\mu \rightarrow d_{(m)0}^\mu + \mu_{m0} f^\mu$, поскольку такая замена нарушает выполнение уравнения Эйлера. При этом число независимых уравнений в полученной однородной системе совпадает с числом векторов $d_{(m)0}^\mu$, откуда неминуемо следует равенство $d_{(m)0}^\mu = 0$. Отметим, что, хотя этот результат был получен для несверхпроводящего вещества, он сохраняется и в сверхпроводящем веществе. В этом случае сверхпроводимость из-за равенства $\mathcal{D}_{sm} = 0$ дополнительно уменьшает число уравнений, и в качестве еще одного недостающего уравнения можно использовать уравнение (1.168) для определения самосогласованного электрического поля, которое эквивалентно равенству $d_{(s)0}^\mu = 0$. Чтобы в этом убедиться, необходимо подставить в (1.168) скорость (1.38) и воспользоваться уравнением Киллинга (1.42).

Теперь, подставляя в равенство $d_{(k)0}^\mu = 0$ определение (1.128), получаем

$$d_{(k)0}^\mu = {}^\perp\nabla^\mu \left(\frac{\mu_{k0}}{T_0} \right) - \frac{e_k E_0^\mu}{T_0} = 0. \quad (1.183)$$

Если раскрыть определение электрического вектора (1.168) и подставить равновесную скорость (1.38), соотношения (1.183) можно переписать в виде

$$(\mu_{k0} + e_k \psi) / \Lambda = \text{const}, \quad \psi \equiv -u^\mu A_{\mu 0}, \quad (1.184)$$

где величина ψ , как видно из ее определения, представляет собой скалярный потенциал электромагнитного поля, измеренный в сопутствующей с.о. В таком виде условие на химические потенциалы напоминает условие равновесия, которое приводится в работе [93] (с тем отличием, что здесь учитывается вращение нейтронной звезды).

1.3.4 Излучение гравитационных волн и CFS неустойчивость

Энергопотери на излучение гравитационных волн

Колеблющаяся НЗ в общем случае излучает гравитационные волны, которые уносят энергию с некоторой скоростью $(dE/dt)_{\text{GW}}$. Детальное обсуждение этого эффекта требует работы с уравнениями Эйнштейна и существенно выходит за рамки используемого нами гидродинамического подхода. Поэтому ниже мы излагаем лишь «рецепт» расчета $(dE/dt)_{\text{GW}}$, а за деталями вычислений и их обоснованием отсылаем читателя к оригинальной работе Торна [83].

В качестве первого шага необходимо обсудить обозначения и соглашения, которые используются в оригинальной работе [83] и несколько отличаются от тех, которыми мы пользовались до этого. Вместо координатного базиса $\mathbf{e}_\mu = \partial_\mu$ в данной работе используется «физический» базис $\hat{\mathbf{e}}_\mu$:

$$\hat{\mathbf{e}}_\mu = S_\mu^\rho \mathbf{e}_\rho, \quad \mathbf{e}_\mu = (S^{-1})_\mu^\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho, \quad S_\mu^\rho = \text{diag}\{1, 1, 1/r, 1/r \sin \theta\}. \quad (1.185)$$

Компоненты тензорных полей при переходе к новому базису преобразуются согласно стандартным формулам. Например, компоненты \hat{V}^μ произвольного векторного поля относительно физического базиса связаны с компонентами V^μ этого же поля в координатном базисе согласно $\hat{V}^\mu = V^\rho (S^{-1})_\rho^\mu$. Еще одна особенность обозначений, используемых в работе [83], заключается в том, что после перехода к физическому базису дальнейшее опускание и поднятие индексов производится с помощью «плоской» метрики $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$.

Согласно [83], излучающую гравитационные волны систему можно описывать эффективным псевдотензором энергии-импульса $\tau^{\mu\nu}$, зная который можно рассчитать $(dE/dt)_{\text{GW}}$. Прежде всего, необходимо вычислить его компоненты в физическом базисе:

$$\hat{\tau}^{\mu\nu} = \tau^{\eta\kappa} (S^{-1})_\eta^\mu (S^{-1})_\kappa^\nu, \quad \hat{\tau}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda} \hat{\tau}^{\rho\lambda}. \quad (1.186)$$

В используемом нами приближении Каулинга компоненты эффективного псевдотензора энергии-импульса выражаются через компоненты тензора энергии-импульса равенством

$$\hat{\tau}^{\mu\nu} \approx (-\hat{\mathbf{g}}) \hat{T}^{\mu\nu}, \quad \hat{\mathbf{g}} = \det \hat{\mathbf{g}}_{\mu\nu}. \quad (1.187)$$

Затем, пользуясь найденными компонентами $\hat{\tau}_{\mu\nu}$, необходимо рассчитать так называемые массовые \mathcal{I}_{LM} и токовые \mathcal{S}_{LM} мультипольные моменты:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{LM} &\equiv \int \hat{\tau}_{tt} Y^{LM(\star)} r^L r^2 \sin \theta d^3 x, \\ \mathcal{S}_{LM} &\equiv 2 \sqrt{\frac{L}{L+1}} \int (-\hat{\tau}_{tk}) Y_k^{\text{B}, LM(\star)} r^L r^2 \sin \theta d^3 x. \end{aligned} \quad (1.188)$$

В этих формулах подразумевается суммирование по повторяющемуся пространственному индексу k , звездочка « \star » означает комплексное сопряжение,

$Y_{LM}(\theta, \varphi)$ – сферические гармоники, а $\mathbf{Y}^{B,LM}(\theta, \varphi)$ – сферические векторы магнитного типа, которые в физическом базисе определяются равенством

$$\mathbf{Y}^{B,LM} = \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} \left\{ 0, -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{LM}}{\partial \varphi}, \frac{\partial Y_{LM}}{\partial \theta} \right\}. \quad (1.189)$$

Наконец, для расчета скорости, с которой гравитационные волны уносят энергию из колеблющейся системы, следует подставить найденные мультипольные моменты в общую формулу

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{GW}} = -\frac{G}{c^3} \sum_{L=2}^{\infty} \sum_{M=-L}^L \left(\frac{\sigma}{c} \right)^{2L+2} N_L (|\mathcal{I}_{LM}|^2 + |\mathcal{S}_{LM}|^2), \quad (1.190)$$

$$N_L = \frac{4\pi}{[(2L+1)!!]^2} \frac{(L+1)(L+2)}{L(L-1)}.$$

Неустойчивость Чандрасекара-Фридмана-Шатца

Следует отметить, что, в то время как гравитационные волны уносят энергию из системы, энергия колебания \tilde{E} , определяемая как возмущение энергии во вращающейся с.о. (см. раздел 1.2.4), при определенных обстоятельствах может расти. Данное явление носит название *неустойчивости Чандрасекара-Фридмана-Шатца* (далее – *CFS-механизм*) и объясняется тем, что помимо энергии гравитационные волны также уносят из системы угловой момент. Действительно, запишем энергию, измеренную во вращающейся с.о., в следующем виде:

$$\tilde{E} = \int (-k^\rho) \hat{\delta} T_\rho^t \sqrt{-\mathbf{g}} d^3x = E - \Omega J, \quad (1.191)$$

где

$$E \equiv \int (-t^\rho) \hat{\delta} T_\rho^t \sqrt{-\mathbf{g}} d^3x = \int \hat{\delta} T_t^t \sqrt{-\mathbf{g}} d^3x, \quad t^\rho \equiv \delta_t^\rho, \quad (1.192)$$

$$J \equiv \frac{1}{c} \int \varphi^\rho \hat{\delta} T_\rho^t \sqrt{-\mathbf{g}} d^3x = \int \hat{\delta} T_\varphi^t \sqrt{-\mathbf{g}} d^3x, \quad \varphi^\rho \equiv \delta_\varphi^\rho. \quad (1.193)$$

Величина E представляет собой возмущение энергии, измеренное в инерциальной с.о. В этом легко убедиться, если записать условие стационарности метрики $\partial_{ct} \mathbf{g}_{\mu\nu} = 0$ в этой системе и провести вычисления, аналогичные прове-

денным в разделе 1.2.4. Величина J , в свою очередь, представляет собой угловой момент, то есть φ -компоненту импульса в инерциальной с.о. По аналогии с тем, как E является интегралом движения, связанным со стационарностью пространства-времени, величина J является интегралом движения, связанным с его осесимметричностью. Для его вывода необходимо, по аналогии с вычислениями в разделе 1.2.4 переписать условие осесимметричности $\partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0$ в форме уравнения Киллинга $\nabla_\mu \varphi_\rho + \nabla_\rho \varphi_\mu = 0$ и рассмотреть соответствующий закон сохранения $\nabla_\mu (\varphi_\rho T^{\mu\rho}) = 0$.

Из равенства (1.191) следует, что изменение энергии за счет излучения гравитационных волн во вращающейся системе отсчета равно

$$\left(\frac{d\tilde{E}}{dt}\right)_{\text{GW}} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{GW}} - \Omega \left(\frac{dJ}{dt}\right)_{\text{GW}}, \quad (1.194)$$

где $(dJ/dt)_{\text{GW}}$ – скорость, с которой гравитационные волны уносят импульс. Несмотря на то, что величина $(dE/dt)_{\text{GW}}$ является отрицательной, разность в правой части данного равенства может оказаться положительной, если угловой момент уносится гравитационными волнами более эффективно, чем энергия. В этом случае излучение системой гравитационных волн приводит к росту энергии, измеренной во вращающейся с.о.. Физически это означает, что излучение гравитационных волн запускает перекачку энергии вращения в энергию колебания (см., например, обсуждение в [24]).

Можно показать [11, 24], что в случае колебаний вида $e^{im\varphi+i\sigma t}$ имеет место соотношение

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{\text{GW}} = \frac{m}{\sigma} \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{GW}}, \quad (1.195)$$

а потому изменение энергии во вращающейся с.о. можно вычислить по следующей формуле:

$$\left(\frac{d\tilde{E}}{dt}\right)_{\text{GW}} = \frac{\sigma - m\Omega}{\sigma} \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{GW}} = \frac{\sigma_r}{\sigma} \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{GW}}, \quad \sigma_r \equiv \sigma - m\Omega, \quad (1.196)$$

где, напомним, σ_r – частота колебания во вращающейся с.о. (1.39). Отсюда видно, что неустойчивость Чандрасекара-Фридмана-Шатца возникает в том случае, когда частоты σ_r и σ имеют различные знаки.

1.3.5 Эволюционные времена колебаний

Влияние диссипации непосредственно на колебания нейтронных звезд является достаточно слабым и в ведущем порядке теории возмущений по соответствующим кинетическим коэффициентам выражается в их экспоненциальном затухании $\propto e^{-t/\tau_{\eta,\zeta,\mathcal{D}}}$ на некоторых временах $\tau_{\eta,\zeta,\mathcal{D}}$. Излучение гравитационных волн, в свою очередь, может приводить не только к затуханию колебаний, но и, наоборот, к их раскачке посредством механизма Чандрасекара-Фридмана-Шатца. Данные эффекты также, как правило, являются слабыми и характеризуются временным масштабом τ_{GW} , на котором они приводят к затуханию или росту амплитуды колебаний по закону $e^{\pm t/\tau_{\text{GW}}}$. Эволюционные времена, на которых проявляется влияние того или иного механизма, можно рассчитать по формуле

$$\frac{1}{\tau_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}}} = \frac{1}{2\tilde{E}} \left| \left\langle \left(\frac{d\tilde{E}}{dt} \right)_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}} \right\rangle_P \right|, \quad (1.197)$$

где $\langle \dots \rangle_P$ означает усреднение по периоду колебания P , а \tilde{E} – возмущение энергии (1.121) во вращающейся с.о.

Отметим, что в данных выражениях речь идет о темпах изменения энергии \tilde{E} , измеренной во вращающейся с.о. В случае диссипативных эффектов они совпадают с темпами изменения энергии, измеренной в инерциальной с.о., а в случае гравитационного излучения имеет место равенство (1.196):

$$\left(\frac{d\tilde{E}}{dt} \right)_{\eta,\zeta,\mathcal{D}} = \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\eta,\zeta,\mathcal{D}}, \quad \left(\frac{d\tilde{E}}{dt} \right)_{\text{GW}} = \frac{\sigma_r}{\sigma} \left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{GW}}. \quad (1.198)$$

Данные темпы изменения, как и сама энергия \tilde{E} , в ведущем порядке теории возмущений могут быть рассчитаны подстановкой в соответствующие общие выражения решений уравнений бездиссипативной гидродинамики, полученных в рамках приближения Каулинга. При этом о применимости такого подхода можно судить, сравнивая полученные таким образом эволюционные времена (1.197) с периодом колебаний. В рассматриваемых в этой работе задачах его применение оказывается оправданным, поскольку эволюционные времена оказываются намного больше периода колебаний.

1.4 О влиянии нуклонного спаривания

В этом разделе мы кратко обсуждаем, как сверхтекучесть нейтронов и сверхпроводимость протонов влияют на колебания нейтронных звезд. Как упоминалось в разделе 1.1, мы оцениваем данное влияние по соответствующим модификациям сдвиговой вязкости η , скоростей реакций $\lambda_{\text{in} \leftrightarrow \text{out}}$ и коэффициентов диффузии \mathcal{D}_{km} , пренебрегая при этом изменениями, которые эти эффекты вносят в вид гидродинамических уравнений. Напомним, что в данной работе мы ограничиваемся изучением случаев, когда протоны являются нормальными (несверхпроводящее вещество) или сильно сверхпроводящими (сверхпроводящее вещество), в то время как сверхтекучесть нейтронов, если рассматривается, в зависимости от температуры может быть произвольно сильной или слабой. Гипероны для простоты считаются нормальными.

1.4.1 Влияние на диффузию частиц

В данной работе мы будем рассматривать диффузию частиц только в нуклонном *нормальном* веществе с нормальными нейтронами. Как мы видели в разделе 1.3.3, сверхпроводимость влияет на самосогласованное электрическое поле E^μ , поддерживающее квазинейтральность вещества. В добавок к этому эффекту она также модифицирует и сами коэффициенты диффузии \mathcal{D}_{km} . В нормальном веществе (с нормальными протонами) коэффициенты \mathcal{D}_{km} могут быть рассчитаны по известным темпам переноса импульса J_{pq} (1.126) с помощью алгоритма, изложенного в работе [27]. Эти же выражения можно использовать и для коэффициентов \mathcal{D}_{km} с учетом (произвольной силы) сверхпроводимости протонов с той оговоркой, что в них необходимо заменить концентрацию протонов n_p на концентрацию n_p^{ex} протонных боголюбовских возбуждений (так называемая «нормальная» протонная компонента). В интересующем нас случае сильной протонной сверхпроводимости $n_p^{\text{ex}} = 0$, что эффективно уменьшает число сортов частиц на единицу. Поэтому при выводе выражений для \mathcal{D}_{km} 4-компонентное *нормальное* вещество следует эффективно рассматривать как 3-компонентное *нормальное* вещество с $\mathcal{D}_{sk} = 0$ и $J_{sk} = 0$, где, напомним, индекс «s» зарезервирован за сверхпроводящим сортом частиц, то есть в данном случае за протонами.

1.4.2 Влияние на коэффициент сдвиговой вязкости

Коэффициент сдвиговой вязкости η кодирует информацию о трении, возникающем в жидкости из-за градиентов скорости. В случае НЗ с нуклонным составом это трение в основном возникает из-за обусловленных электромагнитным взаимодействием столкновений лептонов с другими заряженными частицами [94]. Таким же образом, вероятно, дело обстоит и в том случае, когда в веществе появляются электрически нейтральные Λ -гипероны. Присутствие же заряженных Ξ^- -гиперонов, в свою очередь, может уменьшать (в силу квазинейтральности вещества) долю лептонов, тем самым подавляя их вклад в η . Подобный эффект имеет место в гиперонном веществе с *прем* Σ^- Λ -составом, где нейтроны начинают обеспечивать доминирующий вклад в сдвиговую вязкость при плотностях с достаточно высокой концентрацией Σ^- -гиперонов [95]. Таким образом, для интересующего нас вещества с *прем* $\Lambda\Xi^-$ -составом мы ожидаем, что влияние сверхтекучести нейтронов будет ограничено областями со значительной долей Ξ^- -гиперонов (хотя для подтверждения этого может потребоваться детальное исследование). Ни одна из моделей НЗ, которые будут рассматриваться в данной работе (см. раздел 4.4), не содержит таких областей, а потому в этих случаях нейтронная сверхтекучесть лишь слабо влияет на η . Что касается сверхпроводимости протонов, она может уже существенно модифицировать сдвиговую вязкость, поскольку она подавляет рассеяние лептонов на протонах и изменяет экранирующие свойства вещества (см. обзор [94] и указанные в нем ссылки). Поэтому, в соответствии со всем вышесказанным, мы будем игнорировать влияние нейтронной сверхтекучести на сдвиговую вязкость и учитывать влияние протонной сверхпроводимости, пользуясь выражениями для сдвиговой вязкости в нормальном и сверхпроводящем веществе из работы [94]. Хотя эти выражения получены для вещества с нуклонным составом, мы также будем их использовать и для оценки сдвиговой вязкости в гиперонном веществе. Такое приближение вполне допустимо, поскольку, по крайней мере в рассматриваемых в данной работе задачах, в гиперонном веществе роль сдвиговой вязкости в подавлении колебаний (r -мод) мала по сравнению с ролью гиперонной объемной вязкости (см. раздел 4.4).

1.4.3 Влияние на скорости реакций

Спаривание нуклонов влияет на объемную вязкость и адиабатический индекс вещества через скорости $\lambda_{\text{in}\leftrightarrow\text{out}}$ химических реакций. Сильную протонную сверхпроводимость мы будем моделировать путем «отключения» *слабых* реакций с участием протонов, то есть устремлением соответствующих скоростей к нулю. Что касается доступного в гиперонном веществе сильного процесса (1.34), при достаточно низких температурах он также может подавляться сверхпроводимостью. Мы оценим соответствующие значения температуры в конце этого раздела, а пока что для простоты предположим, что сверхпроводимость недостаточно сильна для подавления сильного процесса, и последний остается в химическом равновесии (1.143).

Что касается сверхтекучести нейтронов, то для описания ее влияния на скорости реакций мы заимствуем подход, излагаемый в работах [63, 64, 66], и вводим так называемые *факторы подавления*

$$\mathcal{R}_{\text{in}\leftrightarrow\text{out}} \equiv \lambda_{\text{in}\leftrightarrow\text{out}}^{\text{superfluid}} / \lambda_{\text{in}\leftrightarrow\text{out}}^{\text{normal}}, \quad (1.199)$$

показывающие разницу между скоростями $\lambda_{\text{in}\leftrightarrow\text{out}}^{\text{normal}}$ в веществе с нормальными нейтронами и скоростями $\lambda_{\text{in}\leftrightarrow\text{out}}^{\text{superfluid}}$ в веществе со сверхтекучими нейтронами. Эта разница возникает из-за того, что нейтронная сверхтекучесть модифицирует энергетический спектр частиц. В общем случае вблизи поверхности Ферми $|\mathbf{p}| = p_{Fk}$, спектр нормальных частиц сорта k (включая нейтроны, если они нормальные), представляется в виде

$$\varepsilon_k(\mathbf{p}) = \mu_k + v_{Fk}(|\mathbf{p}| - p_{Fk}), \quad (1.200)$$

где \mathbf{p} – импульс, p_{Fk} – импульс Ферми и v_{Fk} – скорость Ферми рассматриваемого сорта частиц. Если нейтроны являются сверхтекучими, что происходит при температурах ниже *критической* T_c , то в их спектре появляется энергетическая щель δ (см., например, [63, 64, 66, 96]):

$$\varepsilon_n(\mathbf{p}) = \mu_n + \text{sgn}(|\mathbf{p}| - p_{Fn}) \sqrt{\delta^2 + v_{Fn}^2 (|\mathbf{p}| - p_{Fn})^2}. \quad (1.201)$$

Вид данной щели определяется взаимодействием, приводящим к формированию куперовских пар. В общем случае она может зависеть только от температу-

ры (изотропная щель) или же дополнительно зависеть от угла ϑ между импульсом p и осью квантования (анизотропная щель). Нейтроны в ядре нейтронной звезды спариваются триплетным образом, что приводит к анизотропной щели¹⁵

$$\delta(T, \vartheta) = \Delta(T) \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}, \quad (1.202)$$

где температурная зависимость $\Delta(T)$ в случае триплетного спаривания определяется при $T \leq T_c$ следующей формулой (см., например, [37]):

$$\frac{\Delta(T)}{k_B T} = \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \left[0.7893 + \frac{1.188}{T/T_c} \right]. \quad (1.203)$$

Точное рассмотрение анизотропного спаривания является относительно сложной задачей, и здесь для простоты мы воспользуемся приближением из работы [97], то есть заменим анизотропную щель $\delta(T, \vartheta)$ в уравнении (1.201) на *эффективно изотропную*

$$\delta_{\text{eff}}(T) \equiv \min\{\delta(T, \vartheta)|_{|p|=p_{Fn}}\} = \Delta(T), \quad (1.204)$$

предполагая при этом, что температурная зависимость $\Delta(T)$ данной щели описывается формулой (1.203) для триплетного спаривания (см. обсуждение данного приближения и его применение в работах [98–100]).

В рамках данного приближения скорости реакций $\Gamma_{\text{in} \leftrightarrow \text{out}}$ в вырожденном веществе сводятся к произведению интеграла по углам и интеграла по энергиям частиц (см. технические детали, например, в [63, 64, 66, 68]). В сверхтекучем веществе угловой интеграл сохраняет такой же вид, как в веществе с нормальными нейтронами, а вот интеграл по энергиям модифицируется. Ниже мы рассмотрим данный эффект на примере слабых безлептонных реакций $12 \leftrightarrow 34$ в гиперонном $n\text{p}\mu\Lambda\Xi^-$ -веществе. Данное рассмотрение полностью аналогично проведенному в работах [63, 64] для слабых лептонных (mUrca и dUrca) процессов в нуклонном веществе, а также в работе [66] для слабого безлептонного процесса $nn \leftrightarrow p\Sigma^-$ в веществе, содержащем Σ^- -гипероны.

В веществе с нормальными нейтронами, пользуясь общим выражением для расчета скорости реакций из работы [68] и опуская интеграл по углам, мы

¹⁵Конкретно данная формула описывает щель при триплетном спаривании, когда проекция полного момента m_J куперовской пары на ось квантования обращается в ноль, $m_J = 0$.

можем записать

$$\Gamma_{12 \leftrightarrow 34}^{\text{normal}} \propto \left[\mathcal{I}\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) - \mathcal{I}\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right) \right] \propto \mathcal{I}'(0)\mu, \quad (1.205)$$

где $\mu = \mu_n - \mu_\Lambda$ – отклонение от химического равновесия (1.147), общее (при равновесии сильного процесса) для всех рассматриваемых слабых безлептонных процессов, а функция $\mathcal{I}(v)$ определена равенством

$$\mathcal{I}(v) \equiv \int \delta\left(\sum_{m=1}^4 x_m - v\right) \prod_{k=1}^4 \frac{dx_k}{1 + e^{x_k}}, \quad (1.206)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Происхождение множителя (1.205) просто объяснить. Энергии ε_k частиц сорта k подчиняются распределению Ферми-Дирака $f_k = 1/[1 + e^{(\varepsilon_k - \mu_k)/k_B T}]$, которое в случае нормальных частиц сводится к следующему:

$$f_k = \frac{1}{1 + e^{x_k}}, \quad x_k \equiv \frac{v_{Fk}(|\mathbf{p}| - p_{Fk})}{k_B T}. \quad (1.207)$$

Интеграл (1.206) возникает естественным образом при суммировании по всем превращениям частиц $12 \leftrightarrow 34$, разрешенным законом сохранения энергии. Теперь, *если нейтроны являются сверхтекучими*, их спектр приобретает щель δ_{eff} , которую, согласно (1.201), можно учесть, сделав замену

$$x_n \rightarrow \text{sgn}(x_n) \sqrt{y^2 + x_n^2}, \quad y \equiv \frac{\delta_{\text{eff}}}{k_B T}. \quad (1.208)$$

В связи с этим в сверхтекучем веществе удобно ввести новые переменные z_k , такие что, по определению, $z_k = \text{sgn}(x_k) \sqrt{y^2 + x_k^2}$ для сверхтекучих нейтронов и $z_k = x_k$ для нормальных частиц. В данных обозначениях скорости реакций в сверхтекучем веществе можно представить в виде

$$\Gamma_{12 \leftrightarrow 34}^{\text{superfluid}} \propto \mathcal{I}^{[n]'}(0)\mu, \quad \mathcal{I}^{[n]}(v) \equiv \int \delta\left(\sum_{m=1}^4 z_m - v\right) \prod_{k=1}^4 \frac{dx_k}{1 + e^{z_k}}. \quad (1.209)$$

где индекс $[n]$ указывает на то, что значение $\mathcal{I}^{[n]}(v)$ зависит от числа $[n]$ нейтронов, участвующих в рассматриваемой реакции.

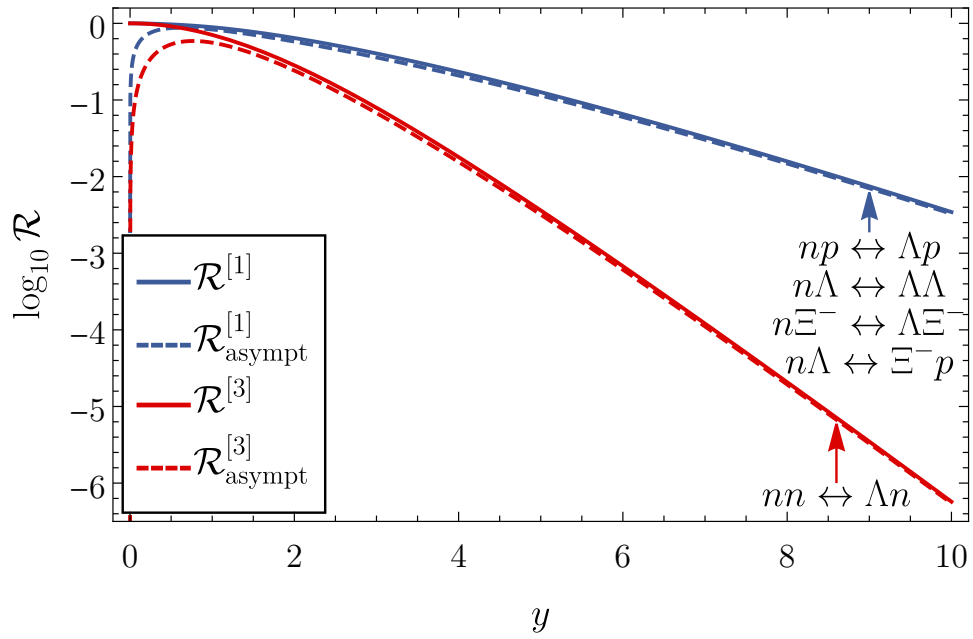


Рис. 1.1: Факторы подавления для реакций с одним (показаны синим цветом) или тремя (показаны красным цветом) сверхтекучими нейтронами. Сплошными кривыми показаны результаты точного численного расчета, а штрихами – асимптотики в пределе больших значений y .

Приведенные формулы (1.147), (1.205), (1.206) и (1.209) позволяют с легкостью рассчитать факторы подавления (1.199) как функции безразмерной энергетической щели y в спектре нейтронов. В интересующих нас химических реакциях (1.29)-(1.33) участвует либо один либо нейтрон, либо три нейтрона, и влияние сверхтекучести на скорости данных реакций описывается соответствующими факторами подавления $\mathcal{R}^{[1]}$ и $\mathcal{R}^{[3]}$:

$$\mathcal{R}^{[1]} = \frac{3}{\pi^2} \mathcal{I}^{[1]'}(0), \quad \mathcal{R}^{[3]} = \frac{3}{\pi^2} \mathcal{I}^{[3]'}(0), \quad (1.210)$$

где мы использовали равенство $\mathcal{I}'(0) = \pi^2/3$ (см., например, [68]). Можно показать, что при больших значениях y (то есть низких температурах) факторы подавления описываются асимптотическими выражениями

$$\mathcal{R}_{\text{asymp}}^{[1]}(y) = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi y}{2}} e^{-y} \frac{(y^2 + y + \pi^2)}{\pi^2}, \quad (1.211)$$

$$\mathcal{R}_{\text{asymp}}^{[3]}(y) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} e^{-2y} y (3y + 2). \quad (1.212)$$

Здесь формула (1.211) была заимствована из работы [66], в то время как формула (1.212), насколько нам известно, в литературе не выводилась. Из этих фор-

мул видно, что с падением температуры (ростом y) сверхтекучесть экспоненциально подавляет скорости реакций. Данное поведение подтверждается прямым расчетом, как показано на Рис. 1.1. На этом рисунке показаны точные (сплошные линии) и асимптотические (штриховые линии) факторы подавления $\mathcal{R}^{[1]}$ (показаны синим цветом) и $\mathcal{R}^{[3]}$ (показаны красным цветом). Рядом с каждой кривой указаны соответствующие слабые безлептонные процессы.

Согласно (1.152) и (1.153), из данных результатов следует, что при температурах $T < T_c$ существенно ниже критической объемная вязкость ζ сильно подавлена, в то время как адиабатический индекс с высокой точностью совпадает с индексом вещества с замороженными слабыми реакциями. При температурах выше критической, однако, достаточно сложно сказать, являются ли слабые процессы замороженными или нет.

На практике удобно иметь упрощенные выражения для факторов подавления, применимые в широком диапазоне значений y . Согласно [66], фактор подавления $\mathcal{R}^{[1]}$ с высокой точностью (максимальная ошибка $\lesssim 0.5\%$) описывается следующей подгоночной формулой

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\text{fit}}^{[1]}(y) &= \frac{a_1^{5/4}(y) + b_1^{1/2}(y)}{2} \exp[0.5068 - \sqrt{y^2 + 0.5068^2}], \\ a_1(y) &= 1 + 0.3118 y^2, \\ b_1(y) &= 1 + 2.556 y^2.\end{aligned}\tag{1.213}$$

Что касается фактора $\mathcal{R}^{[3]}$, согласно нашим расчетам, он приближенно (максимальная ошибка $\lesssim 3\%$) описывается формулой

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\text{fit}}^{[3]}(y) &= \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} e^{-2y} [a_3(y) - b_3(y)e^{-y}], \\ a_3(y) &= 3 y^2 + 2 y + 15.68, \\ b_3(y) &= 2.791 y^3 + 7.732 y^2 + 14.06 y + 14.47,\end{aligned}\tag{1.214}$$

где фитирующие коэффициенты подобраны таким образом, чтобы точно воспроизвести асимптотику (1.212) при больших значениях y .

В завершение этого раздела оценим температуры, при которых протонная сверхпроводимость подавляет сильный процесс (1.34) настолько, что его уже нельзя считать находящимся в равновесии. Для этого сравним его скорость реакций λ_{sp} с типичной скоростью слабых безлептонных реакций λ_{weak} . В от-

сутствие спаривания нуклонов сильный процесс протекает на 14–16 порядков быстрее [68]: $\lambda_{\text{sp}} \sim (10^{14} - 10^{16}) \lambda_{\text{weak}}$. Если же протоны сверхпроводящие, скорость $\lambda_{\text{sp}} \rightarrow \mathcal{R} \lambda_{\text{sp}}$ подавляется фактором \mathcal{R} , приблизительно равным [64]

$$\mathcal{R} \simeq \frac{0.221}{\tau^{3.5}} \exp\left(-\frac{1.764}{\tau}\right), \quad \tau \equiv \frac{T}{T_{\text{cp}}}, \quad (1.215)$$

где T_{cp} – критическая температура сверхпроводящего перехода протонов. С помощью этого выражения легко показать, что при $\tau \lesssim 0.04$ подавленный сверхпроводимостью сильный процесс протекает с той же скоростью, что неподдавленные слабые безлептонные процессы (скажем, те, в которых протоны не участвуют). Предполагая, что критическая температура лежит в диапазоне $T_{\text{cp}} \simeq (1-5) \times 10^9$ К, мы получаем, что это происходит при локальной температуре $T \lesssim (4 \times 10^7 - 2 \times 10^8)$ К. Видно, что вывод о равновесном или неравновесном состоянии сильного процесса сильно зависит от принимаемой модели сверхпроводимости и рассматриваемого диапазона температур.

Ниже нас будут прежде всего интересовать НЗ в *маломассивных рентгеновских двойных системах (LMXB)*, типичные температуры которых составляют $10^7 - 10^8$ К (см., например, Рис. 4.1 в разделе 4.1). Для таких звезд в моделях с более низкими критическими температурами T_{cp} сильный процесс, вероятно, находится в равновесии. В моделях с более высокими T_{cp} более вероятна обратная ситуация неравновесного сильного процесса. В действительности, находится данный процесс в равновесии или нет скорее всего слабо влияет на диссипацию, обусловленную объемной вязкостью. Согласно нашим оценкам, отклонение сильного процесса от равновесия соответствует в несколько раз меньшим значениям максимальной вязкости ζ_{max} по сравнению со значением ζ_{max} , обусловленным слабыми безлептонными реакциями. Что касается влияния сильного процесса на адиабатический индекс, оно, хоть и имеет место, также скорее всего является слабым (см., например, Рис. 3 в работе [32], где изображен адиабатический индекс в предположениях замороженного и экстремально быстрого сильного процесса). Кроме того вопрос о скорости сильного процесса встает только в звездах достаточно тяжелых для того, чтобы в их ядре могли появиться Ξ^- -гипероны. Из всех моделей, которые мы будем рассматривать (см. раздел 4.4), только одна содержит Ξ^- -гипероны. Остальные же модели обладают *пр μ* Λ -составом, для которого данный вопрос не возникает.

1.5 Уравнения колебаний в ньютоновской теории

В последующих главах мы часто будем сравнивать результаты релятивистских расчетов с их нерелятивистскими аналогами. По этой причине здесь мы приводим краткий обзор уравнений, описывающих колебания НЗ в рамках ньютоновской теории гравитации. Данные уравнения могут быть получены из релятивистских (1.74) путем перехода к ньютоновскому пределу.

В ньютоновском пределе метрические функции λ и ω равны нулю, а метрический коэффициент $e^{2\nu} \approx (1 + 2\phi/c^2)$, где ϕ – гравитационный потенциал, так что интервал (1.37) приобретает следующий вид:

$$ds^2 = -(1 + 2\phi/c^2)c^2 dt^2 + dl^2, \quad (1.216)$$

$$dl^2 = \eta_{km} dx^k dx^m = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1.217)$$

Величина dl^2 представляет собой квадрат расстояния между соседними точками в пространстве, а η_{km} – метрический тензор евклидова трехмерного пространства. Здесь и далее мы используем латинские индексы (k, m, \dots) для компонент 3-тензоров в трехмерном пространстве со сферическими координатами $x^k = \{r, \theta, \varphi\}$ (используются латинские индексы как тензорные или ассоциирующиеся с частицами, как правило, будет понятно из контекста).

Далее, в рассматриваемом пределе 4-скорость u^μ связана с 3-скоростью $\mathbf{v} = \{v^r, v^\theta, v^\varphi\}$ приближительным равенством $u^\mu \approx (1, \mathbf{v}/c)$. Здесь и далее для произвольного 3-вектора \mathbf{a} величины a^k обозначают его контравариантные компоненты, то есть компоненты в *координатном* базисе $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$:

$$\mathbf{e}_r = \hat{\mathbf{e}}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_r^k = \delta_r^k \quad (1.218)$$

$$\mathbf{e}_\theta = r \hat{\mathbf{e}}_\theta = r[\cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z] \quad \mathbf{e}_\theta^k = \delta_\theta^k \quad (1.219)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi = r \sin \theta[-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y] \quad \mathbf{e}_\varphi^k = \delta_\varphi^k, \quad (1.220)$$

где $\{\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi\}$ – единичные орты сферической системы координат, образующие так называемый *физический* базис, а $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ – единичные орты декартовой системы координат. Помимо контравариантных компонент a^k мы также будем встречаться с ковариантными компонентами a_k . Переход от одних компонент к другим, то есть поднимание и опускание индексов, осуществляется с помощью метрического тензора η_{km} .

Для перехода к ньютоновскому пределу мы подставляем в релятивистские уравнения колебаний (1.74) данные предельные выражения для 4-скорости и метрического тензора, а затем удерживаем ведущие по $(1/c)$ слагаемые, что с физической точки зрения соответствует медленным скоростям $(v/c \ll 1)$ и слабым гравитационным полям $(\phi/c^2 \ll 1)$. При этом необходимо учитывать, что плотность энтальпии $w = p + \varepsilon$ является величиной порядка c^2 как минимум потому, что она содержит плотность энергии ε , которая по определению включает энергию покоя. Более того, при экстремальных условиях, реализующихся в недрах нейтронных звезд, давление также может быть «релятивистским», то есть сравнимым по порядку с плотностью энергии.

Во-первых, заметим, что условие калибровки $u_\mu \xi^\mu = 0$ в ньютоновском пределе сводится к равенству $\xi^t = 0$, так что $\xi^\mu = (0, \boldsymbol{\xi})$. Пользуясь этим наблюдением и вспомогательной формулой (1.23), легко показать, что 4-дивергенция ${}^\perp \nabla_\rho \xi^\rho$ в ведущем по $1/c$ порядке преобразуется к виду

$${}^\perp \nabla_\rho \xi^\rho \approx \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} \equiv \nabla_k \xi^k = (1/\sqrt{\det \eta}) \partial_k (\sqrt{\det \eta} \xi^k), \quad (1.221)$$

где мы ввели 3-дивергенцию $\operatorname{div} \boldsymbol{\xi}$, и ковариантную производную ∇_k , ассоциированную с плоской метрикой (1.217). Во втором равенстве в определении 3-дивергенции мы воспользовались трехмерным аналогом формулы (1.23).

Во-вторых, прямым вычислением можно убедиться, что второе слагаемое в релятивистском уравнении Эйлера в ньютоновском пределе приобретает следующий вид

$$\xi^\rho \nabla_\rho u^m \approx \frac{1}{c} [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\xi}]^m, \quad (1.222)$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор угловой скорости звезды:

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \Omega \mathbf{e}_z, \quad \Omega^r = \Omega \cos \theta, \quad \Omega^\theta = -(1/r) \Omega \sin \theta, \quad \Omega^\varphi = 0. \quad (1.223)$$

В равенстве (1.222) мы также ввели векторное произведение (\times) , которое в криволинейных координатах вычисляется по стандартной формуле:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]^k = \epsilon^{kmn} a_m b_n. \quad (1.224)$$

Здесь ϵ^{kmn} – полностью антисимметричный тензор, компоненты которого определяются равенствами

$$\epsilon_{kmn} = \sqrt{\det \eta} \times (\text{четность перестановки } r\theta\varphi \rightarrow kmn), \quad (1.225)$$

$$\epsilon^{kmn} = (1/\sqrt{\det \eta}) \times (\text{четность перестановки } r\theta\varphi \rightarrow kmn). \quad (1.226)$$

С учетом сделанных наблюдений мы получаем, что уравнения колебаний (1.74) в ньютоновском пределе принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_r^2 \boldsymbol{\xi} - 2i\sigma_r [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\xi}] = c^2 \left(\frac{1}{w_0} \nabla \delta p - \frac{\delta w}{w_0^2} \nabla p_0 \right) \\ \Delta p + \gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0 \\ \Delta \varepsilon + w_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0. \end{cases} \quad (1.227)$$

Напомним, что первое уравнение представляет собой линеаризованное уравнение Эйлера, а второе и третье выводятся из уравнений непрерывности с помощью термодинамических соотношений и уравнения состояния вещества.

Отметим, что в случае баротропного вещества, в котором термодинамические функции можно считать зависящими только от плотности энергии и адиабатический индекс γ определяется равенством (1.65), второе и третье уравнение данной системы оказываются эквивалентными, и мы получаем

$$\begin{cases} \sigma_r^2 \boldsymbol{\xi} - 2i\sigma_r [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\xi}] = c^2 \nabla \left(\frac{\delta p}{w_0} \right) \\ \Delta p + \gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0. \end{cases} \quad (1.228)$$

Как мы увидим в следующих главах, баротропность вещества, приводящая к появлению чистого градиента в уравнении Эйлера, существенно влияет на свойства колебаний. По этой причине в общем случае исследование глобальных колебательных мод разделяется на изучение системы (1.227) в небаротропном ядре звезды и изучение системы (1.228) в баротропной коре.

В завершение данного раздела отметим, что при изучении колебаний вместо угловых компонент ξ^θ и ξ^φ нам будет удобнее пользоваться *полярной* Q и *тороидальной* T функциями, которые мы введем следующим равенством:

$$\boldsymbol{\xi} = \xi^r \mathbf{e}_r + r[\nabla - \mathbf{e}_r(\mathbf{e}^r \nabla)]Q - r[\mathbf{e}_r \times \nabla]T. \quad (1.229)$$

Согласно этому представлению, компоненты ξ^θ и ξ^φ могут быть вычислены по функциям Q и T с помощью следующих формул:

$$\xi^\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right], \quad \xi^\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \right]. \quad (1.230)$$

Можно показать, что дивергенция любого чисто тороидального векторного поля равна нулю. Также нетрудно проверить, что при разложении Q и T по сферическим гармоникам эти формулы сводятся к разложению векторного поля ξ по сферическим векторам [101]. Разложения такого вида являются стандартными и часто используются в литературе (см., например, [12, 102, 103]).

Глава 2. Усиленная диффузия в сверхпроводящих нейтронных звездах

Данная глава посвящена исследованию диффузии частиц как механизма подавления колебаний нейтронных звезд. Мы показываем, что сверхпроводимость протонов приводит к существенному усилению диффузионных энергопотерь. Чтобы оценить влияние данного эффекта на подавление колебаний, мы рассматриваем простейшие из них – звуковые волны, f -моды, p -моды и g -моды – и сравниваем их затухание за счет диффузии с затуханием за счет сдвиговой вязкости, которая традиционно считается наиболее эффективным диссипативным механизмом при не слишком высоких температурах вещества. Приведенное ниже изложение основано на оригинальных работах [104, 105].

2.1 Краткое введение и постановка задачи

Нейтронные звезды являются уникальными астрофизическими объектами, изучение которых дает возможность накладывать ограничения на свойства сверхплотного вещества в физических условиях, недоступных для земных лабораторий. Один из способов извлечения информации о свойствах звездного вещества – сравнение наблюдательных проявлений колебаний НЗ с предсказаниями различных теоретических моделей [4–10]. Колебания могут возникать как результат развития некоторой внутренней неустойчивости в звезде или же под действием внешнего возмущения. Возможность возбудить ту или иную моду колебаний зависит от того, как эффективность возбуждающей силы соотносится с эффективностью различных противодействующих ей диссипативных механизмов. Чаще всего в качестве таких механизмов рассматриваются сдвиговая и объемная вязкости [106, 107], причем при температурах $T \lesssim 5 \times 10^8$ К из указанных механизмов именно сдвиговая вязкость обеспечивает доминирующий вклад в диссипацию, в то время как диссипацией за счет объемной вязкости, по крайней мере в нуклонном веществе, можно пренебречь [17–19] (в гиперонном веществе, однако, это может быть не так, см. главу 4).

Несмотря на то, что химический состав звездного вещества разнообразен и включает в себя различные сорта частиц (нейтроны, протоны, электроны, мюоны и, возможно, более экзотические частицы, см. раздел 1.1), влияние диффузии частиц на динамику колебаний НЗ, насколько нам известно, до сих пор не было исследовано. В этой главе мы впервые оцениваем роль диффузии частиц в подавлении звездных колебаний. Для простоты мы ограничимся рассмотрением вещества с нуклонным *pre*- или *pre μ* -составом. Химические реакции в таком веществе являются слишком медленными, чтобы повлиять на колебания (см. раздел 1.3.2), а потому их протеканием мы будем пренебрегать. Наконец, поскольку нейтроны переходят в сверхпроводящее состояние при более низких температурах, чем протоны – в сверхпроводящее (см. раздел 1.1), мы будем считать нейтроны нормальными, а протоны – нормальными или сильно сверхпроводящими.

Как мы увидим, в сверхпроводящем веществе для ряда колебаний диффузия становится ведущим диссипативным механизмом, который значительно ускоряет их затухание и ставит под вопрос ряд устоявшихся представлений о физике колебаний нейтронных звезд. Причем выводы нашей работы скорее всего останутся верными даже с учетом сверхтекучести нейтронов в не слишком холодных звездах – к этому вопросу мы вернемся в конце главы.

2.2 Усиление диффузии сверхпроводимостью

Рассмотрим сначала влияние диффузии в самом простом случае – на примере колебаний в однородном *pre*-веществе. На этом начальном этапе нам пока что будет удобно пользоваться многожидкостным описанием, когда вместо гидродинамической коллективной скорости движение вещества описывается набором скоростей, определяющих потоки частиц различных сортов (см. раздел 1.3.1). При таком подходе в нормальном веществе каждому сорту частиц k приписывается индивидуальная скорость движения v_k . Для нормальных частиц (нейтронов и электронов) такое описание сохраняется и в более общем случае, когда допускается произвольная степень сверхпроводимости протонов. Поток самих протонов, однако, в этом случае определяется уже двумя «компонентами»: нормальной, описывающей движение их боголюбовских тепловых возбуждений со скоростью v_p и концентрацией $n_{p\text{ex}}$, и сверхпроводящей, характеризующейся скоростью v_s и концентрацией $n_s = n_p - n_{p\text{ex}}$.

Во введенных обозначениях плотности потока \mathbf{j}_k различных сортов частиц ($k = n, p, e$) записываются в следующем виде

$$\mathbf{j}_n = n_n \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{j}_e = n_e \mathbf{v}_e, \quad \mathbf{j}_p = n_{pex} \mathbf{v}_p + (n_p - n_{pex}) \mathbf{v}_s, \quad (2.1)$$

а условие квазинейтральности (1.11), в данном случае выражающее электромагнитную сцепку электронов и протонов (см. раздел 1.1, а также работы [27, 48–50]), приводит к равенствам

$$n_e = n_p, \quad n_e \mathbf{v}_e = n_{pex} \mathbf{v}_p + (n_p - n_{pex}) \mathbf{v}_s. \quad (2.2)$$

В нормальном веществе мы имеем $n_{pex} = n_p$, $n_s = 0$ и поток протонов определяется формулой $\mathbf{j}_p = n_p \mathbf{v}_p$, в то время как в противоположном случае сильно сверхпроводящего вещества мы имеем $n_{pex} = 0$, $n_s = n_p$ и $\mathbf{j}_p \equiv \mathbf{j}_s = n_s \mathbf{v}_s$.

Как мы упоминали в разделе 1.3.1, для описания диффузии в рамках многожидкостной гидродинамики для каждого сорта частиц k вводятся соответствующие силы трения \mathbf{f}_k (1.126), которые определяются темпами переноса импульса $J_{km} = J_{mk}$ при столкновениях частиц данного сорта с частицами сортов $m \neq k$, а также скоростями относительного движения \mathbf{v}_{km} :

$$\mathbf{f}_k = \sum_m \mathbf{f}_{km}, \quad \mathbf{f}_{km} = -J_{km} \mathbf{v}_{km}, \quad \mathbf{v}_{km} \equiv \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_m. \quad (2.3)$$

Энергопотери за счет диффузии в многожидкостном формализме представляют собой не что иное, как работу данных сил трения в единицу времени и с учетом данной формулы могут быть представлены в виде интеграла [48, 85]

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\mathcal{D}} = -\frac{1}{2} \int \sum_{km} J_{km} v_{km}^2 dV \quad (2.4)$$

по объему системы V . Хотя в работе [48] уравнение (2.4) обсуждалось для нормального вещества, выражение такого же вида применимо и в сверхпроводящем веществе при условии, что под \mathbf{v}_p подразумевается скорость протонных тепловых возбуждений, поскольку только тепловые возбуждения могут участвовать в процессах рассеяния протонов на других сортах частиц (см., например, [108]). В приведенных выше формулах и всем этом разделе, если не оговорено обратное, мы не подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам.

Скорости v_{km} относительного движения зависят от эффективности столкновений частиц, то есть от коэффициентов J_{km} : более эффективные столкновения (большие значения J_{km}) приводят к меньшим относительным скоростям. Поэтому для дальнейшего продвижения нам будет удобно выразить относительные скорости через возмущения других величин, также характеризующих колебание, но при этом слабо зависящих от J_{km} . Ниже мы проведем такие вычисления по отдельности в двух пределах, соответствующих нормальному или сильно сверхпроводящим протонам.

Рассмотрим сначала случай нормального вещества. Прежде всего заметим, что в нейтронных звездах коэффициенты J_{km} приобретают очень большие значения, такие что частоты столкновений частиц намного превышают частоты, характерные для гидродинамических колебаний. Действительно, частота столкновений частиц сорта k с частицами сорта m определяется равенством

$$\nu_{km} = \frac{1}{\tau_{km}} = \frac{c^2 J_{km}}{\mu_k n_k}, \quad (2.5)$$

где τ_{km} – соответствующее эффективное время релаксации (см., например, [27, 88]). Произведение $\mu_k n_k / c^2$ для разных сортов частиц в зависимости от плотности пробегает значения в диапазоне примерно от 10^{12} до 10^{15} г/см³, а значения коэффициентов J_{km} при температурах, скажем, от 10^7 К до 10^8 К, варьируются по порядку величины от 10^{22} до 10^{30} г см⁻³ с⁻¹ (см. раздел VII в работе [27]). Подставляя эти значения в (2.5) получаем оценку $\nu_{km} > 10^7$ Гц, что намного больше частот гидродинамических колебаний. Поэтому за период колебания происходит большое количество столкновений, из-за чего скорости v_{km} относительного движения оказываются много меньше гидродинамической

$$\mathbf{v} = \delta\mathbf{v} = \frac{1}{w_0} \sum_k \mu_{k0} n_{k0} \mathbf{v}_k, \quad w_0 \equiv \sum_k \mu_{k0} n_{k0}. \quad (2.6)$$

В этом пределе колебания описываются линеаризованными уравнениями непрерывности и уравнениями (1.125) типа уравнения Эйлера [27, 48, 88]:

$$\frac{n_{k0} \mu_{k0}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} = e_k n_{k0} \mathbf{E} - n_{k0} \nabla \delta \mu_k - \sum_m J_{km} \mathbf{v}_{km}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \delta n_k}{\partial t} + n_{k0} \operatorname{div} \mathbf{v}_k = 0. \quad (2.8)$$

Эти уравнения хорошо известны в литературе, посвященной физике нейтронных звезд и физике плазмы (см., например, [85] и указанные там источники). Они выводятся из уравнений Больцмана для каждого из сортов частиц в полной аналогии с вычислениями, проведенными в работе [84]. При этом диффузия в них является единственным источником диссипации, то есть они не учитывают другие механизмы, такие как сдвиговая и объемная вязкость. Такой подход допустим в гидродинамическом режиме, в котором различные механизмы диссипации можно рассматривать независимо друг от друга (см., например, [109]).

Как мы увидим ниже, то обстоятельство, что относительные скорости $v_{km} \ll v$ оказываются много меньше гидродинамической скорости v , позволяет с хорошей точностью заменить индивидуальные скорости v_k на гидродинамическую v всюду за исключением слагаемых, где они умножаются на большие темпы переноса импульса J_{km} . Сама гидродинамическая скорость при этом удовлетворяет линейризованному уравнению Эйлера, которое получается суммированием уравнений (2.7) по всем сортам частиц k , использованием квазинейтральности и применением соотношения $\delta p = \sum n_{k0} \delta \mu_k$:

$$\frac{w_0}{c^2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \delta p, \quad w_0 = \sum_k \mu_{k0} n_{k0}. \quad (2.9)$$

Складывая разделенное на n_{k0} уравнение (2.7) для протонов с таким же уравнением для электронов, а затем вычитая из результата такое же уравнение для нейтронов, мы, пользуясь условиями квазинейтральности (2.2) и химического (β -) равновесия (1.25) с $k = p$,

$$\mu_{\beta 0} = 0, \quad \mu_{\beta} \equiv \mu_n - \mu_p - \mu_e, \quad (2.10)$$

получаем, что $v_{pe} = 0$ и что v_{np} определяется следующим уравнением:

$$-\frac{\mu_{n0}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{v}_{np}}{\partial t} = \nabla \delta \mu_{\beta} + \left[\frac{J_{np}}{n_{p0}} + \frac{J_{en}}{n_{e0}} + \frac{J_{np} + J_{en}}{n_{n0}} \right] \mathbf{v}_{np}. \quad (2.11)$$

Инерционное слагаемое в левой части этого уравнения можно оценить как $(\mu_{n0}/c^2) \partial \mathbf{v}_{np} / \partial t \simeq (\mu_{n0}/c^2) \sigma \mathbf{v}_{np}$, где σ – частота колебания. Легко видеть, что, поскольку эта частота намного меньше частот столкновений ν_{nk} (2.5), данное слагаемое оказывается пренебрежимо малым по сравнению со вторым слага-

емым в правой части, и мы можем его отбросить. Тогда уравнение (2.11) позволяет выразить скорость относительного движения v_{np} через $\delta\mu_\beta$, что, в свою очередь, с учетом равенства $v_{pe} = 0$ позволяет преобразовать выражение (2.4) для диффузионных энергопотерь к следующему окончательному виду:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_D = - \int \frac{1}{J_{np}} \left[\frac{n_{n0}n_{e0}}{n_{b0}} \nabla \delta\mu_\beta \right]^2 dV. \quad (2.12)$$

При выводе данной формулы мы пренебрегли J_{en} по сравнению J_{np} , поскольку в нормальном веществе определяемые сильным взаимодействием нейтрон-протонные столкновения являются намного более эффективными, чем электромагнитные нейтрон-электронные столкновения, что приводит к малости отношения $J_{en}/J_{np} \sim 10^{-5}$ [27].

Рассмотрим теперь случай вещества с сильно сверхпроводящими протонами. При температурах много ниже температуры сверхпроводящего перехода тепловых протонных возбуждений практически нет ($n_{pex} \rightarrow 0$), а уравнение (2.7) для протонов заменяется уравнением Джозефсона для сверхпроводящей протонной компоненты [110]:

$$\frac{\mu_{p0}}{c^2} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = e_p \mathbf{E} - \nabla \delta\mu_p. \quad (2.13)$$

Кроме того в данном пределе сверхпроводимость сильно подавляет рассеяние частиц на протонах (число протонных тепловых возбуждений, на которых возможно рассеяние, экспоненциально подавлено), так что связанные с протонами темпы переноса импульса стремятся к нулю: $J_{pk} = 0$. Учитывая все вышесказанное и проводя вычисления по аналогии со случаем нормального вещества, легко показать, что диффузионные энергопотери в сверхпроводящем веществе описываются формулой, аналогичной (2.4):

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_D = - \int \frac{1}{J_{en}} \left[\frac{n_{n0}n_{e0}}{n_{b0}} \nabla \delta\mu_\beta \right]^2 dV, \quad (2.14)$$

Для ее вывода необходимо воспользоваться условием квазинейтральности (2.2) с $n_{pex} = 0$, уравнениями (2.7) для нейтронов и электронов, уравнением (2.13) для протонов и условием β -равновесия (2.10).

В том случае, когда диссипация является слабой, отклонение $\delta\mu_\beta$ от химического равновесия в выражениях (2.12) и (2.14) можно рассчитывать с помощью уравнений бездиссипативной гидродинамики¹, то есть в нашем случае – уравнений непрерывности (2.8) с $v_k = v = \delta v$ и уравнения Эйлера (2.9). Тогда из уравнений (2.12) и (2.14) следует, что диссипация за счет диффузии в сверхпроводящем веществе будет по сравнению с диссипацией в нормальном веществе усилена фактором порядка $J_{np}/J_{en} \sim 10^5$.

На первый взгляд может показаться, что мы получили достаточно противоречивый результат: как сверхпроводимость, которая проявляется как возможность *незатухающего* движения сверхпроводящего сорта частиц, может приводить к усиленной диссипации энергии? Другими словами, мы получили, что ослабление сцепки между различными сортами частиц (то есть коэффициентов J_{km} , входящих в силы трения $f_{km} = -J_{km}v_{km}$) приводит к усиленной диссипации. Чтобы понять, как такое возможно, мы предлагаем ниже обратиться к простой тестовой модели, обладающей тем же свойством.

Рассмотрим твердое тело, которое мы толкаем с фиксированной силой F через среду, оказывающую сопротивление в виде силы трения $F_{fr} = -\gamma_{fr}V$, где V – скорость движения тела, а γ_{fr} – некоторый коэффициент трения. При механическом равновесии силы, действующие на тело, уравновешены, и мы имеем $F_{fr} + F = 0$, откуда получаем $V(\gamma_{fr}) = F/\gamma_{fr}$. Скорость энергопотерь в этом равновесном состоянии равна $\dot{E}(\gamma_{fr}) = F_{fr}(\gamma_{fr})V(\gamma_{fr}) = -F^2/\gamma_{fr}$. Мы видим, что она падает с увеличением коэффициента трения и в пределе $\gamma_{fr} \rightarrow \infty$ стремится к нулю вместе со скоростью V . Физически это означает, что коэффициент трения является настолько большим, что приложение силы не приводит к движению тела через резистивную среду и, следовательно, к энергопотерям. В нашем случае эта ситуация соответствует идеальному «гидродинамическому» пределу, когда темпы переноса импульса J_{km} , играющие роль коэффициента трения γ_{fr} , являются бесконечно большими, в результате чего в системе практически запрещено относительное движение различных сортов частиц. Уменьшение коэффициентов J_{km} в такой исходно «жесткой» системе ослабляет сцепку различных сортов частиц между собой, тем самым позволяя их относительное движение и, следовательно, увеличивая энергопотери.

¹Напомним, что, как обсуждалось в разделе 1.2.1, эти уравнения имеют одинаковый вид в нормальном и сильно сверхпроводящем веществе.

Отметим, что в предложенной тестовой модели скорость движения V определяется в первую очередь силой трения, поскольку только она учитывалась в условии механического равновесия. В принципе можно было бы рассмотреть другую ситуацию, когда сила трения является очень слабой по сравнению с другими силами, действующими на тело, а потому скорость его движения V оказывается практически не зависящей от коэффициента трения γ_{fr} . В этом случае зависимость энергопотерь от коэффициента трения определяется формулой $\dot{E}(\gamma_{\text{fr}}) = F_{\text{fr}}(\gamma_{\text{fr}})V = -\gamma_{\text{fr}}V^2$, из которой следует, что, в отличие от предыдущего случая, они падают с уменьшением γ_{fr} . В нашей задаче эта ситуация описывает противоположный предел, в котором различные сорта частиц могут двигаться с немалыми относительными скоростями v_{km} , практически не зависящими от темпов переноса импульса J_{km} . В этом пределе, который мы называем «кинетическим», уменьшение коэффициентов J_{km} приводит не к увеличению (как в гидродинамическом пределе), а к уменьшению энергопотерь.

Из всего вышесказанного следует, что при достаточном уменьшении J_{km} система с исходно сцепленными частицами в конечном итоге перейдет из гидродинамического режима, в котором их относительные скорости определяются силами трения, в противоположный кинетический режим, в котором данная зависимость является слабой. Здесь нас прежде всего интересует именно гидродинамический режим, поскольку именно он реализуется при физических условиях, характерных для нейтронных звезд.

В завершение этого раздела отметим, что, хотя мы здесь рассматривали однородное *pre*-вещество, полученные выражения (2.12) и (2.14) оказываются применимыми также и в неоднородном *pre*-веществе ньютоновских звезд. Аналогичные выражения можно вывести и для *pre-μ*-вещества, причем в этом случае энергопотери также будут определяться отклонениями вещества от химического равновесия. Эти выражения эквивалентны тем, которые можно получить в нерелятивистском пределе из уравнений релятивистской диссипативной гидродинамики, обсуждавшейся в разделе 1.3. Напомним, что для перехода от одного формализма к другому необходимо, следуя известному алгоритму [27], выразить коэффициенты диффузии \mathcal{D}_{km} через темпы переноса импульса J_{pq} . Поскольку одножидкостный подход, в котором диффузия описывается с помощью коэффициентов \mathcal{D}_{km} , на практике оказывается удобнее многожидкостного, именно он будет ниже использоваться для более сложных задач.

2.3 Эффективность диффузии как диссипативного механизма

Из-за описанного усиления диффузионных энергопотерь сверхпроводимостью возникает вопрос, насколько сильно диффузия может подавлять колебания в сверхпроводящих звездах по сравнению с другими диссипативными механизмами. Чтобы оценить эффективность диффузии, в этом разделе, пользуясь формализмом, обсуждавшимся в разделе 1.3, мы рассчитываем и сравниваем друг с другом времена затухания простейших колебаний за счет диффузии с временами их затухания за счет сдвиговой вязкости.

2.3.1 Микрофизические входные данные

Во всех численных расчетах в качестве уравнения состояния мы используем уравнение состояния BSk24 [111], описывающее вещество с нуклонным составом и допускающее появление мюонов в ядре звезды. Коэффициенты сдвиговой вязкости в нормальном и в сверхпроводящем веществе (в лондонском пределе) мы заимствуем из работы [112], а темпы переноса импульса J_{km} – из работы [27], пренебрегая в сверхпроводящем веществе влиянием сверхпроводимости на J_{en} . Влияние сверхпроводимости на коэффициенты диффузии \mathcal{D}_{km} учитывается так, как обсуждалось в разделе 1.4.

2.3.2 Подавление звуковых волн

Рассмотрим сначала звуковые волны. Для их описания нам достаточно воспользоваться нерелятивистскими уравнениями колебаний (3.3), записанными в частном случае однородного невозмущенного вещества. В этом случае уравнение Эйлера на лагранжево смещение ξ , уравнение на возмущение давления δp и связь (1.53) между возмущением скорости и лагранжевым смещением, приобретают следующий простой вид:

$$\frac{w_0}{c^2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \delta p, \quad \delta p + \gamma p_0 \operatorname{div} \xi = 0, \quad \mathbf{v} = \delta \mathbf{v} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (2.15)$$

где γ – адиабатический индекс вещества с замороженным составом (1.64). Заметим, что первое уравнение совпадает с уравнением (2.9), полученным в предыдущем разделе. Второе уравнение также можно получить из уравнений многожидкостной гидродинамики. Для этого необходимо сначала, воспользо-

вавшись соотношением $v_{km} \ll v$, заменить в уравнениях непрерывности (2.8) скорости v_k на гидродинамическую v . После этой замены остается домножить полученные уравнения на $(\partial p / \partial n_k)_0$, просуммировать по всем сортам частиц k , а затем воспользоваться равенством $\delta p = (\partial p / \partial n_k)_0 \delta n_k$ и формулой (1.64).

Звуковые волны являются решением приведенных уравнений, для которого возмущение скорости и лагранжево смещение определяются формулами

$$\mathbf{v} = v_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \sigma t), \quad \boldsymbol{\xi} = -\frac{v_0}{\sigma} \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \sigma t), \quad (2.16)$$

где v_0 – амплитуда скорости, \mathbf{k} – волновой вектор, а σ – частота колебания. Подставляя эти выражения в уравнения (2.15), мы получаем:

$$\frac{w_0 \sigma}{c^2} \mathbf{v} = \frac{\gamma p_0}{\sigma} \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v}), \quad \delta p = \frac{\gamma p_0}{\sigma} (\mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (2.17)$$

Из этих уравнений легко видеть, что векторы \mathbf{k} и \mathbf{v} сонаправлены, а также что их нетривиальное решение с необходимостью должно удовлетворять следующему дисперсионному соотношению:

$$\sigma = c_s k, \quad c_s = c \sqrt{\frac{\gamma p_0}{w_0}}. \quad (2.18)$$

Таким образом, величина c_s , как было анонсировано в первой главе, действительно представляет собой скорость звука в звездном веществе.

Теперь мы можем приступить к расчету времен затухания $\tau_{\mathcal{D},\eta}$ звуковых волн за счет диффузии и сдвиговой вязкости. Для этого необходимо сначала вычислить их энергию \tilde{E} и соответствующие темпы энергопотерь $(d\tilde{E}/dt)_{\mathcal{D},\eta}$, а затем подставить результат в общую формулу (1.197)

$$\tau_{\mathcal{D},\eta} = 2\tilde{E} \left| \left\langle \left(\frac{d\tilde{E}}{dt} \right)_{\mathcal{D},\eta} \right\rangle_P \right|^{-1}, \quad (2.19)$$

где $\langle \dots \rangle_P$ означает усреднение по периоду колебания $P = 2\pi/\sigma$.

Энергия звуковых волн находится подстановкой соответствующего решения (2.16)-(2.17) в общую формулу (1.121):

$$\tilde{E} = \frac{w_0 v_0^2}{2c^2} V, \quad \text{где } V \text{ – объем системы.} \quad (2.20)$$

Далее, чтобы рассчитать диффузионные энергопотери, необходимо сначала найти вспомогательные векторы (1.175), которые в нерелятивистском пределе в случае однородного фона приобретают следующий простой вид:

$$\hat{d}_{(k)}^\mu = (0, \hat{\mathbf{d}}_{(k)}), \quad \hat{\mathbf{d}}_{(k)} = \frac{1}{\gamma p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial n_k} \right)_0 \nabla \delta p. \quad (2.21)$$

Подставляя в эту формулу возмущение давления δp , выраженное через скорость \mathbf{v} согласно (2.17), мы получаем, что для звуковых волн

$$\hat{\mathbf{d}}_{(k)} = -\frac{k^2 \mathbf{v}_0}{\sigma} \left(\frac{\partial p}{\partial n_k} \right)_0 \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \sigma t). \quad (2.22)$$

Подставляя этот результат в общую формулу (1.174) для сверхпроводящего вещества или формулу (1.180) для нормального вещества, получаем

$$\left(\frac{d\tilde{E}}{dt} \right)_{\mathcal{D}} = -\frac{c}{T_0} \left(\frac{k^2}{\sigma} \right)^2 \left(\frac{\partial p}{\partial n_k} \right)_0 \tilde{\mathcal{D}}_{km} \left(\frac{\partial p}{\partial n_m} \right)_0 \frac{v_0^2}{2} V, \quad (2.23)$$

где, по определению, $\tilde{\mathcal{D}}_{km} = \hat{\mathcal{D}}_{km}$ в сверхпроводящем веществе и $\tilde{\mathcal{D}}_{km} = \bar{\mathcal{D}}_{km}$ в нормальном, см. формулы (1.175) и (1.180), соответственно:

$$\hat{\mathcal{D}}_{pq} \equiv \Phi_{pk}^\top \mathcal{D}_{km} \Phi_{mq}, \quad \Phi_{km} \equiv \delta_{km} - \frac{e_k}{e_s} \left[\delta_{sm} - \frac{\mu_{s0} n_{m0}}{w_0} \right], \quad (2.24)$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{pq} \equiv H_{pk}^\top \mathcal{D}_{km} H_{mq}, \quad H_{km} \equiv \delta_{km} - \frac{e_k e_n \mathcal{D}_{nm}}{e_p \mathcal{D}_{pq} e_q}. \quad (2.25)$$

Наконец, чтобы определить энергопотери за счет сдвиговой вязкости, нужно рассчитать сдвиговый тензор (1.124) и подставить его в формулу (1.161). Пользуясь выражением для скорости \mathbf{v} (2.16) и сонаправленностью \mathbf{k} и \mathbf{v} , находим, что ненулевые компоненты сдвигового тензора определяются равенством

$$\sigma_{km} = -\frac{2}{c} \left[v_{0k} k_m - \frac{1}{3} \delta_{km} k v_0 \right] \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \sigma t). \quad (2.26)$$

Пользуясь этим равенством и формулой (1.161), получаем:

$$\left(\frac{d\tilde{E}}{dt} \right)_\eta = -\frac{2}{3} \eta k^2 v_0^2 V. \quad (2.27)$$

Теперь, подставляя в (2.19) выражения для энергии (2.20) и энергопотерь звуковых волн за счет диффузии (2.23) и сдвиговой вязкости (2.27), мы получаем следующие формулы для расчета времен затухания:

$$\tau_{\mathcal{D}} = \frac{2\sigma^2 w_0 T_0}{k^4 c^3} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial n_k} \right)_0 \tilde{\mathcal{D}}_{km} \left(\frac{\partial p}{\partial n_m} \right)_0 \right]^{-1}, \quad \tau_{\eta} = \frac{3}{2} \frac{w_0}{c^2 k^2 \eta}. \quad (2.28)$$

Отметим, что при выводе выражения для $\tau_{\mathcal{D}}$ нам не пришлось конкретизировать число сортов частиц в составе вещества, а потому оно применимо как в четырехкомпонентном *пре μ* -веществе, так и в трехкомпонентном *пре*-веществе. В последнем случае, если воспользоваться связью коэффициентов диффузии \mathcal{D}_{km} и темпов переноса импульса J_{pq} [27], можно показать, что время затухания $\tau_{\mathcal{D}}$ может быть рассчитано по следующей эквивалентной формуле

$$\tau_{\mathcal{D}} = \mathcal{J} \frac{2\sigma^2 w_0}{k^4 c^2} \left(\frac{n_{b0}}{n_{n0} n_{e0}} \right)^2 \left[\sum_{k=n,p,e} \left(\frac{\partial \delta \mu_{\beta}}{\partial n_k} \right)_0 n_{k0} \right]^{-2}, \quad (2.29)$$

где $\mathcal{J} = J_{np}$ в нормальном веществе и $\mathcal{J} = J_{en}$ в сверхпроводящем. Эту формулу можно было бы сразу получить, воспользовавшись выражениями (2.12) и (2.14) для диффузионных энергопотерь, полученных в предыдущем разделе в рамках многожидкостного формализма.

Отношение времен затухания $\tau_{\mathcal{D}}/\tau_{\eta}$ как функция барионной концентрации n_b в нормальном (штриховые линии) и сильно сверхпроводящем веществе (сплошная линия) показано на Рис. 2.1 (здесь $n_b \equiv n_{b0}$, $T \equiv T_0$, а T_{cp} – температура перехода протонов в сверхпроводящее состояние). Температурная зависимость $\tau_{\mathcal{D},\eta}$ определяется температурной зависимостью сдвиговой вязкости и темпов переноса импульса J_{km} /коэффициентов диффузии \mathcal{D}_{km} . В сверхпроводящем веществе $\tau_{\mathcal{D}}$ и τ_{η} обладают практически одинаковой температурной зависимостью ($\propto T^2$), а потому их отношение оказывается практически² не чувствительным к значению T . В нормальном веществе, однако, отношение $\tau_{\mathcal{D}}/\tau_{\eta}$ уже зависит от температуры, и мы приводим его значения при $T = 10^7$ К и $T = 10^8$ К. Построенные кривые не зависят от значений σ или k , поскольку, ввиду дисперсионного соотношения (2.18), рассматриваемые времена затухания зависят от них одинаковым образом: $\tau_{\mathcal{D},\eta} \propto k^{-2} \propto \sigma^{-2}$.

²Время $\tau_{\mathcal{D}}$ примерно пропорционально T^2 из-за пропорциональностей $J_{en} \propto T^2$ и $J_{\mu n} \propto T^2$ [27]. Малое отклонение от $\tau_{\mathcal{D}} \propto T^2$ связано с темпом $J_{e\mu}$, который дает малый вклад с более сложной зависимостью от T .

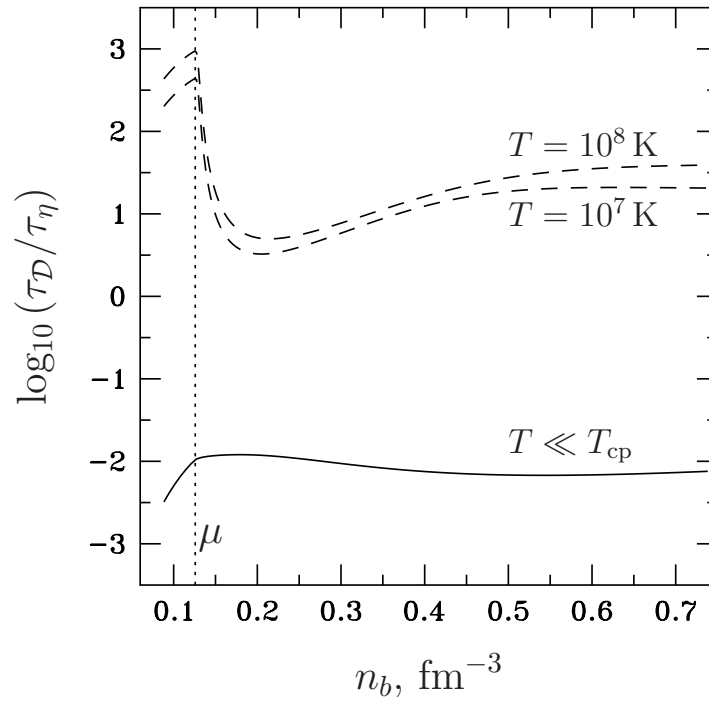


Рис. 2.1: Отношение τ_D/τ_η как функция барионной концентрации n_b для звуковых волн в сверхпроводящем (сплошная линия) и нормальном (штриховые линии) веществе. Вертикальная пунктирная линия показывает концентрацию, начиная с которой в веществе содержатся мюоны.

Вертикальной пунктирной линией на Рис. 2.1 показана барионная концентрация, начиная с которой вещество содержит мюоны. Видно, что в нормальном веществе с появлением мюонов эффективность диффузии сильно возрастает. Этот эффект можно объяснить следующим образом. В нормальном *pre*-веществе все сорта частиц сцеплены друг с другом: нейтроны сцеплены с протонами из-за их частых столкновений, обусловленных сильным взаимодействием, а электроны сцеплены с протонами электромагнитным взаимодействием. В результате диффузия оказывается неэффективной. Появление заряженных мюонов позволяет заряженным частицам двигаться друг относительно друга, и эффективность диффузии сильно возрастает. Несмотря на данное усиление, диффузия в нормальном веществе во всем рассмотренном диапазоне плотностей оказывается на несколько порядков менее эффективной, чем сдвиговая вязкость. В сверхпроводящем веществе, в свою очередь, протоны могут свободно двигаться относительно нейтронов, и именно диффузия оказывается доминирующим механизмом. Как мы покажем в следующем разделе и в главе 4, данный вывод сохраняется для ряда более сложных глобальных колебаний нейтронных звезд.

2.3.3 Подавление глобальных колебаний невращающихся звезд

Чтобы промоделировать глобальные звездные колебания, мы ищем решения гидродинамических уравнений (1.74), от которых требуется, во-первых, чтобы они были регулярными в центре звезды и, во-вторых, чтобы возмущенное давление на возмущенной поверхности звезды обращалось в ноль. Эти уравнения, дополненные указанными граничными условиями, сводятся к задаче по поиску собственных функций и чисел, где роль первых играет лагранжево смещение, а роль последних играет частота колебаний σ . Решения данной задачи принято различать по основной восстанавливающей силе, определяющей динамику колебаний [77], а также по соответствующей геометрии потоков вещества. В невращающихся звездах эти решения разбиваются на три группы. Низкочастотные колебания, управляемые преимущественно силой Архимеда (плавучестью), носят название g -мод. Высокочастотные колебания, управляемые подобно звуку преимущественно давлением, носят название p -мод. Колебания промежуточной частоты называются f -модами. При моделировании перчисленных колебаний лагранжево смещение, как правило, раскладывается по сферическим векторам, а возмущения термодинамических величин раскладываются по сферическим гармоникам $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Оказывается, что уравнения для определения вкладов с разными l и m расцепляются, а потому квантовые числа (l, m) можно использовать как надежную характеристику геометрии потоков.

Для моделирования f -, p - и g -мод мы построили трехслойную модель нейтронной звезды с массой $M = 1.4 M_{\odot}$, состоящую из баротропной коры, внешнего pre -ядра и внутреннего $pre\mu$ -ядра. Протоны мы считали сильно сверхпроводящими, а нейтроны – нормальными. Расчеты спектра и собственных функций колебаний проводились в бездиссипативном пределе на основе результатов работы [56]. Как и в случае звуковых волн, их времена затухания $\tau_{D,\eta}$ рассчитывались с помощью формализма, изложенного в разделе 1.3. В качестве красносмещенной температуры мы использовали значение $T^{\infty} = 10^8$ К. Полученные таким образом времена затухания ($l = 2, m = 0$) мод с различными собственными частотами σ показаны на Рис. 2.2. Красные точки показывают времена затухания τ_{η} за счет сдвиговой вязкости, в то время как черные точки показывают времена затухания τ_D за счет диффузии. Разные p - и g -моды отличаются числом их радиальных узлов, то есть нулей их собственных функций внутри звезды.

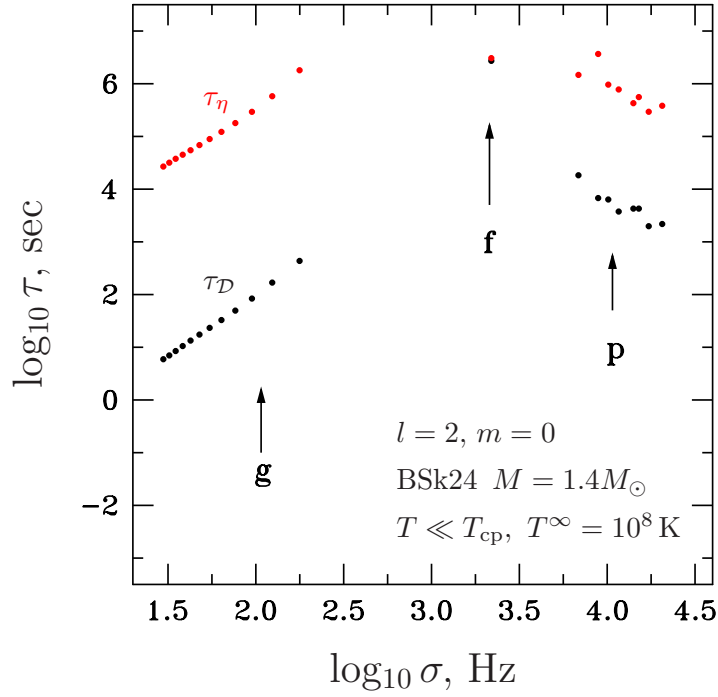


Рис. 2.2: Времена затухания первых ($l = 2$ $m = 0$) f -, p - и g -мод за счет сдвиговой вязкости (красные точки) и диффузии (черные точки) в сверхпроводящей НЗ. По горизонтальной оси отложены частоты σ рассматриваемых колебаний.

Из рисунка видно, что p -моды подавляются диффузией примерно на два порядка быстрее, чем сдвиговой вязкостью, что очень похоже на результат, полученный ранее для звуковых волн. Этот результат не является неожиданным, поскольку физически p -моды близки к звуку. По аналогии со звуком, их времена затухания $\tau_{D,\eta}$ уменьшаются с возрастанием σ или, что эквивалентно, с увеличением числа их радиальных узлов (нулей): $\tau_\eta \propto \tau_D \propto \sigma^{-2}$. Этот закон объясняет наблюдаемое для p -мод спадание $\log_{10} \tau$ с ростом σ .

Для g -мод разница между τ_η и τ_D оказывается еще больше и составляет практически четыре порядка, причем в отличие от p -мод, в этом случае $\log_{10} \tau$ растет с увеличением σ . Чтобы объяснить эту закономерность, заметим, что более мелкомасштабные g -моды с большим числом радиальных узлов характеризуются меньшими частотами, которые приблизительно подчиняются соотношению $\sigma \propto L$, где L – пространственный масштаб колебаний. Это соотношение можно получить в рамках ВКБ анализа, то есть предполагая, что масштаб L существенно меньше размера звезды, что должно выполняться все с большей точностью с увеличением числа узлов (см. пример такого рассмотрения в нерелятивистской теории в работе [113]). В рамках этого же подхода можно показать, что с ростом числа узлов радиальное движение $v^r \sim (\sigma/\sigma_0)rv^{\theta,\varphi}$ в

g -модах подавляется по сравнению с горизонтальным $rv^{\theta,\varphi}$ на фактор порядка (σ/σ_0) , где σ_0 – частота фундаментальной (безузловой) g -моды. Пользуясь этими оценками и уравнениями (1.63) и (2.10), мы получаем, что $\nabla\delta\mu_\beta \propto v^r/(\sigma L)$. Подставляя эти соотношения в формулы для энергии колебаний (1.121) и для темпов диффузионных энергопотерь в нормальном (2.12) или сверхпроводящем веществе (2.14), получаем $\tau_\eta \propto \tau_D \propto \sigma^2$, что объясняет³ обнаруженную зависимость $\log_{10} \tau$ от σ . Здесь же мы хотели бы отметить, что, согласно нашим расчетам, для g -мод диффузия оказывается ведущим диссипативным механизмом не только в сверхпроводящих, но и в нормальных звездах. Так, например, для фундаментальной g -моды мы получили $\tau_\eta/\tau_D \approx 4.8$.

Наконец, что касается f -моды, диссипация ее энергии за счет диффузии оказывается подавленной и практически совпадает с диссипацией за счет сдвиговой вязкости. Это связано с тем, что данная мода представляет собой колебание звезды как единой практически несжимаемой жидкой капли. Из-за того, что вещество при таком колебании практически не сжимается, оно практически не отклоняется от химического равновесия, что, согласно (2.12) и (2.14), приводит к подавлению диссипации за счет диффузии.

2.4 Обсуждение результатов главы 2

Согласно проведенным расчетам, диффузия частиц может быть крайне эффективным диссипативным механизмом в нейтронных звездах. Примечательно, что этот механизм является относительно простым и, в частности, не требует наличия сверхтекучих вихрей, необходимых для более сложного механизма диссипации за счет взаимного трения (см., например, [20]). Сравнивая затухание колебаний за счет диффузии с их затуханием за счет сдвиговой вязкости, мы установили, что в веществе с нормальными протонами влияние диффузии является слабым и его можно не учитывать для всех рассмотренных колебаний, кроме g -мод. Если же протоны сверхпроводящие, диффузия приводит к очень быстрому подавлению колебаний, в особенности звука, p -мод и g -мод, для которых подавление диффузией происходит намного быстрее подавления сдвиговой вязкостью (считавшейся основным каналом диссипации).

³Как обсуждалось в предыдущем разделе, хотя использованные в этой оценке формулы для энергопотерь были получены для *pre*-вещества, аналогичные формулы имеют место и в *pre- μ* -веществе, где энергопотери также можно выразить через отклонения вещества от химического равновесия. Это также можно увидеть из формул (1.174), (1.175) и (1.180), если учесть, что, в силу уравнений (1.61), (1.63) и (1.25), мы имеем $\Delta p \propto \Delta\mu_{(a)} = \delta\mu_{(a)}$.

Наши результаты подразумевают необходимость пересмотреть времена подавления всех возможных колебаний нейтронных звезд. При этом для каждого физического явления, связанного с развитием той или иной гидродинамической неустойчивости, необходимо проверить, могут ли такие неустойчивости «выжить» с учетом обнаруженной сильной диссипации за счет диффузии. К таким физическим явлениям, например, относятся:

- резонансное возбуждение колебаний приливным взаимодействием [114] и приливная p - g -неустойчивость [115–117] в двойных системах НЗ-НЗ и НЗ-черная дыра;
- возбуждение r -мод в быстро вращающихся нейтронных звездах [20];
- насыщение r -мод за счет их нелинейного взаимодействия с инерционными модами (inertial gravity waves) [118];
- развитие неустойчивости, связанной с прецессией звезды [119];
- модели глитчей, основанные на возбуждении гидродинамических неустойчивостей в ядре звезды (см., например, [120]).

Кроме того, сильная диссипация за счет диффузии может снизить время возбуждения обусловленной вязкостью секулярной неустойчивости нейтронных звезд [121–124]. Таким образом, мы приходим к выводу, что учет диффузии может оказаться важным для интерпретации гравитационного сигнала, испускаемого двойными системами НЗ, глитчей и наблюдательных проявлений быстро вращающихся нейтронных звезд.

В завершение этой главы мы хотели бы кратко обсудить влияние нейтронной сверхтекучести, которая не учитывалась в нашем рассмотрении. С одной стороны, она могла бы привести к усилению диссипации за счет диффузии, поскольку она подавляет рассеяние нейтронов на других частицах, что сопровождается подавлением J_{nk} . С другой стороны, этот эффект может компенсироваться уменьшением числа участвующих в рассеяниях «нормальных» нейтронов. Кроме того нейтронная сверхтекучесть модифицирует уравнения гидродинамики, что также может повлиять на диффузионные энергопотери. Совместное изучение перечисленных эффектов представляет собой интересную задачу, заслуживающую отдельного рассмотрения.

Глава 3. Моделирование r -мод

Данная глава посвящена задаче моделирования r -мод – колебаний вращающихся звезд, управляемых преимущественно силой Кориолиса. Сначала мы обсуждаем стандартные методы моделирования ньютоновских r -мод и сложности, возникающие в релятивистской теории («проблема непрерывного спектра»), а затем предлагаем альтернативный метод описания релятивистских r -мод, позволяющий качественно объяснить и разрешить противоречия, имеющиеся в литературе. Мы показываем, что эффект увлечения инерциальных систем отсчета (и.с.о.) существенно модифицирует физические свойства r -мод по сравнению с предсказаниями ньютоновской теории. Изложение в данной главе основано на оригинальных работах [29, 125].

3.1 Кратко об r -модах и проблемах их моделирования

Как мы обсуждали в разделе 1.3.4, некоторые колебания вращающихся НЗ могут быть неустойчивыми по отношению к излучению гравитационных волн – явление, известное как неустойчивость Чандрасекара-Фридмана-Шатца (CFS-механизм) [74, 126–128]. Естественно ожидать, что при благоприятных условиях (см. главу 4) такие колебания могут становиться «видимыми» для гравитационно-волновых детекторов. Наблюдение подобного гравитационного сигнала послужило бы источником ценной информации о свойствах термодинамически холодного сверхплотного вещества в недрах НЗ, то есть в условиях, которые на данный момент невозможно воспроизвести в земных лабораториях. С этой точки зрения, из всего многообразия колебаний нейтронных звезд особо перспективными считаются r -моды, поскольку данные колебания являются наиболее CFS-неустойчивыми. Это связано с тем, что в случае r -мод CFS-механизм работает при любой скорости вращения звезды [13, 14], в то время как для многих других типов колебаний он активируется лишь по достижении некоторой пороговой скорости вращения.

Как мы упоминали в разделе 2.3.3, звездные колебания можно классифицировать (1) по основной восстанавливающей силе, определяющей их динамику [77], и (2) по геометрии соответствующих потоков вещества. R -моды представляют собой колебания вращающихся звезд, для которых основной восстанавливающей силой служит сила Кориолиса (см. обзор физики r -мод в работах [11, 20]; также см. работы [9, 21, 129–135]). В медленно вращающихся звездах частоты r -мод σ пропорциональны скорости вращения звезды Ω , а соответствующее движение вещества является близким к чисто тороидальному – по этой причине r -моды иногда называют «квазиторoidalными». Поиски гравитационно-волнового сигнала от r -мод уже ведутся [136–144]. Также были обнаружены указания на возможное присутствие признаков r -мод в рентгеновских спектрах нескольких наблюдаемых источников [145, 146]. Тот факт, что r -моды до сих пор не наблюдались, можно объяснить либо недостаточной чувствительностью гравитационно-волновых детекторов, либо подавлением мод различными диссипативными механизмами, действующими в звёздном веществе. Понимание физики r -мод приобретает особую важность в свете предстоящего запуска новых, более чувствительных детекторов, таких как Einstein Telescope или Cosmic Explorer (см., напр., [15, 147]).

В случае, когда угловая скорость вращения звезды $\Omega \ll \Omega_K = \sqrt{GM/R^3}$ (т.е. звезда вращается медленно), теоретические исследования r -мод, как правило, опираются на предположение, что собственные функции и частоты r -мод могут быть разложены в ряд Тейлора по малому параметру Ω/Ω_K . Тогда уравнения r -мод могут быть получены с помощью теории возмущений по Ω/Ω_K (далее – просто *теории возмущений*). В ньютоновской теории такой подход оказывается очень плодотворным (см. обширные обзоры [11] и [20], а также указанные в них источники). Он предсказывает, что частоты колебаний ньютоновских r -мод образуют *дискретный* спектр,

$$\sigma = \left[\frac{2m}{l(l+1)} - m \right] \Omega, \quad l \in \mathbb{N}, \quad |m| \leq l, \quad (3.1)$$

где l и m – квантовые числа, определяющие угловую зависимость собственных функций r -мод. Теория возмущений также успешно позволяет рассчитать *дискретные* поправки высшего порядка по Ω/Ω_K к данному спектру и соответствующие собственные функции r -мод (т.е. возмущения скорости, давления,

плотности и т.д.). Расчеты удается провести как в общей постановке задачи, так и в упрощенной, пренебрегающей возмущениями гравитационного поля (*приближение Каулинга* [77], см. также раздел 1.2.3). При этом оказывается, что приближение Каулинга, которое существенно упрощает решаемую задачу, дает качественно правильное описание r -мод [12, 79], а связанная с его использованием ошибка в определении поправок к спектру колебаний не превышает 8%. В общей теории относительности (ОТО), однако, такой подход, основанный на теории возмущений, приводит к противоречивым результатам, известным в литературе как «*проблема непрерывного спектра r -мод*».

Для r -мод принципиальным отличием релятивистской теории от ньютоновской оказывается наличие эффекта увлечения и.с.о.: с точки зрения удаленного наблюдателя, локальные и.с.о. в точке r увлекаются с угловой скоростью $\Omega\omega(r)$ вокруг вращающейся звезды [см. формулу (1.37)]. В результате релятивистская теория в ведущем порядке теории возмущений предсказывает, что частоты r -мод вместо того, чтобы принимать дискретные значения, как в ньютоновской теории, заполняют *непрерывную* полосу значений [148–154]

$$\frac{2m[1 - \omega(0)]}{l(l+1)} - m \leq \frac{\sigma}{\Omega} \leq \frac{2m[1 - \omega(R)]}{l(l+1)} - m, \quad l \in \mathbb{N}, \quad |m| \leq l. \quad (3.2)$$

В то же время более «честные» численные расчеты, не опирающиеся на теорию возмущений, не обнаруживают никаких признаков непрерывного спектра и успешно позволяют найти r -моды, обладающие дискретным спектром, как и в ньютоновской теории [76, 155–159].

В литературе предпринимались разные попытки регуляризации спектра r -мод, но ни одну из них, с нашей точки зрения, нельзя считать успешной (см. обсуждение в разделе 3.3.2). Было показано, что непрерывный спектр «выживает» при учете гравитационного излучения [160, 161]. Включение слагаемых высшего порядка по Ω/Ω_K , которые не учитываются в приближении медленного вращения, могло бы привести к регуляризации спектра [162], однако релятивистские расчеты, которые учитывали бы эти слагаемые, насколько нам известно, не проводились. Наконец, включение вязкой диссипации действительно регуляризует спектр [163, 164], однако такая регуляризация изучена лишь в случае, когда поправки, связанные с вращением, малы по сравнению с вязкими – ситуация прямо противоположная той, что реализуется в НЗ.

В настоящий момент остаётся неясным, является ли непрерывный спектр физическим явлением или же это артефакт используемых предположений и упрощений. Однако тот факт, что численные расчёты, не опирающиеся на теорию возмущений по Ω/Ω_K , не выявляют никаких признаков непрерывного спектра, наводит на мысль, что последний, вероятно, возникает из-за неприменимости такого подхода к описанию релятивистских r -мод. Другими словами, теория возмущений по Ω/Ω_K , хорошо зарекомендовавшая себя в ньютоновской теории, может оказаться непригодной для моделирования релятивистских r -мод в медленно вращающихся нейтронных звёздах.

Изложение в данной главе структурировано следующим образом. Мы начинаем обсуждение с обзора основных методов, применяемых для расчета спектра и собственных функций r -мод в ньютоновской теории (раздел 3.2), а затем сосредотачиваемся на проблемах описания r -мод в ОТО (раздел 3.3). Здесь мы развиваем альтернативный подход к анализу релятивистских уравнений колебаний, который позволяет выявить ряд ранее упущенных свойств релятивистских r -мод, оказывающихся ключевыми для разрешения проблемы непрерывного спектра. В рамках предлагаемого подхода нам удастся восстановить традиционный дискретный спектр r -мод и получить уравнения, являющиеся релятивистским обобщением уравнений ньютоновских r -мод. Несмотря на сходство данных уравнений с ньютоновскими, по мере уменьшения скорости вращения звезды релятивистские r -моды начинают демонстрировать крайне нестандартное поведение, отличающееся от поведения ньютоновских r -мод. Особенности релятивистских r -мод и их теоретическому обоснованию посвящен раздел 3.4. Мы завершаем данную главу подведением итогов и обсуждением полученных результатов в разделе 3.5.

Ниже мы для удобства будем измерять расстояние в единицах радиуса звезды R , массу в единицах массы звезды M , частоту σ – в единицах кеплеровской частоты Ω_K , а время в единицах Ω_K^{-1} . Поскольку в таких единицах измерения $\Omega_K = 1$, под Ω в дальнейшем, если не оговорено обратное, мы подразумеваем отношение Ω/Ω_K . Хотя в таких единицах гравитационная постоянная $G = 1$, мы все же будем ее формально удерживать в уравнениях. При таких соглашениях безразмерные уравнения с удержанной гравитационной постоянной выглядят в точности так же, как их размерные аналоги.

3.2 R-моды в ньютоновской теории

В данном разделе мы, пользуясь теорией возмущений, приводим краткий вывод уравнений, описывающих ньютоновские r -моды. Хотя данные результаты не являются оригинальными, они включены, чтобы дать представление о стандартном методе моделирования r -мод, применимость которого в релятивистском случае будет подробно обсуждаться в последующих разделах.

3.2.1 Стандартный подход к моделированию r -мод

В ньютоновской теории стандартным методом изучения r -мод в медленно вращающихся звездах является *теория возмущений* по скорости вращения звезды Ω (см. обзоры [11, 20] и приведенные в них ссылки). Суть такого подхода заключается в разложении всех интересующих нас величин в ряды по Ω с последующей их подстановкой в уравнения колебаний и приравниванием нулю суммарных коэффициентов при слагаемых с разными степенями Ω .

Поскольку основной восстанавливающей силой для r -мод является сила Кориолиса, их частота σ_r по определению должна исчезать при $\Omega \rightarrow 0$ и, следовательно, ее разложение по Ω начинается с линейного члена, то есть $\sigma_r \propto \Omega$ при $\Omega \rightarrow 0$. Тогда из уравнений колебаний как в небаротропном веществе (1.227)

$$\begin{cases} \sigma_r^2 \boldsymbol{\xi} - 2i\sigma_r [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\xi}] = c^2 \left(\frac{1}{w_0} \nabla \delta p - \frac{\delta w}{w_0^2} \nabla p_0 \right) \\ \Delta p + \gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0 \\ \Delta \varepsilon + w_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

так и в баротропном (1.228)

$$\begin{cases} \sigma_r^2 \boldsymbol{\xi} - 2i\sigma_r [\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\xi}] = c^2 \nabla \left(\frac{\delta p}{w_0} \right) \\ \Delta p + \gamma p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

сразу следует, что для r -мод малым параметром теории возмущений оказывается не Ω , а Ω^2 , поскольку для колебаний с $\sigma_r \propto \Omega$ угловая скорость Ω входит в данные уравнения только как Ω^2 . Кроме того, как мы говорили во введении, для r -мод в медленно вращающихся звездах движение вещества является близким к тороидальному. Это свойство по определению означает, что в разложении

(1.229) лагранжева смещения

$$\boldsymbol{\xi} = \xi^r \mathbf{e}_r + r[\nabla - \mathbf{e}_r(\mathbf{e}^r \nabla)]\mathbf{Q} - r[\mathbf{e}_r \times \nabla]\mathbf{T}, \quad (3.5)$$

слагаемое с тороидальной функцией \mathbf{T} оказывается доминирующим, а слагаемые с функциями \mathbf{Q} и ξ^r – относительно малыми.

Учитывая все вышесказанное, легко установить, что в случае r -мод ведущие члены рядов Тейлора по Ω имеют следующий вид:

$$\sigma_r = \Omega[\sigma_r^{(0)} + \Omega^2 \sigma^{(1)} + o(\Omega^2)], \quad \mathbf{T} = (-i)[T^{(0)} + \Omega^2 T^{(1)} + o(\Omega^2)], \quad (3.6)$$

$$\mathbf{Q} = \Omega^2 Q^{(1)} + o(\Omega^2), \quad \xi^r = \Omega^2 \xi^{(1)} + o(\Omega^2), \quad (3.7)$$

$$\delta p = \Omega^2 p^{(1)} + o(\Omega^2), \quad \delta w = \Omega^2 w^{(1)} + o(\Omega^2), \quad (3.8)$$

где множитель $(-i)$ был введен для дальнейшего удобства. Тот факт, что разложения δp и $\delta w = \delta p + \delta \varepsilon$ начинаются со слагаемых порядка Ω^2 , следует из второго и третьего уравнений системы (3.3). Действительно, поскольку дивергенция чисто тороидального поля равна нулю, величина $\text{div} \boldsymbol{\xi}$ определяется радиальной ξ^r и полярной \mathbf{Q} компонентами движения, которые подавлены фактором Ω^2 . Учитывая это и определение лагранжевых возмущений $\Delta f = \delta f + (\boldsymbol{\xi} \nabla) f_0(r)$ термодинамических величин, получаем $\delta p \propto \Omega^2$, $\delta \varepsilon \propto \Omega^2$ и $\delta w \propto \Omega^2$.

Из разложений (3.6)-(3.8) видно, что в ньютоновской теории, с точки зрения зависимости от Ω , имеем

$$\sigma_r / \Omega - \sigma_r^{(0)} \propto \Omega^2, \quad \xi^r \propto \mathbf{Q} \propto \delta p \propto \delta w \propto \Omega^2 \mathbf{T}. \quad (3.9)$$

Ниже такие выражения, показывающие, как в зависимости от Ω соотносятся между собой различные функции, описывающие r -моды, мы будем называть их «*ордерингом*». Конкретно формулы (3.9), имеющие место в ньютоновской теории, мы будем называть *стандартным* ордерингом r -мод.

Таким образом, чтобы получить уравнения ньютоновских r -мод, нужно подставить разложения (3.6)-(3.8) в уравнения (3.3)-(3.4) и приравнять нулю коэффициенты при разных степенях Ω . Далее мы, опираясь на [12], кратко опишем основные результаты, к которым приводит такой подход. Для простоты мы не учитываем обусловленную вращением сплюснутость звезды и считем все равновесные термодинамические величины f_0 зависящими только от r .

3.2.2 Уравнения ньютоновских г-мод

Угловая зависимость тороидальной функции и частота г-мод

Оказывается, что, независимо от того, является уравнение состояния баротропным или нет, ведущий вклад $\sigma_r^{(0)}$ в частоту r -моды и угловую зависимость тороидальной функции $T^{(0)}$ можно определить из уравнений ведущего порядка теории возмущений. Рассмотрим, например, систему (3.3), описывающую колебания в небаротропном ядре звезды. Поскольку в ведущем порядке вектор ξ является чисто тороидальным и его дивергенция равна нулю, второе и третье уравнения данной системы выполняются тождественно. В то же время компоненты уравнения Эйлера в ведущем порядке имеют следующий вид:

$$r\text{-компонента:} \quad 2i\sigma_r^{(0)} \sin \theta \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \theta} = c^2 \left[\frac{w^{(1)}}{w_0^2} \frac{dp_0}{dr} - \frac{1}{w_0} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} \right] \quad (3.10)$$

$$\theta\text{-компонента:} \quad \frac{im\sigma_r^{(0)2}}{\sin \theta} T^{(0)} - 2i\sigma_r^{(0)} \cos \theta \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \theta} = \frac{c^2}{w_0 r} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \theta} \quad (3.11)$$

$$\varphi\text{-компонента:} \quad -\sigma_r^{(0)2} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \theta} + 2m\sigma_r^{(0)} \operatorname{ctg} \theta T^{(0)} = \frac{imc^2 p^{(1)}}{w_0 r \sin \theta}. \quad (3.12)$$

Выражая возмущение давления $p^{(1)}$ из φ -компоненты и подставляя в θ -компоненту, мы приходим к уравнению на тороидальную функцию $T^{(0)}$:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{2m}{\sigma_r^{(0)}} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] T^{(0)} = 0. \quad (3.13)$$

С точностью до переобозначения $\sigma_r^{(0)} \rightarrow 2m/L(L+1)$ и введения переменной $x = \cos \theta$ данное уравнение совпадает с обобщенным уравнением Лежандра

$$\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP_L^m}{dx} + \left[L(L+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_L^m = 0. \quad (3.14)$$

Следовательно, любое решение уравнения (3.13), регулярное в полюсах $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, соответствует конкретному выбору $L = l$ из ряда натуральных чисел и имеет следующий вид¹:

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{2m}{l(l+1)}, \quad T^{(0)}(r, x) = T_{lm}^{(0)}(r) P_l^m(x). \quad (3.15)$$

¹Для краткости мы опускаем множитель $e^{i\sigma t + im\varphi}$ и переменные t и φ в аргументах возмущений (1.73).

Таким образом, мы установили, что угловая зависимость тороидальной функции $T^{(0)}(r, x)$ описывается присоединенным полиномом Лежандра $P_l^m(x)$, и определили соответствующий ведущий вклад $\sigma_r^{(0)}$ в частоту r -мод. При этом следует отметить, что полученные формулы (3.15) оказываются справедливыми не только для небаротропного ядра, но и для баротропной коры звезды. В этом легко убедиться, заметив, что баротропность вещества не влияет на θ - и φ -компоненты уравнения Эйлера использованные при выводе. Подход к вычислению радиальной зависимости $T_{lm}^{(0)}(r)$, однако, уже в существенной определяется тем, является уравнение состояния баротропным или нет.

Уравнения ньютоновских g -мод в ядре звезды

В случае небаротропного ядра для определения $T_{lm}^{(0)}(r)$ необходимо дополнить уравнение (3.10) уравнениями колебаний (3.3) в следующем порядке теории возмущений. Данные уравнения удобно исследовать с использованием разложений по присоединённым полиномам Лежандра:

$$f^{(1)}(r, x) = \sum_{L \geq m} f_{Lm}^{(1)}(r) P_L^m(x). \quad (3.16)$$

Поскольку азимутальное число m фиксировано, в дальнейшем для удобства мы опускаем индекс m и пишем $T_l^{(0)}$ вместо $T_{lm}^{(0)}$ и $f_L^{(1)}$ вместо $f_{Lm}^{(1)}$.

Подставляя разложения (3.16) в уравнения колебаний, а затем пользуясь уравнением Лежандра (3.14) и свойствами полиномов Лежандра

$$\begin{aligned} P_L^m &= 0 \text{ при } L < m, \\ xP_L^m &= k_L^+ P_{L-1}^m + k_L^- P_{L+1}^m, \\ (1-x^2) \frac{dP_L^m}{dx} &= (L+1)k_L^+ P_{L-1}^m - Lk_L^- P_{L+1}^m, \\ k_L^+ &\equiv \frac{L+m}{2L+1} \quad k_L^- \equiv \frac{L-m+1}{2L+1}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

оказывается возможным свести уравнения к такому виду, в котором вся зависимость от переменной x содержится только в виде линейной комбинации полиномов $P_L^m(x)$, а коэффициенты при этих полиномах зависят только от r . Система уравнений, описывающая r -моды, получается приравниванием к нулю суммарных коэффициентов при разных полиномах Лежандра. Анализ дан-

ных уравнений показывает, что единственными ненулевыми коэффициентами в разложениях (3.16) по полиномам Лежандра являются $\xi_{l\pm 1}^{(1)}$, $Q_{l\pm 1}^{(1)}$ и $T_{l,l\pm 2}^{(1)}$. При этом моделирование r -мод сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на коэффициенты $T_l^{(0)}$ и $\xi_{l\pm 1}^{(1)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2l^2 k_{l+1}^+ \left[r \frac{d}{dr} + (l+3) - gr \frac{c^2}{c_s^2} \right] \xi_{l+1}^{(1)} + \\ \quad + 2(l+1)^2 k_{l-1}^- \left[r \frac{d}{dr} - (l-2) - rg \frac{c^2}{c_s^2} \right] \xi_{l-1}^{(1)} - \\ \quad - \left[l^2(l+1)^2 \sigma^{(1)} + \frac{8\gamma_1 m r^2}{c_s^2} \right] T_l^{(0)} = 0 \\ \left[\frac{d}{dr} + A - \frac{l}{r} \right] T_l^{(0)} + \frac{(l+1)^2 A g c^2}{4rm k_l^-} \xi_{l+1}^{(1)} = 0 \\ \left[\frac{d}{dr} + A + \frac{l+1}{r} \right] T_l^{(0)} + \frac{l^2 A g c^2}{4rm k_l^+} \xi_{l-1}^{(1)} = 0. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Здесь мы ввели (деленное на c^2) гравитационное ускорение g , дискриминант Шварцшильда $A = \mathcal{A}_r$ [см. (1.70)] и численный коэффициент γ_1 :

$$g = -\frac{p'_0}{w_0}, \quad A = \frac{w'_0}{w_0} + g \left[1 + \frac{c^2}{c_s^2} \right], \quad \gamma_1 = \frac{l^4 k_l^- k_{l+1}^+ + (l+1)^4 k_{l-1}^- k_l^+}{l^2(l+1)^2}, \quad (3.19)$$

где штрих означает производную d/dr . Далее по известным $\xi_{l\pm 1}^{(1)}$ и $T_l^{(0)}$ можно, пользуясь остающимися уравнениями, определить коэффициенты $Q_{l\pm 1}^{(1)}$ и $T_{l\pm 2}^{(1)}$:

$$Q_{l-1}^{(1)} = \frac{1}{l(l-1)} \left\{ \left[r \frac{d}{dr} - gr \frac{c^2}{c_s^2} + 2 \right] \xi_{l-1}^{(1)} - \frac{4mr^2 k_l^+}{l^2 c_s^2} T_l^{(0)} \right\}, \quad (3.20)$$

$$Q_{l+1}^{(1)} = \frac{1}{(l+1)(l+2)} \left\{ \left[r \frac{d}{dr} - gr \frac{c^2}{c_s^2} + 2 \right] \xi_{l+1}^{(1)} - \frac{4mr^2 k_l^-}{(l+1)^2 c_s^2} T_l^{(0)} \right\}, \quad (3.21)$$

$$T_{l-2}^{(1)} = -\frac{(l-2)l(l+1)k_{l-1}^+}{2m(2l-1)} \left[l Q_{l-1}^{(1)} + \xi_{l-1}^{(1)} \right], \quad (3.22)$$

$$T_{l+2}^{(1)} = \frac{l(l+1)(l+3)k_{l+1}^-}{2m(2l+3)} \left[(l+1) Q_{l+1}^{(1)} - \xi_{l+1}^{(1)} \right]. \quad (3.23)$$

При этом коэффициент $T_l^{(1)}(r)$ выпадает из уравнений колебаний и остается неопределенным. Его расчет требует рассмотрения уравнений в еще более высоком порядке теории возмущений.

Частный случай $l = m$ представляет особый интерес, поскольку мода с $l = m = 2$ считается наиболее CFS-неустойчивой. В этом случае функции $Q_{l-1}^{(1)}$, $\xi_{l-1}^{(1)}$ и $T_{l-2}^{(1)}$ следует положить равными нулю, так как сами полиномы Лежандра $P_{l-1}^m(x)$ и $P_{l-2}^m(x)$ обращаются в ноль при $l = m$. Также следует игнорировать уравнения (3.20), (3.22) и последнее уравнение системы (3.18), поскольку эти уравнения получаются приравниванием к нулю коэффициентов при исчезающих $P_{l-1}^m(x)$ и $P_{l-2}^m(x)$. В результате остаются уравнения (3.21) и (3.23) для определения коэффициентов $Q_{m+1}^{(1)}$ и $T_{m+2}^{(1)}$ по функциям $\xi_{m+1}^{(1)}$ и $T_m^{(0)}$, которые, в свою очередь, определяются как решение системы

$$\begin{cases} \left[C_1^{\text{Newt}} \frac{d}{dr} + C_2^{\text{Newt}} \right] \xi_{m+1}^{(1)} + \left[C_3^{\text{Newt}} + \sigma^{(1)} \right] T_m^{(0)} = 0 \\ \left[\frac{d}{dr} + G_1^{\text{Newt}} \right] T_m^{(0)} + G_2^{\text{Newt}} \xi_{m+1}^{(1)} = 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

где мы ввели вспомогательные коэффициенты

$$\begin{aligned} C_1^{\text{Newt}}(r) &= -\frac{2rk_{m+1}^+}{(m+1)^2} \\ C_2^{\text{Newt}}(r) &= -\frac{2k_{m+1}^+}{(m+1)^2} \left[m+3 - g(r)r \frac{c^2}{c_s^2(r)} \right] \\ C_3^{\text{Newt}}(r) &= \frac{8r^2}{c_s^2(r)m(m+1)^2} \gamma_1|_{l=m} \\ G_1^{\text{Newt}}(r) &= A(r) - \frac{m}{r} \\ G_2^{\text{Newt}}(r) &= \frac{(m+1)^2 A(r) g(r) c^2}{4mrk_m^-}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Уравнения ньютоновских \mathbf{r} -мод в коре звезды

В баротропной коре НЗ колебания описываются системой (3.4). В отличие от ситуации в ядре, в коре тороидальная функция $T^{(0)}(r, x)$ может быть определена полностью уже в ведущем порядке теории возмущений. Действительно, как мы говорили ранее, θ - и φ -компоненты уравнения Эйлера в коре в точности совпадают с их аналогами (3.11) и (3.12) в ядре, а потому формулы (3.15) справедливы также и для коры. В то же время в случае баротропного уравнения состояния r -компонента уравнения Эйлера в ведущем порядке тео-

рии возмущений имеет следующий вид:

$$2i\sigma_r^{(0)} \sin \theta \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \theta} = -c^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p^{(1)}}{w_0} \right). \quad (3.26)$$

Подставляя в это уравнение $p^{(1)}$ из φ -компоненты уравнения Эйлера (3.12), пользуясь (3.15) и свойствами полиномов Лежандра (3.17), получаем:

$$(l+1)^2 k_l^+ \left[\frac{d}{dr} (rT_l^{(0)}) + lT_l^{(0)} \right] P_{l-1}^m(x) + l^2 k_l^- \left[\frac{d}{dr} (rT_l^{(0)}) - (l+1)T_l^{(0)} \right] P_{l+1}^m(x) = 0. \quad (3.27)$$

Легко видеть, что это уравнение непротиворечиво только при $l = m$, когда $P_{l-1}^m(x) = 0$. В этом случае мы немедленно находим:

$$T_m^{(0)}(r) = \text{const} \cdot r^m. \quad (3.28)$$

Подход к уравнениям следующего порядка в коре такой же, как и в ядре: мы подставляем разложения по полиномам Лежандра (3.16), а затем сводим задачу к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений на коэффициенты f_L . В отличие от ядра, где число членов в разложениях (3.16) оказывается конечным, в коре данные разложения не обрываются, а потому уравнения на f_L образуют бесконечную систему. Из данной бесконечной системы, однако, выделяется замкнутая подсистема уравнений, которая позволяет определить $Q_{m+1}^{(1)}$ и $\xi_{m+1}^{(1)}$. А именно, можно показать, что функции $Q_{m+1}^{(1)}$, $\xi_{m+1}^{(1)}$ и $T_m^{(0)}$ связаны алгебраическим соотношением

$$(2l+3)(l+1)\sigma^{(1)}T^{(0)} = 2(2m+1) \left[\xi_{m+1}^{(1)} + (m+2)Q_{m+1}^{(1)} \right], \quad (3.29)$$

позволяющим определить $Q_{m+1}^{(1)}$ по $\xi_{m+1}^{(1)}$ и $T_m^{(0)}$. При этом функция $T_m^{(0)}$ определяется равенством (3.28), а функция $\xi_{m+1}^{(1)}$ может быть найдена из уравнения

$$\left[r \frac{d}{dr} + (m+3) - gr \frac{c^2}{c_s^2} \right] \xi_{m+1}^{(1)} - \frac{2m+3}{2m^2(2m+1)} \left[m^2(m+1)^2 \sigma^{(1)} + \frac{8m^3 r^2}{c_s^2(m+1)^2(2m+3)} \right] T_m^{(0)} = 0. \quad (3.30)$$

Данное уравнение, как несложно убедиться, совпадает с первым уравнением системы (3.24), и может быть записано в следующем упрощенном виде:

$$\left[\frac{d}{dr} + g_1^{\text{Newt}} \right] \xi_{m+1}^{(1)} + \left[g_{21}^{\text{Newt}} \sigma^{(1)} + g_{22}^{\text{Newt}} \right] T_m^{(0)} = 0, \quad (3.31)$$

где мы ввели (вместо $C_{1,2,3}^{\text{Newt}}$) вспомогательные коэффициенты

$$g_1^{\text{Newt}}(r) = \frac{m+3}{r} - g(r) \frac{c^2}{c_s^2(r)} \quad (3.32)$$

$$g_{21}^{\text{Newt}}(r) = -\frac{(m+1)^2(2m+3)}{2r(2m+1)} \quad (3.33)$$

$$g_{22}^{\text{Newt}}(r) = -\frac{4mr}{c_s^2(r)(m+1)^2(2m+1)}. \quad (3.34)$$

Легко видеть, что уравнение (3.31) может быть решено аналитически:

$$\xi_{m+1}^{(1)}(r) = \frac{1}{\eta^{\text{Newt}}(r)} \left\{ \xi_0 + \int_r^R \left[g_{21}^{\text{Newt}} \sigma^{(1)} + g_{22}^{\text{Newt}} \right] \eta^{\text{Newt}} T_m^{(0)} dr \right\}, \quad (3.35)$$

где $\xi_0 = \xi_{m+1}^{(1)}(R)$ – постоянная интегрирования, а функция η^{Newt} равна

$$\eta^{\text{Newt}}(r) \equiv \exp\left(-\int_r^R g_1^{\text{Newt}} dr\right). \quad (3.36)$$

Таким образом, мы получили выражения (3.28) и (3.35) для тороидальной функции $T_m^{(0)}(r)$ и радиального смещения $\xi_{m+1}^{(1)}(r)$ в коре звезды. Найденные решения, однако, определены не полностью, поскольку содержат два неизвестных параметра – константу интегрирования ξ_0 и поправку к частоте $\sigma^{(1)}$. Они определяются граничными условиями, к обсуждению которых мы и приступаем.

Граничные условия и определение поправки к частоте ньютоновских g -мод

В данном разделе мы сосредоточимся на обсуждении $l = m$ r -мод, поскольку, как мы упоминали ранее, именно этот сценарий представляет собой особый интерес. В этом случае задача о моделировании r -мод сводится к решению системы дифференциальных уравнений (3.24) в ядре звезды и (решенного

в предыдущем разделе) уравнения (3.31) в ее коре. Данные уравнения не могут рассматриваться независимо, поскольку они связаны друг с другом через общую поправку к частоте $\sigma^{(1)}$ и граничные условия.

Во-первых, на границе кора-ядро, $r = r_{cc}$, мы требуем непрерывности потоков энергии и импульса, что, как можно показать, приводит к следующим условиям сшивки:

$$T_{m,\text{core}}^{(0)}(r_{cc}) = T_{m,\text{crust}}^{(0)}(r_{cc}), \quad \xi_{m+1,\text{core}}^{(1)}(r_{cc}) = \xi_{m+1,\text{crust}}^{(1)}(r_{cc}). \quad (3.37)$$

Здесь и далее метки «core» и «crust» указывают на значения решений в ядре или в коре звезды, соответственно. *Во-вторых*, мы требуем, чтобы решение было регулярным (не расходилось) в центре звезды. Выполнение данного требования обеспечивается условием сшивки решения системы (3.24) в ядре с его регулярной асимптотикой $T_{m,\text{core}}^{(0)} \simeq r^m$, которое может быть записано в виде

$$\frac{d}{dr} T_m^{(0)} = \frac{m}{r} T_m^{(0)} \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0. \quad (3.38)$$

В-третьих, мы требуем, чтобы на возмущенной поверхности звезды давление обращалось в ноль, что приводит нас к последнему граничному условию:

$$\xi_{m+1,\text{crust}}^{(1)}(R) = -\frac{4mRe^{-2\nu(R)}}{(m+1)^2(2m+1)c^2g(R)} T_{m,\text{crust}}^{(0)}(R). \quad (3.39)$$

В силу линейности уравнений амплитуда r -моды остается неопределенной, поэтому далее, если не оговорено обратное, мы будем нормировать решения условием $T_{m,\text{crust}}^{(0)}(R) = R = 1$ (в безразмерных единицах $R = 1$).

Перечисленные граничные условия могут выполняться *одновременно* только для определенных значений поправки $\sigma^{(1)}$. Именно эти значения и отвечают глобальным r -модам, затрагивающим как ядро, так и кору нейтронной звезды. Соответствующие разным значениям $\sigma^{(1)}$ решения уравнений удобно различать по количеству узлов тороидальной функции $T_m^{(0)}(r)$, то есть по числу точек внутри звезды, где $T_m^{(0)}(r) = 0$. При этом из данных решений часто выделяют *фундаментальную* r -моду, для которой, по определению, $T_m^{(0)}(r)$ не содержит узлов. Мы приведем конкретные примеры ньютоновских r -мод чуть позже в разделе 3.4.1, когда будем сравнивать результаты ньютоновской теории с результатами релятивистских расчетов.

3.3 R-моды в общей теории относительности

В этом разделе мы обсуждаем трудности, возникающие при попытках моделирования релятивистских r -мод стандартным методом, а затем предлагаем альтернативный метод описания данных колебаний, позволяющий получить релятивистские обобщения уравнений ньютоновских r -мод.

3.3.1 Релятивистские уравнения колебаний

Как обсуждалось в разделе 1.2.1, релятивистские уравнения колебаний в приближении Каулинга имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \Lambda^2 \sigma_r^2 \xi^\mu - 2i\sigma_r \Lambda \xi^\rho \nabla_\rho u^\mu = c^2 \left(\frac{1}{w_0} \perp \nabla^\mu \delta p - \frac{\delta w}{w_0^2} \perp \nabla^\mu p_0 \right) \\ \Delta p + \gamma p_0 \perp \nabla_\rho \xi^\rho = 0 \\ \Delta \varepsilon + w_0 \perp \nabla_\rho \xi^\rho = 0, \end{cases} \quad (3.40)$$

где красное смещение Λ и равновесная 4-скорость u^μ определены равенством (1.38), ∇_ρ обозначает ковариантную производную, ассоциированную с метрикой $g_{\mu\nu}$ медленно вращающейся звезды (1.37), а ортогональная производная $\perp \nabla^\rho$ определена равенствами

$$\perp \nabla^\rho \equiv \perp^{\rho\mu} \nabla_\mu, \quad \perp^{\mu\rho} \equiv g^{\mu\rho} + u^\mu u^\rho. \quad (3.41)$$

Первое уравнение (3.40) представляет собой линеаризованное релятивистское уравнение Эйлера, а второе и третье выводятся из линеаризованных релятивистских уравнений непрерывности с использованием термодинамических соотношений и уравнения состояния. Далее для краткости мы будем называть эти уравнения *первым и вторым уравнениями непрерывности*, соответственно.

Как и в ньютоновской теории, в баротропном веществе в силу равенства (1.65) правая часть уравнения Эйлера сводится к чистому ортогональному градиенту, уравнения непрерывности становятся эквивалентными, и система уравнений, описывающая колебания, сводится к следующей:

$$\begin{cases} \Lambda^2 \sigma_r^2 \xi^\mu - 2i\sigma_r \Lambda \xi^\rho \nabla_\rho u^\mu = c^2 \perp \nabla^\mu \left(\frac{\delta p}{w_0} \right) \\ \Delta p + \gamma p_0 \perp \nabla_\rho \xi^\rho = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Напомним, что только три компоненты уравнения Эйлера из четырех являются линейно независимыми [см. обсуждение после (1.57)], а потому в дальнейшем мы можем ограничиться рассмотрением только его пространственных компонент. Также напомним, что компоненты лагранжева смещения связаны условием калибровки (1.52) $u_\mu \xi^\mu = 0$, которое может быть использовано для исключения из уравнений компоненты ξ^t . При этом из условия калибровки следует, что $\xi^t \rightarrow 0$ при $\Omega \rightarrow 0$. Наконец, как и в ньютоновской теории, нам будет удобно вместо компонент ξ^θ и ξ^φ лагранжева смещения ввести функции Q и T, определенные в точности так же, как и ранее (1.230):

$$\xi^\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right], \quad \xi^\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \right]. \quad (3.43)$$

Чисто тороидальным смещением ξ^μ мы будем называть такое, для которого $\xi^r = Q = 0$, а $T \neq 0$. При этом ξ^t для чисто тороидального поля не обязано обращаться в ноль и определяется из упомянутого выше условия калибровки. Пользуясь формулами (1.23) и (1.55) легко показать, что 4-дивергенция $\nabla_\mu \xi^\mu$ и ортогональная 4-дивергенция ${}^\perp \nabla_\mu \xi^\mu$ чисто тороидального смещения обращаются в ноль при $\Omega \rightarrow 0$.

3.3.2 Проблема непрерывного спектра r-мод

Попробуем найти решение релятивистских уравнений колебаний в виде r-мод, то есть будем искать квазитороидальные колебания, частота которых исчезает при $\Omega \rightarrow 0$. Как и в ньютоновской теории, уравнения колебаний с $\sigma_r \propto \Omega$ содержат Ω только в четных степенях, а потому кажется естественным искать решение в виде таких же разложений (3.6)-(3.8) по Ω^2 , что использовались в ньютоновской теории. Попробуем действовать аналогично, то есть подставим данные разложения и будем исследовать уравнения по теории возмущений, как обсуждалось в разделе 3.2.1.

Рассмотрим, например, колебания в небаротропном веществе, описываемые системой (3.40). В ведущем порядке теории возмущений уравнения непрерывности выполняются тождественно, поскольку 4-дивергенция чисто тороидального поля стремится к нулю при $\Omega \rightarrow 0$. При этом θ - и φ -компоненты уравнения Эйлера в ведущем порядке теории возмущений приобретают следующий

вид [ср. с ньютоновскими аналогами (3.11)-(3.12)]:

$$\frac{im\sigma_r^{(0)2}}{\sin\theta}T^{(0)} - 2i\sigma_r^{(0)}[1-\omega]\cos\theta\frac{\partial T^{(0)}}{\partial\theta} = \frac{c^2e^{2\nu}}{w_0r}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial\theta} \quad (3.44)$$

$$-\sigma_r^{(0)2}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial\theta} + 2m\sigma_r^{(0)}[1-\omega]\operatorname{ctg}\theta T^{(0)} = \frac{imc^2e^{2\nu}}{w_0r}\frac{p^{(1)}}{\sin\theta}, \quad (3.45)$$

где, напомним, функция $\omega(r)$ описывает эффект увлечения и.с.о. (см. раздел 1.2.2). Выражая $p^{(1)}$ из второго уравнения и подставляя в первое, мы получаем:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial T^{(0)}}{\partial\theta}\right] + \left\{\frac{2m[1-\omega(r)]}{\sigma_r^{(0)}} - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}T^{(0)} = 0. \quad (3.46)$$

Данное уравнение, как и рассмотренный ранее его ньютоновский аналог (3.13), практически совпадает с обобщенным уравнением Лежандра (3.14), а потому будем искать его решение в виде $T^{(0)}(r, \theta) = T_l^{(0)}(r)P_l^m(\cos\theta)$. Подставляя $T^{(0)}$ в указанном виде и пользуясь (3.14), получаем

$$\left\{\sigma_r^{(0)} - \frac{2m[1-\omega(r)]}{l(l+1)}\right\}T_l^{(0)}(r) = 0. \quad (3.47)$$

В ньютоновском пределе имеем $\omega(r) = 0$, и данное уравнение определяет *дискретный* спектр r -мод (3.15). В релятивистской теории, поскольку $\omega(r) \neq 0$, ситуация принципиально другая. В этом случае решение данного уравнения либо тривиально, либо существует точка $r = r^*$, такая что

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{2m[1-\omega(r^*)]}{l(l+1)}, \quad T_l^{(0)}(r) \sim \delta(r - r^*). \quad (3.48)$$

Поскольку $\omega(r)$ – положительная монотонно убывающая функция [69], а точка r^* может занимать любое положение внутри звезды, это означает, что для любого сочетания l и m собственные частоты $\sigma_r^{(0)}$ заполняют *непрерывную* полосу

$$\frac{2m[1-\omega(0)]}{l(l+1)} \leq \sigma_r^{(0)} \leq \frac{2m[1-\omega(R)]}{l(l+1)}. \quad (3.49)$$

К тому же выводу можно прийти, рассматривая уравнения в баротропном веществе, поскольку баротропность не влияет на использованные при выводе θ - и φ -компоненты уравнения Эйлера.

Таким образом, применение к расчету релятивистских r -мод стандартного подхода, основанного на теории возмущений по Ω , неизбежно предсказывает *непрерывность* их спектра. Впервые на эту особенность релятивистских r -мод указывается в работах Коджимы [148, 149] 1997-1998 года, где анализировались как точные линеаризованные релятивистские уравнения колебаний, учитывающие возмущений гравитационного поля, так и уравнения колебаний в приближении Каулинга. В данных работах показано, что при применении теории возмущений непрерывный спектр возникает вне зависимости от того, используется приближение Каулинга или нет. Коджима проинтерпретировал найденное решение (3.48) как резонанс в точке r^* между возмущением потока вещества и невозмущенным потоком соответствующим вращению звезды. При этом, по крайней мере в ведущем порядке теории возмущений, все значения r^* равновероятны, что и приводит к возникновению непрерывного спектра колебаний (3.49). Коджима также предположил, что некоторые «предпочтительные» резонансные точки будут отобраны при рассмотрении уравнений более высокого порядка теории возмущений. Однако последовавшие исследования таких уравнений [151, 152] показали, что подобного отбора не происходит, а в ходе их решения можно определить непрерывные поправки к непрерывному спектру (3.49). Более того, в приближении Каулинга для случая баротропного уравнения состояния эти непрерывные поправки остаются непрерывными даже в ньютоновском пределе, т.е. полученное решение, как казалось, не имело корректного аналога в ньютоновской теории.

Как показали дальнейшие исследования, в действительности возникновение непрерывного спектра при применении теории возмущений оказывается чувствительным к тому, является звездное вещество *баротропным* или *небаротропным*. Вскоре после выхода работ Коджимы было показано [153, 155], что в *баротропных звездах теория возмущений не может быть применена для изучения r -мод*, поскольку она приводит к переопределенной системе уравнений (что было упущено в работах Коджимы). Было показано, что *r -моды в баротропных звездах просто не существуют* и что релятивистским обобщением ньютоновских r -мод в баротропных звездах являются релятивистские инерционные моды с *дискретным* спектром колебаний. Тем самым было устранено обсуждавшееся выше патологическое решение, обладавшее непрерывной поправкой к частоте в ньютоновском пределе.

Для небаротропных звезд, однако, непрерывный спектр сохраняется. Было доказано [148–150], что причиной его возникновения является тот факт, что полученные Коджимой уравнения r -мод представляют собой не регулярную, а сингулярную задачу на собственные значения. Также в общем случае было показано, что найти нетривиальное решение уравнений Коджимы, полученных за рамками приближения Каулинга, возможно только в том случае, если собственная частота r -моды принимает значение в диапазоне

$$\frac{2m[1 - \omega(0)]}{l(l+1)} \leq \sigma_r^{(0)} \leq \frac{2m[1 - \omega(\infty)]}{l(l+1)}. \quad (3.50)$$

Примечательно, что этот диапазон содержит полосу частот, которая становится доступной *только* при учете возмущений гравитационного поля и не ассоциируется с непрерывным спектром (3.49):

$$\frac{2m[1 - \omega(R)]}{l(l+1)} \leq \sigma_r^{(0)} \leq \frac{2m[1 - \omega(\infty)]}{l(l+1)}. \quad (3.51)$$

Оказывается [153], что для частот в данном диапазоне задача является регулярной и допускает решения с дискретным спектром, которые мы в дальнейшем будем называть *дискретными r -модами*. Дискретные r -моды были сразу же найдены [153] для модели звезды с постоянной плотностью и были предложены в качестве релятивистского обобщения ньютоновских r -мод. Примечательно, что, в отличие от ньютоновских r -мод, они возникают только в том случае, когда учитываются возмущения гравитационного поля. По этой причине авторы исследования [153] заключают, что дискретные релятивистские r -моды скорее всего не могут быть описаны в приближении Каулинга. Однако дальнейшее применение их идей к более реалистичному случаю медленно вращающихся релятивистских политропных звезд, выполненное Йошидой [165], показало, что существование дискретных r -мод зависит от значений политропного индекса (то есть от уравнения состояния вещества) и компактности звезды и что *скорее всего предложенные дискретные r -моды не существуют в типичных нейтронных звездах*. Поэтому Йошида приходит к выводу, что, возможно, стоит искать решение с дискретными частотами, «спрятанными» в полосе непрерывного спектра (3.49).

Такие скрытые дискретные моды, далее называемые *изолированными r -модами*, действительно удалось обнаружить [154]. Оказалось, что они имеют расходящиеся возмущения скорости и поэтому не могут рассматриваться как физические. Поэтому авторы исследования [154] пришли к выводу, что физические r -моды следует искать вне диапазона (3.49), что, очевидно, противоречит точке зрения Йошиды [165], изложенной нами выше. В то же время в литературе обсуждалась идея [162], что учет членов более высокого порядка по Ω в уравнениях колебаний релятивистских r -мод мог бы регуляризовать задачу и что r -моды, расходящиеся в ведущем порядке теории возмущений, на самом деле могли бы стать конечными при включении таких членов. Определение точной формы этих членов является довольно сложной задачей, которая, насколько нам известно, до сих пор не была решена.

При обсуждении происхождения непрерывного спектра выдвигались предположения [150, 153, 165], что уравнения Коджимы, на изучении которых была сосредоточена большая часть усилий, в действительности не описывают динамику «подлинных» r -мод, поскольку они не учитывают гравитационное излучение и/или диссипативные механизмы, действующие в звездном веществе. Идея заключается в том, что эти эффекты могли бы привести к появлению мнимой части в собственных частотах колебаний, что могло бы регуляризовать уравнения. Согласно существующим исследованиям, учет гравитационного излучения не регуляризует задачу [160, 161]. В то же время регуляризация, основанная на включении в теорию сдвиговой вязкости, действительно работает [163, 164]. Непрерывный спектр регуляризуется, и по мере стремления коэффициента сдвиговой вязкости к нулю те звездные модели, которые ранее не допускали решений в виде r -мод, восстанавливают их. Однако следует отметить, что при такой регуляризации поправки, связанные с вращением, неявно считаются малыми по сравнению с вязкими членами в уравнениях. В действительности в нейтронных звездах ожидается ровно противоположная ситуация.

Все вышеупомянутые исследования опираются на применение теории возмущений по Ω . Мы не нашли никаких упоминаний в литературе о том, действительно ли полученные таким образом решения уравнений с приемлемой точностью удовлетворяют *точным* релятивистским уравнениям колебаний (линеаризованным уравнениям Эйнштейна или линеаризованным уравнениям релятивистской гидродинамики, если речь о приближении Каулинга) при

малых значениях Ω . Насколько мы понимаем, нет гарантии, что решения уравнений, полученных с использованием теории возмущений, в пределе медленного вращения соответствуют настоящим релятивистским модам, являющимся решением общих уравнений колебаний. Кроме того интересно отметить, что более «честные» расчеты, не опирающиеся на теорию возмущений, как в случае баротропных [82, 156, 157, 166], так и небаротропных [76, 159] звезд, не выявляют никаких признаков непрерывной части спектра. Они успешно позволяют найти нормальные r -моды с дискретными собственными частотами, попадающими в полосу частот (3.49), ассоциирующуюся с непрерывным спектром. Этот результат кажется естественным для баротропного случая, поскольку, как уже упоминалось, в баротропных звездах релятивистским обобщением ньютоновских r -мод являются релятивистские дискретные инерционные моды. Однако для небаротропных звезд этот результат является неожиданным, поскольку он противоречит предсказаниям теории возмущений о наличии непрерывного спектра. Насколько нам известно, есть только две работы, посвященные численным расчетам r -мод в небаротропных звездах [76, 159]. В этих работах r -моды с дискретным спектром находятся даже в приближении Каулинга, в котором проблема непрерывного спектра, как кажется, стоит особенно остро.

Таким образом, попытки рассчитать релятивистские r -моды в небаротропных звездах приводят ко множеству противоречивых результатов, известных в литературе как «*проблема непрерывного спектра*». Исследования, основанные на теории возмущений по Ω , не находят релятивистского обобщения ньютоновских r -мод с дискретным спектром. Вместо дискретного спектра они предсказывают существование непрерывной полосы собственных частот (3.49), существование изолированных r -мод с дискретными частотами в пределах этой полосы и существование дискретных r -мод с собственными частотами, принимающими значения в диапазоне (3.51) за пределами этой полосы. Ни изолированные r -моды, ни дискретные r -моды не могут считаться истинным релятивистским обобщением ньютоновских r -мод: первые имеют расходящиеся возмущения скорости в ведущем порядке теории возмущений [154, 162], в то время как последние могут просто не существовать в условиях, характерных для вещества внутри нейтронных звезд [165]. Более того, в отличие от ньютоновских r -мод, они не могут быть найдены в приближении Каулинга. Вместе с этим численные исследования, не опирающиеся на теорию возмущений [76,

82, 156, 157, 166], воспроизводят r -моды с дискретным спектром, аналогичные ньютоновским. Более того, удастся найти [76, 159] релятивистские r -моды с дискретным спектром даже в приближении Каулинга. Регуляризация спектра с помощью вязкой диссипации [163, 164] – интересный результат, который, однако, не позволяет объяснить, что происходит в бездиссипативном случае.

В настоящее время не существует единого мнения, является ли наличие непрерывного спектра физическим явлением или это результат используемых предположений и упрощений. Однако тот факт, что численные расчеты, не опирающиеся на теорию возмущений, не выявляют непрерывного спектра, подсказывает, что именно ее применение и приводит к возникновению непрерывного спектра. Ниже мы разрабатываем альтернативный подход к изучению r -мод в приближении Каулинга. Он позволяет выявить ряд ранее незамеченных интересных свойств релятивистских r -мод и получить общие уравнения r -мод, являющиеся релятивистским аналогом ньютоновских уравнений. Новый подход также помогает прояснить иллюзорную природу непрерывного спектра и причины, по которым не получается описать r -моды с помощью теории возмущений, заимствованной из ньютоновской теории.

3.3.3 Уравнения релятивистских r -мод

Новый подход к моделированию r -мод

Для исследования релятивистских уравнений мы адаптируем подход, предложенный в работе [167], где математически схожая проблема возникла при исследовании ньютоновских r -мод в сверхтекучих НЗ, и непрерывный спектр возникал при попытке включения в теорию эффекта увлечения между нейтронами и протонами (см., например, [61, 98, 168]). В нашем случае аналогом этого эффекта служит эффект увлечения и.с.о.

Поскольку возникновение непрерывного спектра в стандартной теории возмущений обусловлено эффектом увлечения и.с.о $\omega(r)$, имеет смысл начать рассмотрение с упрощенного случая, когда последний можно считать слабым. Для этого мы представим метрическую функцию $\omega(r)$ в виде $\omega(r) = \epsilon \tilde{\omega}(r)$ и будем формально считать ее амплитуду $\epsilon \equiv \max \omega(r)$ малой величиной: $\epsilon \ll 1$. Данное приближение удобно тем, что оно, существенно упрощая анализ уравнений, тем не менее сохраняет проблему непрерывного спектра, поскольку формула (3.49) была получена для произвольных (в том числе и малых) значе-

ний $\omega(r)$. Кроме того, как мы увидим ниже, в пределе исчезающе медленного вращения, $\Omega \rightarrow 0$, данный подход позволяет достаточно точно оценить спектр и другие свойства релятивистских r -мод даже в случае реалистичного (не обязательно слабого) эффекта увлечения и.с.о.

Таким образом, в сделанных предположениях уравнения содержат два *независимых* малых параметра: параметр Ω^2 , связанный с вращением, и параметр ϵ , связанный со слабостью эффекта увлечения и.с.о. При этом параметр ϵ фиксируется выбранной звездной моделью [см. уравнение (1.41)], и в зависимости от скорости вращения звезды можно выделить два предельных случая: $\epsilon \ll \Omega^2$ и $\epsilon \gg \Omega^2$. *Первый предел*, $\epsilon \ll \Omega^2$, неявно предполагается в пост-ньютоновских исследованиях, когда релятивистские эффекты заведомо считаются слабыми и их влияние описывается по теории возмущений с малым параметром $\simeq 1/c^2$. Уравнения колебаний, которые можно получить в этом пределе, становятся неприменимыми при достаточно медленном вращении звезды, поскольку всегда можно подобрать такое значение Ω , что условие $\epsilon \ll \Omega^2$ нарушится. *Второй предел*, $\epsilon \gg \Omega^2$, в свою очередь, неявно предполагается при исследовании колебаний в рамках теории возмущений по Ω^2 . Этот предел «учитывает» эффект увлечения и.с.о. при любых сколь угодно медленных скоростях вращения звезды, а потому в конечном итоге именно он реализуется при достаточно медленном вращении нейтронной звезды. В дальнейшем мы будем часто говорить о пределе экстремально медленного вращения, подразумевая $\epsilon \gg \Omega^2$.

Итак, наша цель – найти решение релятивистских уравнений колебаний, которое можно было бы считать релятивистским обобщением ньютоновских r -мод. Для этого введем следующие обозначения. Пусть $f^{(0)}$ – значение, к которому стремится выбранная величина f в пределе $\Omega^2 \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$ и $\Omega^2/\epsilon \rightarrow 0$ (эффект увлечения и.с.о. учитывается при сколь угодно медленном вращении). Далее, обозначим через $f^{(1)}$ отклонения f от $f^{(0)}$, которые могут быть обусловлены как медленным вращением звезды, так и слабым увлечением и.с.о. Чтобы найти релятивистское обобщение ньютоновских r -мод, мы предлагаем искать решение уравнений в следующем виде [ср. с разложениями (3.6)-(3.8)]:

$$\sigma_r = \Omega [\sigma_r^{(0)} + \sigma^{(1)}], \quad \Gamma = (-i)[T^{(0)} + T^{(1)}], \quad (3.52)$$

$$Q = Q^{(1)}, \quad \xi^r = \xi^{(1)}, \quad (3.53)$$

$$\delta p = p^{(1)}, \quad \delta w = w^{(1)}. \quad (3.54)$$

Здесь мы учли квазитороидальность r -мод, положив $Q^{(0)} = \xi^{(0)} = 0$, а малость возмущений δp и δw в пределе $\Omega^2 \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$ и $\Omega^2/\epsilon \rightarrow 0$ следует, как и в ньютоновской теории, из первого и второго уравнений непрерывности. Отметим, что слагаемые $f^{(1)}$ в разложениях (3.52)-(3.54) учитывают влияние как медленного вращения звезды, так и слабого увлечения и.с.о. В этом заключается главная особенность нашего подхода – мы не рассматриваем малые поправки $f^{(1)}$ за счет ϵ или Ω^2 по отдельности, а учитываем их *одновременно*. Следует также подчеркнуть, что мы заранее не постулируем никакой конкретной зависимости величин $f^{(1)}$ от ϵ и Ω , а лишь считаем, что $f^{(1)}$ малы при $\Omega^2 \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$ и $\Omega^2/\epsilon \rightarrow 0$. Этот подход существенно отличается от того, что предлагается стандартной теорией возмущений, которая неявно предполагает, что величины $f^{(1)}$ могут быть представлены в виде рядов по малым параметрам. В нашем же подходе зависимость $f^{(1)}$ от ϵ и Ω неизвестна и должна быть установлена в ходе анализа уравнений колебаний.

По определению, слагаемые вида $f^{(0)}$ соответствуют решению уравнений в пределе $\Omega^2 \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$ и $\Omega^2/\epsilon \rightarrow 0$. Чтобы получить данные уравнения, необходимо подставить разложения (3.52)-(3.54) в общие уравнения колебаний и затем устремить $\Omega^2 \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$, $\Omega^2/\epsilon \rightarrow 0$ и $f^{(1)} \rightarrow 0$. Слагаемые $f^{(0)}$ вместе с полученными таким образом уравнениями мы отнесем к *ведущему порядку* теории². Далее, слагаемые $f^{(1)}$ и уравнения для их определения мы отнесем к *следующему порядку* теории. Чтобы получить эти уравнения, мы предлагаем воспользоваться следующей схемой:

- 1) Подставляем решение в виде (3.52)-(3.54) в общие уравнения колебаний и упрощаем их, пользуясь уравнениями ведущего порядка.
- 2) Упрощаем полученные уравнения, пользуясь следующим «правилом отбора»: если в каком-либо уравнении присутствует слагаемое f , то в этом же уравнении можно пренебречь слагаемыми ϵf и $\Omega^2 f$.

Ниже мы применяем описанный подход для описания релятивистских r -мод в баротропной коре и небаротропном ядре нейтронной звезды. Как и ранее, для простоты мы пренебрегаем сплюснутостью звезды, то есть не учитываем слагаемыми $O(\Omega^2)$ в метрике (1.37) и красном смещении Λ (1.38), а также считаем равновесные термодинамические величины $f_0(r)$ зависящими только от r .

²Отметим, однако, что термин «порядок» в нашем случае определен неточно, поскольку мы одновременно рассматриваем два различных малых параметра.

Уравнения релятивистских g -мод в ядре звезды

Начнем рассмотрение с небаротропного ядра НЗ, в котором колебания описываются системой (3.40). В качестве первого шага сведем эту систему к трем уравнениям на функции ξ^r , Q и T . Для этого сначала мы воспользуемся r -компонентой уравнения Эйлера, чтобы исключить возмущение плотности энтальпии δw , а затем – φ -компонентой уравнения Эйлера, чтобы исключить возмущение давления δp . В результате мы получаем θ -компоненту уравнения Эйлера и два уравнения непрерывности, которые образуют искомую замкнутую систему уравнений для ξ^r , Q и T . Мы не приводим явный вид этих уравнений, так как на данном этапе они весьма громоздки и малоинформативны.

В ведущем порядке теории уравнения непрерывности выполняются тождественно, а θ -компонента уравнения Эйлера сводится к уравнению для $T^{(0)}$ точно такого же вида, как для ньютоновских r -мод [ср. с уравнением (3.13)]:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial T^{(0)}}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{2m}{\sigma_r^{(0)}} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] T^{(0)} = 0. \quad (3.55)$$

Таким образом, в ведущем порядке мы «восстанавливаем» традиционный дискретный спектр r -мод и угловую зависимость тороидальной функции (3.15):

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{2m}{l(l+1)}, \quad T^{(0)}(r, x) = T_l^{(0)}(r) P_l^m(x), \quad x = \cos \theta. \quad (3.56)$$

Теперь перейдем к выводу уравнений *следующего порядка*. Следуя описанной схеме, мы подставляем (3.52)-(3.54) в общие уравнения колебаний (два уравнения непрерывности и θ -компонента уравнения Эйлера), пользуемся уравнениями ведущего порядка (3.55)-(3.56), а затем упрощаем результат, с помощью правил отбора $\epsilon f \ll f$ и $\Omega^2 f \ll f$. Наконец, в полученные таким образом уравнения мы подставляем разложения по полиномам Лежандра

$$f^{(1)} = \sum_{L \geq m} f_L^{(1)}(r) P_L^m(x), \quad (3.57)$$

и, пользуясь уравнением Лежандра (3.14) и свойствами полиномов Лежандра (3.17), приводим уравнения к такому виду, в котором зависимость от переменной x содержится только в виде линейной комбинации полиномов Лежандра. В результате, после подстановки разложений (3.57) каждое из трех уравнений

следующего порядка может быть формально записано в следующем виде

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_{l-2}(r)P_{l-2}^m(x) + \mathcal{A}_{l-1}(r)P_{l-1}^m(x) + \mathcal{A}_l(r)P_l^m(x) + \\ & + \mathcal{A}_{l+1}(r)P_{l+1}^m(x) + \mathcal{A}_{l+2}(r)P_{l+2}^m(x) + \sum_{L \geq m} \mathcal{B}_L(r)P_L^m(x) = 0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

где $\mathcal{A}_L(r)$ и $\mathcal{B}_L(r)$ – некоторые зависящие от r коэффициенты. Слагаемые $\mathcal{A}_L(r)$ возникают из тех членов в исходных уравнениях, которые содержат тороидальную функцию $T^{(0)}(r, x)$ и ее производные. Слагаемые $\mathcal{B}_L(r)$, в свою очередь, происходят от членов, которые содержат функции $f^{(1)}(r, x)$ и их производные. Приравнивая суммарные коэффициенты при одинаковых полиномах Лежандра нулю, можно получить из (3.58) уравнения двух типов:

$$\text{1-й тип:} \quad \mathcal{A}_L(r) + \mathcal{B}_L(r) = 0 \quad \text{для} \quad L \in \{l, l \pm 1, l \pm 2\} \quad (3.59)$$

$$\text{2-й тип:} \quad \mathcal{B}_L(r) = 0 \quad \text{для} \quad L \notin \{l, l \pm 1, l \pm 2\}. \quad (3.60)$$

На деле «разрешённые» значения L для уравнений 1го типа и совпадающие с ними «запрещённые» значения L для уравнений 2го типа могут отличаться от указанных, поскольку для некоторых L может выполняться $\mathcal{A}_L(r) = 0^3$.

Ряд полезных выводов о математической структуре решения можно сделать сразу, рассмотрев уравнения 2го типа [см. определение (3.19) функции g]:

$$\left[\begin{aligned} & \frac{m(L-l)(L+l+1)}{l(l+1)} T_L^{(1)} = Lk_{L+1}^+ \left[(L+2)Q_{L+1}^{(1)} + (1-rg)\xi_{L+1}^{(1)} \right] + \\ & + (L+1)k_{L-1}^- \left[(L-1)Q_{L-1}^{(1)} - (1-rg)\xi_{L-1}^{(1)} \right] \end{aligned} \right] \quad (3.61)$$

$$L \notin \{l, l \pm 2\},$$

$$\left[rw'_0 \xi_L^{(1)} + w_0 \left[r \frac{d}{dr} \xi_L^{(1)} + (2+rg+r\lambda') \xi_L^{(1)} - L(L+1)Q_L^{(1)} \right] \right] = 0 \quad (3.62)$$

$$L \notin \{l \pm 1\},$$

$$\left[rg \xi_L^{(1)} - \left(\frac{c_s}{c} \right)^2 \left[r \frac{d}{dr} \xi_L^{(1)} + (2+r\lambda') \xi_L^{(1)} - L(L+1)Q_L^{(1)} \right] \right] = 0 \quad (3.63)$$

³Рассмотрим, например, уравнение $\mathcal{A}_l(r)P_l^m(x) + \mathcal{A}_{l+2}(r)P_{l+2}^m(x) + \sum \mathcal{B}_L(r)P_L^m(x) = 0$. В этом случае уравнения 1го типа имеют вид $\mathcal{A}_L(r) + \mathcal{B}_L(r) = 0$ при $L \in \{l, l+2\}$, тогда как уравнения 2го типа дают $\mathcal{B}_L(r) = 0$ при $L \notin \{l, l+2\}$

Здесь первое уравнение получается из θ -компоненты уравнения Эйлера, а второе и третье – из первого и второго уравнений непрерывности. Отсюда легко видеть, что, как и в ньютоновской теории, ряды по полиномам Лежандра в небаротропном ядре обрываются и содержат конечное число слагаемых:

$$\xi_L^{(1)} = Q_L^{(1)} = 0 \quad \text{для} \quad L \notin \{l \pm 1\}, \quad T_L^{(1)} = 0 \quad \text{для} \quad L \notin \{l, l \pm 2\}. \quad (3.64)$$

Действительно, свойство $\xi_L^{(1)} = 0$ для $L \notin \{l \pm 1\}$ легко получить подстановкой $\xi_L^{(1)'}$ из второго уравнения непрерывности в первое. Тогда из любого из уравнений непрерывности мгновенно следует, что и $Q_L^{(1)} = 0$ для $L \notin \{l \pm 1\}$. Наконец, свойство $T_L^{(1)} = 0$ для $L \notin \{l, l \pm 2\}$ следует из уравнений 2го типа для θ -компоненты Эйлера с учетом указанных свойств $\xi_L^{(1)}$ и $Q_L^{(1)}$.

Рассмотрим теперь уравнения 1го типа. Данные уравнения не позволяют определить функцию $T_l^{(1)}(r)$ подобно тому, как уравнения ведущего порядка теории не позволяют определить функцию $T_l^{(0)}(r)$. При этом они образуют замкнутую систему, с помощью которой можно найти все оставшиеся функции $\{T_l^{(0)}, \xi_{l\pm 1}^{(1)}, Q_{l\pm 1}^{(1)}, T_{l\pm 2}^{(1)}\}$. Для записи данных уравнений нам удобно ввести следующие вспомогательные обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{mk_l^+(l^3 - 6l^2 - 8l + 8)}{2l^2(l-2)}, \quad \alpha_2 = \frac{mk_l^-(l^3 + 9l^2 + 7l - 9)}{2(l+1)^2(l+3)}, \quad (3.65)$$

$$\alpha_3 = \frac{m}{l^2(l+1)^2} \left[4m^2 - l^2(l+1)^2 + l^2(l^3 + 9l^2 + 7l - 9)k_l^-k_{l+1}^+ - \right. \\ \left. - (l+1)^2(l^3 - 6l^2 - 8l + 8)k_{l-1}^-k_l^+ \right]. \quad (3.66)$$

$$\gamma_1 = \frac{l^4k_l^-k_{l+1}^+ + (l+1)^4k_{l-1}^-k_l^+}{l^2(l+1)^2}, \quad (3.67)$$

$$\gamma_2 = \frac{2m^2 [3m^3 + 29m^2\sigma^{(0)} + 2m(16\sigma^{(0)2} - 1) + 6\sigma^{(0)}(\sigma^{(0)2} - 4)]}{(2l-1)(2l+3)(m + \sigma^{(0)})^2}, \quad (3.68)$$

$$g(r) = -\frac{p'_0(r)}{w_0(r)} = \nu'(r), \quad A(r) = \frac{w'_0(r)}{w_0(r)} + g(r) \left[1 + \frac{c^2}{c_s^2(r)} \right] \quad (3.69)$$

$$F(r) = 2r \left[\lambda'(r) - g(r) \frac{c^2}{c_s^2(r)} \right] + 5, \quad (3.70)$$

где $\sigma^{(0)} \equiv \sigma_r^{(0)} - m$, $\nu(r)$ и $\lambda(r)$ – метрические функции (1.37), а $g(r)$ и $A(r)$ – гравитационное ускорение и дискриминант Шварцшильда (3.19).

Из θ -компоненты уравнения Эйлера получаются три уравнения 1го типа. Два из них позволяют выразить $T_{l\pm 2}^{(1)}$ через $T_l^{(0)}$, $Q_{l\pm 1}^{(1)}$ и $\xi_{l\pm 1}^{(1)}$:

$$T_{l-2}^{(1)} = -\frac{(l-2)l(l+1)k_{l-1}^+}{2m(2l-1)} \left\{ \left[(1-rg)\xi_{l-1}^{(1)} + lQ_{l-1}^{(1)} \right] + \alpha_1 e^{-2\nu} \left(\frac{\Omega r}{c} \right)^2 T_l^{(0)} \right\}, \quad (3.71)$$

$$T_{l+2}^{(1)} = \frac{l(l+1)(l+3)k_{l+1}^-}{2m(2l+3)} \left\{ \left[(rg-1)\xi_{l+1}^{(1)} + (l+1)Q_{l+1}^{(1)} \right] - \alpha_2 e^{-2\nu} \left(\frac{\Omega r}{c} \right)^2 T_l^{(0)} \right\}, \quad (3.72)$$

Несложно видеть, что эти уравнения представляют собой релятивистское обобщение уравнений (3.22)-(3.23) ньютоновской теории. Оставшееся третье уравнение сводится к алгебраической связи между функциями $T_l^{(0)}$, $\xi_{l\pm 1}^{(1)}$ и $Q_{l\pm 1}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ [l(l+1)\sigma^{(1)} + 2m\epsilon\tilde{\omega}(r)] + \alpha_3 e^{-2\nu} \left(\frac{\Omega r}{c} \right)^2 \right\} T_l^{(0)} = \\ & = (l+1)k_{l-1}^- \left[(rg-1)\xi_{l-1}^{(1)} + (l-1)Q_{l-1}^{(1)} \right] + lk_{l+1}^+ \left[(1-rg)\xi_{l+1}^{(1)} + (l+2)Q_{l+1}^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Далее, первое уравнение непрерывности приводит к двум уравнениям 1го типа:

$$\begin{aligned} & \frac{8m\Omega^2 r^2 k_l^+}{c^2 g l^2} \left\{ \frac{d}{dr} + \frac{1}{2r} (F + 2l - 3) - \frac{g}{4} (l^3 + 2l + 8) + A - \lambda' \right\} T_l^{(0)} = \\ & = e^{2\nu} \left[2(l-1)lQ_{l-1}^{(1)} - \xi_{l-1}^{(1)} (2rA + F - 1) - 2r \frac{d}{dr} \xi_{l-1}^{(1)} \right], \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} & \frac{8m\Omega^2 r^2 k_l^-}{c^2 g (l+1)^2} \left\{ \frac{d}{dr} + \frac{1}{2r} (F - 2l - 5) + \frac{g}{4} (l^3 + 3l^2 + 5l - 5) + A - \lambda' \right\} T_l^{(0)} = \\ & = e^{2\nu} \left[2(l+1)(l+2)Q_{l+1}^{(1)} - \xi_{l+1}^{(1)} (2rA + F - 1) - 2r \frac{d}{dr} \xi_{l+1}^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Наконец, уравнения 1го типа, получающиеся из второго уравнения непрерывности, позволяют выразить функции $Q_{l\pm 2}^{(1)}$ через $T_l^{(0)}$ и $\xi_{l\pm 1}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} Q_{l-1}^{(1)} = & \frac{1}{l(l-1)} \left\{ \left[r \frac{d}{dr} + \frac{1}{2} (F - 1) \right] \xi_{l-1}^{(1)} - \right. \\ & \left. - \frac{4mr^2 k_l^+ e^{-2\nu}}{l^2 c_s^2} \left[1 + \frac{l(l^2 - 2)c_s^2}{4c^2} \right] \Omega^2 T_l^{(0)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$Q_{l+1}^{(1)} = \frac{1}{(l+1)(l+2)} \left\{ \left[r \frac{d}{dr} + \frac{1}{2}(F-1) \right] \xi_{l+1}^{(1)} - \frac{4mr^2 k_l^- e^{-2\nu}}{(l+1)^2 c_s^2} \left[1 - \frac{(l^3 + 3l^2 + l - 1)c_s^2}{4c^2} \right] \Omega^2 T_l^{(0)} \right\}. \quad (3.77)$$

Несложно видеть, что эти уравнения представляют собой релятивистские обобщения уравнений (3.20)–(3.21) ньютоновской теории.

Полученные уравнения легко свести к замкнутой системе дифференциальных уравнений на $T_l^{(0)}$ и $\xi_{l\pm 1}^{(1)}$. Искомая система получается подстановкой выражений (3.76)–(3.77) для $Q_{l\pm 1}^{(1)}$ в уравнения (3.73)–(3.75), причем результат подстановки может быть преобразован к относительно компактному виду:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ l^2(l+1)^2 \left[\sigma^{(1)} + \frac{2m\epsilon\tilde{\omega}(r)}{l(l+1)} \right] + e^{-2\nu} \frac{\Omega^2 r^2}{c_s^2} \left[8m\gamma_1 + \gamma_2 \frac{c_s^2}{c^2} \right] \right\} T_l^{(0)} = \\ & = 2l^2 k_{l+1}^+ \left\{ r \frac{d}{dr} + (l+3) - gr \frac{c^2}{c_s^2} \left[1 + (l+1) \frac{c_s^2}{c^2} \right] + r\lambda' \right\} \xi_{l+1}^{(1)} + \\ & \quad + 2(l+1)^2 k_{l-1}^- \left\{ r \frac{d}{dr} - (l-2) - gr \frac{c^2}{c_s^2} \left[1 - l \frac{c_s^2}{c^2} \right] \right\} \xi_{l-1}^{(1)} \quad (3.78) \\ & \left[\frac{d}{dr} + A - \frac{l}{r} + g(l-1) \right] T_l^{(0)} + \frac{(l+1)^2 Agc^2 e^{2\nu}}{4rm\Omega^2 k_l^-} \xi_{l+1}^{(1)} = 0 \\ & \left[\frac{d}{dr} + A + \frac{l+1}{r} - g(l+2) \right] T_l^{(0)} + \frac{l^2 Agc^2 e^{2\nu}}{4rm\Omega^2 k_l^+} \xi_{l-1}^{(1)} = 0, \end{aligned} \right.$$

Легко убедиться, что в ньютоновском пределе эти уравнения воспроизводят систему (3.18), описывающую ньютоновские r -моды.

Рассмотрим в завершение этого раздела частный случай $l = m$ r -мод. В этом случае функции $Q_{l-1}^{(1)}$, $\xi_{l-1}^{(1)}$ и $T_{l-2}^{(1)}$ следует положить равными нулю, поскольку соответствующие полиномы Лежандра равны нулю при $l = m$. Также в этом случае следует игнорировать уравнения (3.71), (3.74), (3.76) и последнее уравнение системы (3.78), поскольку эти уравнения получены путём приравнивания к нулю коэффициентов перед исчезающими полиномами $P_{l-1}^m(x)$ и $P_{l-2}^m(x)$. В результате при $l = m$ система (3.78) сводится к следующей:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[C_1(r) \frac{d}{dr} + C_2(r) \right] \xi_{m+1}^{(1)}(r) + \left[\Omega^2 C_3(r) + \sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] T_m^{(0)}(r) = 0 \\ & \left[\frac{d}{dr} + G_1(r) \right] T_m^{(0)}(r) + \frac{G_2(r)}{\Omega^2} \xi_{m+1}^{(1)}(r) = 0. \end{aligned} \right. \quad (3.79)$$

Здесь вспомогательные коэффициенты $C_{1,2,3}(r)$ и $G_{1,2}(r)$ являются релятивистскими аналогами коэффициентов (3.25) и определяются равенствами

$$\begin{aligned}
C_1(r) &= -\frac{2rk_{m+1}^+}{(m+1)^2}, \\
C_2(r) &= -\frac{2k_{m+1}^+}{(m+1)^2} \left\{ (m+3) - g(r)r \frac{c^2}{c_s^2(r)} \left[1 + (m+1) \frac{c_s^2(r)}{c^2} \right] + r\lambda'(r) \right\}, \\
C_3(r) &= \frac{r^2 e^{-2\nu(r)}}{c_s^2(r)m^2(m+1)^2} \left[8m\gamma_1 + \gamma_2 \frac{c_s^2(r)}{c^2} \right], \\
G_1(r) &= A(r) + g(r)(m-1) - \frac{m}{r}, \\
G_2(r) &= \frac{A(r)g(r)c^2(m+1)^2 e^{2\nu(r)}}{4mrk_m^-}.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Далее, φ -компонента уравнения Эйлера [первого уравнения системы (3.40)] позволяет получить следующее выражение для возмущения давления:

$$\delta p(r, x) = \delta p_{m+1}(r) P_{m+1}^m(x), \tag{3.81}$$

$$\delta p_{m+1}(r) = \Omega^2 \Pi(r) T_m^{(0)}, \quad \Pi(r) = -\frac{4rme^{-2\nu} w_0}{c^2(m+1)^2(2m+1)}. \tag{3.82}$$

Наконец, уравнения (3.72) и (3.77) позволяют найти $T_{m+2}^{(1)}$ и $Q_{m+1}^{(1)}$ по известным функциям $T_m^{(0)}$ и $\xi_{m+1}^{(1)}$. С помощью системы (3.79) можно в указанных уравнениях исключить $\xi_{m+1}^{(1)}$ и $d\xi_{m+1}^{(1)}/dr$, тем самым выразив интересующие нас функции полностью через тороидальную функцию $T_m^{(0)}$ и ее производную $dT_m^{(0)}/dr$:

$$\begin{aligned}
Q_{m+1}^{(1)}(r) &= \left\{ q_1 \left[\sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] + \Omega^2 q_2(r) \right\} T_m^{(0)} + \Omega^2 q_3(r) \frac{d}{dr} T_m^{(0)}, \\
T_{m+2}^{(1)}(r) &= \left\{ t_1 \left[\sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] + \Omega^2 t_2(r) \right\} T_m^{(0)} + \Omega^2 t_3(r) \frac{d}{dr} T_m^{(0)},
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Здесь в первом уравнении мы ввели не зависящие от ϵ и Ω коэффициенты $q_{1,2,3}$:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{(2m+3)(m+1)}{2(m+2)(2m+1)} = \text{const}, \quad q_3(r) = -\frac{4rm(rg-1)e^{-2\nu}}{c^2(m+1)^2(m+2)(2m+1)Ag}, \\
q_2(r) &= -\frac{me^{-2\nu} \{ rA [r(m-1)^2g-8] + 8(rg-1)[(m-1)rg-m] \}}{2c^2(m+1)^2(m+2)(2m+1)Ag}.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Коэффициенты $t_{1,2,3}$, появившиеся во втором уравнении, в свою очередь, вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{(m+1)^3(m+3)}{2(m+2)(2m+1)(2m+3)} = \text{const}, \\
t_2(r) &= -\frac{me^{-2\nu}}{2c^2(m+1)(m+2)(2m+1)(2m+3)Ag} \times \\
&\quad \times \left\{ rA[rg(m[m(m+5)+7]+11) - 8(m+3)] + \right. \\
&\quad \left. + 8(m+3)(rg-1)[(m-1)rg - m] \right\}, \\
t_3(r) &= -\frac{4rm(m+3)(rg-1)e^{-2\nu}}{c^2(m+1)(m+2)(2m+1)(2m+3)Ag}.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Уравнения релятивистских g -мод в коре звезды

Рассмотрим теперь баротропную кору НЗ, в которой колебания описываются системой (3.42), состоящей из трех компонент уравнения Эйлера и одного уравнения непрерывности. Как и в случае ядра, можно воспользоваться φ -компонентой уравнения Эйлера, чтобы выразить возмущение давления δp через ξ^r , Q и T , а затем подставить результат в остающиеся уравнения. В результате мы получаем три уравнения – r -компоненту уравнения Эйлера, θ -компоненту уравнения Эйлера и уравнение непрерывности, – которые образуют замкнутую систему для определения ξ^r , Q и T . Мы не приводим здесь эти уравнения, поскольку они достаточно громоздки и малоинформативны.

Оказывается, что, как и в ньютоновской теории, тороидальная функция $T^{(0)}$ может быть полностью определена из уравнений *ведущего порядка*. В этом порядке смещение ξ^μ является чисто тороидальным, и уравнение непрерывности выполняется автоматически. Далее, θ -компонента уравнения Эйлера снова приводит к уравнению (3.55) и позволяет определить угловую зависимость $T^{(0)}(r, x)$ и «восстановить» стандартный спектр r -мод (3.56). Наконец, r -компонента уравнения Эйлера в ведущем порядке имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
(l+1)^2 k_l^+ \left\{ r \frac{d}{dr} T_l^{(0)} + [(l+1) - rg(l+2)] T_l^{(0)} \right\} P_{l-1}^m(x) + \\
+ l^2 k_l^- \left\{ r \frac{d}{dr} T_l^{(0)} - [l - rg(l-1)] T_l^{(0)} \right\} P_{l+1}^m(x) = 0.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Несложно видеть, что это уравнение представляет собой релятивистский аналог уравнения (3.27) ньютоновской теории. Оно непротиворечиво только при $l = m$. В этом случае, пользуясь равенством $g(r) = \nu'(r)$, получаем:

$$T_m^{(0)}(r) = \text{const} \cdot r^m e^{-(m-1)\nu(r)}. \quad (3.87)$$

Видно, что полученное решение отличается от ньютоновского (3.28) на релятивистский множитель $e^{-(m-1)\nu(r)}$.

Уравнения *следующего порядка* в коре имеют более сложный вид, чем в ядре. В ядре в нашем распоряжении были два уравнения непрерывности, которые приводили к очень схожим по математической структуре уравнениям 1го и 2го типов [см. (3.59)-(3.60)]. Это сходство приводило к тому, что разложения по полиномам Лежандра обрывались и содержали конечное число слагаемых. В коре же имеется только одно уравнение непрерывности и две компоненты уравнения Эйлера с существенно различающейся структурой. По этой причине анализ уравнений второго типа в коре звезды не выявляет обрывания в разложениях по полиномам Лежандра. Тем не менее среди уравнений первого типа, получающихся из уравнения непрерывности и θ -компоненты уравнения Эйлера, находятся два уравнения, содержащие только функции $Q_{m+1}^{(1)}$, $\xi_{m+1}^{(1)}$ и $T_m^{(0)}$ и, следовательно, образующие замкнутую подсистему:

$$\left\{ [(m+1)\sigma^{(1)} + 2\epsilon\tilde{\omega}(r)] - e^{-2\nu} \left(\frac{\Omega r}{c} \right)^2 \frac{m(m^2 - 2m - 7)}{(m+1)^2(2m+3)} \right\} T_m^{(0)} = \\ = \frac{2(2m+1)}{2m+3} \left[(1 - rg)\xi_{m+1}^{(1)} + (l+2)Q_{m+1}^{(1)} \right], \quad (3.88)$$

$$\frac{4mr^2 e^{-2\nu}}{(2m+1)(m+1)^2 c_s^2} \left[1 - \frac{(m^3 + 3m^2 + m - 1)c_s^2}{4c^2} \right] \Omega^2 T_m^{(0)} = \\ = \left[r \frac{d}{dr} - rg \frac{c^2}{c_s^2} + 2 + r\lambda' \right] \xi_{m+1}^{(1)} - (m+1)(m+2)Q_{m+1}^{(1)}. \quad (3.89)$$

Далее, выражая $Q_{m+1}^{(1)}$ из одного уравнения и подставляя во второе, мы получаем дифференциальное уравнение для определения $\xi_{m+1}^{(1)}$:

$$\left[\frac{d}{dr} + g_1 \right] \xi_{m+1}^{(1)} + \left\{ g_{21} \left[\sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] + \Omega^2 g_{22} \right\} T_m^{(0)} = 0. \quad (3.90)$$

Здесь мы ввели вспомогательные коэффициенты [ср. с (3.32)-(3.34)]

$$g_1(r) = \frac{m+3}{r} - g(r) \left[m+1 + \frac{c^2}{c_s^2(r)} \right] + \lambda'(r), \quad (3.91)$$

$$g_{21}(r) = -\frac{(m+1)^2(2m+3)}{2r(2m+1)}, \quad (3.92)$$

$$g_{22}(r) = \frac{mr \left[(m+1)(3m^2+2m-9)c_s^2(r) - 8c^2 \right] e^{-2\nu(r)}}{2c^2(m+1)^2(2m+1)c_s^2(r)}. \quad (3.93)$$

Легко видеть, что полученное уравнение является релятивистским аналогом уравнения (3.31) ньютоновской теории. Его решение может быть записано в следующем виде:

$$\xi_{m+1}^{(1)}(r) = \frac{1}{\eta(r)} \left[\xi_0 + \int_r^R \left(g_{21} \left[\sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon\tilde{\omega}}{m+1} \right] + \Omega^2 g_{22} \right) \eta T_l^{(0)} dr \right], \quad (3.94)$$

где $\xi_0 = \xi_{m+1}^{(1)}(R)$ – постоянная интегрирования, а функция $\eta(r)$ равна

$$\eta(r) \equiv \exp \left(- \int_r^R g_1(r) dr \right). \quad (3.95)$$

Таким образом, как и в ньютоновской теории, мы получили выражения (3.87) и (3.94) для тороидальной функции $T_m^{(0)}(r)$ и радиального смещения $\xi_{m+1}^{(1)}(r)$. Также с помощью φ -компоненты уравнения Эйлера можно показать, что в коре возмущение давления описывается теми же формулами (3.81)-(3.82), что и в ядре. Величины ξ_0 и $\sigma^{(1)}$ определяются из граничных условий.

Граничные условия и определение поправки к частоте г-мод в ОТО

Здесь мы снова ограничимся рассмотрением случая $l = m$, поскольку $l = m = 2$ мода является наиболее CFS-неустойчивой. Чтобы найти решение уравнений, необходимо задать три типа граничных условий: вблизи центра звезды ($r \rightarrow 0$), на границе кора-ядро ($r = r_{cc}$) и на поверхности звезды ($r = R$).

Начнем с граничных условий на поверхности звезды. По определению, поверхность звезды является поверхностью нулевого давления. Вследствие колебания поверхность звезды в каждой выбранной точке смещается от своего

равновесного положения x_s^ρ в точку $x_s^\rho + \xi_s^\rho$, где $\xi_s^\rho = \xi^\rho(x_s)$. Следовательно, условие нулевого давления на поверхности звезды имеет вид $p(x_s^\rho + \xi_s^\rho) = 0$, где $p = p_0 + \delta p$ – полное давление, учитывающее влияние рассматриваемого колебания. Легко видеть, что в случае r -мод это условие эквивалентно равенству $\Delta p_{m+1}(R) = 0$, где $\Delta p_{m+1}(r)$ – коэффициент в разложении лагранжева возмущения давления Δp по полиномам Лежандра (3.57). Пользуясь определением Δp и выражением (3.19) для гравитационного ускорения $g(r)$, получаем:

$$\Delta p = \delta p + \xi^\mu \nabla_\mu p_0 = \delta p - w_0 g \xi^r. \quad (3.96)$$

С учетом этого равенства и выражений (3.81)-(3.82) для эйлерова возмущения давления, мы приводим граничное условие на поверхности к следующему окончательному виду [ср. с ньютоновским аналогом (3.39)]:

$$\xi_{m+1, \text{crust}}^{(1)}(R) = \xi_0 = -\frac{4mR\Omega^2 e^{-2\nu(R)}}{c^2(m+1)^2(2m+1)g(R)} T_{m, \text{crust}}^{(0)}(R). \quad (3.97)$$

В дальнейшем для удобства мы всегда нормируем решение в коре таким образом, чтобы $T_{m, \text{crust}}^{(0)}(R) = R = 1$. При такой нормировке тороидальная функция в коре и граничное условие на поверхности сводятся к равенствам

$$T_{m, \text{crust}}^{(0)}(r) = R(r/R)^m e^{-(m-1)[\nu(r)-\nu(R)]}, \quad (3.98)$$

$$\xi_{m+1, \text{crust}}^{(1)}(R) = \xi_0 = -\frac{4mR^2\Omega^2 e^{-2\nu(R)}}{c^2(m+1)^2(2m+1)g(R)}. \quad (3.99)$$

Рассмотрим теперь граничные условия вблизи центра звезды. Для этого найдем асимптотическое решение системы уравнений (3.79) при $r \rightarrow 0$. Исключая $\xi_{m+1}^{(1)}$ с помощью второго уравнения этой системы и подставляя в первое, мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на функцию $T_m^{(0)}(r)$. Решение этого уравнения вблизи центра мы будем искать в виде $T_m^{(0)} \propto r^n$. Учитывая асимптотическое поведение функций вблизи центра,

$$\nu(r) \propto \tilde{\omega}(r) \propto F(r) \propto r^0, \quad A(r) \propto g(r) \propto r, \quad \lambda(r) \propto r^2, \quad (3.100)$$

мы находим, что $n = m$ либо $n = -m - 1$. Второе решение расходится при $r \rightarrow 0$ и потому является нефизичным. Действуя аналогичным образом, можно также показать, что $\xi_{m+1}^{(1)}(r) \propto T_m^{(0)}(r) \propto r^m$, причем константу пропорциональ-

ности между $T_m^{(0)}$ и $\xi_{m+1}^{(1)}$ легко определить из первого уравнения системы (3.79). В результате вблизи центра решение имеет следующую асимптотику⁴:

$$T_m^{(0)}(r) \simeq Kr^m, \quad \xi_{m+1}^{(1)}(r) \simeq \frac{(m+1)^2}{2(2m+1)} \left[\sigma^{(1)} + \frac{2\omega(0)}{m+1} \right] Kr^m, \quad (3.101)$$

где K – некоторая постоянная, определяющая амплитуду r -моды. Чтобы выделить данную физическую асимптотику от расходящейся, мы выбираем точку $r_0 \rightarrow 0$, расположенную сколь угодно близко к центру, и ставим в ней следующие граничные условия [ср. с ньютоновской формулой (3.38)]:

$$T_m^{(0)}(r_0) = 1, \quad T_m^{(0)'}(r_0) = m/r_0. \quad (3.102)$$

После того, как решение уравнений в ядре будет найдено, можно изменить его нормировку на более удобную, как обсуждается ниже.

Последнее требование, которое мы накладываем на решение уравнений – непрерывность потоков энергии и импульса на границе кора-ядро. Данные потоки определяются (t, k) - и (k, m) -компонентами тензора энергии импульса $T^{\mu\nu}$ (1.12) с пространственными индексами k и m :

$$T^{\mu\nu} = wu^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (3.103)$$

В следствие колебания граница кора-ядро в каждой выбранной точке смещается от своего равновесного положения x_{cc}^ρ в точку $x_{cc}^\rho + \xi_{cc}^\rho$, где $\xi_{cc}^\rho = \xi^\rho(x_{cc})$. Следовательно, непрерывность потоков энергии и импульса на данной границе выражается равенствами $T^{\mu\nu}(x_{cc}^\rho + \xi_{cc}^\rho)|_{\text{core}} = T^{\mu\nu}(x_{cc}^\rho + \xi_{cc}^\rho)|_{\text{crust}}$ для $(\mu\nu) = (t, k)$ или (k, m) . Легко убедиться, что эти условия эквивалентны требованиям непрерывности функций ξ^ρ , Δp и Δw (рассматриваемая звездная модель не содержит разрывов в плотности энергии). Поскольку данные функции являются не полностью независимыми, а должны подчиняться полученным уравнениям колебаний, достаточно рассмотреть требования непрерывности только для функций ξ^r и Δp , в то время как оставшиеся условия выполняются автоматически.

⁴Данная асимптотика отличается от той, что мы приводим в оригинальном исследовании [29], постоянной при множителе r^m в формуле для $\xi_{m+1}^{(1)}$. Это связано с тем, что для получения константы пропорциональности между $T_m^{(0)}$ и $\xi_{m+1}^{(1)}$ из *второго* уравнения системы (3.79), как это было сделано в оригинальной работе [29], строго говоря, необходимо учитывать поправки более высокого порядка по r в $T_m^{(0)}$. Такие поправки в оригинальном исследовании не учитывались, что привело к другому префактору перед r^m . Более аккуратное рассмотрение, учитывающее такие поправки, приводит к асимптотике, указанной в тексте.

Пользуясь соотношениями (3.96) и (3.81) можно показать, что данные условия непрерывности эквивалентны следующим:

$$T_{m,\text{core}}^{(0)}(r_{\text{cc}}) = T_{m,\text{crust}}^{(0)}(r_{\text{cc}}), \quad \xi_{m+1,\text{core}}^{(1)}(r_{\text{cc}}) = \xi_{m+1,\text{crust}}^{(1)}(r_{\text{cc}}). \quad (3.104)$$

Поскольку на данном этапе мы можем свободно выбрать нормировку решения в ядре, мы можем нормировать решение так, чтобы удовлетворить условию $T_{m,\text{core}}^{(0)}(r_{\text{cc}}) = T_{m,\text{crust}}^{(0)}(r_{\text{cc}})$. При такой нормировке граничное условие на границе кора-ядро сводится к равенству

$$\xi_{m+1,\text{core}}^{(1)}(r_{\text{cc}}) = \xi_{m+1,\text{crust}}^{(1)}(r_{\text{cc}}). \quad (3.105)$$

Всем указанным граничным условиям оказывается возможным удовлетворить не при любых, а лишь при определенных значениях поправки к частоте $\sigma^{(1)}$. Такие ее значения, при которых это возможно, соответствуют искомому глобальному решению типа r -мод.

3.4 Особенности релятивистских r -мод

В этом разделе сначала мы приводим результаты численного моделирования релятивистских и ньютоновских r -мод. Это моделирование выявляет ряд крайне необычных свойств релятивистских r -мод, и остальная часть раздела посвящена теоретическому объяснению этих свойств. Анализируя уравнения, мы показываем, что собственные функции релятивистских r -мод неаналитическим образом зависят от скорости вращения звезды, а их частоты образуют дискретный спектр. Мы также получаем явные выражения для собственных функций и спектра r -мод в пределе экстремально медленного вращения.

3.4.1 Результаты численных расчетов

Здесь мы приводим результаты численного моделирования спектра и собственных функций $l = m = 2$ r -мод. Для построения звездной модели (то есть расчета метрических функций и равновесных термодинамических величин как функций координаты r) мы интегрируем уравнения гидростатической структуры Толмана-Оппенгеймера-Волкова и уравнения Хартла [69, 169], дополненные уравнением состояния BSk24 [111]. Данное уравнение состояния

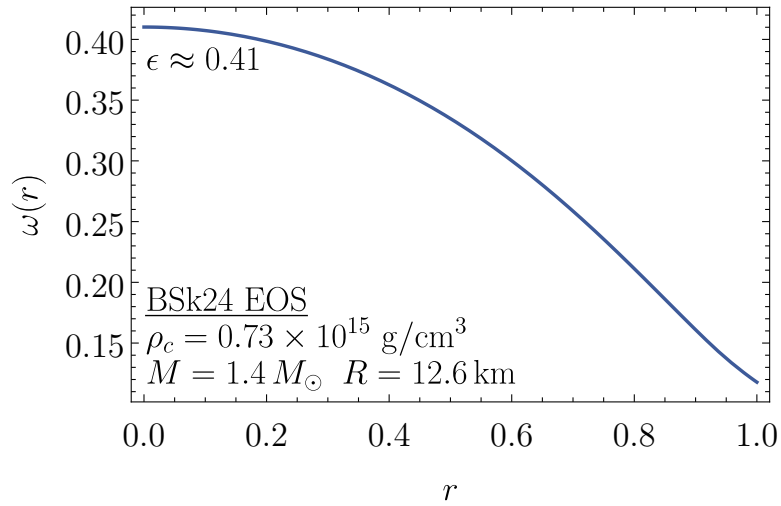


Рис. 3.1: Функция $\omega(r)$, описывающая эффект увлечения и.с.о. в рассматриваемой звездной модели.

описывает как кору, так и ядро НЗ, причем последнее разделяется на внешнее *пре*-ядро и внутреннее *прем*-ядро. Для *внешних* слоев звезды мы используем подгоночную формулу $p_0 = p_0(\rho)$ из работы [170], описывающую давление как функцию плотности в химически равновесной BSk24 коре НЗ. Термодинамические величины во *внутренних* слоях звезды, в свою очередь, рассчитываются напрямую из BSk24 функционала плотности энергии. В общем случае они зависят от набора концентраций $\{n_k\}$ различных частиц в ядре, а рассматривать их как функции единственной переменной – например, плотности вещества – становится возможным только при условии химического равновесия (см. обсуждение в разделе 1.2.2). Мы определяем границу между внутренними и внешними слоями звезды как поверхность $r = r_{cc}$, на которой равновесное давление как функция плотности, рассчитанное по формулам для внутренних слоев, совпадает с давлением, рассчитанным по формулам для внешних слоев. Таким образом, область $r > r_{cc}$ соответствует баротропной коре НЗ, а область $r < r_{cc}$ – ее небаротропному ядру (см. обсуждение модели НЗ в разделе 1.1).

Для расчета r -мод мы используем звездную модель с центральной плотностью $\rho_c = \varepsilon(0)/c^2 \approx 0.73 \times 10^{15}$ г/см³. Она обладает массой $M \approx 1.4M_\odot$, радиусом $R \approx 12.6$ км, а границе кора-ядро в ней соответствует $r_{cc} \approx 0.92$. Функция $\omega(r)$, описывающая эффект увлечения и.с.о. в данной модели, изображена на Рис. 3.1. Как видно из рисунка, данная функция монотонно возрастает к центру звезды, где достигает своего максимума $\epsilon = \max \omega(r) \approx 0.41$. Строго говоря, это значение сложно считать малым и возникает вопрос о том,

насколько точно может использоваться нами приближение слабого увлечения и.с.о., предполагающее $\epsilon \ll 1$, описывать свойства релятивистских r -мод. Как мы увидим ниже (см. Рис. 3.2-3.3), при достаточно малых скоростях вращения звезды релятивистские r -моды оказываются локализованными во внешних слоях звезды, где эффект увлечения и.с.о. существенно слабее, чем в центральных. По этой причине мы ожидаем, что, по крайней мере при медленных скоростях вращения звезды, приближение слабого увлечения инерциальных систем отсчета обеспечивает качественно правильное описание релятивистских r -мод.

Чтобы изучить влияние релятивистских эффектов на свойства r -мод, мы рассчитали их собственные функции и собственные числа $\sigma^{(1)}$ для трех разных случаев. Во-первых, мы провели моделирование релятивистских r -мод (GR). Во-вторых, чтобы исследовать влияние эффекта увлечения и.с.о., мы также рассчитали релятивистские r -моды, предварительно положив в релятивистских уравнениях $\epsilon = 0$, то есть «выключив» данный эффект (GRNO ω). В-третьих, мы рассмотрели ньютоновские r -моды (Newt). Тороидальные функции $T_m^{(0)}(r)$ рассчитанных r -мод изображены на Рис. 3.2. В каждом из трех случаев мы моделировали моды с числом узлов тороидальной функции, варьирующимся от 0 (верхний ряд) до 4х (нижний ряд). Расчеты проводились для скоростей вращения звезды $\Omega = 0.1$ (левая колонка), $\Omega = 0.05$ (центральная колонка) и $\Omega = 0.01$ (правая колонка). Соответствующие найденным r -модам значения $\sigma^{(1)}/\Omega^2$ приведены в таблице 3.1. Подчеркнем, что здесь и далее под $\sigma^{(1)}$ мы *все-гда* понимаем поправку к частоте, определенную равенством (3.52), а не (3.6), так что в выбранных обозначениях для ньютоновских r -мод $\sigma^{(1)} \propto \Omega^2$.

Мы видим, что свойства релятивистских r -мод с «выключенным» эффектом увлечения и.с.о. (GRNO ω) напоминают свойства ньютоновских r -мод (Newt). Их собственные функции $T_m^{(0)}(r)$ слабо отличаются друг от друга и не зависят от скорости вращения звезды. При этом в обоих случаях отношения $\sigma^{(1)}/\Omega^2$ не зависят от Ω , то есть $\sigma^{(1)} \propto \Omega^2$. Данное сходство ньютоновских и релятивистских r -мод с $\epsilon = 0$ легко объяснить, рассмотрев описывающие их уравнения. В ядре имеем (3.79):

$$\begin{cases} \left[C_1(r) \frac{d}{dr} + C_2(r) \right] \xi_{m+1}^{(1)}(r) + \left[\Omega^2 C_3(r) + \sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] T_m^{(0)}(r) = 0 \\ \left[\frac{d}{dr} + G_1(r) \right] T_m^{(0)}(r) + \frac{G_2(r)}{\Omega^2} \xi_{m+1}^{(1)}(r) = 0. \end{cases} \quad (3.106)$$

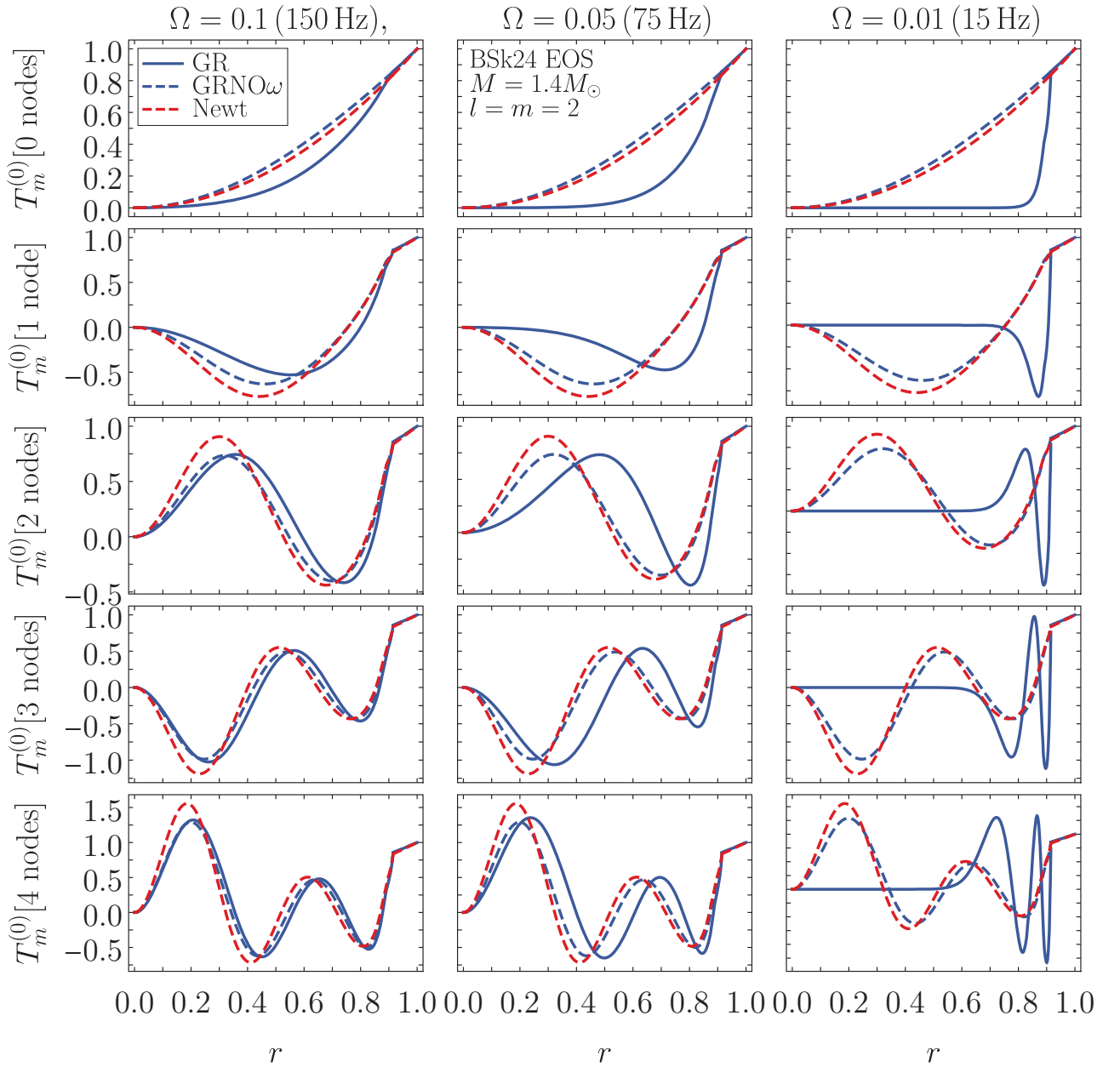


Рис. 3.2: Торoidalные функции $l = m = 2$ r -мод с числом узлов от 0 (сверху) до 4х (снизу) при скоростях вращения $\Omega = 0.1$ (слева), $\Omega = 0.05$ (по центру) и $\Omega = 0.01$ (справа). Рассмотрены ньютоновские (Newt) и релятивистские моды с выключенным (GRNO ω) и включенным (GR) эффектом увлечения и.с.о.

Число узлов	Newt (любая Ω)	GRNO ω (любая Ω)	GR ($\Omega = 0.1$)	GR ($\Omega = 0.05$)	GR ($\Omega = 0.01$)
0	-0.096	-0.124	-14.4	-0.529×10^2	-1.08×10^3
1	-7.94	-13.8	-32.4	-0.830×10^2	-1.30×10^3
2	-16.2	-29.6	-49.2	-1.09×10^2	-1.46×10^3
3	-27.1	-50.8	-70.9	-1.33×10^2	-1.63×10^3
4	-40.97	-77.9	-98.4	-1.61×10^2	-1.79×10^3

Таблица 3.1: Собственные частоты $\sigma^{(1)}/\Omega^2$ для r -мод на Рис. 3.2.

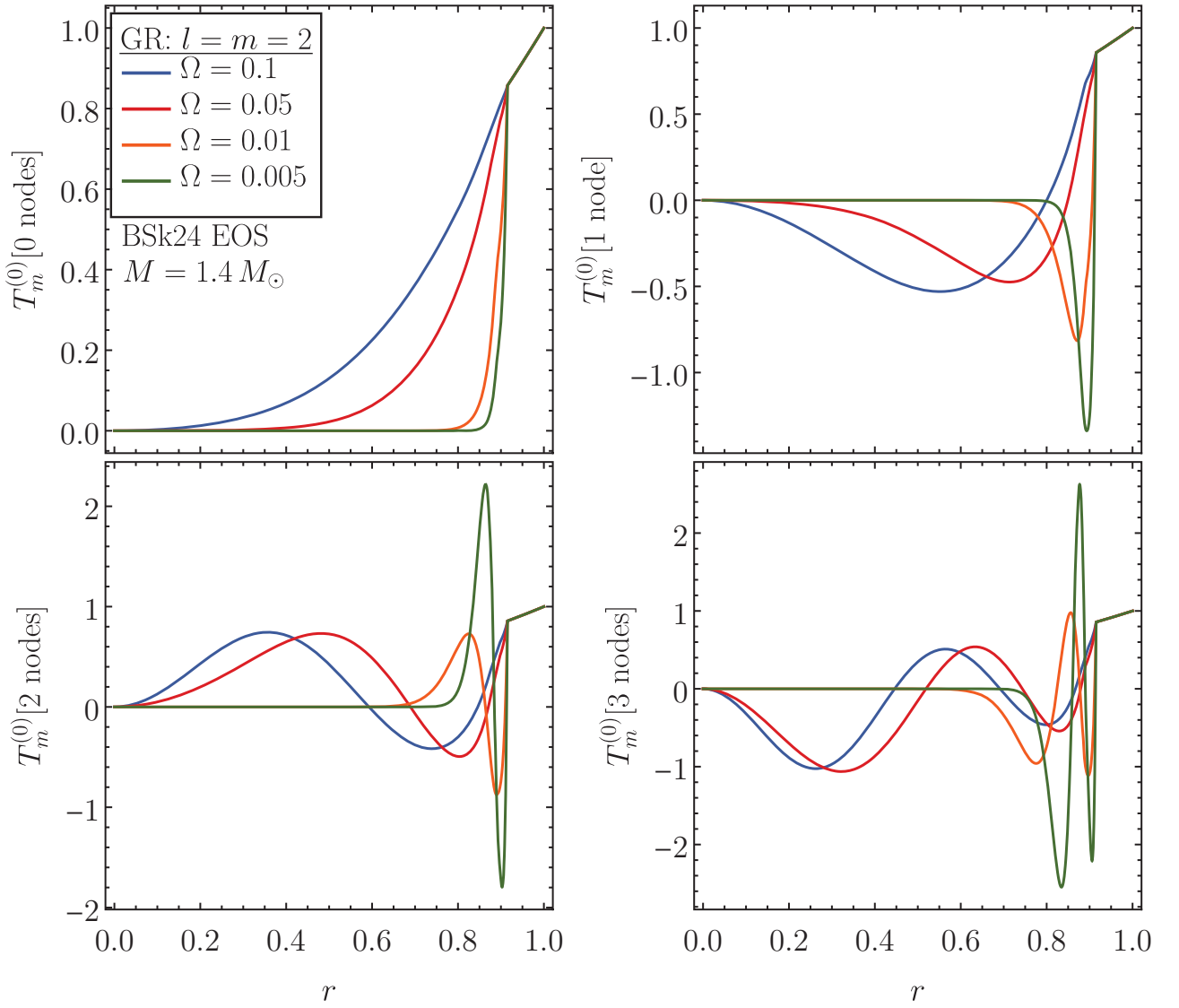


Рис. 3.3: Тороидальные функции релятивистских r -мод с числом узлов, варьирующимся от 0 до 3х. Разными цветами показаны результаты расчетов для разных скоростей вращения звезды, варьирующихся от $\Omega = 0.1$ до $\Omega = 0.005$.

Легко видеть, что, если в данной системе положить $\epsilon = 0$ (то есть выкинуть подчеркнутое слагаемое), то для релятивистских r -мод станет применим стандартный ордеринг (3.9). Действительно, после замены $\sigma^{(1)} \rightarrow \Omega^2 \sigma^{(1)}$ и $\xi_{m+1}^{(1)} \rightarrow \Omega^2 \xi_{m+1}^{(1)}$ скорость вращения Ω полностью исчезает из уравнений. Аналогично обстоит ситуация с решением уравнений в коре [см. уравнения (3.87) и (3.94)] и с граничными условиями [см. уравнения (3.98)-(3.99), (3.102) и (3.105)]. Таким образом, указанная замена приводит к исчезновению скорости вращения звезды из уравнений и граничных условий. Именно поэтому отношения $\sigma^{(1)}/\Omega^2$ и тороидальные функции релятивистских r -мод с $\epsilon = 0$ оказываются независимыми от Ω .

Из Рис. 3.2 также видно, что включение эффекта увлечения и.с.о. существенно модифицирует свойства r -мод: их тороидальные функции и поправки $\sigma^{(1)}/\Omega^2$ становятся крайне чувствительными к значению Ω . Данный эффект отдельно проиллюстрирован на Рис. 3.3, где представлены тороидальные функции релятивистских r -мод (GR) для скоростей вращения, варьирующихся от $\Omega = 0.1$ до $\Omega = 0.005$. Видно, что по мере уменьшения скорости вращения r -моды в ядре звезды постепенно подавляются и при $\Omega \lesssim 0.01$ оказываются локализованными вблизи границы кора-ядро (где, отметим, справедливо приближение слабого увлечения и.с.о.). Кроме того, как видно из таблицы 3.1, отношение $\sigma^{(1)}/\Omega^2$ для релятивистских r -мод сильно зависит от Ω . Объяснение столь нестандартного поведения r -мод требует тщательного анализа уравнений релятивистских r -мод, которому посвящен следующий раздел.

3.4.2 Неаналитичность и ордеринг r -мод в ОТО

Неаналитичность и ордеринг релятивистских r -мод в ядре звезды

Система уравнений (3.78) описывает динамику релятивистских r -мод в ядре НЗ в пределе слабого увлечения и.с.о. и медленного вращения, а r -моды в коре НЗ в тех же приближениях определяются равенствами (3.87) и (3.94). При выводе данных уравнений мы не постулировали никакой конкретной зависимости $\sigma^{(1)}$ и $\xi_{m+1}^{(1)}$ от параметров ϵ и Ω^2 , а использовали лишь предположение, что эти параметры являются малыми. Если предположить, что ордеринг релятивистских r -мод совпадает с ньютоновским, то есть $\sigma^{(1)} \propto \Omega^2$ и $\xi_{m+1}^{(1)} \propto \Omega^2$, то, как легко видеть, при устремлении $\Omega \rightarrow 0$ в первом уравнении системы (3.78) мы сразу же приходим к непрерывному спектру и резонансным собственным функциям (3.48). Однако численное решение данной системы не выявляет никаких признаков непрерывного спектра и характеризуется дискретными собственными частотами и регулярными собственными функциями. Следовательно, решение данных уравнений не подчиняется стандартному ордерингу r -мод. Представляет интерес выяснить, какой истинный вид имеет ордеринг релятивистских r -мод в пределе медленного вращения.

Поскольку мы имеем дело с двумя малыми параметрами, ϵ и Ω^2 , необходимо различать ордеринг по Ω (Ω -ордеринг) и ордеринг по ϵ (ϵ -ордеринг). Тот факт, что некоторая величина f является величиной порядка d_1 по ϵ и величиной порядка d_2 по Ω , мы будем обозначать как $f \sim \epsilon^{d_1} \Omega^{d_2}$. При этом подчерк-

нем, что величина f в общем случае может нетривиальным образом зависеть от ϵ и Ω , и запись $f \sim \epsilon^{d_1} \Omega^{d_2}$ в общем случае вовсе не означает, что данная зависимость сводится к простой пропорциональности $f \propto \epsilon^{d_1} \Omega^{d_2}$. Мы также будем использовать соотношения вида $f_1 \sim \epsilon^{d_1} \Omega^{d_2} f_2$, чтобы обозначить, что величина f_1 отличается от величины f_2 по порядку как $\epsilon^{d_1} \Omega^{d_2}$. Опять же, данная запись вовсе не обязательно означает, что f_1 отличается от f_2 на множитель $\epsilon^{d_1} \Omega^{d_2}$. В действительности сами f_1 и f_2 могут нетривиальным образом зависеть от ϵ и Ω .

Итак, начнем с определения истинного ордеринга релятивистских r -мод в ядре звезды. Для этого нам достаточно ограничиться случаем $l = m$ мод (рассмотрение более общего случая $l \neq m$ проводится полностью аналогично), которые описываются системой (3.79):

$$\begin{cases} \left[C_1(r) \frac{d}{dr} + C_2(r) \right] \xi_{m+1}^{(1)}(r) + \left[\Omega^2 C_3(r) + \sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon \tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] T_m^{(0)}(r) = 0 \\ \left[\frac{d}{dr} + G_1(r) \right] T_m^{(0)}(r) + \frac{G_2(r)}{\Omega^2} \xi_{m+1}^{(1)}(r) = 0. \end{cases} \quad (3.107)$$

Напомним, что коэффициенты $C_{1,2,3}(r)$ и $G_{1,2}(r)$ определены равенствами (3.80) и не зависят от ϵ и Ω . Также напомним, что величины $f^{(1)}$ являются малыми из-за слабого увлечения и.с.о. и/или медленного вращения звезды.

Прежде всего отметим, что в пределе $\Omega \rightarrow 0$ ведущий вклад в поправку $\sigma^{(1)}$ к частоте определяется эффектом увлечения и.с.о. (всевозможные вклады, связанные с вращением, становятся пренебрежимо малыми). Поскольку данная поправка и функция $\tilde{\omega}(r)$ входят в уравнения *только* в комбинации $[\sigma^{(1)} + 2\epsilon \tilde{\omega}(r)/(m+1)]$, мы заключаем, что в рассматриваемом пределе $\sigma^{(1)} \sim \epsilon$. С учетом этого мы предлагаем искать ордеринг r -мод в следующем виде:

$$\sigma^{(1)} \sim \epsilon, \quad \xi_{m+1}^{(1)} \sim \epsilon^{k_1} \Omega^{k_2} T_m^{(0)}, \quad \frac{d}{dr} \sim \epsilon^{d_1} \Omega^{d_2}. \quad (3.108)$$

Последнее соотношение следует понимать следующим образом: действие производной d/dr на собственные функции r -мод эффективно приводит к изменению порядка этих функций на $\epsilon^{d_1} \Omega^{d_2}$. Отличие показателей d_1 и/или d_2 от нуля в общем случае указывает на то, что рассматриваемые собственные функции неаналитичным образом зависят от ϵ и/или Ω . Если же рассматриваемые функции аналитичны по ϵ и/или Ω , то соответствующие показатели d_1 и/или d_2

обращаются в ноль⁵. Также необходимо отметить, что, как мы увидим ниже, в действительности *полные* собственные функции r -мод и поправка $\sigma^{(1)}$ содержат дополнительные вклады более высоких порядков по Ω , в том числе начиная с линейного. Эти вклады пренебрежимо малы и не учитываются в пределе $\Omega \rightarrow 0$. В этом разделе, если не оговорено обратное, под $T_m^{(0)}$, $\xi_{m+1}^{(1)}$ и $\sigma^{(1)}$ мы подразумеваем ведущие вклады в соответствующие величины в пределе $\Omega \rightarrow 0$.

Чтобы определить показатели $d_{1,2}$ и $k_{1,2}$ в ордеринге (3.108), удобно произвести следующие подстановки в уравнения r -мод:

$$\sigma^{(1)} = \epsilon \sigma^{(10)}, \quad \sigma^{(10)} \sim 1, \quad (3.109)$$

$$\xi_{m+1}^{(1)} = \epsilon^{k_1} \Omega^{k_2} X, \quad X \sim T_m^{(0)}, \quad (3.110)$$

$$\frac{d}{dr} = \epsilon^{d_1} \Omega^{d_2} \frac{D}{Dr}, \quad \frac{D}{Dr} \sim 1. \quad (3.111)$$

В данных обозначениях система (3.107) переписывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \left[\frac{C_1(r) \epsilon^{d_1} \Omega^{d_2} D}{Dr} + C_2(r) \right] \epsilon^{k_1} \Omega^{k_2} X + \left[\Omega^2 C_3(r) + \epsilon \sigma^{(10)} + \frac{2\epsilon \tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] T_m^{(0)} = 0 \\ \left[\frac{\epsilon^{d_1} \Omega^{d_2+2} D}{Dr} + G_1(r) \Omega^2 \right] T_m^{(0)} + \frac{G_2(r) \epsilon^{k_1} \Omega^{k_2} X}{Dr} = 0. \end{cases} \quad (3.112)$$

В сделанных предположениях некоторые слагаемые в системе (3.112) могут оказаться малыми по сравнению с другими. Поскольку уравнения должны позволять найти поправку к частоте при $\Omega \rightarrow 0$, слагаемые $\sigma^{(10)}$ и $\tilde{\omega}(r)$ должны быть одного порядка хотя бы с одним из членов в первом уравнении, в то время как остальным слагаемым в этом уравнении позволяется быть пренебрежимо малыми в этом пределе. Сравнивая Ω -порядки слагаемых в первом уравнении, видим, что данному требованию можно удовлетворить двумя способами:

$$\underline{\text{1й способ (1е уравнение):}} \quad d_2 + k_2 = 0, \quad d_2 \leq 0; \quad (3.113)$$

$$\underline{\text{2й способ (1е уравнение):}} \quad k_2 = 0, \quad d_2 \geq 0. \quad (3.114)$$

Во втором же уравнении в пределе $\Omega \rightarrow 0$ хотя бы два слагаемых должны быть одного порядка и не меньше остающегося слагаемого – в противном случае

⁵Обратное утверждение, строго говоря, является неверным. Равенства $d_1 = 0$ и/или $d_2 = 0$ вовсе не обязательно означают, что рассматриваемая функция аналитична по ϵ и/или Ω . В качестве примера можно привести функцию $f(r, \epsilon, \Omega) = f_1(\epsilon, \Omega) f_2(r)$, где $f_1(\epsilon, \Omega)$ – некоторая неаналитическая функция ϵ и/или Ω , не зависящая от r , а $f_2(r)$ – некоторая независящая от ϵ и Ω функция r .

мы приходим к тривиальному решению системы. Данному условию, в свою очередь, можно удовлетворить тремя способами:

$$\underline{\text{1й способ (2е уравнение):}} \quad d_2 + 2 = k_2, \quad k_2 \leq 2; \quad (3.115)$$

$$\underline{\text{2й способ (2е уравнение):}} \quad d_2 = 0, \quad k_2 \geq 2; \quad (3.116)$$

$$\underline{\text{3й способ (2е уравнение):}} \quad k_2 = 2, \quad d_2 \geq 0. \quad (3.117)$$

Несложно убедиться, что только значения $d_2 = -1$ и $k_2 = 1$ (первые способы) одновременно удовлетворяют условиям из первого и второго уравнений. Тогда в пределе $\Omega \rightarrow 0$ в системе (3.112) выживают только подчеркнутые слагаемые, а все остальные слагаемые оказываются пренебрежимо малыми, и мы получаем:

$$\begin{cases} C_1(r)\epsilon^{d_1+k_1} \frac{D}{Dr} X + \epsilon \left[\sigma^{(10)} + \frac{2\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] T_m^{(0)} = 0 \\ \epsilon^{d_1} \frac{D}{Dr} T_m^{(0)} + \epsilon^{k_1} G_2(r) X = 0. \end{cases} \quad (3.118)$$

Чтобы решение данной системы было нетривиальным необходимо, чтобы в каждом выбранном уравнении входящие в него слагаемые были одного ϵ -порядка. Из этого условия мы мгновенно находим $d_1 = k_1 = 1/2$.

Таким образом, мы установили, что в пределе $\Omega \rightarrow 0$ истинный ордеринг релятивистских r -мод имеет вид

$$\sigma^{(1)} \sim \epsilon, \quad \xi_{m+1}^{(1)} \sim \sqrt{\epsilon} \Omega T_m^{(0)}, \quad \frac{d}{dr} \sim \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Omega}, \quad (3.119)$$

а r -моды описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \xi_{m+1}^{(1)} + \frac{\epsilon}{C_1(r)} \left[\sigma^{(10)} + \frac{2\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] T_m^{(0)} = 0 \\ \frac{d}{dr} T_m^{(0)} + \frac{G_2(r)}{\Omega^2} \xi_{m+1}^{(1)} = 0. \end{cases} \quad (3.120)$$

Далее, подставляя в первое уравнение $\xi_{m+1}^{(1)}$ из второго и удерживая только слагаемые ведущего порядка, получаем:

$$\frac{d^2}{dr^2} T_m^{(0)} - \frac{\epsilon}{\Omega^2} q_\sigma(r) T_m^{(0)} = 0, \quad q_\sigma(r) \equiv \frac{G_2(r)}{C_1(r)} \left[\sigma^{(10)} + \frac{2\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right]. \quad (3.121)$$

Чтобы понять, как может быть устроено решение данного уравнения, рассмотрим сначала простейшую «тестовую» модель, в которой $q_\sigma(r) = \text{const}$. В этом случае уравнение легко решается аналитически, и мы находим:

$$T_m^{(0)} \propto e^{\pm(\sqrt{\epsilon}/\Omega)\sqrt{q_\sigma}r} \quad \text{для } q_\sigma > 0, \quad (3.122)$$

$$T_m^{(0)} \propto \sin[(\sqrt{\epsilon}/\Omega)\sqrt{|q_\sigma|r} + \phi] \quad \text{для } q_\sigma < 0, \quad (3.123)$$

где ϕ – некоторая постоянная. Таким образом, решение задачи в рамках тестовой модели оказывается неаналитической функцией ϵ и Ω , то есть оно принципиально не может быть разложено в ряд Тейлора вблизи $\epsilon = 0$ и $\Omega = 0$. Из-за данной неаналитичности собственные функции r -мод под действием оператора d/dr производят множитель $\sqrt{\epsilon}/\Omega$. Такое поведение – наглядная иллюстрация того, что мы понимаем под записью $d/dr \sim \sqrt{\epsilon}/\Omega$. Хотя предлагаемая интерпретация обозначения $d/dr \sim \sqrt{\epsilon}/\Omega$ основана на рассмотрении упрощенной тестовой модели, она, как будет показано в разделе 3.4.3, оказывается правильной и в общем случае, когда функция $q_\sigma(r) \neq \text{const}$.

Далее нам будет удобно вместо скорости вращения Ω пользоваться величиной $\kappa \equiv \Omega/\sqrt{\epsilon}$, поскольку, как видно из установленного ордеринга и решения уравнений в рамках тестовой модели, неаналитичность r -мод по ϵ и Ω является следствием их неаналитичности по единственному параметру κ . В данных обозначениях переход к пределу медленного вращения $\Omega \rightarrow 0$ соответствует пределу $\kappa \rightarrow 0$, а ордеринг (3.119) ведущих вкладов в спектр и собственные функции релятивистских r -мод в этом пределе приобретает следующий вид:

$$\sigma^{(1)} \sim \epsilon, \quad \xi_{m+1}^{(1)} \sim \epsilon\kappa T_m^{(0)}, \quad \frac{d}{dr} \sim \frac{1}{\kappa}, \quad \kappa \equiv \frac{\Omega}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (3.124)$$

Из этих соотношений и формул (3.83) мы сразу же получаем, что

$$Q_{m+1}^{(1)} \sim \epsilon T_m^{(0)}, \quad T_{m+2}^{(1)} \sim \epsilon T_m^{(0)}. \quad (3.125)$$

Таким образом, в ОТО из-за неаналитичности малость функций $Q_{m+1}^{(1)}$ и $T_{m+2}^{(1)}$ оказывается обусловленной в первую очередь слабым эффектом увлечения и.с.о., а не медленным вращением звезды. Данная ситуация сильно отличается от той, что мы имеем в ньютоновской теории, где $Q^{(1)} \propto \Omega^2$ и $T^{(1)} \propto \Omega^2$ [в обозначениях разложений (3.52)-(3.54)].

Наконец, отметим, что рассмотрение случая $l \neq m$ абсолютно аналогично и приводит к тем же выводам: при $\Omega \rightarrow 0$ релятивистские r -моды описываются неаналитичными функциями ϵ и Ω (параметра κ) с тем же ордерингом, необходимо только заменить $\xi_{m+1}^{(1)} \rightarrow \xi_{l\pm 1}^{(1)}$, $Q_{m+1}^{(1)} \rightarrow Q_{l\pm 1}^{(1)}$, $T_{m+2}^{(1)} \rightarrow T_{l\pm 2}^{(1)}$, и $T_m^{(0)} \rightarrow T_l^{(0)}$.

Поправки линейного порядка по Ω

Обнаруженная неаналитичность и нестандартный ордеринг r -мод в ядре (3.119) приводят нас к следующему наблюдению: несмотря на то, что в исходных уравнениях колебаний малым параметром, связанным с медленным вращением звезды, является Ω^2 , для релятивистских r -мод таким параметром оказывается просто Ω . Поэтому в общем случае величины $T_m^{(0)}$ и $\sigma^{(1)}$ могут включать поправки линейного порядка по Ω . На первый взгляд может показаться, что этот вывод указывает на некоторую внутреннюю противоречивость теории: по определению функция $T^{(0)}$ в разложении (3.52) $T = (-i)[T^{(0)} + T^{(1)}]$ определяет ведущий вклад в функцию T в пределе медленного вращения (если точнее – при $\Omega \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$ и $\Omega^2/\epsilon \rightarrow 0$), а потому линейные по Ω слагаемые, как кажется, следовало бы отнести ко вкладу $T^{(1)}$. Данное рассуждение, однако, неверно, поскольку при выводе общих уравнений r -мод роль малого параметра, связанного с медленным вращением, играл параметр Ω^2 , а не Ω . При медленном вращении линейные по Ω слагаемые оказываются намного больше слагаемых второго порядка по Ω и, следовательно, могут входить в $T^{(0)}$. Однако это вовсе не означает, что слагаемые линейного порядка не могут также входить в $T^{(1)}$: они могут, но только в том случае, если они содержат дополнительную малость, связанную с ϵ (такие слагаемые исчезают в пределе $\epsilon \rightarrow 0$).

Представляет интерес установить, как с точки зрения ордеринга устроены собственные функции и спектр r -мод с точностью до линейного порядка по Ω . С этой целью мы возвращаемся к общей системе, описывающей r -моды в ядре (3.107), и предлагаем искать ее решение в следующем виде:

$$\sigma^{(1)} = \epsilon[\sigma^{(10)} + \delta\sigma], \quad (3.126)$$

$$T_m^{(0)} = T_m^{(00)} + \delta T_m, \quad (3.127)$$

$$\xi_{m+1}^{(1)} = \epsilon\kappa[\xi_{m+1}^{(11)} + \delta\xi_{m+1}], \quad (3.128)$$

$$\frac{dT_m^{(00)}}{dr} \sim \frac{d\xi_{m+1}^{(11)}}{dr} \sim \frac{1}{\kappa} T_m^{(00)}. \quad (3.129)$$

Как и ранее, нам достаточно рассмотреть только $l = m$. Здесь и далее мы используем обозначение $f^{(ik)}$ для величин, которые определяют вклад порядка $\epsilon^i \kappa^k$ в величину f . Сам этот вклад в наших обозначениях записывается в виде $\epsilon^i \kappa^k f^{(ik)}$, то есть мы для удобства формально «выделяем» префактор $\epsilon^i \kappa^k$. Далее, первые слагаемые в разложениях (3.126)-(3.128) по построению являются решением системы (3.120), а слагаемые δf описывают малые поправки к этому решению. Важно отметить, что на данном этапе нам неизвестно, каким образом и меняет ли вообще оператор d/dr порядок, действуя на функции δT_m и $\delta \xi_{m+1}$, как это имеет место с функциями $T_m^{(00)}$ и $\xi_{m+1}^{(11)}$. Таким образом, нам необходимо определить ордеринг поправок δT_m , $\delta \xi_{m+1}$ и $\delta \sigma$, а также оператора d/dr .

Оказывается, что, если подставить разложения (3.126)-(3.128) в общую систему (3.107), то единственным малым параметром в данной системе окажется параметр неаналитичности κ . Следовательно, поправки δT_m , $\delta \xi_{m+1}$ и $\delta \sigma$ должны рассматриваться как величины ненулевых положительных порядков по κ (это утверждение, однако, не обязано выполняться для их производных, если они описываются неаналитичными функциями κ). После подстановки разложений мы можем отбросить часть слагаемых как малые, пользуясь следующими правилами отбора. Во-первых, если данное уравнение содержит одновременно слагаемые f и δf с префакторами одного порядка, то слагаемым с δf можно пренебречь. Во-вторых, в каждом уравнении мы можем отбросить слагаемые, которые меньше, чем наибольшее неоднородное слагаемое в данном уравнении [то есть наибольшее слагаемое, содержащее $T_m^{(00)}$ или $\xi_{m+1}^{(11)}$]. Например, в первом уравнении мы пренебрегаем слагаемым $\kappa^2 T_m^{(00)}$ по сравнению с $\kappa \xi_{m+1}^{(11)}$. В результате мы приходим к следующей упрощенной системе:

$$\begin{cases} C_1(r) \frac{d}{dr} \kappa \delta \xi_{m+1} + \left[\sigma^{(10)} + \frac{2\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] \delta T_m + C_2(r) \kappa \xi_{m+1}^{(11)} + \delta \sigma \cdot T_m^{(00)} = 0 \\ \frac{d}{dr} \delta T_m + \frac{G_2(r)}{\kappa} \delta \xi_{m+1} + G_1(r) T_m^{(00)} = 0. \end{cases} \quad (3.130)$$

Решение этих уравнений должно удовлетворять трем граничным условиям: двум на границе кора-ядро и одному в центре звезды. Следовательно, общее решение данной системы должно содержать три неизвестных постоянных: две константы интегрирования и поправку $\delta \sigma$. Это возможно, только если слагаемые с производными $d\delta T_m/dr$ и $d\delta \xi_{m+1}/dr$ не являются малыми по сравнению с другими слагаемыми в полученной системе: иначе дифференциальные уравне-

ния становятся алгебраическими, и остается только одна неизвестная постоянная $\delta\sigma$. По той же причине слагаемое с $\delta\sigma$ в первом уравнении должно быть того же порядка, что слагаемое с производной $d\delta\xi_{m+1}/dr$. Наконец, порядок δT_m не может быть выше линейного по κ , поскольку иначе поправку δT_m следовало бы отнести к функции $T^{(1)}$. Если записать искомый ордеринг в следующем виде

$$\delta\sigma \sim \kappa^s, \quad \delta T_m \sim \kappa^t, \quad \delta\xi_{m+1} \sim \kappa^x, \quad \frac{d}{dr} \sim \kappa^d, \quad t \leq 1, \quad (3.131)$$

то, согласно всему вышесказанному, первое уравнение накладывает на показатели s, t, x и d следующие ограничения:

$$1 + d + x = s, \quad s \leq t. \quad (3.132)$$

Ограничениям, следующим из второго уравнения, в свою очередь, можно удовлетворить двумя способами:

$$\text{1й способ:} \quad d + t = 0, \quad x \geq 1; \quad (3.133)$$

$$\text{2й способ:} \quad d + t = x - 1, \quad x \leq 1. \quad (3.134)$$

Рассмотрим, например, первый способ. В этом случае, пользуясь указанными выше условиями, легко получить неравенство $2t \geq x + 1$. Поскольку $t \leq 1$ и $x \geq 1$, данному неравенству можно удовлетворить только при $x = t = 1$, и мы сразу же получаем $s = 1$ и $d = -1$. Рассмотрение второго варианта полностью аналогично и приводит к тем же значениям показателей s и d .

Таким образом, мы показали, что $\delta\sigma \sim \delta T_m \sim \delta\xi_{m+1} \sim \kappa$, а поправки δT_m и $\delta\xi_{m+1}$ являются неаналитическими функциями κ , для которых $d/dr \sim 1/\kappa$. Подставляя этот результат в разложения (3.126)-(3.128), получаем:

$$\delta\sigma = \kappa\sigma^{(11)}, \quad \sigma^{(1)} = \epsilon\sigma^{(10)} + \epsilon\kappa\sigma^{(11)} \quad (3.135)$$

$$\delta T_m = \kappa T_m^{(01)}, \quad T_m^{(0)} = T_m^{(00)} + \kappa T_m^{(01)}, \quad (3.136)$$

$$\delta\xi_{m+1} = \kappa\xi_{m+1}^{(12)}, \quad \xi_{m+1}^{(1)} = \epsilon\kappa\xi_{m+1}^{(11)} + \epsilon\kappa^2\xi_{m+1}^{(12)}, \quad (3.137)$$

Наконец, с учетом этого ордеринга и уравнений (3.83) находим:

$$Q_{m+1}^{(1)} = \epsilon Q_{m+1}^{(10)} + \epsilon\kappa Q_{m+1}^{(11)}, \quad T_{m+2}^{(1)} = \epsilon T_{m+2}^{(10)} + \epsilon\kappa T_{m+2}^{(11)}. \quad (3.138)$$

В завершение данного раздела отметим, что, хотя выше мы обсуждали ордеринг только для коэффициентов в разложениях по полиномам Лежандра, легко убедиться, что такой же ордеринг должен соблюдаться и для соответствующих неразложенных величин, зависящих от $x = \cos \theta$. Действительно, в случае $l = m$ имеем

$$T^{(0)}(r, x) = T_m^{(0)}(r)P_m^m(x), \quad (3.139)$$

$$T^{(1)}(r, x) = T_m^{(1)}(r)P_m^m(x) + T_{m+2}^{(1)}(r)P_{m+2}^m(x), \quad (3.140)$$

$$\xi^{(1)}(r, x) = \xi_{m+1}^{(1)}(r)P_{m+1}^m(x), \quad (3.141)$$

$$Q^{(1)}(r, x) = Q_{m+1}^{(1)}(r)P_{m+1}^m(x). \quad (3.142)$$

Мы знаем ордеринг всех коэффициентов в данных разложениях за исключением слагаемого $T_m^{(1)}$, которое выпадает из уравнений. Несмотря на это мы все же можем утверждать, что ордеринг тороидальной функции вплоть до слагаемых линейного порядка по κ определяется приведенными выше выражениями (3.136) и (3.138). Действительно, функция $T^{(1)}(r, x)$ однозначно содержит вклады порядков ϵ и $\epsilon\kappa$, поскольку такие слагаемые появляются в коэффициенте $T_{m+2}^{(1)}$ [см. уравнение (3.138)]. В то же время $T^{(1)}(r, x)$ не может содержать слагаемых порядка $\epsilon^0\kappa^0$ или $\epsilon^0\kappa$, поскольку такие слагаемые, как обсуждалось выше, следует относить к функции $T^{(0)}(r, x)$. В то же время нельзя исключить возможность, что коэффициент $T_m^{(1)}$ окажется более высокого порядка, чем $T_{m+2}^{(1)}$. Данное обстоятельство, однако, никак не может повлиять на обсуждаемый ордеринг r -мод вплоть до линейного порядка по κ .

Таким образом, вплоть до линейного порядка по Ω (параметру κ) собственные функции и спектр релятивистских r -мод в пределе медленного вращения представляются в следующем виде:

$$\sigma = \Omega[\sigma^{(0)} + \epsilon\sigma^{(10)} + \epsilon\kappa\sigma^{(11)} + \dots], \quad (3.143)$$

$$\Gamma = (-i)[T^{(00)} + \kappa T^{(01)} + \epsilon T^{(10)} + \epsilon\kappa T^{(11)} + \dots], \quad (3.144)$$

$$Q = \epsilon Q^{(10)} + \epsilon\kappa Q^{(11)} + \dots, \quad (3.145)$$

$$\xi^r = \epsilon\kappa\xi^{(11)} + \dots, \quad (3.146)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \sim \frac{1}{\kappa}. \quad (3.147)$$

Необходимо подчеркнуть, что данные формулы не соответствуют каким-либо разложениям в ряды Тейлора по ϵ , Ω или $\kappa = \Omega/\sqrt{\epsilon}$. Слагаемые вида $f^{(ik)}$, включая вклады в поправку $\sigma^{(1)}$, в общем случае являются неаналитическими функциями Ω и ϵ , которые определяют неаналитический вклад порядка $\epsilon^i \kappa^k$ в величину f (однако зависимость данного вклада от ϵ и Ω вовсе не сводится к пропорциональности $\epsilon^i \kappa^k$). Все слагаемые вида $f^{(00)}$ и $f^{(01)}$ соответствуют членам вида $f^{(0)}$ в начальном разложении (3.52), а все слагаемые вида $f^{(10)}$ и $f^{(11)}$ относятся к величинам $f^{(1)}$. Например, $T^{(01)}$ – вклад в $T^{(0)}$, в то время как $T^{(10)}$ – вклад в $T^{(1)}$. Как мы предвидели, линейные по κ слагаемые, входящие в $f^{(1)}$, содержат дополнительную малость ϵ , связанную со слабым эффектом увлечения и.с.о.

На этом мы завершаем обсуждение ордеринга релятивистских r -мод в ядре звезды. Анализируя уравнения колебаний, мы установили, что собственные функции релятивистских r -мод неаналитичным образом зависят от Ω и ϵ (точнее – от параметра κ), и что их производные по r оказываются величинами другого порядка по ϵ и Ω , нежели сами эти функции. Это одна из причин, по которой релятивистские r -моды не удастся описать в рамках стандартной теории возмущений, которая, пользуясь разложениями (3.6)–(3.8) в ряды Тейлора по Ω , неявно предполагает, что искомое решение уравнений описывается аналитическими функциями Ω . В случае релятивистских r -мод из-за их неаналитичности понятия «ряд» и «порядок», строго говоря, становятся плохо определенными. Теперь мы можем говорить только об «относительном» порядке, то есть о том, как по порядку одна величина отличается от другой. Например, разложение $f = f_1 + \Omega f_2$ следует интерпретировать следующим образом: обе величины f_1 и f_2 являются некоторыми неаналитическими функциями Ω и ϵ , однако второе слагаемое по порядку в Ω раз меньше первого. Соотношения вида $f_1 \sim f_2$, в свою очередь, означают, что величины f_1 и f_2 – неаналитические функции Ω и ϵ , которые локально принимают значения одного порядка величины (однако значения выбранной величины $f_{1,2}$ в *разных* точках звезды могут сильно различаться). При этом, учитывая неаналитичность собственных функций r -мод, поправка к частоте $\sigma^{(10)} \sim 1$ может оказаться неаналитической функцией Ω и ϵ , принимающей, однако, значения порядка единицы. Как будет показано ниже, так и происходит для частот всех r -мод кроме фундаментальной.

Ордеринг релятивистских g -мод в коре звезды

Рассмотрим теперь кору нейтронной звезды. Поскольку в ней решение для тороидальной функции известно (3.87), нам остается проанализировать решение для радиальной компоненты лагранжева смещения (3.94):

$$\xi_{m+1}^{(1)}(r) = \frac{1}{\eta(r)} \left[\xi_0 + \int_r^R \left(g_{21} \left[\sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon\tilde{\omega}}{m+1} \right] + \Omega^2 g_{22} \right) \eta T_l^{(0)} dr \right], \quad (3.148)$$

где константа интегрирования $\xi_0 \sim \Omega^2$ определяется граничным условием на поверхности звезды (3.99). Все слагаемые в данной формуле за исключением, возможно, поправки $\sigma^{(1)}$, являются аналитическими функциями ϵ и Ω . Как видно из данной формулы, при $\Omega \rightarrow 0$ с точностью до линейного порядка по Ω имеем

$$\xi_{m+1}^{(1)}(r) = \frac{1}{\eta(r)} \int_r^R g_{21}(r) \left[\sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] \eta(r) T_m^{(0)}(r) dr, \quad (3.149)$$

где в поправке $\sigma^{(1)}$ удерживаются слагаемые не выше первого порядка по Ω . Поскольку мы рассматриваем глобальные колебания, затрагивающие и кору и ядро звезды, поправка $\sigma^{(1)}$ в коре в точности та же, что и в ядре. Тогда, пользуясь (3.149), (3.135) и (3.89), с точностью до первого порядка по Ω находим

$$\sigma^{(1)} = \epsilon\sigma^{(10)} + \epsilon\kappa\sigma^{(11)} + \dots, \quad (3.150)$$

$$\xi_{m+1}^{(1)} = \epsilon\xi_{m+1}^{(10)} + \epsilon\kappa\xi_{m+1}^{(11)} + \dots, \quad (3.151)$$

$$Q_{m+1}^{(1)} = \epsilon Q_{m+1}^{(10)} + \epsilon\kappa Q_{m+1}^{(11)} + \dots, \quad (3.152)$$

где функции $\xi_{m+1}^{(10)}$ and $\xi_{m+1}^{(11)}$ определены равенствами

$$\xi_{m+1}^{(10)}(r) = \frac{1}{\eta(r)} \int_r^R g_{21}(r) \left[\sigma^{(10)} + \frac{2\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] \eta(r) T_m^{(0)}(r) dr, \quad (3.153)$$

$$\xi_{m+1}^{(11)}(r) = \frac{\sigma^{(11)}}{\eta(r)} \int_r^R g_{21}(r) \eta(r) T_m^{(0)}(r) dr, \quad (3.154)$$

а явный вид $Q_{m+1}^{(10)}$ и $Q_{m+1}^{(11)}$ легко определить с помощью уравнения (3.89).

Таким образом, в отличие от ядра звезды, где в пределе $\Omega \rightarrow 0$ ($\kappa \rightarrow 0$) малость $\xi_{m+1}^{(1)} \sim \epsilon \kappa T_m^{(0)}$ связана одновременно с медленным вращением звезды и со слабым увлечением и.с.о., в коре звезды эта малость оказывается связанной только с увлечением и.с.о. При этом в коре возможная неаналитичность функций $f^{(ik)}$ по параметрам Ω и ϵ может быть связана исключительно с неаналитичностью поправок $\sigma^{(10)}$ и $\sigma^{(11)}$, и поэтому $d/dr \sim 1$. При этом, если бы звезда была целиком баротропной, то неаналитичность и вовсе бы не возникла. Действительно, в этом случае граничное условие $\xi_{m+1}^{(1)}(0) = 0$ в центре звезды и граничное условие (3.99) на поверхности позволяют однозначным образом определить константу интегрирования $\xi_0 \propto \Omega^2$ и поправку $\sigma^{(1)}$. В результате для ведущих вкладов в пределе $\Omega \rightarrow 0$ находим $\sigma^{(1)} \propto \epsilon$, $\xi_{m+1}^{(1)} \propto \epsilon$ и $Q^{(1)} \propto \epsilon$, а поправки к данным величинам, связанные с вращением, оказываются просто пропорциональными Ω^2 , как в ньютоновской теории.

3.4.3 Релятивистские г-моды в пределе $\kappa \rightarrow 0$

Уравнения и граничные условия

В релятивистской теории в пределе экстремально медленного вращения $\kappa \rightarrow 0$ оказывается возможным в явном виде рассчитать собственные функции и спектр r -мод. В этом пределе $T_m^{(0)}(r) \approx T_m^{(00)}(r)$ и $\xi_{m+1}^{(1)}(r) \approx \epsilon \kappa \xi_{m+1}^{(11)}(r)$, где функции $T_m^{(00)}(r)$ и $\xi_{m+1}^{(11)}(r)$ удовлетворяют системе уравнений (3.120):

$$\begin{cases} \kappa \frac{d}{dr} \xi_{m+1}^{(11)} + \frac{1}{C_1(r)} \left[\sigma^{(10)} + \frac{2\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] T_m^{(00)} = 0 \\ \frac{d}{dr} T_m^{(00)} + \frac{G_2(r)}{\kappa} \xi_{m+1}^{(11)} = 0. \end{cases} \quad (3.155)$$

С помощью этих уравнений ранее было показано, что при $\kappa \rightarrow 0$ тороидальная функция $T_m^{(00)}(r)$ удовлетворяет уравнению (3.121):

$$\kappa^2 \frac{d^2}{dr^2} T_m^{(00)} - q_\sigma(r) T_m^{(00)} = 0, \quad q_\sigma(r) \equiv \frac{G_2(r)}{C_1(r)} \left[\sigma^{(10)} + \frac{2\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right]. \quad (3.156)$$

Перед тем, как приступить к решению этих уравнений, необходимо отметить, что их асимптотическое решение вблизи центра звезды отличается от истинного (3.101), которое мы установили ранее при анализе более общей системы (3.79). Причина этого расхождения в том, что правильное асимптоти-

ческое поведение (3.101) «управляется» слагаемыми более высоких порядков по κ , которые в упрощенных уравнениях (3.155)-(3.156) были проигнорированы как малые. Фактически такие слагаемые оказываются малыми всюду кроме малой окрестности $0 \leq r < r_c$ вблизи центра звезды, где их все-таки необходимо учитывать. Это связано с тем, что вблизи центра в уравнениях появляется новая малая величина – координата r – и их решение по мере приближения к центру в конечном итоге определяется слагаемыми ведущего порядка именно по r , а не по κ . По этой причине r -моды в большей части ядра $r_c \leq r < r_{cc}$ действительно описываются упрощенными уравнениями (3.155)-(3.156), однако в малой окрестности $0 \leq r < r_c$ вблизи центра становится необходимым использовать более точные уравнения (3.79). Значение величины r_c , определяющей границы применимости упрощенных уравнений (3.155)-(3.156), можно оценить, сравнивая слагаемые в этих уравнениях с теми, которые были в них отброшены как члены более высокого порядка по κ . Такое сравнение показывает, что $r_c \propto \kappa$, а потому $r_c \rightarrow 0$ при $\kappa \rightarrow 0$.

Из асимптотического решения (3.101) общих уравнений (3.79) видно, что в малой окрестности $0 \leq r < r_c$ вблизи центра выполняется соотношение

$$\xi_{m+1}^{(1)}(r) = \frac{\epsilon(m+1)^2}{2(2m+1)} \left[\sigma^{(10)} + \frac{2\tilde{\omega}(0)}{m+1} \right] T_m^{(0)}(r). \quad (3.157)$$

Поскольку собственные функции r -мод должны быть непрерывными, данное соотношение должно выполняться и непосредственно в точке r_c , а решение упрощенных уравнений (3.155)-(3.156) должно удовлетворять условию

$$\kappa \xi_{m+1}^{(11)}(r_c) = \frac{(m+1)^2}{2(2m+1)} \left[\sigma^{(10)} + \frac{2\tilde{\omega}(0)}{m+1} \right] T_m^{(00)}(r_c). \quad (3.158)$$

Подставляя в это равенство тороидальную функцию $T_m^{(00)}$ из первого уравнения упрощенной системы (3.155), мы получаем, что граничное условие в точке r_c , которому должно удовлетворять решение упрощенных уравнений, приобретает следующий окончательный вид:

$$\frac{d}{dr} \xi_{m+1}^{(11)}(r_c) = \frac{2m+3}{r_c} \xi_{m+1}^{(11)}(r_c). \quad (3.159)$$

Это равенство заменяет условие регулярности в центре.

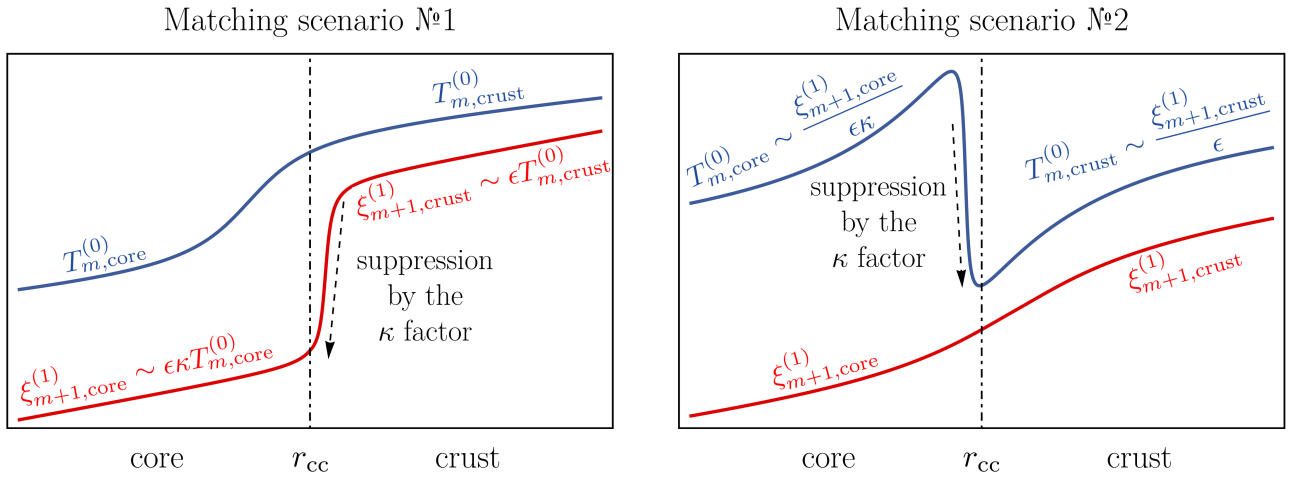


Рис. 3.4: Два способа удовлетворить граничным условиям на границе кора-ядро: подавление радиального смещения $\xi_{m+1,crust}^{(1)}$ со стороны коры (слева) и подавление тороидальной функции $T_{m,core}^{(0)}$ со стороны ядра (справа). Рисунок схематичен и не отражает всех свойств r -мод вблизи границы кора-ядро.

Рассмотрим теперь граничные условия на границе кора-ядро, где тороидальная функция и радиальное смещение со стороны ядра должны сшиваться с решением со стороны коры:

$$T_{m,core}^{(0)}(r_{cc}) = T_{m,crust}^{(0)}(r_{cc}), \quad \frac{\xi_{m+1,core}^{(1)}(r_{cc})}{T_{m,core}^{(0)}(r_{cc})} = \frac{\xi_{m+1,crust}^{(1)}(r_{cc})}{T_{m,crust}^{(0)}(r_{cc})}. \quad (3.160)$$

Поскольку ордеринг r -мод в ядре $\xi_{m+1,core}^{(1)}(r)/T_{m,core}^{(0)}(r) \sim \epsilon \kappa$ и ордеринг в коре $\xi_{m+1,crust}^{(1)}(r)/T_{m,crust}^{(0)}(r) \sim \epsilon$ отличаются друг от друга, то данным граничным условиям оказывается возможным удовлетворить двумя способами, как проиллюстрировано на Рис. 3.4:

- 1) *Первый способ* – найти такое значение $\sigma^{(1)}$, при котором радиальное смещение $\xi_{m+1,crust}^{(1)}$ со стороны коры на границе кора-ядро оказалось бы подавленным на фактор порядка κ (слева на Рис. 3.4). Из разложения в коре (3.151) следует, что такое подавление достигается при $\xi_{m+1,crust}^{(10)}(r_{cc}) = 0$.
- 2) *Второй способ* – найти такое значение $\sigma^{(1)}$, при котором подавление на фактор порядка κ на границе кора-ядро испытывала бы тороидальная функция $T_{m,core}^{(0)}$ со стороны ядра (справа на Рис. 3.4). Из разложения (3.136) в ядре видно, что такое подавление достигается при $T_m^{(00)}(r_{cc}) = 0$.

Как мы увидим, данные способы сшивки оказываются взаимоисключающими.

Характерные свойства собственных функций и спектра r -мод

С математической точки зрения, уравнение (3.156) напоминает уравнение Шредингера, и его анализ в случае малых значений κ можно провести по аналогии с анализом последнего, в котором роль малого параметра играет постоянная Планка \hbar . Такое рассмотрение проводится с помощью ВКБ метода и может быть найдено, например, в работе Ландау и Лифшица [171] (см. квазиклассическое приближение). Интересно отметить, что уравнение такого же вида (3.156) было получено в работе [167], где изучались r -моды в сверхтекучих НЗ в пределе медленного вращения и слабого эффекта увлечения между нейтронами и протонами.

Важным понятием при изучении таких уравнений является понятие *точек поворота* – точек r_t , в которых функция $q_\sigma(r)$ обращается в ноль: $q_\sigma(r_t) = 0$. Как правило, задача разбивается на анализ вблизи таких точек, где функция $q_\sigma(r)$ принимает малые значения, и анализ вдали от них, где данная функция существенно отличается от нуля. Легко убедиться, что в нашем случае уравнение (3.156) может иметь не больше одной точки поворота. Действительно, из явно-го вида (3.80) функций $G_2(r)$ и $C_1(r)$ следует, что отношение $G_2(r)/C_1(r) > 0$ [мы рассматриваем только конвективно устойчивые звезды с $A(r) < 0$]. В то же время функция $\tilde{\omega}(r)$ в общем случае является монотонно убывающей функцией r [69]. Следовательно, для любого фиксированного значения $\sigma^{(10)}$ может быть не больше одной точки поворота, причем, если такая точка существует, то она определяется как единственное решение уравнения

$$(m + 1)\sigma^{(10)} + 2\tilde{\omega}(r_t) = 0, \quad r_t \leq r_{cc}, \quad (3.161)$$

где ограничение $r_t \leq r_{cc}$ указывает, что точка поворота должна располагаться в ядре звезды, то есть в области применимости уравнения (3.156).

Некоторые свойства r -мод можно предсказать исключительно из общих соображений, не решая уравнение (3.156). Как изображено на Рис. 3.5, характерное поведение тороидальной функции $T_m^{(0)}(r)$ в существенной степени зависит от того, существует точка поворота или нет. *Если точка поворота не существует* [рисунок (а)], то в области $r_c \leq r \leq r_{cc}$ решение уравнения (3.156) будет экспоненциально расти или спадать по мере приближения к центру звезды. Экспоненциально растущее решение расходится при $\kappa \rightarrow 0$ и, следовательно,

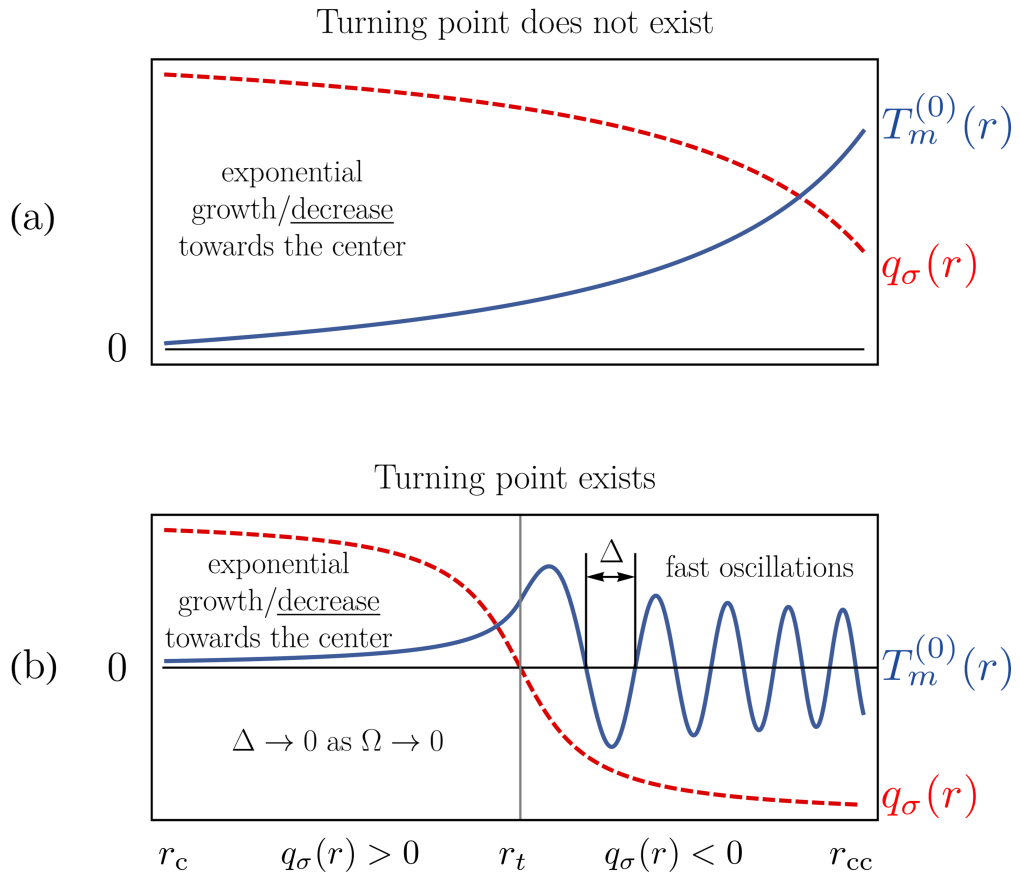


Рис. 3.5: Характерное поведение тороидальной функции в пределе $\kappa \rightarrow 0$. Рисунки (a) и (b) описывают случаи, когда точка поворота не существует или существует, соответственно. Красными штрихами (схематично) показана зависимость $q_\sigma(r)$, в то время как синими линиями (схематично) показана тороидальная функция $T_m^{(0)}(r)$. На рисунке (b) изображен только тот случай, в котором тороидальная функция экспоненциально спадает к центру звезды. Противоположный случай, когда тороидальная функция растет к центру звезды, можно изобразить аналогичным образом.

но, нефизично. Касательно экспоненциально спадающего к центру решения, можно ожидать, что оно описывает *фундаментальную* r -моду, то есть такое решение, в котором тороидальная функция не имеет узлов внутри звезды. Действительно, в этом случае последняя не может иметь узлов ни в ядре, где она ведет себя экспоненциальным образом, ни в коре, где она определяется формулой (3.87) и принимает сугубо положительные значения. Описанное решение не может быть подавлено на границе кора-ядро и, следовательно, сшивается с решением в коре звезды первым способом, изображенным слева на Рис. 3.4.

Если точка поворота существует [рисунок (b)], экспоненциальное поведение ожидается в области $r_c \leq r \leq r_t$ слева от точки поворота, в то время как справа в области $r_t < r \leq r_{cc}$ решение будет иметь вид колебаний. Мы ожи-

даем, что решения такого типа описывают *узловые* r -моды, то есть решения, для которых тороидальная функция имеет хотя бы один узел. При этом длина волны колебаний таких r -мод с фиксированным конечным числом узлов будет сокращаться по мере уменьшения κ . Это легко понять из рассмотрения «тестовой» модели с $q_\sigma(r) = \text{const} < 0$: в этом случае, согласно (3.123), расстояние между соседними узлами равно $\Delta = \pi\kappa/\sqrt{|q_\sigma|}$. Если бы интервал $r_t < r \leq r_{cc}$, где решение осциллирует, оставался конечным при $\kappa \rightarrow 0$, то число узлов в данном интервале стремилось бы к бесконечности в данном пределе. Поскольку число узлов фиксировано, это означает, что сама рассматриваемая область $r_t < r \leq r_{cc}$ становится бесконечно узкой в пределе $\kappa \rightarrow 0$. Следовательно, пользуясь определением точки поворота (3.161), находим, что при $\kappa \rightarrow 0$ точки поворота и поправки к частоте узловых r -мод стремятся к единым предельным значениям⁶:

$$r_t \rightarrow r_{cc}, \quad \sigma^{(10)} \rightarrow -\frac{2\tilde{\omega}(r_{cc})}{m+1}. \quad (3.163)$$

Как несложно убедиться, такие значения не удовлетворяют условию $\xi_{m+1, \text{crust}}^{(10)}(r_{cc}) = 0$, то есть не приводят к подавлению радиального смещения со стороны коры на границе кора-ядро. Следовательно, решения такого типа должны сшиваться с корой вторым способом, изображенным справа на Рис. 3.4, при котором $T_m^{(00)}(r_{cc}) = 0$. Данное условие, как мы увидим ниже, определяет спектр узловых r -мод.

Из всего вышесказанного следует, что вне зависимости от наличия узлов при достаточно медленном вращении r -моды в ядре оказываются локализованными вблизи его границы с корой. Мы уже сталкивались с этим эффектом, когда обсуждали численные решения общих уравнений (3.79). Также напомним, что в области локализации r -мод применение приближения слабого эффекта увлечения и.с.о. является оправданным и, следовательно, должно достаточно точно описывать спектр и собственные функции r -мод. Явные выражения для этих величин выводятся в следующем разделе.

⁶Поскольку функция $q_\sigma(r)$ положительна при $r < r_t$, меняет знак только в точке $r = r_t$, и $r_t \rightarrow r_{cc}$ в пределе $\kappa \rightarrow 0$, мы видим, что в данном пределе эта функция достигает своего минимума в ядре на границе кора-ядро. Следовательно, условие $q_\sigma(r_{cc}) \rightarrow 0$ для расчета ведущего вклада в поправку $\sigma^{(1)}$ можно эквивалентным образом записать в виде

$$\min_{r_c \leq r \leq r_{cc}} \{q_\sigma(r)\} \rightarrow 0 \quad \text{для } r_t \leq r_{cc}. \quad (3.162)$$

Условие такого же вида определяет спектр сверхтекучих r -мод [167].

Решение уравнений и спектр r -мод пределе $\kappa \rightarrow 0$

Как мы упоминали выше, приближенное решение уравнения (3.156) в пределе $\kappa \rightarrow 0$ можно найти с помощью метода ВКБ. Поскольку при малых значениях κ точка поворота, если она существует, расположена вблизи границы кора-ядро, в общем случае нам необходимо найти решения $T_{m,I}^{(00)}$ и $T_{m,II}^{(00)}$ в двух областях: область I вдали от точки поворота ($r_c \leq r < r_t$) и область II вблизи точки поворота ($r \approx r_t \leq r_{cc}$), где функция $q_\sigma(r)$ хорошо описывается ведущим членом своего разложения в ряд Тейлора по r :

$$q_\sigma(r) \approx \alpha^2(r_t - r). \quad (3.164)$$

Между этими областями нет четкой границы, они плавно переходят друг друга через область, в которой можно одновременно использовать как решение $T_{m,I}^{(00)}$, так и решение $T_{m,II}^{(00)}$. Эта переходная область соответствует тем промежуточным значениям r , при которых функция $q_\sigma(r)$ уже значительно отличается от нуля, но все еще с хорошей точностью описывается формулой (3.164). По определению, описание этой области с помощью решения $T_{m,I}^{(00)}$ должно быть эквивалентно описанию с помощью $T_{m,II}^{(00)}$. Отметим, что область II, как и описанная переходная область возникают в наиболее общем случае, когда существует точка поворота (узловые r -моды). Если же точки поворота не существует (фундаментальная r -мода), то имеется только область I, которая в этом случае покрывает всю область применимости $r_c \leq r \leq r_{cc}$ уравнения (3.156).

В области I приближенное общее решение уравнения (3.156) может быть представлено в следующем виде (см.[171]):

$$T_{m,I}^{(00)}(r) = \frac{A_I}{q_\sigma^{1/4}(r)} \exp\left(\frac{1}{\kappa} \int_{r_c}^r \sqrt{q_\sigma} dr\right) + \frac{B_I}{q_\sigma^{1/4}(r)} \exp\left(-\frac{1}{\kappa} \int_{r_c}^r \sqrt{q_\sigma} dr\right), \quad (3.165)$$

где A_I и B_I – постоянные интегрирования. Отсюда, пользуясь вторым уравнением (3.155), находим и приближенное решение для радиального смещения:

$$\xi_{m+1,I}^{(11)}(r) = -\frac{q_\sigma^{1/4}(r)}{G_2(r)} \left[A_I \exp\left(\frac{1}{\kappa} \int_{r_c}^r \sqrt{q_\sigma} dr\right) - B_I \exp\left(-\frac{1}{\kappa} \int_{r_c}^r \sqrt{q_\sigma} dr\right) \right]. \quad (3.166)$$

Подставляя это решение в граничное условие (3.159) в точке r_c , получаем:

$$A_I + B_I = \frac{\kappa(2m+3)}{r_c q_\sigma^{1/2}(r_c)} (A_I - B_I). \quad (3.167)$$

Отсюда следует, что постоянные A_I и B_I – величины одного порядка по κ , а поэтому в решениях (3.165) и (3.166) при малых κ мы можем отбросить вклады, экспоненциально затухающие по мере удаления от центра звезды. Таким образом, решение в области I (за исключением малой окрестности точки r_c) определяется следующими равенствами:

$$T_{m,I}^{(00)}(r) = \frac{A_I}{q_\sigma^{1/4}(r)} \exp\left(\frac{1}{\kappa} \int_{r_c}^r \sqrt{q_\sigma} dr\right), \quad (3.168)$$

$$\xi_{m+1,I}^{(11)}(r) = -A_I \frac{q_\sigma^{1/4}(r)}{G_2(r)} \exp\left(\frac{1}{\kappa} \int_{r_c}^r \sqrt{q_\sigma} dr\right).$$

Чтобы найти решение в области II, возникающей для узловых r -мод, мы используем разложение (3.164), которое сводит (3.156) к уравнению Эйри:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_m^{(00)} - z T_m^{(00)} = 0, \quad z \equiv (r_t - r) \left(\frac{\alpha}{\kappa}\right)^{2/3}. \quad (3.169)$$

Произвольное решение этого уравнения может быть записано в виде линейной комбинации функций Эйри первого (A_I) и второго (B_I) типов, поэтому с учетом второго уравнения системы (3.155) получаем:

$$T_{m,II}^{(00)}(z) = A_{II} \text{Ai}(z) + B_{II} \text{Bi}(z), \quad (3.170)$$

$$\xi_{m+1,II}^{(11)}(r) = -\frac{\kappa}{G_2(r)} \frac{d}{dr} \left[A_{II} \text{Ai}(z) + B_{II} \text{Bi}(z) \right]. \quad (3.171)$$

где A_{II} и B_{II} – константы интегрирования. При достаточном удалении от точки поворота $z = 0$ функции Эйри хорошо описываются асимптотиками

$$\underline{z > 0 (r < r_t; q_\sigma > 0) :} \quad \begin{aligned} \text{Ai}(z) &\simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi} z^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \\ \text{Bi}(z) &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi} z^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \end{aligned} \quad (3.172)$$

$$\begin{aligned} \underline{z < 0 (r > r_t; q_\sigma < 0) :} \quad \text{Ai}(z) &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}|z|^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{Bi}(z) &\simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}|z|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (3.173)$$

Таким образом, в области $r > r_t$ функции Эйри осциллируют, а в области $r < r_t$ функции $\text{Ai}(z)$ и $\text{Bi}(z)$ экспоненциально падают или растут к центру звезды, соответственно. В действительности функции Эйри крайне быстро выходят на асимптотическое поведение и уже при $|z| \sim 2$ с разумной точностью (относительной ошибкой 4-5%) их можно заменить выражениями (3.172)-(3.173).

В переходной области между областями I и II, возникающей для узловых r -мод, полученное для первой области решение $T_{m,I}^{(00)}$ с высокой точностью должно совпадать с решением $T_{m,II}^{(00)}$ для второй области. Сравнивая асимптотики (3.172)-(3.173) функций Эйри с решением (3.168) в области I, можно показать, что $A_{II} \gg B_{II}$ и, следовательно, решение в области II имеет вид:

$$T_{m,II}^{(0)}(r) = A_{II} \text{Ai}(z), \quad \xi_{m+1,II}^{(1)}(r) = -\frac{\kappa}{G_2(r)} \frac{d}{dr} \left[A_{II} \text{Ai}(z) \right]. \quad (3.174)$$

Таким образом, нам осталось определить только спектр r -мод, для чего необходимо рассмотреть граничные условия на границе кора-ядро.

Как обсуждалось выше, в случае *фундаментальной* r -моды, когда точка поворота не существует, поправка $\sigma^{(1)}$ должна принимать значение, при котором происходит подавление функции $\xi_{m+1,\text{crust}}^{(1)}$ со стороны коры на фактор порядка κ . В этом случае, поскольку ордеринг r -мод в точке r_{cc} со стороны ядра не меняется, в формуле (3.160) можно положить $T_{m,\text{core}}^{(0)}(r_{cc}) = T_m^{(00)}(r_{cc})$ и $\xi_{m+1,\text{core}}^{(1)}(r_{cc}) = \epsilon \kappa \xi_{m+1,\text{core}}^{(11)}(r_{cc})$. Тогда, пользуясь выражениями для радиального смещения в ядре (3.168) и коре (3.149), мы получаем:

$$\sigma_0^{(1)} = \epsilon \sigma_0^{(10)} + \epsilon \kappa \sigma_0^{(11)}, \quad (3.175)$$

$$\sigma_0^{(10)} = -\frac{2}{m+1} \left[\int_{r_{cc}}^R \tilde{\omega} g_{21} \eta T_{m,\text{crust}}^{(0)} dr \right] / \left[\int_{r_{cc}}^R g_{21} \eta T_{m,\text{crust}}^{(0)} dr \right], \quad (3.176)$$

$$\sigma_0^{(11)} = -\frac{q^{1/2}(r_{cc})\eta(r_{cc})}{G_2(r_{cc})} / \left[\int_{r_{cc}}^R g_{21} \eta \left\{ T_{m,\text{crust}}^{(0)}(r) / T_{m,\text{crust}}^{(0)}(r_{cc}) \right\} dr \right]. \quad (3.177)$$

Здесь индекс «0» указывает на то, что решение не имеет узлов. Несложно убедиться, что величина $\sigma^{(10)}$ принимает такое значение, что ведущий вклад (3.153) $\xi^{(10)}(r_{cc}) = 0$ в радиальное смещение обращается в ноль в точке r_{cc} , что, как и ожидалось, обеспечивает подавление радиального смещения со стороны коры.

Рассмотрим теперь *узловые* r -моды, обладающие точкой поворота. В этом случае, чтобы удовлетворить граничному условию на границе кора-ядро, тороидальная функция $T_{m,\text{core}}^{(0)}$ со стороны ядра должна в точке r_{cc} испытывать подавление на фактор порядка κ , что достигается при $T_{m,\text{core}}^{(00)}(r_{cc}) = 0$. Из этого равенства с учетом (3.174) и (3.169) мы сразу же получаем

$$r_{t,n} - r_{cc} = z_n \left(\frac{\kappa}{\alpha} \right)^{2/3}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.178)$$

где $z_n < 0$ – корни уравнения $\text{Ai}(z) = 0$, пронумерованные таким образом, что $z_{n+1} < z_n$. Равенство (3.178) автоматически согласуется с ограничением $r_t \leq r_{cc}$, то есть точка поворота действительно расположена в области применимости уравнения (3.156). Легко видеть, что при выбранной нумерации корней z_n число n в точности совпадает с числом узлов тороидальной функции $T_m^{(00)}(r)$. Как мы увидим ниже, в действительности это число совпадает и с числом узлов *полной* тороидальной функции $T_m^{(0)}(r)$.

Пользуясь тем, что точка поворота связана с поправкой $\sigma^{(10)}$ равенством (3.161), мы сразу же получаем формулу для спектра узловых r -мод:

$$\sigma_n^{(10)} = -\frac{2\tilde{\omega}(r_{t,n})}{m+1}, \quad r_{t,n} = r_{cc} + z_n \left(\frac{\kappa}{\alpha} \right)^{2/3}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.179)$$

Поскольку при малых значениях κ точка поворота расположена близко к границе кора-ядро, мы можем в этом пределе воспользоваться разложением функции $\tilde{\omega}(r)$ вблизи данной границы, что позволяет переписать спектр в виде

$$\sigma_n^{(10)} = -\frac{2\tilde{\omega}(r_{cc})}{m+1} \left[1 + z_n \frac{\tilde{\omega}'(r_{cc})}{\tilde{\omega}(r_{cc})} \left(\frac{\kappa}{\alpha} \right)^{2/3} \right], \quad (3.180)$$

где коэффициент α (3.164), может быть рассчитан по формуле

$$\alpha^2 = \frac{q_\sigma(r_{cc})}{r_t - r_{cc}} \approx -\frac{2\tilde{\omega}'(r_{cc})}{m+1} \frac{G_2(r_{cc})}{C_1(r_{cc})}. \quad (3.181)$$

Здесь мы во втором равенстве подставили в явном виде функцию $q_\sigma(r)$ (3.156) и воспользовались разложением функции $\tilde{\omega}(r)$ по r вблизи границы кора-ядро.

Наконец, заметим, что все корни z_n функции Эйри $\text{Ai}(z)$ лежат в области $z < -2$, где она с хорошей точностью описывается асимптотической формулой (3.173) и, следовательно, с хорошей точностью быть вычислены по формуле

$$z_n = - \left[\frac{3\pi}{2} \left(n - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.182)$$

Тогда с той же точностью спектр узловых r -мод описывается равенством

$$\sigma_n^{(10)} = - \frac{2\tilde{\omega}(r_{cc})}{m+1} \left\{ 1 - \frac{\tilde{\omega}'(r_{cc})}{\tilde{\omega}(r_{cc})} \left[\frac{3\pi\kappa}{2\alpha} \left(n - \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.183)$$

Рассмотрение выше явно опиралось на предположение, что точка поворота r_t расположена достаточно близко к границе кора-ядро, чтобы можно было с хорошей точностью использовать разложение (3.164) функции $q_\sigma(r)$ в непосредственной близости от точки r_{cc} . Другими словами, мы рассматривали столь малые значения κ , при которых точка r_{cc} попадала в область II. При рассмотрении более высоких скоростей вращения ситуация становится сложнее: возникает дополнительная область III ($r_t < r \leq r_{cc}$) справа от точки поворота, в которой функция $q_\sigma(r)$ отрицательна и существенно отличается от нуля. Также возникает и переходная область между областями II и III аналогичная той, что имеет место между областями I и II. Анализ уравнений в этом случае проводится полностью аналогично тому, что проводился выше, с той оговоркой, что условие на границе кора-ядро должно удовлетворяться решением в новой области III. В результате можно показать, что спектр узловых r -мод в этом случае определяется условием, напоминающим условие квантования Бора-Зоммерфельда:

$$\int_{r_t}^{r_{cc}} \sqrt{|q_\sigma|} dr = \pi\kappa \left(n - \frac{1}{4} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.184)$$

Эта формула не полагается на разложение функции $q_\sigma(r)$ вблизи точки поворота, а потому является более точной и применима для более широкого диапазона значений κ . Несложно убедиться, что при достаточной близости точки поворота к границе кора-ядро, она воспроизводит полученный выше спектр (3.183).

В завершение этого раздела покажем, что число n действительно является числом узлов *полной* тороидальной функции $T_m^{(0)}(r)$, определенной как решение общей системы (3.79) и учитывающей поправки более высокого порядка по κ . Вспомним, что данные узлы могут быть расположены только в ядре звезды. В то же время, в силу граничного условия $T_m^{(00)}(r_{cc}) = 0$, один из узлов ведущего вклада $T_m^{(00)}(r)$ в $T_m^{(0)}(r)$ всегда располагается в точности на границе кора-ядро. Необходимо убедиться, что этот узел не является «ложным», то есть соответствует узлу полной тороидальной функции $T_m^{(0)}(r)$. Рассмотрим для этого узкий слой вблизи границы кора-ядро, где функции Эйри можно разложить в ряд $\text{Ai}(z) \approx \text{Ai}'(z_n)(z - z_n)$ [напомним, что $\text{Ai}(z_n) = 0$]. Пользуясь этим разложением и соотношением (3.169) между z и r , из решения (3.174) получаем, что радиальное смещение может быть приближенно представлено в виде $\xi_{m+1,\text{II}}^{(1)}(r) = -\tilde{F}(r)T_{m,\text{II}}^{(0)}(r)$, где $\tilde{F}(r)$ – некоторая положительная при $r < r_{cc}$ функция. Это означает, что радиальное смещение и тороидальная функция в пределе $\kappa \rightarrow 0$ подходят к границе кора-ядро со стороны ядра с противоположными знаками. С другой стороны, поскольку $r_t < r_{cc}$ и $\tilde{\omega}(r) > 0$, из уравнения (3.161) следует, что для узловых r -мод сумма $\sigma^{(1)} + 2\omega(r)/(m + 1)$ в коре звезды принимает отрицательные значения. В результате подынтегральное выражение в формуле (3.94) и, следовательно, радиальное смещение в коре принимают положительные значения при $r_{cc} \leq r \leq R$. Тогда мы приходим к выводу, что радиальное смещение в ядре также должно быть положительным вблизи точки $r = r_{cc}$. Следовательно, вблизи границы кора-ядро тороидальная функция $T_{m,\text{II}}^{(00)}(r)$ отрицательна. В то же время полная тороидальная функция $T_m^{(0)}(r)$ должна принимать положительные значения, поскольку она должна сшиваться с положительным решением (3.87) в коре. Это указывает на то, что учет поправок более высокого порядка по κ в функции $T_m^{(0)}(r)$ приводит к смещению ее узла от границы кора-ядро внутрь ядра, чтобы тороидальная функция могла сменить знак и сшиваться с решением в коре. Таким образом, узел функции $T_m^{(00)}(r)$ на границе кора-ядро соответствует истинному узлу полной тороидальной функции $T_m^{(0)}(r)$.

Подводя итоги, мы видим, что в пределе $\kappa \rightarrow 0$ имеется два типа решений, описывающих релятивистские r -моды. Данные решения характеризуются дискретными частотами, значения которых попадают внутрь интервала, ассоциирующегося с непрерывным спектром при применении стандартной теории

возмущений по Ω . Решение первого типа, для которого не существует точка поворота, представляет собой фундаментальную r -моду. Данное решение экспоненциально растет к границе кора-ядро и обладает частотой $\sigma_0^{(1)}$, которую можно рассчитать по формуле (3.175). Решения второго типа, когда точка поворота существует, описывают узловые r -моды с частотами $\sigma_n^{(1)}$, которые определяются правилом квантования (3.184) или (при особо малых κ) формулой (3.183). Слева от точки поворота собственные функции узловых r -мод экспоненциально подавлены, а справа, в области $r_t \leq r \leq r_{cc}$, демонстрируют быстрые осцилляции, длина волны которых зависит от скорости вращения как $\Omega^{2/3}$. Число $n \in \mathbb{N}$ равно числу узлов тороидальной функции $T_m^{(0)}(r)$, которые сконцентрированы в этой области. Наконец, по мере уменьшения κ в конечном итоге частоты всех r -мод с ненулевым числом узлов стремятся к предельному значению $\sigma_n^{(10)} \rightarrow -2\tilde{\omega}(r_{cc})/(m+1)$ и становятся практически неразличимыми.

3.4.4 Объяснение численных результатов

Теперь мы можем объяснить необычное поведение релятивистских r -мод при медленных скоростях вращения, обнаруженное нами в ранее проведенных численных расчетах (см. раздел 3.4.1). На Рис. 3.6 для примера изображены функции $T_m^{(0)}(r)$ с 4мя узлами для релятивистской [GR, синяя линия, получена с помощью общих уравнений (3.79)] и ньютоновской (Newt, красные штрихи) r -мод при $\Omega = 0.005$. Вертикальными штрихами показаны центр звезды, граница кора-ядро, и точка поворота, определенная из правила квантования (3.184). Все узлы релятивистской функции $T_m^{(0)}(r)$ сосредоточены справа от точки поворота, где она быстро осциллирует – поведение, предсказываемое в рамках разработанной теории решением (3.174) в области II [а также в области III при более высоких скоростях вращения; см. обсуждение перед (3.184)]. Слева от точки поворота, в свою очередь, r -мода экспоненциально подавлена, как предсказывает решение (3.168) в области I. Поведение остальных узловых r -мод, которое мы видели на Рис. 3.2-3.3 объясняется аналогичным образом. Касательно фундаментальной (безузловой) гармоники – она просто экспоненциально спадает от границы кора-ядро к центру звезды, что описывается решением (3.168) в области I, которая в этом случае покрывает практически все ядро звезды за исключением малой окрестности $0 \leq r < r_c$, где упрощенные уравнения неприменимы [см. обсуждение после уравнения (3.156)].

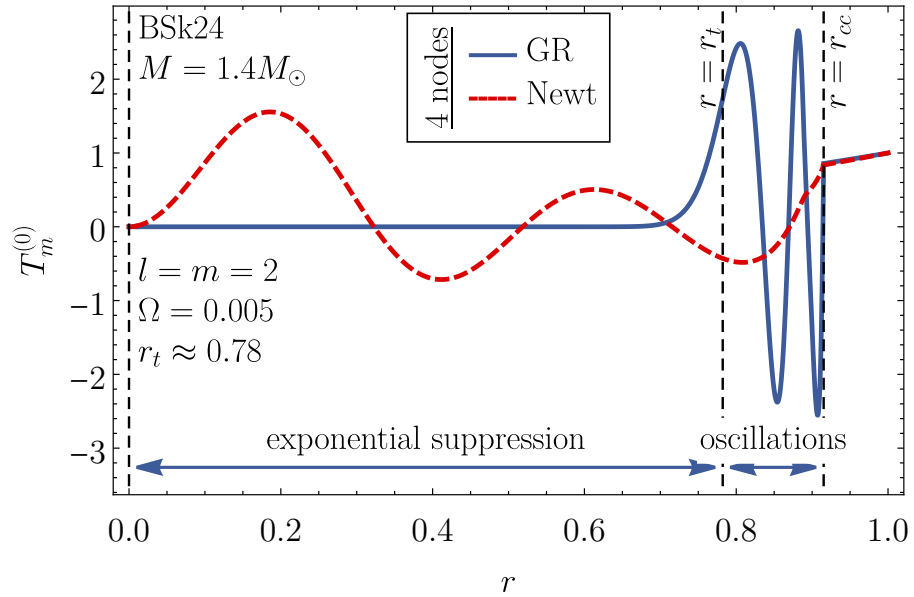


Рис. 3.6: Объяснение поведения r -мод в пределе медленного вращения на примере тороидальной функции с 4мя узлами при $\Omega = 0.005$. Вертикальными штриховыми линиями показаны центр звезды, точка поворота, определенная из условия квантования (3.184), и граница кора-ядро. Красными штрихами показана ньютоновская r -мода, а синей сплошной линией – релятивистская, полученная как решение общей системы (3.79).

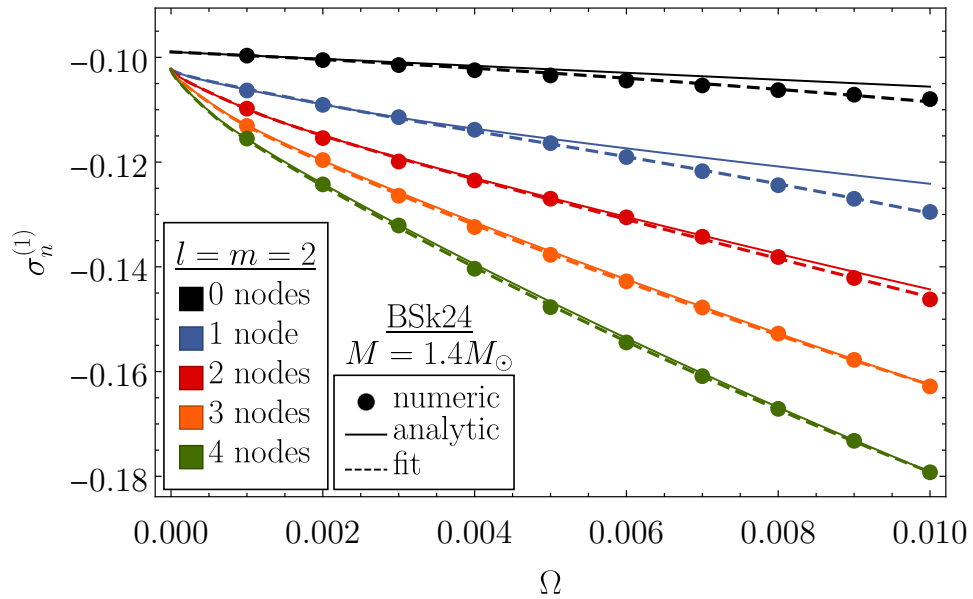


Рис. 3.7: Спектр релятивистских $l = m = 2$ r -мод при медленных скоростях вращения звезды Ω . Разные цвета соответствуют разному числу узлов тороидальной функции, варьирующемуся от 0 до 4. Кружками («numeric») показаны результаты моделирования с помощью общих уравнений (3.79). Сплошными линиями («analytic») показан спектр, рассчитанный для фундаментальной гармоники по явной формуле (3.175), а для узловых гармоник – с помощью правила квантования (3.184). Штрихами («fit») показаны результаты подгонки численных точек формулами (3.185)-(3.186), опирающимися на ожидаемый вид разложения поправок $\sigma^{(1)}$ по κ .

Мы также проверили применимость полученных выражений для спектра r -мод, как изображено на Рис. 3.7. Здесь разными цветами показаны поправки к частоте $\sigma^{(1)}$ для релятивистских r -мод с числом узлов тороидальной функции, варьирующимся от 0 до 4х. Кружками («numeric») показаны поправки, определенные в ходе решения общих уравнений (3.79) релятивистских r -мод. Сплошными линиями («analytic») показаны поправки, предсказываемые развитой нами теорией в пределе $\kappa \rightarrow 0$ и рассчитанные для фундаментальной r -моды по формуле (3.175), а для узловых r -мод – с помощью правила квантования (3.184). Видно, что при достаточно малых значениях Ω данные кривые хорошо описывают спектр r -мод, однако по мере увеличения Ω точность такого описания падает, особенно для фундаментальной гармоники и r -моды с одним узлом. Это объясняется тем, что по мере повышения скорости вращения звезды начинают играть роль поправки более высоких порядков по Ω , которые не учитываются формулами (3.175) и (3.184). Чтобы учесть влияние таких поправок, мы аппроксимировали численные точки (точки «numeric» на рисунке) подгоночными формулами

$$\sigma_{0,\text{fit}}^{(1)}(\kappa) = \sigma_{0,\text{analytic}}^{(1)}(\kappa) + \epsilon\kappa^2 c_0, \quad (3.185)$$

$$\sigma_{n,\text{fit}}^{(1)}(\kappa) = \sigma_{n,\text{analytic}}^{(1)}(\kappa) + \epsilon\kappa b_n + \epsilon\kappa^2 c_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.186)$$

где $\sigma_{0,\text{analytic}}^{(1)}$ и $\sigma_{n,\text{analytic}}^{(1)}$ – поправки, предсказываемые теорией в пределе $\kappa \rightarrow 0$ (кривые «analytic» на рисунке). Результаты такой аппроксимации показаны на рисунке штриховыми кривыми («fit»). Вид подгоночных формул (3.185)-(3.186) был выбран нами исходя из зависимости поправок $\sigma^{(1)}$ от κ , которую предсказывает разработанная нами теория. Помимо линейных вкладов, отсутствующих в ньютоновской теории, мы также включили и «привычные» вклады второго порядка. Здесь, однако, важно оговориться, что, строго говоря, наша теория допускает, что в действительности коэффициенты c_0 , c_n и b_n могут слабо зависеть от κ [см., например, выражение (3.183) для поправки $\sigma_n^{(10)}$], что в используемом фите не учитывается. Тем не менее, как видно из рисунка, формулы (3.185)-(3.186) в рассматриваемом диапазоне скоростей вращения с высокой точностью описывают спектр r -мод. Таким образом, разработанная теория действительно описывает спектр и собственные функции релятивистских r -мод в пределе $\Omega \rightarrow 0$.

3.4.5 О влиянии коры на собственные функции r -мод

Мы видели, что наличие баротропной коры, в которой ордеринг r -мод отличается от ордеринга в небаротропном ядре, позволяет удовлетворить граничным условиям на границе кора-ядро двумя способами, один из которых приводит к решению в виде фундаментальной r -моды, а второй – к узловым r -модам. Возникает вопрос, что становится с собственными функциями и спектром r -мод, если рассмотреть полностью небаротропную модель НЗ?

Для ответа на этот вопрос мы, пользуясь тем же уравнением состояния BSk24 [111], построили упрощенную полностью небаротропную $M = 1.4 M_{\odot}$ модель звезды, состоящей только из небаротропного ядра. Эта модель получается интегрированием уравнений Толмена-Оппенгеймера-Волкова от центра звезды до точки с плотностью, соответствующей границе кора-ядро в модели с корой (давление в этой точке составляет примерно 5×10^{-3} от центрального). Таким образом, поверхность в упрощенной полностью небаротропной модели звезды формально соответствует границе кора-ядро в модели с корой.

В полностью небаротропной модели $l = m$ r -моды, рассмотрением которых мы ограничиваемся, описываются системой (3.79) уже во всей звезде, и их моделирование сводится к поиску решений данных уравнений, удовлетворяющих двум граничным условиям: (1) условие регулярности в центре звезды, то есть выполнение асимптотик (3.102), и (2) условие нулевого давления на поверхности звезды, которое приводит к равенству (3.99). Получающиеся таким образом собственные функции r -мод показаны на Рис. 3.8. Здесь разные панели соответствуют решениям с разным числом узлов, варьирующимся от 0 до 3π . Черными штриховыми линиями показаны не зависящие от Ω результаты расчетов в ньютоновской теории («Newt»). Цветными сплошными линиями показаны релятивистские r -моды («GR») при скоростях Ω от 0.1 до 0.01 (напомним, что Ω измеряется в единицах Ω_K ; для полностью небаротропной модели, рассматриваемой в этом разделе, $\Omega_K \approx 1.75$ кГц). Из этого рисунка видно, что качественно поведение r -мод показывает те же особенности, что и в модели с баротропной корой: они демонстрируют локализацию во внешних слоях звезды по мере уменьшения скорости вращения. Основное отличие от модели с корой заключается в том, что экспоненциальное спадание собственных функций r -мод вглубь звезды начинается не с границы кора-ядро, а с поверхности звезды $r = 1$ (ср. с Рис. 3.2-3.3 для модели с корой).

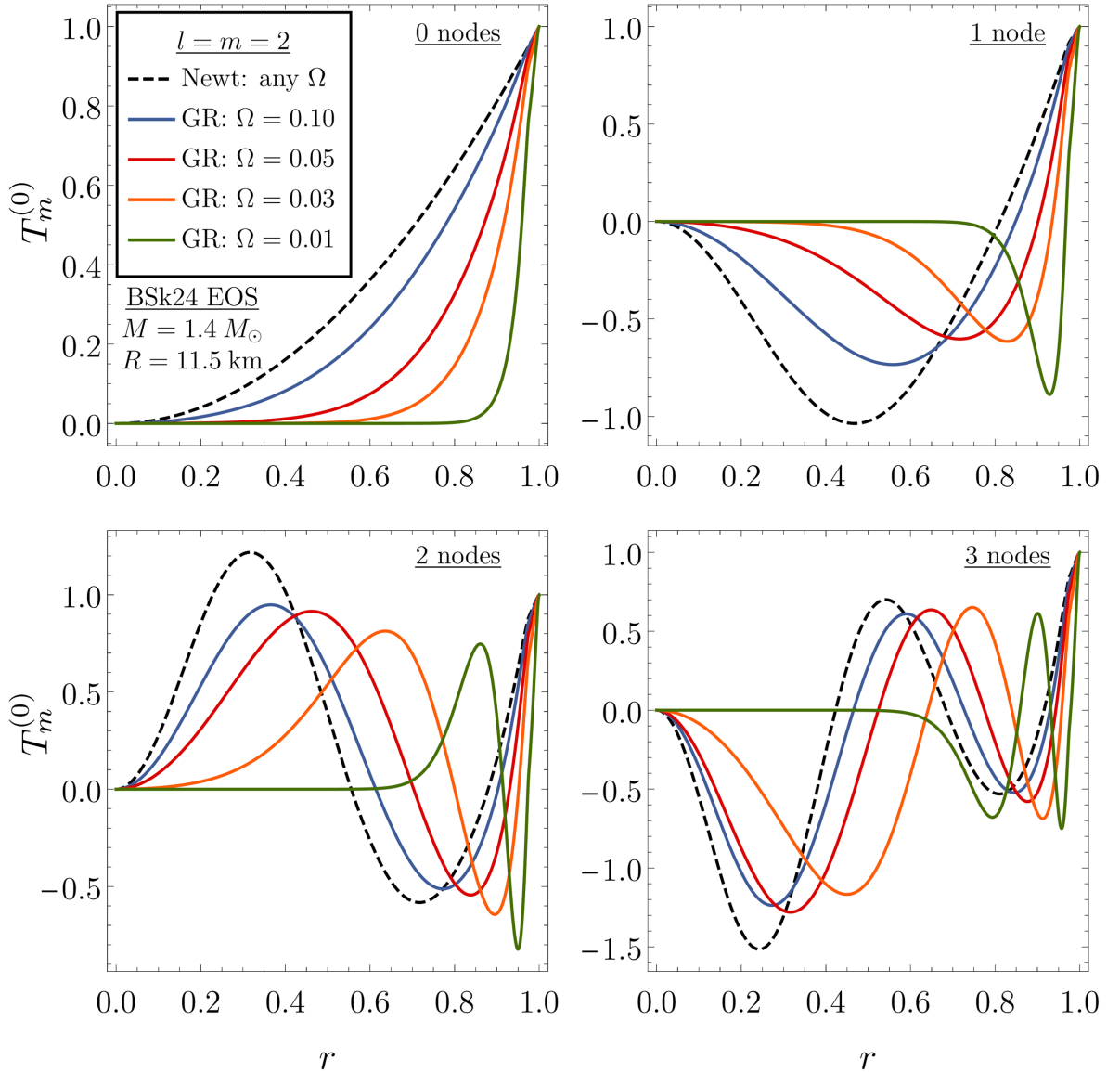


Рис. 3.8: Собственные функции $l = m = 2$ r -мод в полностью небаротропной звездной модели с числом узлов, варьирующимся от 0 до 3. Результаты расчета в ОТО («GR») для разных скоростей вращения показаны сплошными цветными линиями, а результаты расчета в ньютоновской теории («Newt»), не зависящие от скорости вращения – черными штриховыми линиями.

Особенности поведения релятивистских r -мод в пределе $\Omega \rightarrow 0$ ($\kappa \rightarrow 0$) объясняются точно так же, как и в модели с корой: они являются проявлением того же нестандартного ордеринга и неаналитической зависимости r -мод от параметра $\kappa = \Omega/\sqrt{\epsilon}$. Как и в модели с корой, явные выражения для собственных функций в этом пределе можно получить, воспользовавшись ВКБ методом в полной аналогии с тем, как это было сделано в разделе 3.4.3. Такое рассмотрение в данном случае оказывается проще, чем в модели с корой, поскольку небаротропный ордеринг r -мод теперь выполняется во всей звезде, а не только в ее ядре. Поэтому в пределе $\kappa \rightarrow 0$ граничные условия для фундаментальной

гармоники и узловых решений совпадают. Вблизи центра они сохраняют тот же вид (3.159), в то время как на поверхности звезды в данном пределе мы имеем $\xi_{m+1}^{(11)}(R) = 0$, что эквивалентно условию $T_m^{(00)'}(R) = 0$. При этом теперь каждое решение, включая фундаментальную гармонику, обладает точкой поворота r_t , которая связана с поправкой к частоте формулой [ср. с уравнением (3.161)]

$$\sigma^{(1)} = \epsilon\sigma^{(10)}, \quad \sigma^{(10)} = -\frac{2\tilde{\omega}(r_t)}{m+1}. \quad (3.187)$$

Эта точка поворота разбивает звезду на три области: область I слева от точки поворота, $r_c \leq r < r_t$, где $q_\sigma(r)$ конечна и положительна, область II вблизи точки поворота, где $q_\sigma(r)$ мала и аппроксимируется формулой (3.164), и область III справа от точки поворота $r_t < r \leq R = 1$, где $q_\sigma(r)$ конечна и отрицательна. Приближенное решение в этих областях имеет следующий вид:

$$T_{m,I}^{(00)}(r) = \frac{A_I}{q_\sigma^{1/4}(r)} \exp\left[\frac{1}{\kappa} \int_{r_c}^r \sqrt{q_\sigma} dr\right], \quad (3.188)$$

$$T_{m,II}^{(00)}(r) = A_{II} \text{Ai}(z), \quad z \equiv (r_t - r) \left(\frac{\alpha}{\kappa}\right)^{2/3}, \quad \alpha^2 = -\frac{2\tilde{\omega}'(r_t) G_2(r_t)}{m+1 C_1(r_t)}, \quad (3.189)$$

$$T_{m,III}^{(00)}(r) = \frac{A_{III}}{|q_\sigma(r)|^{1/4}} \sin\left[\frac{1}{\kappa} \int_{r_t}^r \sqrt{|q_\sigma|} dr + \frac{\pi}{4}\right]. \quad (3.190)$$

Наконец, с помощью решения в области III мы получаем, что граничное условие $T_m^{(00)'}(R) = 0$ на поверхности приводит к правилу квантования

$$\int_{r_t}^R \sqrt{|q_\sigma|} dr = \pi\kappa \left(n + \frac{1}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (3.191)$$

позволяющему рассчитать поправки $\sigma_n^{(1)}$ для r -мод с числом узлов n . В пределе экстремально медленного вращения, когда в области $r_t \leq r \leq R$ можно использовать разложение $q_\sigma(r)$, правило квантования приводит к следующему выражению для спектра [ср. с формулой (3.183)]:

$$\sigma_n^{(10)} = -\frac{2\tilde{\omega}(R)}{m+1} \left\{ 1 - \frac{\tilde{\omega}'(R)}{\tilde{\omega}(R)} \left[\frac{3\pi\kappa}{2\alpha} \left(n + \frac{1}{4}\right) \right]^{2/3} \right\}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.192)$$

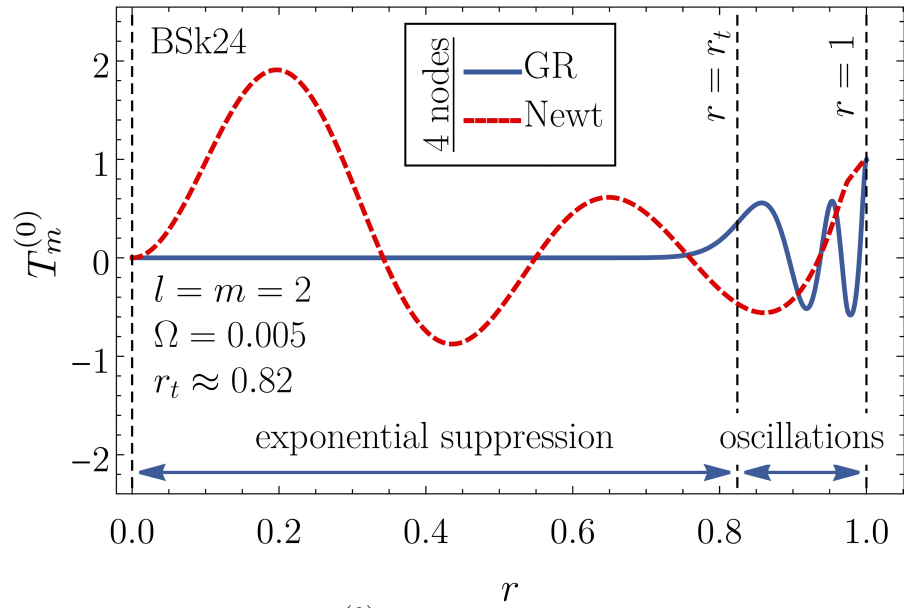


Рис. 3.9: Сравнение функций $T_m^{(0)}(r)$ релятивистской («GR») и ньютоновской («Newt») r -мод при малых скоростях вращения в полностью небаротропной модели. Аналог Рис. 3.6, полученного в модели с баротропной корой.

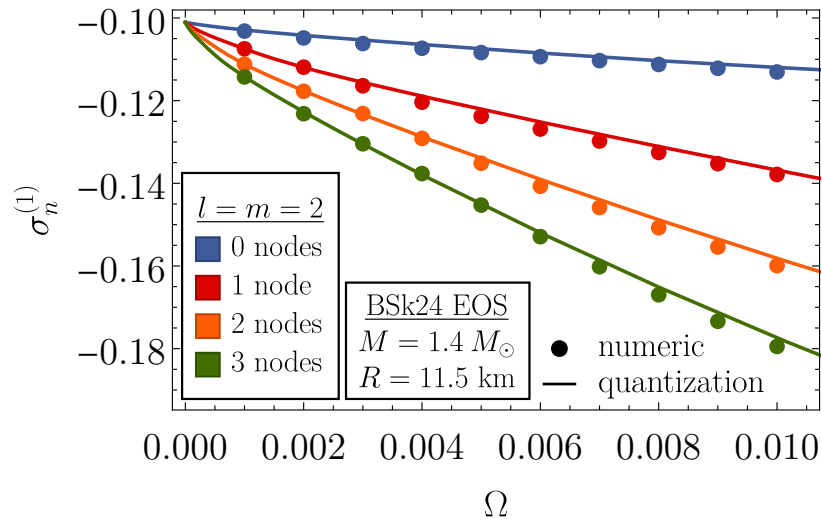


Рис. 3.10: Спектр релятивистских r -мод в полностью небаротропной модели, полученный с помощью системы (3.79) [«numeric»] и правила квантования (3.191) [«quantization»]. Аналог Рис. 3.7 для модели с баротропной корой.

В завершение этого раздела мы приводим Рис. 3.9 и Рис. 3.10, являющиеся аналогами Рис. 3.6 и Рис. 3.7, построенных в предыдущем разделе для модели с баротропной корой. А именно, Рис. 3.9 показывает на примере r -моды с 4мя узлами, что развитая теория объясняет локализацию r -мод во внешних слоях звезды по мере замедления вращения звезды, а Рис. 3.10 показывает согласие между численными значениями частот r -мод (точки «numeric»), полученных при решении общей системы (3.79), и предсказанием формулы квантования (3.191) (кривые «quantization»).

Таким образом, мы видим, что, по крайней мере в рамках используемого нами гидродинамического подхода, баротропная кора качественно достаточно слабо влияет на физические свойства r -мод. По этой причине ниже мы иногда для простоты вместо более точной модели звезды с баротропной корой и небаротропным ядром будем использовать упрощенную менее физичную модель полностью небаротропной звезды, описанную в этом разделе. Применимость такого приближения в решаемых далее задачах будет оговариваться отдельно.

3.5 Обсуждение результатов главы 3

В данной главе, чтобы найти релятивистское обобщение ньютоновских r -мод, мы предложили и использовали альтернативный подход к анализу релятивистских уравнений колебаний. Проведенное исследование опирается на упрощенную модель, в рамках которой нейтронная звезда разделяется на две области: баротропная кора и небаротропное ядро. Поскольку баротропность вещества в существенной степени влияет на математическую структуру задачи, уравнения колебаний в ядре и в коре рассматривались по отдельности.

Несмотря на то, что мы изучали случай медленно вращающихся звезд, в отличие от стандартного подхода [11, 12, 79, 148–154] (см. также раздел 3.2.1) мы не постулировали ордеринг r -мод, то есть не делали исходных предположений о зависимости их собственных функций и спектра от скорости вращения Ω . Вместо этого мы рассматривали ордеринг как неизвестную характеристику, подлежащую определению при анализе уравнений. При этом при выводе этих уравнений предполагается только то, что скорость вращения звезды является медленной, а эффект увлечения и.с.о. – слабым. Такой подход, в отличие от стандартного, который дополнительно опирается на теорию возмущений по Ω , позволяет изучать решения, зависящие от Ω неаналитичным образом.

Согласно полученным результатам, ведущий вклад в частоту релятивистских r -мод в точности совпадает с ведущим вкладом в ньютоновской теории, а полученные численные решения релятивистских уравнений для случая $l = m = 2$ описывают релятивистские r -моды, характеризующиеся *дискретным* спектром. Таким образом, по крайней в рассмотренном диапазоне частот вблизи «классических» частот r -мод мы не находим никаких указаний на наличие непрерывной составляющей в спектре. В отличие от предсказаний стандартной теории, предсказания разработанной нами теории находятся в согла-

сии с результатами более общих численных расчетов, проведенных за рамками приближения медленного вращения в баротропных [82, 156, 157, 166] и, что важнее, небаротропных звездах [76, 159], где проблема непрерывного спектра до этого момента оставалась неразрешенной. В ходе подробного анализа полученных уравнений в пределе $\Omega \rightarrow 0$ нам также удалось вывести явные выражения для собственных функций и спектра r -мод, каждая из которых, как и в ньютоновском случае, однозначно идентифицируется по числу узлов тороидальной функции. Данные выражения позволяют объяснить ряд особенностей релятивистских r -мод, выявленных в наших численных расчетах и расчетах других авторов. Так, в работе [76] на Рис. 6-8 можно наблюдать очень похожую на предсказываемую нами зависимость спектра r -мод от Ω , а также их локализацию вблизи поверхности звезды в пределе $\Omega \rightarrow 0$. Мы также обнаружили сходство нашего спектра r -мод с результатами численных расчетов, проведенных в работе [159]. В этой же работе было обнаружено подавление радиальной скорости колебаний – как предсказывает наша теория, такие скорости должны быть подавлены по сравнению с горизонтальными на фактор порядка Ω (если точнее – фактор порядка $\sqrt{\epsilon\Omega}$). Важно отметить, что, как и в ньютоновской теории, нам удастся найти r -моды в рамках приближения Каулинга, в то время как обсуждаемые в литературе релятивистские r -моды с дискретным спектром [153, 165] и изолированными частотами, сосуществующими с непрерывным спектром [154], могут быть получены исключительно за рамками данного приближения (см. также обсуждение выше в разделе 3.3.2). Более того, полученные нами уравнения воспроизводят уравнения ньютоновских r -мод в соответствующем пределе. Учитывая все вышесказанное, мы заключаем, что найденные нами решения действительно представляют собой релятивистское обобщение ньютоновских r -мод.

Так почему же релятивистские r -моды не удастся описать в рамках стандартного подхода, унаследованного из ньютоновской теории? Вспомним, что при таком подходе изучение эффектов вращения на колебания звезд начинается с изучения колебаний невращающихся звезд, а затем ведется поиск малых поправок к данным решениям, обусловленных медленным вращением звезды. По аналогии с ньютоновской теорией предполагается, что решение, которое перейдет в r -моды при включении вращения, в невращающейся звезде соответствует решениям, которые образуют подмножество в подпространстве колеба-

ний с нулевой частотой (в литературе – «zero-frequency subspace»). При включении медленного вращения такие решения приобретают малую конечную частоту и становятся r -модами. Таким образом, стандартный подход опирается на теорию возмущений по Ω . Ее применение к анализу релятивистских уравнений колебаний немедленно указывает на стандартный ордеринг r -мод, который, в свою очередь, предсказывает неминуемое существование непрерывной составляющей в спектре r -мод. Теперь отметим, что каждое сделанное выше предположение и каждый сделанный выше шаг являются оправданными тогда и только тогда, когда изучаемые колебания описываются аналитическими функциями Ω , то есть их собственные функции и спектр можно представить в виде рядов по Ω . Данное предположение, как демонстрирует развитая в данной главе теория, оказывается неверным: из-за эффекта увлечения и.с.о. релятивистские r -моды неаналитичным образом зависят от Ω , что становится особо явным по мере уменьшения скорости вращения звезды. Так, в пределе $\Omega \rightarrow 0$, решение в небаротропном ядре описывается формулами (3.168) и (3.174):

$$T_{m,I}^{(0)}(r) \propto \exp\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{\Omega} \int_{r_c}^r \sqrt{q_\sigma} dr\right), \quad T_{m,II}^{(0)}(r) \propto \text{Ai}\left[(r_t - r) \left(\frac{\alpha\sqrt{\epsilon}}{\Omega}\right)^{2/3}\right]. \quad (3.193)$$

Из-за неаналитичности данные функции неопределены при $\Omega = 0$ и принципиально не могут «происходить» от решений из подпространства колебаний с нулевой частотой в звезде с $\Omega = 0$. По этой же причине такие решения не описываются стандартными методами, опирающимися на разложение всех величин в ряды по Ω . Что касается баротропной коры, полученные нами r -моды описывались бы аналитическими функциями Ω , если бы кора не была связана с небаротропным ядром через граничные условия на границе кора-ядро.

Эффект увлечения и.с.о. также существенно модифицирует ордеринг релятивистских r -мод. Так, вместо стандартного ордеринга ньютоновских r -мод

$$\sigma^{(1)} \sim \Omega^2, \quad (3.194)$$

$$\xi_{\text{Newt}}^r \sim \Omega^2 T_{\text{Newt}}, \quad (3.195)$$

$$Q_{\text{Newt}} \sim \Omega^2 T_{\text{Newt}}, \quad (3.196)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\text{Newt}} \sim 1 \quad (3.197)$$

ордеринг релятивистских r -мод в пределе $\Omega \rightarrow 0$ имеет следующий вид:

$$\sigma^{(1)} \sim \epsilon, \quad \sigma^{(1)} \sim \epsilon \quad (3.198)$$

$$\xi_{\text{GR,core}}^r \sim \sqrt{\epsilon} \Omega T_{\text{GR,core}}, \quad \xi_{\text{GR,crust}}^r \sim \epsilon T_{\text{GR,crust}} \quad (3.199)$$

$$Q_{\text{GR,core}} \sim \epsilon T_{\text{GR,core}}, \quad Q_{\text{GR,crust}} \sim \epsilon T_{\text{GR,crust}} \quad (3.200)$$

$$\left(\frac{d}{dr} \right)_{\text{GR,core}} \sim \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Omega}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_{\text{GR,crust}} \sim 1. \quad (3.201)$$

При этом как в ядре, так и в коре (искусственное) выключение эффекта увлечения и.с.о. приводит к восстановлению стандартного ордеринга. Также подчеркнем, что, согласно релятивистскому ордерингу, ведущий вклад в поправку $\sigma^{(1)}$ к частоте в данном пределе связан с увлечением и.с.о., а не с медленным вращением звезды, как в ньютоновской теории. Нам удалось показать, что в пределе $\Omega \rightarrow 0$ частота фундаментальной $l = m$ r -моды (в инерциальной с.о.) может быть вплоть до слагаемых линейного порядка по Ω рассчитана по формуле

$$\sigma_0(\Omega) = \frac{2\Omega}{m+1} \left\{ 1 + \frac{m+1}{2} \left[\epsilon \sigma_0^{(10)} + \sqrt{\epsilon} \Omega \sigma_0^{(11)} \right] \right\} - m\Omega, \quad (3.202)$$

где коэффициенты $\sigma_0^{(10)}$ и $\sigma_0^{(11)}$ определяются уравнениями (3.176)-(3.177). В то же время спектр узловых $l = m$ r -мод в данном пределе описывается формулой

$$\sigma_n(\Omega) = \frac{2\Omega}{m+1} \left[1 - \omega(r_{\text{cc}}) \left\{ 1 + z_n \frac{\omega'(r_{\text{cc}})}{\omega(r_{\text{cc}})} \left(\frac{\Omega}{\alpha \sqrt{\epsilon}} \right)^{2/3} \right\} \right] - m\Omega, \quad (3.203)$$

$$\text{Ai}(z_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.204)$$

где n – число узлов тороидальной функции, а коэффициент α определен равенством (3.181). Отметим, что у данных формул нет аналогов в ньютоновской теории, где расчет поправок к частоте требует численного решения уравнений. Мы также видим, что в случае узловых r -мод увлечение и.с.о. приводит к неаналитичности не только их собственных функций, но и их спектра.

Подводя итоги, мы видим, что эффект увлечения и.с.о. приводит к краху стандартных методов при попытке их применения к описанию релятивистских r -мод, поскольку он приводит к неаналитичности r -мод и модифицирует их ордеринг. При этом не только собственные функции, но и собственные частоты узловых r -мод оказываются неаналитическими функциями Ω . В завершение

этой главы, однако, необходимо обсудить ряд закономерных вопросов, касающихся полученных нами решений и применимости приближений, использованных при моделировании.

Во-первых, как мы упоминали в разделе 3.3.2, в работе [153] было показано, что r -моды не могут существовать в баротропных звездах, и что релятивистским обобщением $l = m = 2$ ньютоновских мод оказываются релятивистские инерционные моды. На первый взгляд может ошибочно показаться, что, поскольку мы нашли решение в баротропной коре, наши результаты вступают в противоречие с выводами данной работы. Кажущееся противоречие возникает из-за того, что под термином « r -моды» в литературе понимаются колебания, для которых (по аналогии с ньютоновским случаем) отклонения движения вещества от чисто тороидального тем меньше, чем меньше скорость вращения, то есть нетороидальные составляющие движения подавлены при малых скоростях вращения звезды. С этой точки зрения, полученные нами решения, строго говоря, некорректно называть r -модами. Хотя они действительно описывают квазиторoidalные колебания, в коре их нетороидальные составляющие подавлены по сравнению с тороидальными не за счет медленного вращения звезды, а из-за слабого увлечения и.с.о. Та же оговорка частично относится и к небаротропному ядру: хотя радиальная составляющая движения действительно мала при медленном вращении звезды, малость функции Q связана в первую очередь с малостью параметра ϵ . Поэтому те решения, что мы находим в данной работе, нельзя назвать « r -модами» в общепринятом смысле. Тем не менее мы все же используем этот термин, поскольку они являются квазиторoidalными и представляют собой релятивистское обобщение ньютоновских r -мод.

Во-вторых, мы полностью пренебрегаем сплюснутостью звезды, обусловленной ее вращением [то есть слагаемыми $O(\Omega^2)$ в формулах (1.37)–(1.38)]. Мы используем это приближение в основном для того, чтобы упростить уравнения, и признаем, что для более точного моделирования от него следует отказаться. Тем не менее мы ожидаем, что его использование может лишь слабо повлиять на наши выводы. Мы проверили, что учет сплюснутости звезды сохраняет математическую структуру уравнений r -мод как в релятивистской, так и в ньютоновской теории, а потому ее включение не меняет и обнаруженных особых свойств релятивистских r -мод – их неаналитичности и нестандартного ордеринга. Кроме того, согласно ньютоновским расчетам [12], сплюснутость

звезды может повлиять лишь на поправку к частоте $\sigma^{(1)}$, в то время как тороидальная функция при ее включении остается практически неизменной. Также наши предварительные расчеты показывают, что и в релятивистской теории сплюснутость звезды слабо влияет на тороидальную функцию.

В-третьих, наши расчеты проведены в рамках приближения Каулинга, то есть в гидродинамических уравнениях мы пренебрегаем возмущениями гравитационного поля, предполагая, что они малы по сравнению с возмущениями гидродинамических величин. Обнаруженная локализация релятивистских r -мод во внешних областях звезды при малых Ω позволяет заключить, что в данном пределе ошибка в определении их спектра, связанная с приближением Каулинга, должна быть существенно меньше относительной ошибки в 6-11%, полученной в работе [82]. Действительно, возмущения гравитационного поля в коре не влияют на физику более глубоких слоев звезды, в то время как практически во всем ядре возмущения гравитационного поля в данном пределе будут экспоненциально подавлены. В случае узловых r -мод этот эффект дополнительно усиливается видом собственных функций r -мод, быстрые осцилляции которых «сокращают» друг друга и тем самым предотвращают возмущение гравитационного поля. Так или иначе, поиск дискретных релятивистских r -мод за рамками приближения Каулинга больше не должен вызывать особых затруднений, поскольку теперь нам известно о неаналитичности r -мод, а также нам удалось найти дискретный спектр релятивистских r -мод в приближении Каулинга, где проблема непрерывного спектра, как кажется, стояла особо остро. Результаты наших предварительных расчетов, основанных на рассмотрении полной системы релятивистских уравнений колебаний (то есть линеаризованных уравнений Эйнштейна), показывают, что ордеринг гидродинамических собственных функций r -мод совпадает с тем, что мы предсказали в приближении Каулинга, а динамика r -мод при $\Omega \rightarrow 0$ описывается *в точности* теми же уравнениями, что и в приближении Каулинга.

В-четвертых, мы полагались на упрощенное описание коры НЗ: мы моделировали ее как баротропную жидкость, пренебрегая при этом эффектами, связанными с ее кристаллической решеткой. Пока кора моделируется гидродинамически, она, будучи тонкой и легкой по сравнению с ядром, не может значительно модифицировать собственные функции r -мод (что мы и видели в разделе 3.4.5). Однако нужно иметь в виду, что такое моделирование может

оказаться неточным для r -мод с частотами, близкими к частотам торсионных колебаний, связанных с кристаллической решеткой в коре. В этом случае более точное описание, учитывающее упругость коры, может оказаться важным.

В-пятых, мы пренебрегаем изменениями, которые спаривание нуклонов привносит в вид гидродинамических уравнений. Как мы говорили в разделах 1.1-1.2, наиболее общее рассмотрение данных эффектов требует введения дополнительных скоростей, которые описывают потоки сверхтекучих/сверхпроводящих сортов частиц (если точнее – сверхтекучей/сверхпроводящей компонент рассматриваемых сортов частиц). При этом, как обсуждалось в этих же разделах, гидродинамические уравнения в веществе с одним сверхпроводящим сортом частиц и нормальными остальными эффективно совпадают с уравнениями гидродинамики нормального вещества. Это происходит из-за электромагнитного взаимодействия, которое сцепляет сверхпроводящие частицы с заряженными нормальными и таким образом принуждает их двигаться с той же скоростью. Поэтому наши результаты точно описывают r -моды не только в случае нормального вещества, но также и вещества со сверхпроводящими протонами и нормальными остальными сортами частиц. Сверхтекучесть нейтронов, в свою очередь, модифицирует гидродинамические уравнения уже в любом случае, даже если все остальные сорта частиц являются нормальными. Поэтому точное моделирование в этом случае, конечно, должно основываться на уравнениях сверхтекучей гидродинамики, а полученные нами результаты следует рассматривать как оценку свойств нормальных мод, в которых нормальная и сверхтекучая компоненты движутся примерно одинаково.

Далее, все наше рассмотрение опиралось на вспомогательное предположение о том, что увлечение и.с.о. является слабым. Возникает вопрос, что произойдет, если мы откажемся от этого приближения? На данный момент, чтобы ответить на этот вопрос, мы разрабатываем обобщение теории на случай произвольного (то есть необязательно слабого) увлечения и.с.о. Мы ожидаем, что в этом случае квазитороидальные решения релятивистских уравнений колебаний перестанут существовать. В баротропных звездах полученные решения, как мы предполагаем, превратятся в гибридные инерционные моды из работы [153] (но в приближении Каулинга). В небаротропных звездах, согласно нашим предварительным расчетам, неаналитические r -моды, описанные в этой работе, превратятся в неаналитические инерционные моды, в которых при

медленном вращении радиальное движение (описываемое функцией ξ^r) будет подавлено по сравнению с горизонтальным (описываемым функциями Q и T). Несмотря на это мы ожидаем, что в пределе $\Omega \rightarrow 0$ спектр и собственные функции данных мод не должны существенно отличаться от того, что мы нашли в пределе слабого увлечения и.с.о. Действительно, мы видели, что при малых значениях скорости вращения r -моды локализуются во внешних слоях звезды, где эффект увлечения и.с.о. действительно можно считать слабым.

Наконец, отметим, что, хотя стандартный подход не способен описывать дискретные r -моды в небаротропных звездах, нам все еще необходимо ответить на вопрос, соответствуют ли обсуждаемые в литературе r -моды некоторым настоящим колебаниям, которые могут быть найдены за рамками приближения теории возмущений. Как мы обсуждали в разделе 3.3.2, подобные численные расчеты не находят каких-либо признаков непрерывной составляющей в спектре колебаний. С нашей точки зрения, это указывает на некоторую внутреннюю противоречивость теории r -мод, опирающейся на теорию возмущений по Ω . Подобного рода несамосогласованность имеет место в баротропных звездах: система уравнений, получающаяся в рамках стандартного подхода, в этом случае оказывается переопределенной [153]. Выявление подобного или какого-либо другого внутреннего противоречия в случае небаротропных звезд представляет собой отдельную интересную задачу, рассмотрение которой, однако, выходит за рамки рассмотрения в данной диссертации.

Глава 4. Окна неустойчивости r -мод

Поскольку релятивистские r -моды в небаротропных звездах сильно отличаются от ньютоновских, представляет интерес изучить и сравнить с предсказаниями ньютоновской теории их поведение (затухание/раскачку) под действием диссипативных механизмов и эффектов, связанных с излучением гравитационных волн, чему и посвящена данная глава. Она основана на оригинальных работах [30, 31] и по существу представляет собой применение общего формализма для описания влияния диссипации и гравитационного излучения (см. раздел 1.3) к релятивистским и ньютоновским r -модам, моделирование которых подробно обсуждалось в предыдущей главе.

4.1 Об окнах неустойчивости и параметрах звезд в LMXB системах

Как обсуждалось в предыдущей главе, r -моды представляют собой квази-тороидальные колебания вращающихся звезд, которые управляются в первую очередь силой Кориолиса. Особый интерес к r -модам связан с тем, что, по сравнению с другими колебаниями, они наиболее легко раскачиваются CFS-механизмом, согласно которому излучение гравитационных волн колеблющейся звездой для некоторых колебаний приводит к перекачке энергии вращения звезды в энергию осцилляций (см. [24, 74, 126–128] и обсуждение в разделе 1.3.4). При благоприятных условиях этот процесс может приводить к росту амплитуды колебаний, что, в свою очередь, приводит к усилению гравитационного излучения и тем самым замыкает обратную положительную связь. Оказывается [13, 14], что в случае r -мод перекачка энергии возникает при *любой* скорости вращения звезды, что делает их многообещающими кандидатами для поисков гравитационного излучения. В случае обнаружения гравитационно-волновой сигнал от r -мод послужил бы источником ценной информации о физических свойствах вещества в условиях, на сегодняшний день невозпроизводимых в земных лабораториях.

Современные электромагнитные и гравитационно-волновые наблюдения позволяют установить лишь верхние пределы на амплитуду r -мод, однако гравитационно-волновые детекторы следующего поколения, возможно, смогут зарегистрировать первые сигналы от r -мод (см., например, [10, 172–178] и ссылки в данных источниках). Тот факт, что r -моды до сих пор не были надежно задетектированы, можно объяснить не только недостаточной чувствительностью детекторов, но и влиянием различных диссипативных механизмов, которые приводят к теплотерям в ходе колебаний и тем самым, в отличие от CFS-механизма, стремятся их подавить (см. обзоры [20, 179]). Поэтому развитие неустойчивости зависит от того, является ли CFS-механизм достаточно эффективным, чтобы преодолеть диссипативные энергопотери колебаний. Как правило, мощность (1.190, 1.196) CFS-механизма $(d\tilde{E}/dt)_{\text{GW}} > 0$ и скорость (1.160, 1.198) диссипативных энергопотерь $(d\tilde{E}/dt)_{\text{diss}} < 0$ могут рассматриваться как функции скорости вращения звезды Ω и красномещенной температуры T^∞ (1.47). Сравнивая $(d\tilde{E}/dt)_{\text{GW}}$ и $(d\tilde{E}/dt)_{\text{diss}}$ можно определить так называемое *окно неустойчивости r -мод* – область на плоскости (Ω, T^∞) , в которой CFS-механизм оказывается эффективнее диссипации и r -моды становятся неустойчивыми [11, 21, 22, 25, 26, 180, 181]¹.

Форма *модельного* окна неустойчивости зависит от множества факторов, таких как используемое уравнение состояния вещества, его химический состав, рассматриваемые каналы диссипации, а также методы и приближения, применяемые в расчетах. Насколько нам известно, все имеющиеся расчеты окон неустойчивости используют r -моды, смоделированные в рамках ньютоновской теории. Наипростейшие или, как мы их будем называть, *минимальные* модели, следуя первому исследованию [21], предполагают нуклонный состав звездного вещества и описывают его с помощью баротропного уравнения состояния. За диссипацию энергии в минимальных моделях отвечают сдвиговая вязкость η (трение слоев жидкости при их относительном движении) и объемная вязкость ζ (энергопотери из-за неравновесного протекания химических реакций), обсуждавшиеся в разделе 1.3.1. Сдвиговая вязкость, как правило, эффективна при низких температурах, а при высоких температурах $T^\infty > 10^9$ К диссипация обеспечивается преимущественно объемной вязкостью, что в минимальных моделях приводит к V-образной форме окон неустойчивости.

¹Напомним, что под энергией колебаний \tilde{E} мы подразумеваем связанное с колебаниями возмущение энергии во вращающейся системе отсчета (см. раздел 1.2.4).

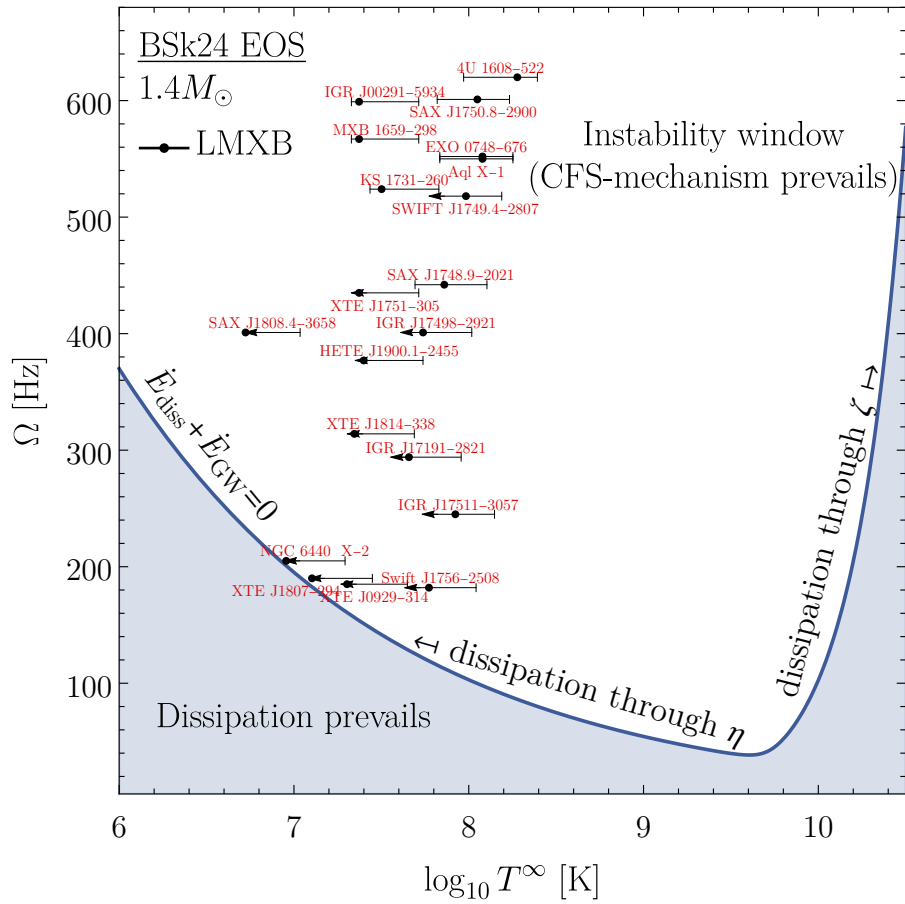


Рис. 4.1: Типичное окно неустойчивости ньютоновских r -мод в небаротропных нейтронных звездах с нуклонным веществом. Здесь сдвиговая (η) и объемная (ζ) вязкости считаются единственными механизмами диссипации. Синяя кривая разделяет плоскость на две области: долину стабильности снизу, где r -моды подавлены, и окно неустойчивости сверху, где они неустойчивы. Черными точками показаны наблюдения НЗ в LMXB системах, заимствованные из [167], а соответствующая неопределенность в значении температур отражает неопределенность химического состава внешних слоев звезды (см. детали в работе [134]). Рисунок построен с помощью результатов, полученных в разделе 4.3.

На рисунке 4.1 показано типичное окно неустойчивости ньютоновских r -мод в небаротропных НЗ с нуклонным составом (см. детали в разделе 4.3). Несмотря на то, что вещество здесь считается небаротропным, форма окна неустойчивости качественно совпадает с присущей минимальным моделям, предполагающим баротропность вещества. Синяя кривая разделяет плоскость (Ω, T^∞) на две области: затененную долину стабильности, где r -моды подавлены диссипативными механизмами, и расположенное выше окно неустойчивости. Черными точками показаны наблюдения НЗ в маломассивных рентгеновских двойных системах (LMXB), заимствованные из [167], а соответствующая неопределенность в значениях температур отражает неопределенность хими-

ческого состава внешних слоев НЗ (см. детали в работе [134]). Теория предсказывает, что вероятность обнаружить звезду с возбужденной r -модой внутри окна неустойчивости крайне мала, поскольку из-за стремительного замедления вращения, обусловленного излучением гравитационных волн, звезда проводит в данной области лишь малую часть своей жизни (см., например, [20, 22, 134, 182, 183]). Следовательно, тот факт, что множество звезд в LMXB системах попадают внутрь описанных окон неустойчивости указывает на необходимость модифицировать теорию. Наиболее популярный подход заключается в поиске дополнительных ранее не учитывавшихся механизмов диссипации, которые оказались бы достаточно сильными, чтобы изменить форму окна неустойчивости таким образом, чтобы оно больше не содержало наблюдаемых источников. В качестве возможных кандидатов в литературе рассматривались диссипация в слое Экмана [23, 184, 185], взаимное трение [20, 186–189], резонансная стабилизация r -мод сверхтекучими модами [9, 62, 134, 167, 190, 191], усиленная объемная вязкость в гиперонной материи [20, 65, 68, 130, 192, 193] и вязкость с учетом модификации нуклон-нуклонного взаимодействия в среде [25, 26] (см. также обзоры [20, 179]). Альтернативный подход заключается в более точном моделировании самих r -мод, которое, например, опиралось бы на более реалистичные уравнения состояния или учитывало бы релятивистские эффекты.

В этой главе мы рассматриваем ряд улучшений описанной выше минимальной модели. *Во-первых*, мы предлагаем *одновременно* учитывать релятивистские эффекты и небаротропность звездного вещества. Долгое время подобное моделирование оставалось трудно осуществимым, поскольку, как обсуждалось в разделе 3.3.2, разные подходы к моделированию релятивистских r -мод приводили к качественно разным предсказаниям и даже само существование r -мод в ОТО было под вопросом. В предыдущей главе нам удалось найти возможное решение данной проблемы. При этом мы обнаружили, что релятивистские r -моды в небаротропном веществе существенно отличаются от своих ньютоновских аналогов и обладают рядом необычных свойств. Особенности релятивистских r -мод обусловлены эффектом увлечения и.с.о., который модифицирует их спектр колебаний и геометрию потоков вещества, а также приводит к неаналитичной зависимости их собственных функций от скорости вращения звезды Ω . Подобная зависимость от Ω сильно отличается от аналитической зависимости ньютоновских r -мод и по мере уменьшения Ω приводит к

экспоненциальному подавлению r -мод в ядре звезды. Как мы увидим ниже, эти особенности релятивистских r -мод кардинально влияют на их окна неустойчивости. В частности, мы увидим, что подавление релятивистских r -мод объемной вязкостью и диффузией частиц происходит на существенно более коротких временах по сравнению с предсказаниями ньютоновской теории.

Во-вторых, мы предлагаем исследовать роль диффузии частиц в качестве дополнительного диссипативного механизма. Как мы видели в главе 2, сверхпроводимость протонов приводит к усиленной диффузии, в результате чего последняя при низких и умеренных температурах становится доминирующим каналом диссипации для звуковых волн, p -мод и g -мод. Представляет интерес изучить, насколько эффективно диффузия может подавлять r -моды и может ли она существенно изменить их окна неустойчивости. Как мы увидим, в ньютоновской теории диффузией можно пренебречь по сравнению со сдвиговой вязкостью. Для релятивистских r -мод, однако, при низких и умеренных температурах именно диффузия окажется ведущим диссипативным механизмом, превышая по эффективности сдвиговую вязкость на несколько порядков.

В-третьих, мы предлагаем изучить влияние возможного присутствия гиперонов в ядре звезды на окна неустойчивости релятивистских r -мод. В звездах с обычным нуклонным составом вещества объемная вязкость определяется модифицированными урка и, в наиболее массивных звездах, прямыми урка процессами [63, 64] (см. также раздел 1.3.2). При температурах $T \ll T_F$, где $T_F \sim 10^{12} - 10^{13}$ К – типичные температуры Ферми составляющих вещество сортов частиц, скорости этих реакций сильно подавлены соответственно как $(T/T_F)^6$ и $(T/T_F)^4$ (в предположении, что вещество не является сверхтекучим). По этой причине объемная вязкость в нуклонном веществе может обеспечивать существенный вклад в диссипацию энергии только при достаточно высоких температурах $T^\infty > 10^9$ К (см. Рис. 4.1). В звездах с *гиперонным* составом, однако, объемная вязкость определяется *слабыми безлептонными процессами*, которые становятся доступными с появлением гиперонов. При низких температурах скорость этих процессов подавлена лишь как $(T/T_F)^2$, что указывает на существенно более быстрое их протекание по сравнению с урка процессами и, следовательно, на *бóльшие значения коэффициента объемной вязкости*².

²Строго говоря, более высокая скорость реакций приводит к большей объемной вязкости лишь тогда, когда релаксация к химическому равновесию происходит на временах много больше периода колебаний. В противоположном пределе быстрой релаксации чем быстрее реакции, тем меньше объемная вязкость (см. раздел 1.3.2).

В результате диссипация за счет объемной вязкости значительно усиливается в присутствии гиперонов. До недавних времен теория предсказывала [20, 65, 130, 192, 193], что данное усиление недостаточно эффективно, чтобы подавить r -моды в наблюдаемых источниках. Указанные исследования, однако, предполагали $\Sigma^- \Lambda$ -гиперонный состав вещества, в то время как многие современные уравнения состояния (см., например, [32–36]) предсказывают, что с ростом плотности наиболее вероятно первыми появляются Λ и Ξ^- гипероны. Кроме того в данных работах не учитывался наиболее эффективный канал протекания слабых безлептонных процессов – через обмен мезонами [67]. Как было показано в работе [68], учет данного канала вместе с заменой $\Sigma^- \Lambda$ -состава на $\Lambda \Xi^-$ -состав приводит к тому, что гиперонная объемная вязкость становится гораздо более жизнеспособным объяснением наблюдений, чем считалось ранее. В частности, для ньютоновских r -мод было показано, что при некоторых комбинациях уравнения состояния и массы звезды гиперонная вязкость способна подавить r -моды в наблюдаемых источниках. Данный результат, однако, был получен в рамках ньютоновской теории, которая, как мы выяснили в предыдущей главе, некорректно описывает свойства r -мод при физических условиях, реализующихся в нейтронных звездах. Представляет интерес пересмотреть данную задачу с учетом особенностей релятивистских r -мод. Как мы увидим, для релятивистских r -мод гиперонная объемная вязкость окажется гораздо более сильным механизмом диссипации, чем для ньютоновских: ее эффективности оказывается достаточным для того, чтобы обеспечить подавление r -мод в самых «проблемных» источниках – умеренно горячих и наиболее быстро вращающихся звездах в LMXB системах – даже с учетом эффектов нуклонной сверхтекучести и сверхпроводимости.

Изложение ниже разбито на четыре части. В разделе 4.2 мы получаем и анализируем выражения для расчета энергии r -мод и темпов ее изменения под действием рассматриваемых эволюционных механизмов. В разделе 4.3 мы исследуем роль диффузии частиц в подавлении релятивистских r -мод и рассматриваем ее влияние на их окна неустойчивости. Раздел 4.4 посвящен изучению влияния гиперонной объемной вязкости на окна неустойчивости релятивистских r -мод. В завершающем разделе 4.5 мы кратко обсуждаем полученные результаты и применимость использованных приближений.

4.2 Энергия r -мод и темпы ее изменения

Как мы анонсировали во введении, наша цель – изучить влияние на окна неустойчивости диффузии частиц, гиперонной объемной вязкости, а также выявленных в главе 3 особенностей релятивистских r -мод. Перечисленные эффекты относятся в первую очередь к ядру нейтронной звезды. Действительно, согласно результатам главы 2, диффузия может оказаться важной только при условии, что она усилена возникающей в ядре протонной сверхпроводимостью. Что касается гиперонов – они появляются лишь при достаточно высоких плотностях вещества, которые также достигаются в наиболее глубоких областях нейтронной звезды. Наконец, особенности релятивистских r -мод обусловлены небаротропностью вещества, также характерной преимущественно для ядра звезды (см. обсуждение звездной модели в разделе 1.1). Поэтому наибольшую часть данной главы мы посвятим рассмотрению ядра звезды, а к обсуждению эффектов, связанных с ее корой, обратимся в самом конце.

4.2.1 Обзор общих выражений

Для определения окон неустойчивости необходимо уметь рассчитывать, с какими скоростями $(d\tilde{E}/dt)_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}}$ энергия r -моды \tilde{E} убывает или возрастает под действием рассматриваемых эволюционных механизмов – сдвиговой вязкости (η), объемной вязкости (ζ), диффузии частиц (\mathcal{D}) и CFS-механизма (GW). Как мы упоминали в разделе 1.3.5, эти эффекты, как правило, являются слабыми и проявляются на временах (1.197)

$$\tau_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}} = 2\tilde{E} \left| \left\langle \left(\frac{d\tilde{E}}{dt} \right)_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}} \right\rangle_P \right|^{-1}, \quad (4.1)$$

много больше периода колебаний P , что позволяет учитывать их по теории возмущений. Напомним, что при таком подходе для расчета \tilde{E} и $(d\tilde{E}/dt)_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}}$ нет необходимости детально моделировать колебания с учетом эффектов диссипации и излучения гравитационных волн. Вместо этого достаточно найти решение бездиссипативных уравнений (1.74) в приближении Каулинга – задача, рассмотренная нами для r -мод в главе 3. Как только такое решение найдено, интересующие нас величины могут быть приближенно рассчитаны его подстановкой в общие формулы, которые обсуждались в разделах 1.2.4 и 1.3.

Согласно результатам раздела 1.2.4, энергия колебаний в приближении Каулинга в отсутствие диссипации рассчитывается по формуле (1.97):

$$\tilde{E} = \int \left[\frac{w_0}{2} \delta u_\rho \delta u^\rho + \frac{1}{2} \frac{(\delta p)^2}{\gamma p_0} + \frac{1}{\Lambda} \delta p \delta u^t + \frac{1}{2} w_0 (\xi^\rho \mathcal{A}_\rho) (\xi^\lambda \nabla_\lambda \ln \Lambda) \right] \sqrt{-g} d^3 x. \quad (4.2)$$

Далее, общие выражения для энергопотерь (1.161), (1.162) и (1.174), связанных с действием диссипативных механизмов, можно вывести, рассматривая тепло-выделение в ходе колебаний, что было проделано в разделе 1.3.3³:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tilde{E}}{dt} \right)_\zeta &= - \int \zeta (\nabla_\mu u^\mu)^2 c^2 \frac{\sqrt{-g}}{\Lambda} d^3 x, \\ \left(\frac{d\tilde{E}}{dt} \right)_\eta &= - \int \frac{\eta}{2} \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} c^2 \frac{\sqrt{-g}}{\Lambda} d^3 x, \\ \left(\frac{d\tilde{E}}{dt} \right)_\mathcal{D} &= - \int \frac{\Lambda^2}{T} \tilde{\mathcal{D}}_{pq} \hat{d}_{(p)}^\mu \hat{d}_{(q)\mu} c \frac{\sqrt{-g}}{\Lambda} d^3 x. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь η и ζ – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, а $\tilde{\mathcal{D}}_{km}$ – модифицированные коэффициенты диффузии, возникающие при выводе $(d\tilde{E}/dt)_\mathcal{D}$ после исключения самосогласованного электрического поля: в сверхпроводящем веществе $\tilde{\mathcal{D}}_{km} = \hat{\mathcal{D}}_{km}$ (1.175), а в несверхпроводящем $\tilde{\mathcal{D}}_{km} = \bar{\mathcal{D}}_{km}$ (1.180)⁴. Сдвиговой тензор $\sigma^{\mu\nu}$ и вспомогательные векторы $\hat{d}_{(k)}^\mu$, появляющиеся в приведенных выше формулах, определены равенствами (1.124) и (1.175) соответственно. Наконец, выражение для изменения энергии, связанного с излучением гравитационных волн, определяется формулами (1.190) и (1.196), которые можно получить с помощью мультипольного формализма (см. раздел 1.3.4):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tilde{E}}{dt} \right)_{\text{GW}} &= - \frac{G \sigma_r}{c^3 \sigma} \sum_{L=2}^{\infty} \sum_{M=-L}^L \left(\frac{\sigma}{c} \right)^{2L+2} N_L (|\mathcal{I}_{LM}|^2 + |\mathcal{S}_{LM}|^2), \\ N_L &= \frac{4\pi}{[(2L+1)!!]^2} \frac{(L+1)(L+2)}{L(L-1)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

³ Диссипативные энергопотери во вращающейся с.о. такие же, как в инерциальной (см. раздел 1.3.5).

⁴ Напомним, что при исключении самосогласованного поля мы использовали уравнения непрерывности для вещества с замороженным составом, то есть считали химические реакции пренебрежимо медленными. Мы будем рассматривать диффузию только в нуклонном веществе, где это условие выполнено.

Напомним, что σ – частота колебания в инерциальной с.о. удаленного наблюдателя, $\sigma_r = \sigma + m\Omega$ – частота во вращающейся с.о., а \mathcal{I}_{LM} и \mathcal{S}_{LM} – массовый и токовый мультипольные моменты, определяемые формулами (1.188). В рамках используемого нами подхода при вычислении данных моментов достаточно удержать только слагаемые, связанные с гидродинамическими возмущениями, и опустить вклады, связанные с возмущениями гравитационного поля.

В этой главе мы не будем встречаться с энергией E , измеренной в инерциальной с.о., а также не будем использовать частную производную \dot{f} (1.53), совпадающую с точностью до $1/c$ с производной по времени во вращающейся с.о. Поэтому ниже, не рискуя внести путаницу, мы для удобства переобозначим

$$\frac{df}{dt} \rightarrow \dot{f}, \quad \tilde{E} \rightarrow E. \quad (4.5)$$

Таким образом, точка теперь будет означать «привычную» производную по времени, а величина E – энергию колебаний.

4.2.2 Применение к g -модам

Обзор математической структуры и свойств g -мод

Как обсуждалось в главе 3, r -моды можно различать по квантовым числам (l, m) , которые определяют угловую зависимость тороидальной функции T , связанной с компонентами $\xi^{\theta, \varphi}$ лагранжева смещения равенствами (3.43)⁵:

$$T(t, r, \theta, \varphi) \approx (-i)T_l^{(0)}(r)P_l^m(x)e^{i\sigma t + im\varphi}, \quad x = \cos \theta, \quad (4.6)$$

где $P_l^m(x)$ – присоединенный полином Лежандра. При этом r -моды с фиксированными числами (l, m) различаются числом n радиальных узлов тороидальной функции, то есть точек r внутри звезды, в которых функция $T_l^{(0)}(r)$ обращается в ноль. С точки зрения CFS-неустойчивости, наибольший интерес представляет собой та мода, которая обеспечивает наибольший вклад в слагаемое ведущего порядка по Ω ($L = 2$) в выражении (4.4) для темпа раскачки \dot{E}_{GW} . Поэтому в дальнейшем мы сосредоточимся на изучении $l = m = 2$ фундаментальной (безузловой, $n = 0$) моды, которая, по крайней мере в ньютоновской теории, является наиболее неустойчивой.

⁵Напомним, что, поскольку число m фиксировано, для краткости в коэффициентах разложений по полиномам Лежандра, $f(r, x) = \sum_L f_L(r)P_L^m(x)$, мы пишем f_L вместо f_{Lm} .

В расчетах мы будем опираться на описание ньютоновских r -мод с помощью стандартного подхода, изложенного в разделе 3.2. Релятивистские r -моды, в свою очередь, мы будем моделировать в рамках разработанного нами оригинального подхода, изложенного в разделе 3.3 и опирающегося на приближение слабого увлечения и.с.о. Полученные при таком подходе уравнения релятивистских r -мод представляют собой релятивистское обобщение уравнений ньютоновских r -мод и воспроизводят их в соответствующем пределе. Поэтому нет необходимости рассматривать ньютоновские r -моды отдельно от релятивистских: соответствующие результаты могут быть получены из релятивистских переходом к ньютоновскому пределу, как будет обсуждаться ниже.

Согласно результатам главы 3, частота σ и угловая зависимость собственных функций как релятивистских, так и ньютоновских $l = m$ r -мод в *небаротропном ядре звезды* описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \Omega[\sigma^{(0)} + \sigma^{(1)}], \\
\Gamma &= (-i)[T_m^{(0)}(r)P_m^m(x) + T_{m+2}^{(1)}(r)P_{m+2}^m(x)]e^{i\sigma t + im\varphi}, \\
Q &= Q_{m+1}^{(1)}(r)P_{m+1}^m(x)e^{i\sigma t + im\varphi}, \\
\xi^r &= \xi_{m+1}^{(1)}(r)P_{m+1}^m(x)e^{i\sigma t + im\varphi}, \\
\delta p &= \delta p_{m+1}^{(1)}(r)P_{m+1}^m(x)e^{i\sigma t + im\varphi}, \\
\delta w &= \delta w_{m+1}^{(1)}(r)P_{m+1}^m(x)e^{i\sigma t + im\varphi}, \\
\delta \varepsilon &= \delta \varepsilon_{m+1}^{(1)}(r)P_{m+1}^m(x)e^{i\sigma t + im\varphi},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

где ведущий вклад в частоту моды определяется равенством (3.56)

$$\sigma^{(0)} = \sigma_r^{(0)} - m = \frac{2m}{m(m+1)} - m. \tag{4.8}$$

Функции вида $f^{(1)}$ в этих разложениях выражаются в виде линейной комбинации тороидальной функции $T_m^{(0)}$ и ее производной. Для радиального смещения $\xi_{m+1}^{(1)}$ и его производной такие выражения выводятся из уравнений (3.79)-(3.80):

$$\begin{cases} \left[C_1(r) \frac{d}{dr} + C_2(r) \right] \xi_{m+1}^{(1)} + \left[\Omega^2 C_3(r) + \sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] T_m^{(0)} = 0, \\ \left[\frac{d}{dr} + G_1(r) \right] T_m^{(0)} + \frac{G_2(r)}{\Omega^2} \xi_{m+1}^{(1)} = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Для возмущения давления, полярной функции и поправки к тороидальной функции, искомые выражения даются формулами (3.82)-(3.85):

$$\begin{aligned}\delta p_{m+1}^{(1)}(r) &= \Omega^2 \Pi(r) T_m^{(0)}, \\ Q_{m+1}^{(1)}(r) &= \left\{ q_1 \left[\sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon \tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] + \Omega^2 q_2(r) \right\} T_m^{(0)} + \Omega^2 q_3(r) \frac{d}{dr} T_m^{(0)}, \\ T_{m+2}^{(1)}(r) &= \left\{ t_1 \left[\sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon \tilde{\omega}(r)}{m+1} \right] + \Omega^2 t_2(r) \right\} T_m^{(0)} + \Omega^2 t_3(r) \frac{d}{dr} T_m^{(0)}.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Наконец, возмущения оставшихся термодинамических величин находятся подстановкой приведенных выше формул в общие соотношения (1.68)-(1.69).

По определению (см. раздел 3.3.3), в приведенных выше выражениях все величины вида $f^{(1)}$ являются малыми из-за медленного вращения звезды ($\Omega \ll \Omega_K = 1$) и/или слабого увлечения и.с.о. ($\epsilon \ll 1$). В зависимости от значений Ω и ϵ мы можем формально рассматривать r -моды в трех различных пределах:

- 1) *Ньютоновский предел.* Приведенные уравнения релятивистских r -мод воспроизводят ньютоновские при переходе к соответствующему пределу. Согласно разделу 1.5, для данного перехода необходимо во всех уравнениях положить $\tilde{\omega}(r) = \lambda(r) = 0$, заменить $e^{2\nu} \rightarrow 1 + 2\phi/c^2$ (где ϕ – ньютоновский потенциал гравитационного поля) и затем отбросить слагаемые, содержащие релятивистскую малость $\sim 1/c^2$. При этом необходимо учитывать, что плотность энтальпии $w = p + \epsilon \sim c^2$ и гравитационное ускорение $g(r) = -p'_0(r)/w_0(r) \sim 1/c^2$, поскольку плотность энергии ϵ включает в себя также энергию покоя. Решение получающихся таким образом уравнений (см. раздел 3.2) описывается аналитическими функциями скорости вращения звезды Ω , которые, с точки зрения зависимости от значения последней, соотносятся как

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{Newt}}^{(1)} &\propto \Omega^2, \\ \xi_{m+1}^{(1)\text{Newt}} &\propto Q_{m+1}^{(1)\text{Newt}} \propto T_{m+2}^{(1)\text{Newt}} \propto \Omega^2 T_m^{(0)\text{Newt}}, \\ \delta p_{m+1}^{(1)\text{Newt}} &\propto \delta w_{m+1}^{(1)\text{Newt}} \propto \delta \epsilon_{m+1}^{(1)\text{Newt}} \propto \Omega^2 T_m^{(0)\text{Newt}}.\end{aligned}\quad (4.11)$$

То есть малость величин $f^{(1)}$ в данном случае определяется пропорциональностью $\propto \Omega^2$. Как мы видели в разделе 3.4.1, этот ордеринг реализуется также и для релятивистских r -мод с выключенным увлечением и.с.о.

- 2) *Релятивистские r -моды при $\Omega^2 \gg \epsilon$.* В этом пределе слагаемые в уравнениях r -мод, связанные с эффектом увлечения и.с.о., оказываются пренебрежимо малыми, так что релятивистские r -моды эффективно подчиняются ньютоновскому ордерингу (4.11). В наших численных расчетах (см. детали в разделе 4.3) этот предел *формально* достигается при $\Omega \gtrsim 1.5 \Omega_K$ (то есть при скорости вращения более чем в 1.5 раза выше кеплеровской)⁶. По мере уменьшения Ω в сторону более реалистичных скоростей вращения свойства релятивистских r -мод начинают отличаться от тех, что предсказываются стандартными соотношениями (4.11).
- 3) *Релятивистские r -моды при $\Omega^2 \ll \epsilon$.* В этом пределе отличие релятивистских r -мод от ньютоновских проявляется наиболее ярко. Как было показано в разделе 3.4.2, в этом случае релятивистские r -моды вместо стандартного ордеринга (4.11) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
\sigma^{(1)} &\sim \epsilon, \\
Q_{m+1}^{(1)} &\sim T_{m+2}^{(1)} \sim \epsilon T_m^{(0)}, \\
\xi_{m+1}^{(1)} &\sim \delta w_{m+1}^{(1)} \sim \delta \varepsilon_{m+1}^{(1)} \sim \epsilon \kappa T_m^{(0)}, \\
\delta p_{m+1}^{(1)} &\sim \epsilon \kappa^2 T_m^{(0)}, \\
\frac{d}{dr} &\sim \frac{1}{\kappa},
\end{aligned}
\quad \kappa = \frac{\Omega}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (4.12)$$

При этом их собственные функции описываются неаналитическими функциями Ω и ϵ (если точнее – параметра неаналитичности κ). При действии на такие функции оператор d/dr эффективно производит множитель $1/\kappa$, что выше отражено соотношением $d/dr \sim 1/\kappa$. Само обозначение $f_1 \sim f_2$, напомним, означает, что f_1 и f_2 принимают значения одного порядка [см. обсуждение после формулы (3.147)]. Неаналитичность r -мод выражается все сильнее по мере уменьшения Ω и в конечном итоге приводит к их локализации во внешних слоях звезды (см. Рис. 3.2-3.3), где их собственные функции демонстрируют крайне стремительный рост⁷.

⁶Подчеркнем, что здесь Ω и ϵ рассматриваются как *формальные* параметры системы (4.9). Конечно, звезды со столь высокими скоростями вращения не существуют и в случае используемой нами модели предел $\Omega^2 \gg \epsilon$ является физически недостижимым.

⁷Если точнее, в модели НЗ, состоящей из небаротропного ядра и баротропной коры, данный рост имеет место в узкой области ядра вблизи его границы с корой. В упрощенной модели НЗ, состоящей только из небаротропного ядра, данный рост происходит в узкой области вблизи поверхности звезды (см. раздел 3.4.5).

Естественно ожидать, что нетривиальная зависимость релятивистских r -мод от Ω , по крайней мере при достаточно медленном вращении, может сильно модифицировать их эволюционные времена $\tau_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}}$ и окна неустойчивости по сравнению с предсказаниями ньютоновской теории. Как мы увидим ниже, в действительности особенности релятивистских r -мод сильно влияют на эффективность объемной вязкости и диффузии частиц даже при относительно высоких скоростях вращения $\Omega \gtrsim 0.1$, когда локализация r -мод является слабой.

Выражения для энергии r -мод и темпов ее изменения

В этом разделе мы приводим приближенные выражения для энергии r -мод и средних за период темпов ее изменения под действием интересующих нас эволюционных механизмов в пределе медленного вращения звезды. Несмотря на то, что их вывод требует относительно громоздких выкладок, он достаточно прямолинеен и сводится к последовательному выполнению следующих шагов:

- 1) решение в виде (4.7) подставляется в усредненные по периоду общие выражения (4.2)-(4.4);
- 2) с помощью уравнений (1.68), (1.69), (4.9) и (4.10) результат подстановки переписывается через тороидальную функцию $T_m^{(0)}(r)$ и ее производную;
- 3) в полученных выражениях удерживаются слагаемые вплоть до желаемых порядков малости по Ω и ϵ ;
- 4) производится интегрирование по углам θ и φ .

На первом шаге необходимо учитывать, что описанное в предыдущем разделе решение является комплексным, в то время как энергия и темпы ее изменения, будучи величинами второго порядка по амплитуде колебаний, вычисляются с помощью физического вещественного решения. Чтобы определить значение вещественных физических собственных функций f_{phys} , входящих в общие выражения (4.2)-(4.4), мы берем вещественную часть соответствующих комплексных собственных функций f :

$$f_{\text{phys}} = \text{Re}\{f\} = (1/2)(f + f^*). \quad (4.13)$$

Легко видеть, что в данных обозначениях среднее за период значение произведения $(f_{1,\text{phys}} f_{2,\text{phys}})$ выражается через комплексные функции равенством

$$\langle f_{1,\text{phys}} f_{2,\text{phys}} \rangle_P = (1/4)(f_1 f_2^* + f_1^* f_2). \quad (4.14)$$

В частности мы имеем $\langle f_{\text{phys}}^2 \rangle_P = (1/2) f f^*$, где множитель $1/2$ можно естественным образом проинтерпретировать как результат усреднения $\sin^2(t/P)$ или $\cos^2(t/P)$ по периоду колебаний P .

Формула (4.14) позволяет рассчитать энергию r -моды (4.2) и усредненные темпы ее изменения (4.3)-(4.4), пользуясь комплексным решением, описанным в предыдущем разделе. Также следует отметить, что вычисление массовых и токовых мультипольных моментов по физическим r -модам можно заменить вычислением по комплексным r -модам с помощью соотношений (отметим, что при их выводе мы явно предполагали $m \neq 0$)

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_{L,M}[f_{\text{phys}}]| &= |\mathcal{I}_{L,-M}[f_{\text{phys}}]| = (1/2)(\delta_{M,m} + \delta_{M,-m})|\mathcal{I}_{L,m}[f]|, \\ |\mathcal{S}_{L,M}[f_{\text{phys}}]| &= |\mathcal{S}_{L,-M}[f_{\text{phys}}]| = (1/2)(\delta_{M,m} + \delta_{M,-m})|\mathcal{S}_{L,m}[f]|, \end{aligned} \quad (4.15)$$

с учетом которых формула (4.4) приобретает следующий вид:

$$\dot{E}_{\text{GW}} = -\frac{1}{2} \frac{G}{c^3} \frac{\sigma_r}{\sigma} \sum_{L=2}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{c} \right)^{2L+2} N_L (|\mathcal{I}_{Lm}[f]|^2 + |\mathcal{S}_{Lm}[f]|^2). \quad (4.16)$$

Следуя описанному выше алгоритму и пользуясь указанными формулами, мы вывели релятивистские выражения для энергии r -мод и темпов ее изменения, пригодные в пределе медленного вращения вне зависимости от того, как соотносятся Ω^2 и ϵ (в частности, они воспроизводят ньютоновские аналоги при переходе к ньютоновскому пределу). Чтобы сократить запись этих выражений, мы переобозначим $T_m^{(0)} \rightarrow T_m$ и $\langle \dot{E}_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}} \rangle_P \rightarrow \dot{E}_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}}$, а также введем следующие вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} h_1(r) &= r^{-m} e^{(m-1)\nu(r)} T_m(r), & h_2(r) &= \frac{r^{m+1} \omega_0(r) e^{-(m+1)\nu(r)}}{A(r)} \frac{dh_1}{dr}, \\ \tilde{\mathcal{D}}_1(r) &= \pi_k(r) \tilde{\mathcal{D}}_{km}(r) \pi_m(r), & \tilde{\mathcal{D}}_2(r) &= r \frac{d\pi_k}{dr} \tilde{\mathcal{D}}_{km}(r) \pi_m(r), \\ \tilde{\mathcal{D}}_3(r) &= r^2 \frac{d\pi_k}{dr} \tilde{\mathcal{D}}_{km}(r) \frac{d\pi_m}{dr} & \tilde{\mathcal{D}}_4(r) &= e^{2\lambda(r)} (m+1)(m+2) \tilde{\mathcal{D}}_1(r) + \tilde{\mathcal{D}}_3(r). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь, напомним, $A(r)$ – дискриминант Шварцшильда (3.19), а функции $\pi_k(r)$ определены равенством (1.175). В этих обозначениях полученные нами выражения записываются в следующем относительно компактном виде:

$$E(\Omega, T^\infty) = \frac{\alpha_m^2 \Omega^2}{2c^2} \int_0^R w_0(r) T_m^2(r, \Omega, T^\infty) r^2 e^{\lambda(r) - \nu(r)} dr, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_\eta(\Omega, T^\infty) = & -\alpha_m^2 \Omega^2 \int_0^{r_{cc}} \eta(r, T^\infty) \{ [T_m(r, \Omega, T^\infty) - r T_m'(r, \Omega, T^\infty)]^2 + \\ & + (m-1)(m+2) e^{2\lambda(r)} T_m^2(r, \Omega, T^\infty) \} e^{-\lambda(r)} dr, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_\zeta(\Omega, T^\infty) = & -\frac{16m\alpha_m^2 \Omega^6}{c^4(m+1)^5(2m+3)} \times \\ & \times \int_0^{r_{cc}} \frac{\zeta(r, \Omega, T^\infty)}{A^2(r, \Omega, T^\infty)} \left[\frac{w_0(r) h_1'(r, \Omega, T^\infty)}{p_0(r) \gamma(r, \Omega, T^\infty)} \right]^2 e^{\lambda(r) - 2(m+1)\nu(r)} r^{2m+4} dr, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_D(\Omega, T^\infty) = & -\frac{4m\alpha_m^2 \Omega^4}{c^3(m+1)^3(2m+3)} \int_0^{r_{cc}} \frac{\Lambda^2(r)}{T(r, T^\infty)} \times \\ & \times \left\{ [r h_2'(r, \Omega, T^\infty)]^2 \tilde{\mathcal{D}}_1(r, T^\infty) + 2r h_2(r, \Omega, T^\infty) h_2'(r, \Omega, T^\infty) \tilde{\mathcal{D}}_2(r, T^\infty) + \right. \\ & \left. + h_2^2(r, \Omega, T^\infty) \tilde{\mathcal{D}}_4(r, T^\infty) \right\} e^{\nu(r) - \lambda(r)} e^{\nu(r)} dr, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{GW}(\Omega, T^\infty) = & 32\pi G \alpha_m^2 \frac{2^{2m}(m-1)^{2m}}{(m+1)^4} \left[\frac{(m+2)!}{(2m+1)!} \right]^2 \left(\frac{m+2}{m+1} \right)^{2m} \times \\ & \times \frac{\Omega^2}{c} \left(\frac{\Omega}{c} \right)^{2m+2} \left[\int_0^R \frac{w_0(r)}{c^2} T_m(r, \Omega, T^\infty) e^{2\lambda(r)} r^{m+2} dr \right]^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь штрихом обозначена частная производная $\partial/\partial r$, $\Lambda(r) \approx e^{-\nu(r)}$ – красное смещение (1.38), а α_m – некоторая удобным образом выбранная нормировочная постоянная, пропорциональная амплитуде r -моды и зависящая от значения m .

Отметим, что данные формулы не учитывают диссипацию в коре звезды: интегрирование в выражениях для $\dot{E}_{\eta, \zeta, \mathcal{D}}$ производится только по ядру звезды $0 \leq r \leq r_{\text{cc}}$, то есть по той области звезды, где вещество является небаротропным и r -моды обладают структурой и свойствами, описанными в предыдущем разделе. Диссипация в коре также имеет место, однако она является слабой по сравнению с диссипацией в коре и, следовательно, может быть проигнорирована. По этой причине здесь и далее мы рассматриваем диссипацию только в ядре звезды, а обсуждение влияния коры отложим до раздела 4.5. В то же время интегрирование в формулах для энергии (4.18) и мощности CFS-механизма (4.22) ведется уже по всей звезде, включая баротропную кору $r_{\text{cc}} \leq r \leq R$. Применимость этих формул в коре, где структура и свойства r -мод отличаются от описанных выше, связана с тем, что ведущий вклад в соответствующие величины определяется ведущим вкладом в возмущение скорости, которое вне зависимости от баротропности вещества является квазитороидальным и определяется преимущественно тороидальной функцией $T_m(r)$.

Для наглядности в аргументах всех входящих в выражения (4.18)-(4.22) величин мы явно указали их зависимость от Ω и T^∞ , если она может иметь место. Под зависимостью коэффициентов сдвиговой вязкости η , объемной вязкости ζ , диффузии $\tilde{\mathcal{D}}_{1,2,3,4}$ и адиабатического индекса γ от T^∞ и Ω мы подразумеваем, что эти коэффициенты зависят от локальной температуры $T(r, T^\infty)$ и/или локальной частоты колебаний $\sigma_{\text{loc}}(r, \Omega)$, которые выражаются через красносмещенную температуру T^∞ и частоту колебаний формулами (1.47) и (1.135):

$$T(r, T^\infty) = \Lambda(r)T^\infty, \quad \sigma_{\text{loc}}(r, \Omega) = \Lambda(r)[\sigma(\Omega) + m\Omega] \approx \frac{2\Lambda(r)\Omega}{m+1}. \quad (4.23)$$

При этом зависимость адиабатического индекса от T^∞ и Ω влечет зависимость от этих параметров также и дискриминанта Шварцшильда

$$A(r, \Omega, T^\infty) = \frac{w'_0(r)}{w_0(r)} - \frac{p'_0(r)}{w_0(r)} \left[1 + \frac{w_0(r)/p_0(r)}{\gamma(r, \Omega, T^\infty)} \right]. \quad (4.24)$$

Далее, поскольку γ явно входит (через скорость звука $c_s = c\sqrt{\gamma p_0/w_0}$ и дискриминант Шварцшильда) в уравнения r -мод, функции $T_m(r, \Omega, T^\infty)$ и $h_{1,2}(r, \Omega, T^\infty)$ в общем случае также зависят от T^∞ . Наконец, зависимость этих же функций от Ω обусловлена их неаналитичностью и зависимостью γ от Ω .

Ниже мы будем сравнивать друг с другом результаты релятивистских и ньютоновских расчетов. Для перехода к ньютоновскому пределу в полученных выражениях необходимо положить все метрические функции равными нулю, включая те, что входят в определения h_1 , h_2 и $\tilde{\mathcal{D}}_4$. При этом, несмотря на то, что в нашей модели $\Lambda(r) = e^{-\nu(r)}$, мы удержим красное смещение $\Lambda(r)$ вместе с его производными. Такой подход соответствует рассмотрению ньютоновских колебаний на релятивистском фоне, учитывающем релятивистские профили температуры (1.47) и химических потенциалов (1.46) в равновесной звезде.

Подавление и раскочка релятивистских r -мод в пределе $\Omega \rightarrow 0$

В то время как в ньютоновском пределе все слагаемые в выражениях (4.18)-(4.22) являются величинами одного порядка по Ω , для релятивистских r -мод из-за их нестандартного ордеринга некоторые из них оказываются более низкого порядка по сравнению с другими. Чтобы продемонстрировать, каким образом особенности r -мод в ОТО могут влиять на зависимость E и $\dot{E}_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}}$ от Ω , мы предлагаем рассмотреть эти величины в рамках следующей тестовой модели. *Во-первых*, для простоты мы ограничимся моделью НЗ, описанной в разделе 3.4.5 и состоящей исключительно из небаротропного ядра. В рамках этой модели верхний предел интегрирования r_{cc} в формулах (4.19)-(4.21) следует заменить на радиус звезды R . *Во-вторых*, мы будем считать, что адиабатический индекс $\gamma(r)$ и, следовательно, дискриминант Шварцшильда $A(r)$ зависят только от координаты r . В этом случае зависимость тороидальной функции $T_m(r, \Omega)$ и вспомогательных функций $h_{1,2}(r, \Omega)$ от Ω обусловлена только неаналитичностью r -мод, а их температурная зависимость и вовсе исчезает. С физической точки зрения, это соответствует ситуации, когда время релаксации вещества к химическому равновесию много больше (предел медленных реакций) либо много меньше (предел быстрых реакций) периода колебаний (см. раздел 1.3.2). Здесь, однако, необходимо оговориться, что выражение (4.21) для энергопотерь за счет диффузии было получено в предположении медленных химических реакций. Поэтому обсуждение особенностей величины $\dot{E}_{\mathcal{D}}$, которое мы приводим ниже, применимо только для случая вещества с замороженным составом. Это может быть, например, вещество с нуклонным составом или же холодное гиперонное вещество при $T < 10^8$ К. Ниже мы будем рассматривать диффузию, подразумевая вещество с нуклонным составом.

Мы видим, что при медленных скоростях вращения ($\kappa = \Omega/\sqrt{\epsilon} \ll 1$) неаналитичность релятивистских r -мод ($d/dr \sim 1/\kappa$) приводит к тому, что подинтегральные выражения в $\dot{E}_{\eta,\zeta}$ эффективно увеличиваются на фактор порядка $1/\kappa^2$, в то время как $\dot{E}_{\mathcal{D}}$ испытывает еще большее усиление – на фактор порядка $1/\kappa^4$! Кроме того, по мере замедления вращения, неаналитичность r -мод приводит к их локализации в узкой области вблизи поверхности звезды, размер которой сам по себе также зависит от κ и стремится к нулю при $\kappa \rightarrow 0$ (см. раздел 3.4.5). По этим причинам зависимость E и $\dot{E}_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}}$ [и, следовательно, эволюционных времен $\tau_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}}$ (4.1)] от Ω оказывается существенно более сложной, чем в ньютоновской теории, и в общем случае не может быть установлена в явном виде за исключением предела экстремально медленного вращения, когда моды подавлены практически во всей звезде. Для перехода к данному пределу мы с помощью (4.9) выражаем d^2T_m/dr^2 через T_m и dT_m/dr , а затем, учитывая неаналитичность, отбрасываем относительно маленькие слагаемые и получаем

$$E \propto \frac{\Omega^2}{c^2} \int_0^R w_0(r) T_m^2(r, \Omega) e^{\lambda(r)-\nu(r)} r^2 dr, \quad (4.25)$$

$$\dot{E}_\eta \propto -\Omega^2 \int_0^R \eta(r, T^\infty) T_m'^2(r, \Omega) e^{-\lambda(r)} r^2 dr, \quad (4.26)$$

$$\dot{E}_\zeta \propto -\Omega^6 \int_0^R \frac{\zeta(r, \Omega, T^\infty) T_m'^2(r, \Omega)}{A^2(r) c_s^4(r)} r^4 e^{\lambda(r)-4\nu(r)} dr, \quad (4.27)$$

$$\dot{E}_{\mathcal{D}} \propto -c \int_0^R \frac{g^2(r) w_0^2(r)}{T(r, T^\infty)} \tilde{\mathcal{D}}_1(r, T^\infty) \left[\sigma^{(1)} + \frac{2\epsilon\tilde{\omega}(r)}{m+1} \right]^2 T_m^2(r, \Omega) e^{-\lambda(r)} dr, \quad (4.28)$$

$$\dot{E}_{\text{GW}} \propto G \frac{\Omega^2}{c} \left(\frac{\Omega}{c} \right)^{2m+2} \left[\int_0^R \frac{w_0(r)}{c^2} T_m(r, \Omega) e^{2\lambda(r)} r^{m+2} dr \right]^2. \quad (4.29)$$

Далее учтем, что, согласно результатам разделов 3.4.3-3.4.5, фундаментальная мода при $\kappa \rightarrow 0$ локализована в области $r_t \leq r \leq R$ и экспоненциально подавлена в области $0 \leq r < r_t$, где

$$r_t = R + z_0 \left(\frac{\kappa}{\alpha} \right)^{2/3}, \quad \alpha^2 = -\frac{2\tilde{\omega}'(R) G_2(R)}{m+1 C_1(R)}. \quad (4.30)$$

Здесь z_0 – наиболее близкий к нулю корень производной функции Эйри первого рода: $\text{Ai}'(z_0) = 0$. Для вывода этой формулы необходимо заметить, что в рассматриваемом пределе точка r_t находится столь близко к поверхности, что в области $r_t \leq r \leq R$ применимо решение (3.189), полученное вблизи точки r_t :

$$T_m(r) \approx T_{m,\text{II}}^{(00)}(r) \propto \text{Ai}[z(r)], \quad z(r) = (r_t - r) \left(\frac{\alpha}{\kappa} \right)^{2/3}. \quad (4.31)$$

Накладывая на это решение граничное условие $T_m^{(00)'}(R) = 0$ (см. раздел 3.4.5), мы приходим к уравнению $\text{Ai}'[z(R)] = 0$, решение которого для фундаментальной гармоники имеет вид $z(R) = z_0$, что эквивалентно формуле (4.30).

Из всего вышесказанного следует, что в выражениях для энергии r -мод и темпов ее изменения можно использовать выражение (4.31) для тороидальной функции, являющееся точным в области их локализации и вблизи точки r_t . Хотя в области $0 \leq r < r_t$ вдали от точки r_t эта формула является не очень точной, функция $\text{Ai}[z(r)]$ как и истинная тороидальная функция $T_m(r)$ экспоненциально подавлена в этой области, а потому замена $T_m(r) \rightarrow \text{Ai}[z(r)]$ на всей области интегрирования не может привести существенные ошибки⁸. Тогда задача сводится к вычислению интегралов следующего вида⁹

$$I_{kn}[f] = \int_0^R f(r) \left(\frac{d^k}{dr^k} \text{Ai}[z(r)] \right)^n dr, \quad (4.32)$$

где $f(r)$ – некоторая не зависящая от κ функция переменной r . Производя замену переменной интегрирования с r на $z(r)$, получаем:

$$I_{kn}[f] = (-1)^{kn} \left(\frac{\alpha}{\kappa} \right)^{(2/3)(kn-1)} \times \\ \times \int_{z_0}^{r_t(\alpha/\kappa)^{2/3}} f \left[R + (z_0 - z) \left(\frac{\kappa}{\alpha} \right)^{2/3} \right] \left[\frac{d^k}{dz^k} \text{Ai}(z) \right]^n dz. \quad (4.33)$$

⁸Строго говоря, для объемной вязкости это может быть не так, если она определяется реакциями, протекающими не во всей звезде, а лишь в некоторой ее части. В этом случае интегрирование в действительности ведется не по всей звезде, а по области протекания реакций, которая может находиться достаточно глубоко под поверхностью. Здесь для простоты предполагается, что реакции протекают во всей звезде.

⁹Зависимость ζ от частоты колебаний ω , следовательно, от Ω , как правило, в рассматриваемом пределе медленных или быстрых реакций имеет степенной характер и может быть вынесена из соответствующего подынтегрального выражения.

В пределе $\kappa \rightarrow 0$ верхний предел интегрирования стремится к бесконечности, а функция $f(r)$ может быть заменена ведущим членом в ее разложении вблизи поверхности звезды: $f(r) \approx f_R(r - R)^{n_f}$. В результате имеем

$$I_{kn}[f] \approx (-1)^{kn} f_R \left(\frac{\alpha}{\kappa} \right)^{(2/3)(kn-n_f-1)} J_{knn_f}, \quad (4.34)$$

$$J_{knn_f} \equiv \int_{z_0}^{\infty} (z_0 - z)^{n_f} \left[\frac{d^k}{dz^k} \text{Ai}(z) \right]^n dz. \quad (4.35)$$

Таким образом, мы видим, что три числа n , k и n_f — определяют зависимость рассматриваемых интегралов от $\kappa = \Omega/\sqrt{\epsilon}$ и, следовательно, от скорости вращения звезды Ω . Оценим, например, зависимость от Ω времени гравитационно-волновой раскочки τ_{GW} . В рассматриваемой модели для соответствующих интегралов имеем $k = 0$ и $n_f = 1$. Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} E &\propto \Omega^2 \Omega^{4/3}, \\ \dot{E}_{\text{GW}} &\propto \Omega^2 \Omega^{2m+2} (\Omega^{4/3})^2, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\text{GW}} \propto \frac{E}{\dot{E}_{\text{GW}}} \propto \left(\frac{1}{\Omega} \right)^{2m+2+4/3}. \quad (4.36)$$

Этот результат существенно отличается от зависимости $\tau_{\text{GW}} \propto (1/\Omega)^{2m+2}$, характерной для ньютоновских r -мод. Аналогичные оценки можно провести также и для времен подавления r -мод диссипативными механизмами $\tau_{\eta, \zeta, \mathcal{D}}$.

4.3 Роль диффузии в подавлении r -мод

В этом разделе мы приводим основанные на формулах (4.18)-(4.22) и их ньютоновских аналогах результаты численных расчетов эволюционных времен $\tau_{\eta, \zeta, \mathcal{D}, \text{GW}}$ (4.1) и окон неустойчивости r -мод. Для простоты, если не оговорено обратное, мы игнорируем кору нейтронной звезды и пользуемся упрощенной моделью полностью небаротропной звезды из раздела 3.4.5. Также здесь мы ограничиваемся рассмотрением вещества с нуклонным составом, а обсуждение влияния гиперонов на подавление r -мод и их окна неустойчивости откладываем до раздела 4.4. Как обсуждалось в разделе 1.3.2, химические реакции ($m\text{Urca}$ и $d\text{Urca}$) в нуклонном веществе слабо влияют на его состав, а потому в качестве адиабатического индекса γ мы будем пользоваться адиабатическим индексом (1.64) вещества с замороженным составом.

4.3.1 Микрофизические входные данные

В расчетах мы используем BSk24-модель НЗ с массой $M = 1.4 M_{\odot}$ из раздела 3.4.5. Для расчета $\dot{E}_{\eta, \mathcal{D}}$ мы используем сдвиговую вязкость η и коэффициенты \mathcal{D}_{km} из работ [112] и [27], соответственно. Нейтроны мы для простоты считаем нормальными, а протоны – сильно сверхпроводящими. Влияние протонной сверхпроводимости на \mathcal{D}_{km} учитывается согласно алгоритму, описанному в разделе 1.4, при котором сверхпроводящее *нем*-вещество эффективно рассматривается как нормальное *нем*-вещество. Что касается объемной вязкости ζ , в нуклонном веществе она определяется преимущественно mUrca и, в наиболее массивных звездах, dUrca процессами. Поскольку данные реакции проходят с участием протонов, сильная протонная сверхпроводимость приводит к подавлению объемной вязкости, а потому последняя не может играть какую-либо существенную роль. Тем не менее, имея в виду дальнейшее приложение теории к гиперонным звездам, где объемная вязкость может оказаться важной (см. раздел 4.4), нам все же интересно изучить, как особенности релятивистских *r*-мод влияют на диссипацию за счет ζ . Для этого при вычислении \dot{E}_{ζ} мы проигнорируем протонную сверхпроводимость и воспользуемся полученными в работах [63] и [64] выражениями для коэффициентов объемной вязкости, обусловленных mUrca и dUrca реакциями, соответственно. Такой подход не столь необоснован, как может показаться: мы увидим, что в нуклонном веществе объемная вязкость эффективна только при достаточно высоких температурах, при которых часть протонов может быть несверхпроводящей.

4.3.2 Эволюционные времена *r*-мод

На Рис. 4.2 показаны эволюционные времена фундаментальной $l = m = 2$ *r*-моды в релятивистской («GR», синие линии) и ньютоновской («Newt», красные линии) теории для вещества с сильно сверхпроводящими протонами.

Во-первых, мы видим, что при реалистичных значениях $\Omega \gtrsim 0.1 \Omega_K$ раскачка релятивистских *r*-мод CFS-механизмом (*вверху слева*) происходит на временах того же порядка, что и ньютоновских. В то же время при $\Omega \ll \Omega_K$ релятивистские *r*-моды раскачиваются существенно медленнее ньютоновских. Подобное поведение релятивистских *r*-мод объясняется их локализацией в пределе $\Omega \rightarrow 0$, которая приводит к соотношению (4.36): $\tau_{\text{GW,GR}}/\tau_{\text{GW,Newt}} \sim \Omega^{-4/3}$.

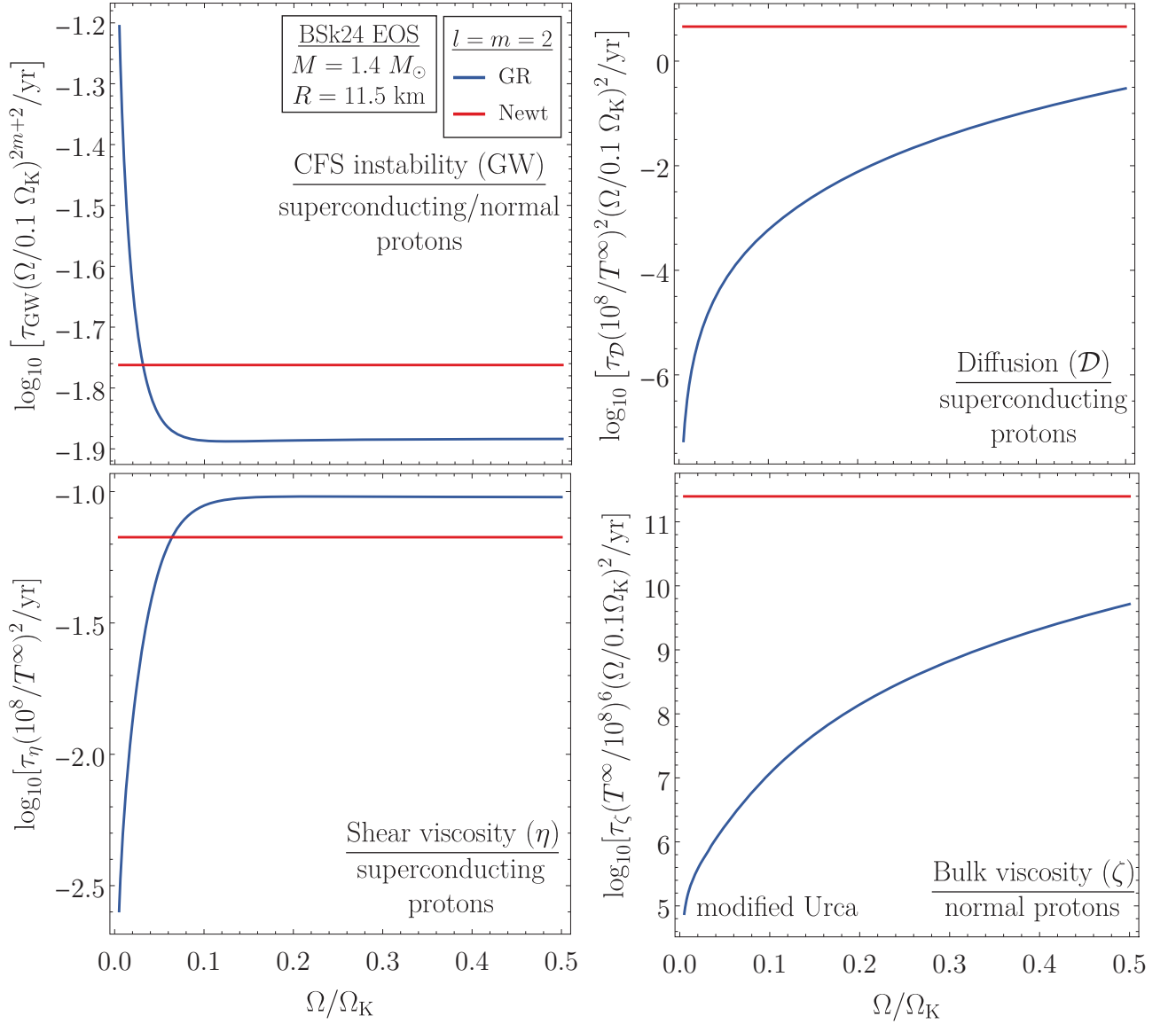


Рис. 4.2: Эволюционные времена раскачки CFS-механизмом (вверху слева) и подавления диффузией (вверху справа), сдвиговой вязкостью (внизу слева) и объемной вязкостью (внизу справа) за счет m Urca процессов для фундаментальной $l = m = 2$ r -моды в релятивистской («GR», синие линии) и ньютоновской («Newt», красные линии) теории.

Во-вторых, мы видим, что при $\Omega \gtrsim 0.1 \Omega_K$ релятивистские r -моды подавляются сдвиговой вязкостью (внизу слева) примерно так же, как и ньютоновские. Однако при $\Omega \ll \Omega_K$, в отличие от CFS-раскачки, подавление релятивистских r -мод происходит намного быстрее, чем ньютоновских. Это связано с тем, что, помимо локализации r -мод, на зависимость \dot{E}_η от Ω также влияет и связанное с неаналитичностью (4.12) увеличение производной $T'_m \sim (\sqrt{\epsilon}/\Omega)T_m$, входящей в подынтегральное выражение (4.19). Поэтому, несмотря на то, что мода заперта в узкой области вблизи поверхности звезды, ее крутой градиент в этой области все же приводит к усиленному подавлению: $\tau_{\eta,GR} \ll \tau_{\eta,Newt}$.

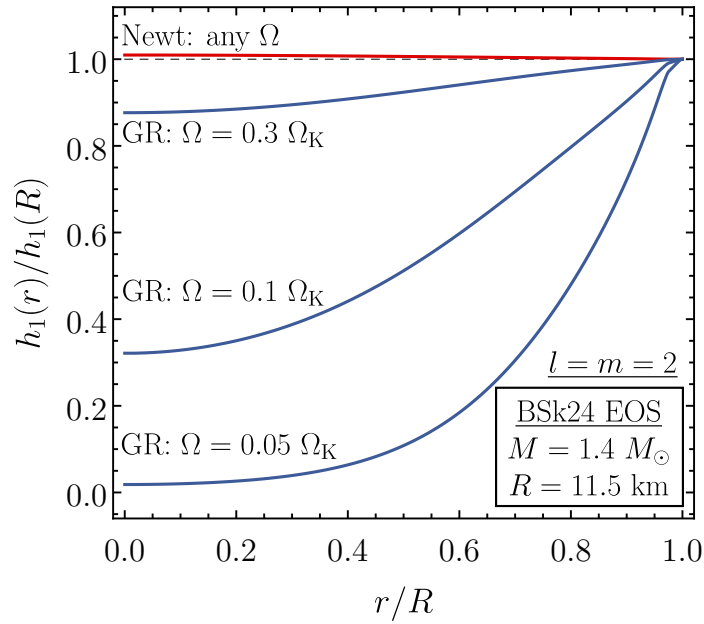


Рис. 4.3: Отношение $h_1(r)/h_1(R)$ в ньютоновской теории (красная линия; не зависит от Ω) и в ОТО (синие линии).

Наконец, мы видим, что подавление r -мод диффузией (*вверху справа*) и объемной вязкостью (*внизу справа*) наиболее сильно модифицируются особенностями релятивистских r -мод. Как и в случае $\tau_{\eta,GR}$, при $\Omega \ll \Omega_K$ наличие производной T'_m в соответствующих подынтегральных выражениях (4.20) и (4.21) существенно снижает значения $\tau_{D,GR}$ и $\tau_{\zeta,GR}$ по сравнению с предсказаниями ньютоновской теории. Это свойство релятивистских r -мод, однако, не объясняет их усиленное подавление при (относительно) высоких скоростях вращения $\Omega \gtrsim 0.1 \Omega_K$, при которых их локализация и неаналитичность проявляются достаточно слабо, а собственные функции похожи на ньютоновские (см. Рис. 3.8).

Чтобы объяснить этот результат, необходимо рассмотреть функцию h_1 , которая входит в выражения (4.20)-(4.21) для энергопотерь $\dot{E}_{\zeta,D}$:

$$h_1^{\text{Newt}}(r) = r^{-m} T_m^{\text{Newt}}(r), \quad h_1^{\text{GR}}(r, \Omega) = r^{-m} e^{(m-1)\nu(r)} T_m^{\text{GR}}(r, \Omega). \quad (4.37)$$

Как проиллюстрировано на Рис.4.3, в ньютоновском пределе эта функция оказывается практически постоянной и слабо зависит от r , в то время как для релятивистских r -мод она, наоборот, существенно меняется по звезде. Из этого наблюдения немедленно следует, что $|h_1^{\text{GR}}| \gg |h_1^{\text{Newt}}|$ и $|h_2^{\text{GR}}| \gg |h_2^{\text{Newt}}|$, что вместе с формулами (4.20) и (4.21) объясняет повышенную эффективность подавления релятивистских r -мод диффузией и объемной вязкостью при относительно высоких скоростях вращения $\Omega \gtrsim 0.1 \Omega_K$.

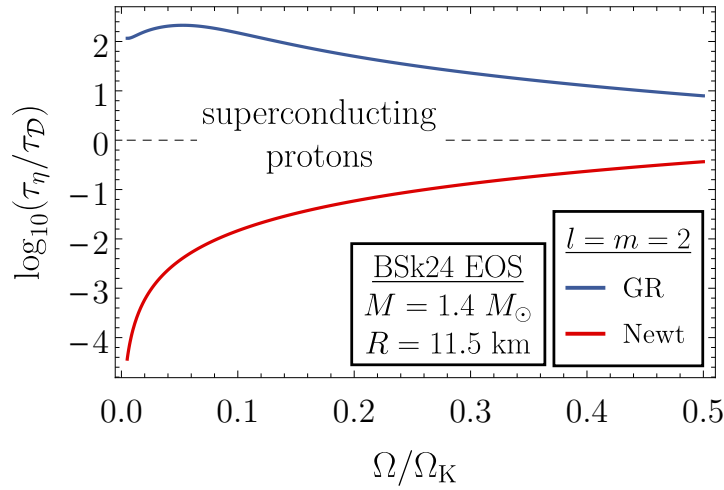


Рис. 4.4: Сравнение времен подавления $\tau_{\eta, \mathcal{D}}$ релятивистской («GR», синяя линия) и ньютоновской («Newt», красная линия) фундаментальной $l = m = 2$ r -моды сдвиговой вязкостью (η) и диффузией в сверхпроводящем веществе (\mathcal{D}).

Обнаруженное усиление подавления r -мод диффузией, связанное с особенностями их собственных функций в релятивистской теории, приводит к тому, что для релятивистских r -мод в не слишком горячих сверхпроводящих звездах диффузия становится крайне эффективным диссипативным механизмом. В частности, согласно проведенным расчетам, по эффективности подавления релятивистских r -мод диффузия частиц существенно превосходит сдвиговую вязкость, которая до этого момента считалась одним из основных источников диссипации r -мод. О роли диффузии в подавлении r -мод можно судить по Рис. 4.4, где построены отношения $\tau_{\eta} / \tau_{\mathcal{D}}$ для релятивистских (синяя линия) и ньютоновских (красная линия) r -мод. Поскольку для используемых здесь микрорезультатов входных данных (см. предыдущий раздел) с высокой точностью в сверхпроводящем веществе $\tau_{\eta} \propto (T^{\infty})^2$ и $\tau_{\mathcal{D}} \propto (T^{\infty})^2$, отношение $\tau_{\eta} / \tau_{\mathcal{D}}$ оказывается практически не зависящим от температуры (мы уже сталкивались с этим явлением при обсуждении подавления колебаний невращающихся звезд, см. раздел 2.3). Мы видим, что, в то время как в ньютоновской теории сдвиговая вязкость действительно оказывается эффективнее диффузии, для релятивистских r -мод именно диффузия доминирует во всем рассмотренном диапазоне скоростей вращения. Следовательно, мы ожидаем, что диффузия окажет существенное влияние на окна неустойчивости релятивистских r -мод при низких и умеренных температурах. Кроме этого мы также ожидаем изменения в области высоких температур, связанные с усиленным подавлением релятивистских r -мод объемной вязкостью.

4.3.3 Окна неустойчивости r -мод

Напомним, что окно неустойчивости представляет собой область на плоскости (Ω, T^∞) , в которой раскачка r -мод CFS-механизмом $\dot{E}_{\text{GW}}(\Omega) > 0$ происходит эффективнее, чем их подавление $\dot{E}_{\text{diss}}(\Omega, T^\infty) < 0$ диссипативными механизмами. Граница окна неустойчивости, соответственно, определяется теми значениями Ω и T^∞ , при которых раскачка r -моды в точности скомпенсирована диссипативными эффектами:

$$\dot{E}_{\text{GW}}(\Omega) + \dot{E}_{\text{diss}}(\Omega, T^\infty) = 0. \quad (4.38)$$

Чтобы исследовать совместное влияние нелинейности r -мод и диффузии в сверхпроводящем веществе на окна неустойчивости, мы определяем их границу для следующих трех случаев:

- 1) диссипация только за счет сдвиговой вязкости: $\dot{E}_{\text{diss}} = \dot{E}_\eta$;
- 2) диссипация только за счет диффузии частиц: $\dot{E}_{\text{diss}} = \dot{E}_\mathcal{D}$;
- 3) диссипация за счет диффузии и вязкости: $\dot{E}_{\text{diss}} = \dot{E}_\eta + \dot{E}_\mathcal{D}$.

Кривые, полученные для фундаментальной $l = m = 2$ r -моды в ОТО («GR») и ньютоновской теории («Newt»), изображены на Рис. 4.5. Каждая кривая разделяет плоскость (Ω, T^∞) на верхнюю область, где моды неустойчивы, и нижнюю область, где они подавлены диссипативными механизмами. Помимо полностью небаротропной модели НЗ (соответствующие результаты показаны красным и синим цветами) мы также рассмотрели подавление r -мод диффузией в более реалистичной модели, учитывающей наличие баротропной коры (соответствующие результаты показаны черными и тонкими зелеными штрихами). Черная штриховая кривая получена в предположении, что протоны являются сильно сверхпроводящими во всем ядре. Зеленой штриховой линией показана оценка границы окна неустойчивости в случае, когда протонная сверхпроводимость пропадает при высоких плотностях вещества, как предсказывается некоторыми микроскопическими теориями (см., например, работы [43, 194–196]), и имеет место в ядре только при плотностях $\rho \lesssim 4 \times 10^{14}$ г/см³ (см. Рис. 7 в работе [197]). В нашей модели данный диапазон плотностей приблизительно соответствует $0.76 < r/R < 0.92$. Наконец, черные точки показывают заимствованные из работы [167] наблюдательные данные по НЗ в LMXB системах.

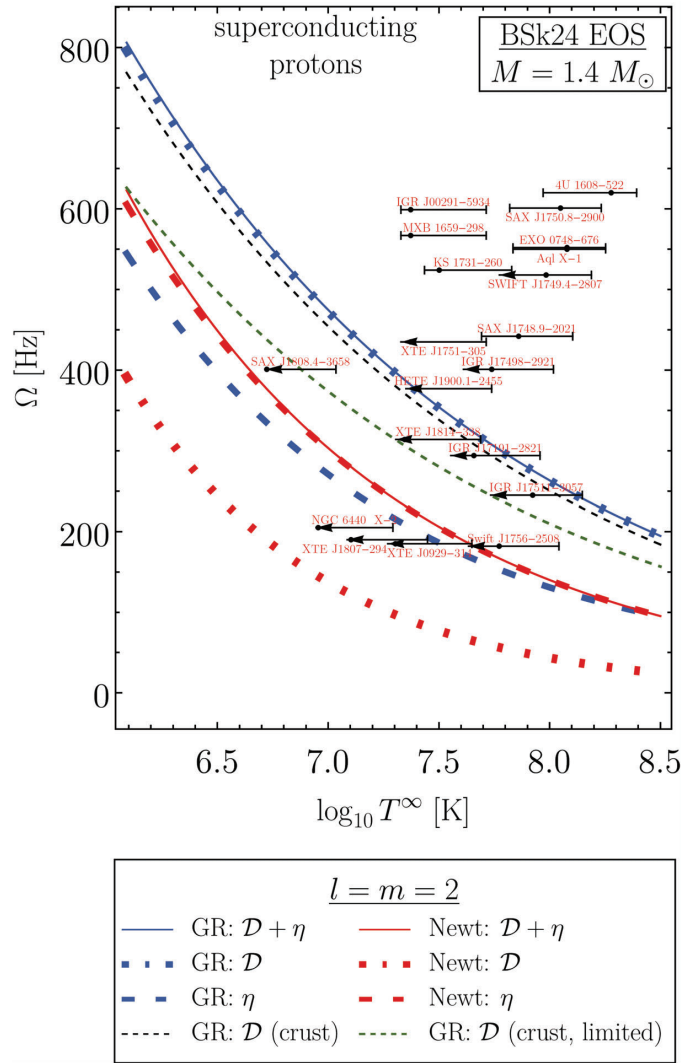


Рис. 4.5: Окна неустойчивости фундаментальной $l = m = 2$ r -моды в сверхпроводящих НЗ в релятивистской («GR») и ньютоновской («Newt») теории. Кривые, рассчитанные для полностью небаротропной звезды, показаны красным и синим цветом: сплошными линиями (« $\mathcal{D} + \eta$ ») – для подавления одновременно диффузией и сдвиговой вязкостью, короткими жирными штрихами (« \mathcal{D} ») – для подавления только диффузией, длинными жирными штрихами (« η ») – для подавления только сдвиговой вязкостью. Тонкая черная штриховая линия [« \mathcal{D} (crust)»] показывает границу окна неустойчивости релятивистских r -мод для модели НЗ с баротропной корой и диффузией в качестве единственного канала диссипации. Тонкой зеленой штриховой линией [« \mathcal{D} (crust, limited)»] показаны результаты аналогичных расчетов с тем отличием, что протонная сверхпроводимость ограничена частью ядра с плотностями $\rho \leq 4 \times 10^{14}$ г/см³ (что приблизительно соответствует $0.76 < r/R < 0.92$). Каждая кривая делит плоскость (Ω, T^∞) на верхнюю часть, где моды неустойчивы (то есть окно неустойчивости), и нижнюю часть, где они подавлены диссипативными механизмами. Черными точками показаны наблюдения нейтронных звезд в LMXB системах, заимствованные из работы [167]. Неопределенность в определении температуры T^∞ связана с неопределенностью химического состава внешних слоев звезды (см. детали в работе [134]).

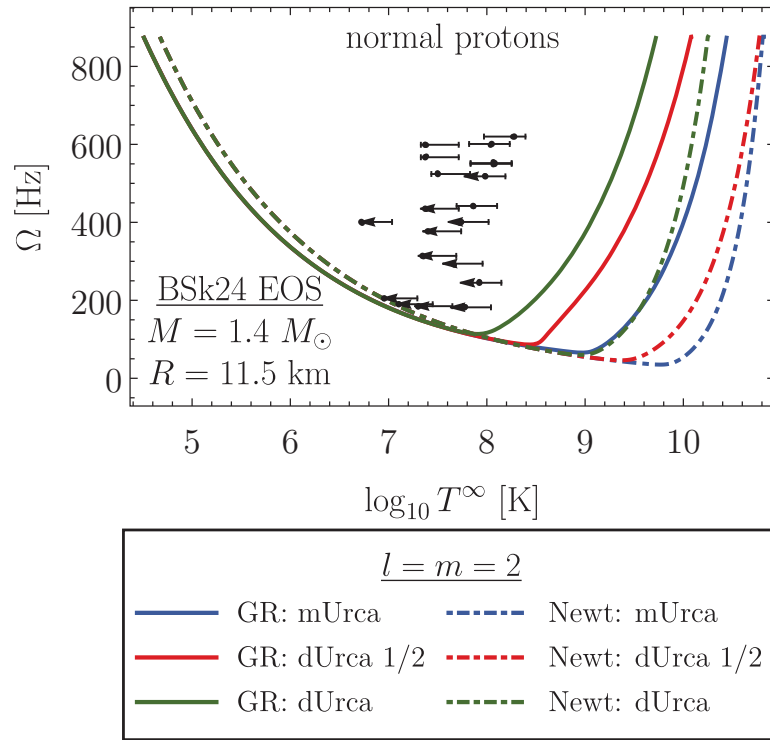


Рис. 4.6: Окна неустойчивости релятивистской («GR», сплошные линии) и ньютоновской («Newt», штриховые линии) фундаментальной $l = m = 2$ r -моды в случае нормального *прем*-вещества. Результаты расчетов с объемной вязкостью, обусловленной модифицированными урка процессами («mUrca»), показаны синим цветом. Расчеты с вязкостью, обусловленной прямыми урка процессами, показаны красным («dUrca 1/2»; процесс формально протекает в области $0 \leq r \leq R/2$) и зеленым («dUrca»; процесс формально протекает во всей звезде) цветами. Черными точками показаны те же наблюдательные данные, что и на Рис. 4.5.

Как и ожидалось, в ньютоновской теории влияние диффузии на окно неустойчивости является слабым и диссипация при рассматриваемых температурах определяется в первую очередь сдвиговой вязкостью. В релятивистской же теории ситуация ровно противоположная: именно диффузия вносит основной вклад в диссипацию энергии, а влияние сдвиговой вязкости оказывается пренебрежимо слабым даже в том случае, когда диффузия является эффективной только во внешних слоях ядра звезды (см. зеленую пунктирную линию). Тем не менее диффузия все же оказывается недостаточно эффективной, чтобы подавить r -моды во всех наблюдаемых источниках. Таким образом, мы приходим к выводу, что для объяснения наблюдений теория требует включения дополнительных каналов диссипации, таких как, например, диссипация в слое Экмана [23, 184, 185], взаимное трение [186], резонансная стабилизация сверхтекучими модами [9, 167] и усиленная гиперонами объемная вязкость [68, 192].

В завершение этого раздела мы хотели бы обсудить, как обнаруженное усиление подавления r -мод объемной вязкостью могло бы изменить их окно неустойчивости при высоких температурах $T^\infty \gtrsim 10^9$ К. Как упоминалось выше, при таких температурах протоны вероятнее всего являются нормальными. Поэтому ниже мы для простоты ограничим наше рассмотрение случаем нормального вещества, в котором диффузия является пренебрежимо слабой (как для ньютоновских, так и для релятивистских r -мод) и при $T^\infty \lesssim 10^9$ К диссипация обусловлена преимущественно сдвиговой вязкостью. При высоких же температурах диссипация определяется преимущественно объемной вязкостью. Помимо объемной вязкости, обусловленной m Urca процессами, мы также рассмотрели объемную вязкость, связанную с d Urca процессами. Здесь нужно оговориться, что d Urca процессы открываются при плотностях выше тех, что встречаются в рассматриваемой нами звездной модели, а потому, строго говоря, они здесь запрещены. Тем не менее мы можем *формально* рассмотреть два случая, когда эти процессы протекают либо во всей звезде, либо, скажем, в ее внутренней области $0 \leq r \leq R/2$. Действуя таким образом, мы получили окна неустойчивости, изображенные на Рис. 4.6.

Мы видим, что, независимо от того, какими процессами определяется объемная вязкость, при низких температурах релятивистские и ньютоновские окна неустойчивости практически совпадают, в то время как при высоких температурах релятивистские кривые проходят существенно выше ньютоновских. Тем самым отражается тот факт, что подавление релятивистских r -мод объемной вязкостью происходит гораздо быстрее, чем ньютоновских. Мы также видим, что, несмотря на релятивистское усиление, диссипация за счет объемной вязкости остается недостаточно сильной, чтобы подавить r -моды в наблюдаемых источниках. Таким образом, мы снова приходим к выводу, что в теорию необходимо включать дополнительные каналы диссипации. Особый интерес представляет собой релятивистское рассмотрение диссипации за счет объемной вязкости в гиперонном веществе [68, 192]. Мы ожидаем, что подавление r -мод объемной вязкостью в этом случае будет усилено двумя независимыми физическими механизмами: (1) увеличением коэффициента объемной вязкости ζ , обусловленным химическими реакциями с участием гиперонов, и (2) особенностями собственных функций релятивистских r -мод. Комбинированное влияние этих эффектов на окна неустойчивости исследуется в следующем разделе.

4.4 Подавление r -мод гиперонной вязкостью

В этом разделе мы приводим результаты расчета релятивистских r -мод и их окон неустойчивости в НЗ с гиперонным $нр\mu\Lambda\Xi^-$ -составом. В отличие от нуклонного вещества, не все химические реакции в гиперонном веществе при температурах, характерных для звезд в LMXB системах, можно считать медленными, а потому в качестве γ здесь следует использовать адиабатический индекс, модифицированный химическими реакциями (см. раздел 1.3.2). Имея это в виду, мы рассмотрим, как влияние реакций на γ меняет окна неустойчивости. Также, пользуясь формализмом, изложенным в разделе 1.4, мы оценим, как окна неустойчивости меняются из-за эффектов нуклонного спаривания.

4.4.1 Микрофизические входные данные

Модели нейтронных звезд с гиперонным составом

Мы используем упрощенную модель НЗ, состоящую из баротропной коры и небаротропного ядра (см. раздел 1.1). Кору мы описываем с помощью уравнения состояния BSk24 [111], а если точнее – с помощью подгоночной формулы из работы [170], определяющей давление $p_{\text{BSk24}}(\rho)$ как функцию плотности ρ , полученную для химически равновесной BSk24 коры. Чтобы описать ядро, мы используем одно из двух уравнений состояния: либо уравнение состояния FSU2H из работы [36], либо уравнение состояния TM1C из работы [32]. Эти уравнения состояния основаны на релятивистской теории среднего поля и описывают вещество, в котором с ростом плотности нуклонный состав сменяется гиперонным: сначала появляются Λ -гипероны, а затем и Ξ^- -гипероны (и, возможно, другие сорта гиперонов). Модельную границу коры ядро мы определяем как соответствующую плотности $\rho = \rho_{\text{cc}}$, при которой равновесное давление, описываемое уравнением состояния BSk24, совпадает с равновесным давлением, описываемым уравнением состояния FSU2H или TM1C: $p_{\text{BSk24}}(\rho_{\text{cc}}) = p_{\text{FSU2H/TM1C}}(\rho_{\text{cc}})$. Получающиеся модели с FSU2H ядром приведены на Рис. 4.7. Черной кривой показано равновесное давление как функция плотности, а фоновые цвета показывают диапазоны плотностей с разным составом, меняющимся с ростом плотности от нуклонного $нр\mu$ -состава к гиперонному $нр\mu\Lambda\Xi^-$ -составу. Красными точками отмечены значения центральной плотности и давления в моделях с массами от $1.4 M_{\odot}$ до $1.9 M_{\odot}$.

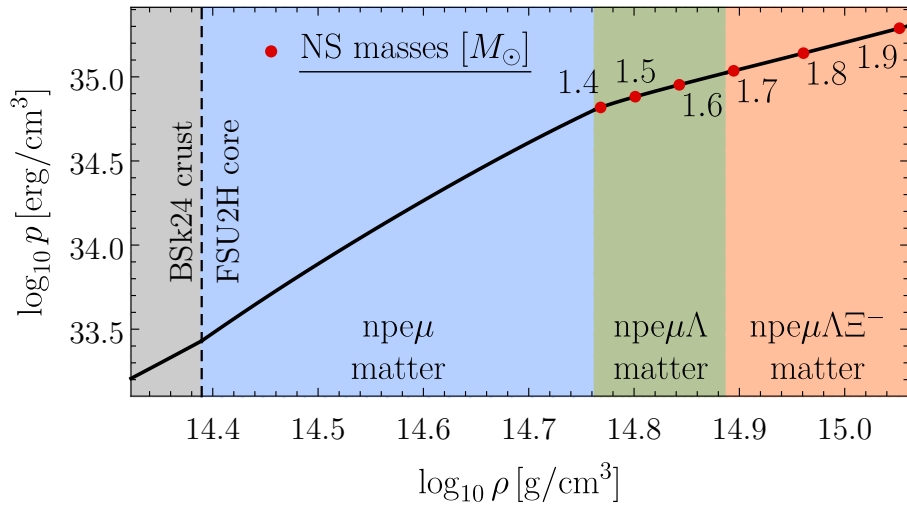


Рис. 4.7: Черной кривой показана зависимость равновесного давления от плотности вещества для одного из двух рассматриваемых уравнений состояния ядра. Красные точки соответствуют значениям плотности и давления в центре звезд с массами от $1.4M_{\odot}$ до $1.9M_{\odot}$. Кора моделируется уравнением состояния BSk24, а ядро – уравнением состояния FSU2H.

Мы ожидаем, что модели с FSU2H ядром будут давать наиболее «оптимистичные» прогнозы для подавления r -мод в LMXB системах, поскольку уравнение состояния FSU2H допускает появление гиперонов при относительно низких плотностях: даже каноническая модель звезды с массой $M = 1.4 M_{\odot}$ уже содержит малую примесь Λ -гиперонов. Подавление r -мод в моделях с TM1C ядром, в свою очередь, скорее всего будет существенно менее эффективным и подходящим для объяснения наблюдений, поскольку гипероны в уравнении состояния TM1C появляются при бóльших плотностях в гораздо более массивных моделях с $M \geq 1.55 M_{\odot}$. По крайней к таким предсказаниям приводят расчеты, проводившиеся для ньютоновских r -мод [68], согласно которым подавление ньютоновских r -мод в LMXB системах в рамках TM1C моделей требует гораздо бóльших значений звездной массы, чем в рамках FSU2H моделей¹⁰. Ниже мы будем рассматривать FSU2H модели с массами $M = 1.5 M_{\odot}$, $1.6 M_{\odot}$ и $1.7 M_{\odot}$, и более массивные TM1C модели с $M = 1.7 M_{\odot}$ и $1.8 M_{\odot}$. Из всех рассматриваемых моделей только $1.7 M_{\odot}$ FSU2H модель содержит и Λ - и Ξ^- -гипероны, в то время как в остальных моделях вещество в ядре обладает $нрe\mu\Lambda$ -составом.

¹⁰Оговоримся, однако, что работа [68] полагалась на упрощенное описание r -мод: для расчета \dot{E}_c использовалась подгоночная формула для дивергенции скорости $\text{div} v$, не согласованная с выбранными уравнениями состояния. Кроме того, эта формула была получена на основе рассмотрения ньютоновских r -мод в *баротропных* звездах *за рамками приближения Каулинга*, что сильно отличается от рассмотрения в данной диссертации. Другими словами, моделирование r -мод в работе [68] сильно отличается рассмотренного в главе 3.

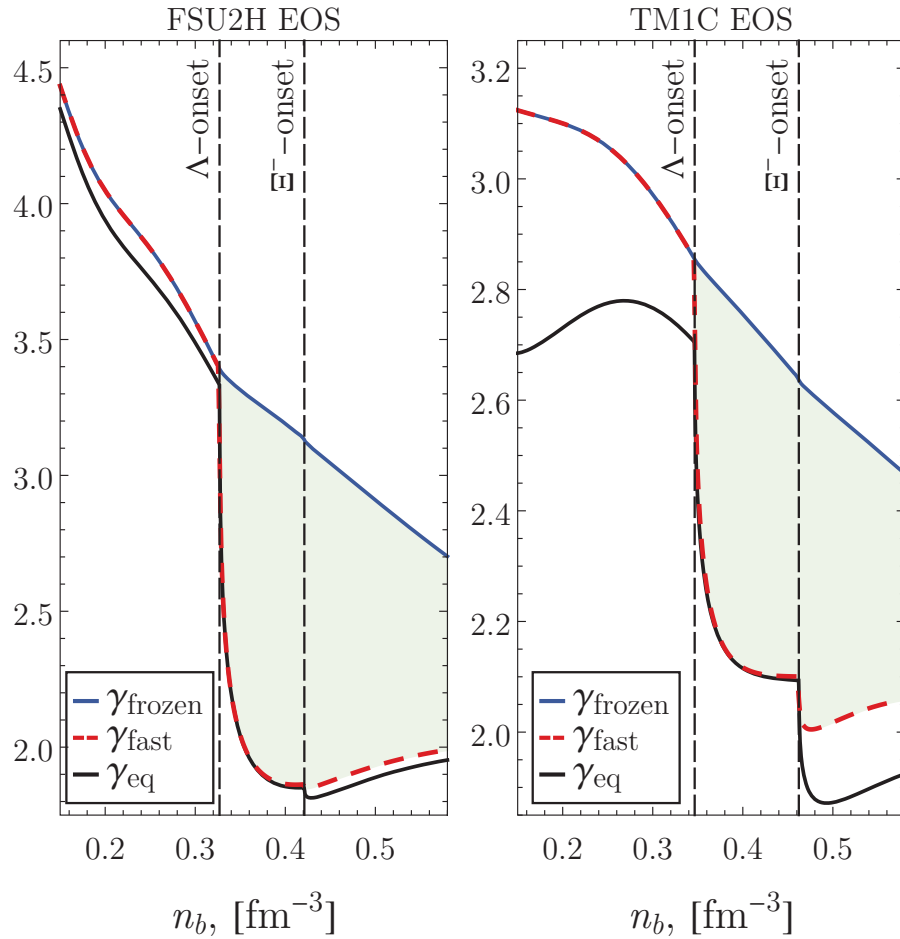


Рис. 4.8: Адиабатический индекс как функция барионной концентрации n_b для уравнений состояния FSU2H (слева) и TM1C (справа). Синие линии («frozen») получены в пределе замороженных слабых безлептонных процессов, красные штрихи («fast») – когда данные реакции считаются очень быстрыми, а черные линии («eq») – для вещества в полном химическом равновесии. В зависимости от температуры точное значение адиабатического индекса [при уравновешенном сильном процессе (1.34)] лежит в выделенной зеленым цветом области.

Кинетические коэффициенты

Как мы убедимся ниже, роль сдвиговой вязкости в подавлении r -мод в гиперонном веществе является относительно слабой, а потому нет необходимости в ее точном описании. По этой причине здесь мы оцениваем коэффициент сдвиговой вязкости η с помощью выражений, приведенных для нормального и сверхпроводящего нуклонного вещества в работе [94]. Для расчета объемной вязкости ζ (1.153) и модифицированного химическими реакциями адиабатического индекса γ (1.152) мы заимствуем подгоночные формулы для скоростей $\lambda_{12 \leftrightarrow 34}$ слабых безлептонных реакций (1.29)-(1.33) в нормальном веществе из работы [68]. Отметим, что в этой работе учитывается наиболее эффективный канал протекания данных реакций – посредством мезонного обмена.

Как мы обсуждали в разделе 1.3.2, в зависимости от температуры точное значение модифицированного реакциями адиабатического индекса (1.152)

$$\gamma_{\text{exact}} = \frac{n_{b0}}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial n_b} \right)_0 \left[1 - \beta \frac{(\lambda_{\text{tot}}/\lambda_{\text{max}})^2}{1 + (\lambda_{\text{tot}}/\lambda_{\text{max}})^2} \right] \quad (4.39)$$

лежит в диапазоне $\gamma_{\text{fast}} \leq \gamma_{\text{exact}} \leq \gamma_{\text{frozen}}$, где $\gamma_{\text{frozen}} = (n_{b0}/p_0)(\partial p/\partial n_b)_0$ – его значение (1.154) в пределе замороженных слабых безлептонных процессов ($\lambda_{\text{tot}} \ll \lambda_{\text{max}}$), а $\gamma_{\text{fast}} = \gamma_{\text{frozen}}(1 - \beta)$ – значение (1.155) в пределе, когда эти процессы протекают очень быстро ($\lambda_{\text{tot}} \gg \lambda_{\text{max}}$). Данное поведение проиллюстрировано на Рис. 4.8, где показаны γ_{frozen} (синие кривые) и γ_{fast} (красные кривые) как функции барионной концентрации n_b , а зеленым цветом показана область возможных точных значений γ_{exact} . Черной линией для справки показан адиабатический индекс γ_{eq} (1.156) вещества в полном химическом равновесии.

Протонная сверхпроводимость и нейтронная сверхтекучесть

Влияние нуклонного спаривания мы учитываем в рамках подхода, изложенного в разделе 1.4: сильную протонную сверхпроводимость (далее – просто сверхпроводимость) мы моделируем исключением слабых реакций с протонами, а нейтронную сверхтекучесть – умножая скорости $\lambda_{12 \leftrightarrow 34}$ слабых безлептонных реакций на факторы подавления $\mathcal{R}_{12 \leftrightarrow 34}$ (1.199). В интересующих нас реакциях участвует либо один нейтрон, либо три нейтрона, и для соответствующих факторов подавления как функций безразмерной энергетической щели в спектре нейтронов мы используем подгоночные формулы (1.213)-(1.214). Саму энергетическую щель мы заимствуем из трех разных моделей. Во-первых, мы используем подгонку [197] для энергетической щели в TТав модели нейтронного спаривания [198]. Также мы используем подгонки [42] для энергетических щелей, рассчитанных в предположении Av18 [199] и N3LO [200] моделей ядерного взаимодействия¹¹. Соответствующие этим моделям температуры сверхтекучего перехода $T_c(k_{\text{Fn}})$ как функции волнового вектора Ферми нейтронов k_{Fn} показаны на Рис. 4.9. Здесь вертикальными штрихами нанесены значения k_{Fn} , соответствующие появлению гиперонов, а вертикальными сплошными линиями – соответствующие центральным плотностям разных звездных моделей.

¹¹Заметим, что, строго говоря, такой подход не является самосогласованным, поскольку уравнение состояния и энергетическая щель в идеале должны рассчитываться на основе общей модели ядерного взаимодействия.

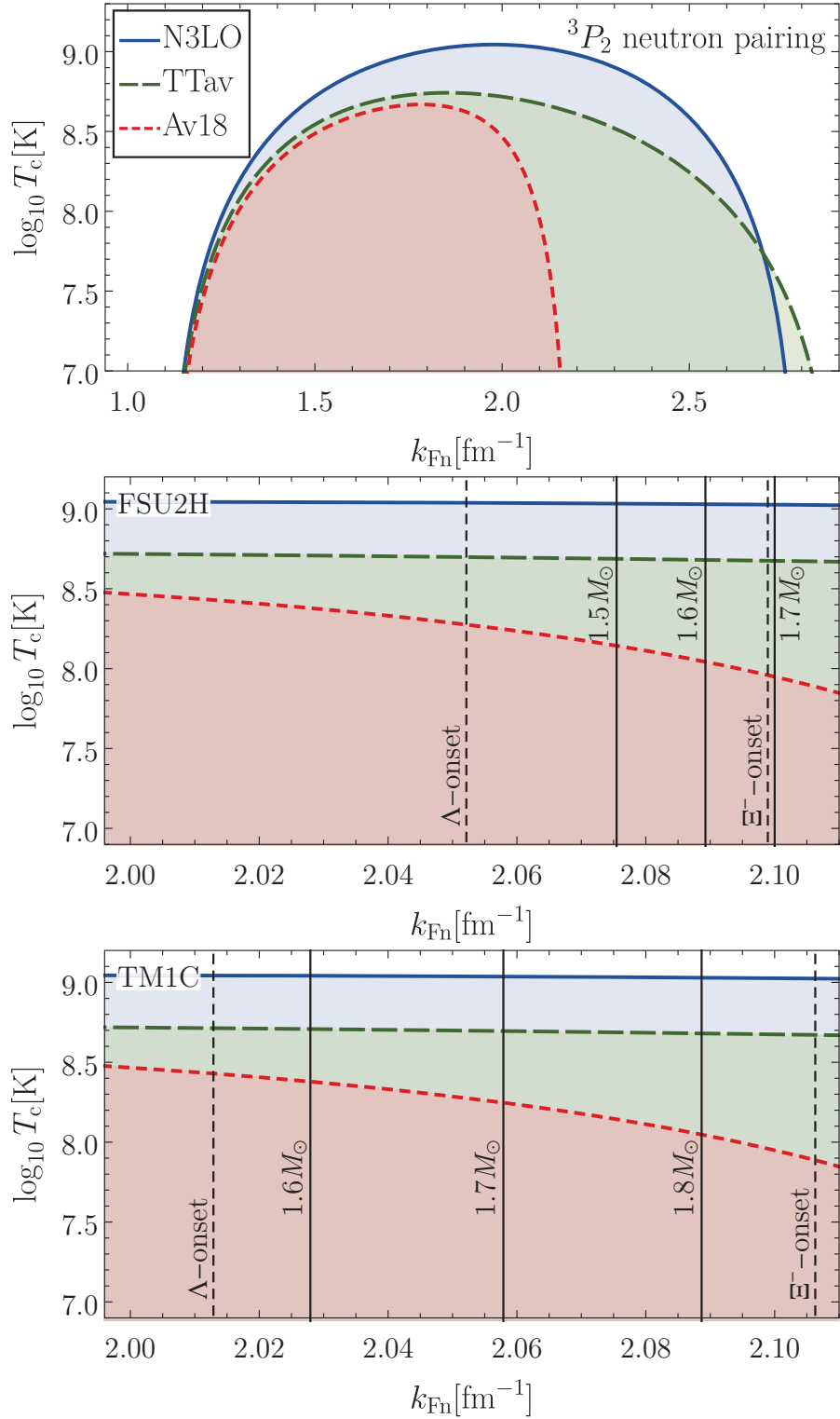


Рис. 4.9: Температуры сверхтекучего перехода $T_c(k_{Fn})$ как функции волнового вектора Ферми нейтронов k_{Fn} для их триплетного 3P_2 -спаривания. Различными цветами показаны разные модели сверхтекучести. Закрашенные области под каждой кривой соответствуют значениям параметров, при которых нейтроны являются сверхтекучими. Вертикальными штрихами показаны значения k_{Fn} , соответствующие появлению гиперонов, а вертикальными сплошными линиями – соответствующие центральным плотностям разных моделей НЗ.

4.4.2 R-моды в гиперонных звездах

Пользуясь теорией, изложенной в главе 3, мы для каждой из рассматриваемых звездных моделей рассчитали релятивистские и ньютоновские фундаментальные $l = m = 2$ r -моды и соответствующие темпы изменения энергии $\dot{E}_{\eta,\zeta,\text{GW}}(\Omega, T^\infty)$. Расчеты проводились в широком диапазоне скоростей вращения $0.01 \Omega_K \leq \Omega \leq 0.6 \Omega_K$ и температур $10^{6.5} \text{ K} \leq T^\infty \leq 10^9 \text{ K}$, причем для каждого сочетания данных параметров

- 1) *протоны* считались нормальными («N») или сверхпроводящими («SSc»);
- 2) *нейтроны* считались нормальными («N») либо сверхтекучими в рамках моделей N3LO, Av18 или TTav («SfN3LO», «SfAv18» или «SfTTav»);
- 3) *влияние слабых безлептонных процессов на адиабатический индекс γ* учитывалось либо точно («exact») по формуле (4.39), либо частично («fast») по формуле (1.155), полученной в пределе быстрых реакций, либо не учитывалось («frozen»), и адиабатический индекс рассчитывался по формуле (1.154). Далее полученные в данных предположениях r -моды мы будем называть «точными», «быстрыми» или «замороженными».

Вне зависимости от звездной модели и микрофизических условий, как и в нуклонном веществе, с уменьшением скорости вращения мы наблюдаем подавление релятивистских r -мод в небаротропном ядре звезды. Также мы находим, что по-прежнему функция h_1^{Newt} (4.37), определяющая энергопотери \dot{E}_ζ в ньютоновской теории, оказывается практически постоянной. В то же время функция h_1^{GR} (4.37), определяющая энергопотери \dot{E}_ζ в ОТО, существенно меняется по звезде. Данное поведение проиллюстрировано на Рис. 4.10 на примере замороженных r -мод в $1.6 M_\odot$ FSU2H модели с нормальными нейтронами и протонами. Слева показаны тороидальные функции T_m фундаментальных $l = m = 2$ r -мод для $0.5 \Omega_K \leq \Omega \leq 0.01 \Omega_K$, а справа показаны соответствующие данным решениям отношения $h_1(r, \Omega)/h_1(R, \Omega)$. Сплошными черными кривыми («GR») показаны результаты релятивистских расчетов, а красными штрихами («Newt») – расчетов в ньютоновской теории. Изменение звездной модели или микрофизических условий качественно не меняет поведение r -мод, однако может поменять его количественно, что, как мы увидим, отразится на темпах изменения их энергии и, следовательно, на окнах неустойчивости.

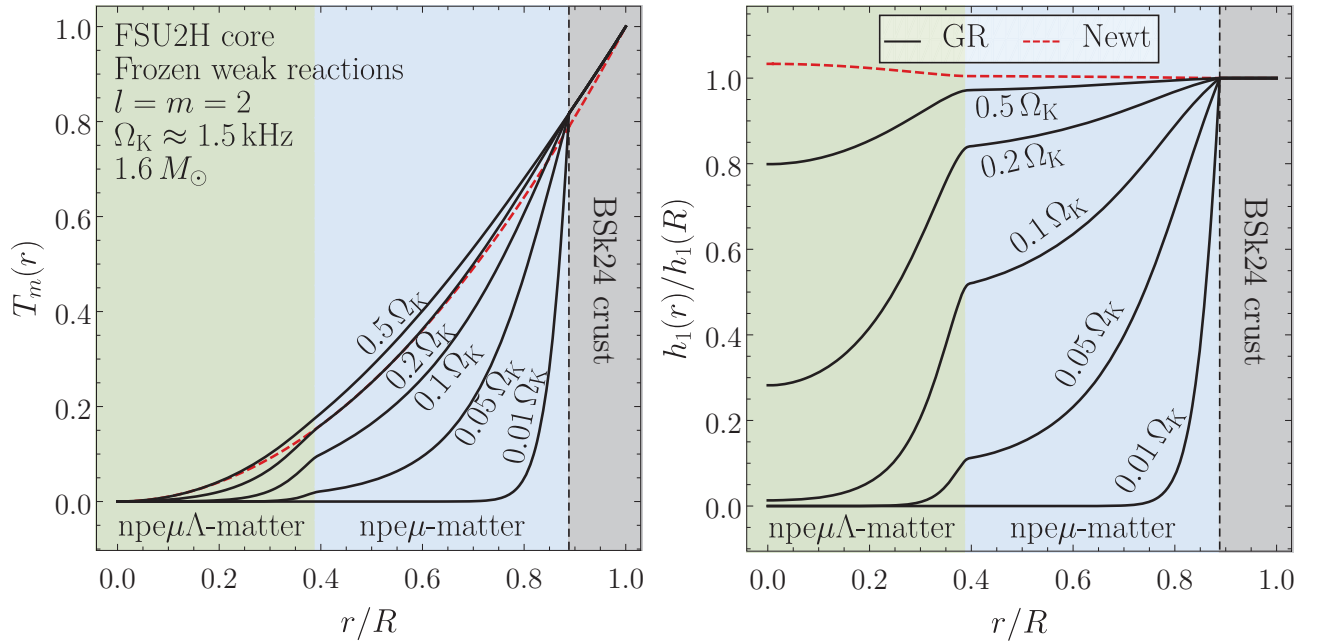


Рис. 4.10: Подавление релятивистских r -мод в ядре звезды при малых скоростях вращения. Черными кривыми показаны тороидальные функции $T_m(r)$ [слева] и соответствующие отношения $h_1(r)/h_1(R)$ [справа] для релятивистских фундаментальных $l = m = 2$ r -мод. Данные функции рассчитаны для скоростей вращения Ω в диапазоне от $0.5 \Omega_K$ до $0.01 \Omega_K$. Красными штрихами показаны не зависящие от Ω решения, получающиеся в ньютоновской теории. Разными фоновыми цветами обозначены области звезды с разным химическим составом. Расчеты проведены для $1.6 M_\odot$ FSU2H модели с нормальными протонами и нейтронами в предположении замороженных слабых реакций.

4.4.3 Окна неустойчивости g -мод в гиперонных звездах

Результаты численных расчетов

Полученные нами окна неустойчивости релятивистских r -мод изображены на Рис.4.11–4.14, каждый из которых соответствует определенному выбору уравнения состояния в ядре и состоянию протонов. Расчеты в рамках FSU2H моделей с нормальными и сверхпроводящими протонами показаны, соответственно, на Рис.4.11 и 4.12. Аналогичные результаты для TM1C моделей изображены на Рис.4.13 и 4.14. Каждый из представленных рисунков состоит из четырех частей, каждая из которых соответствует определенному состоянию нейтронов: нормальные нейтроны (сверху слева) или сверхтекучие Av18 (сверху справа), TТав (снизу слева) и N3LO (снизу справа) нейтроны. На каждой из частей, в свою очередь, изображены окна неустойчивости для звездных моделей с разными массами.

Для каждой из звездных моделей мы приводим четыре кривых, определенных следующим образом:

- | | |
|---|---|
| <u>(1) синие точки («frozen»):</u> | $\dot{E}_{\text{frozen}}(\Omega, T^\infty) = 0$ |
| <u>(2) красная пунктирная линия («fast»):</u> | $\dot{E}_{\text{fast}}(\Omega, T^\infty) = 0$ |
| <u>(3) черная сплошная линия («exact»):</u> | $\dot{E}_{\text{exact}}(\Omega, T^\infty) = 0$ |
| <u>(4) серая сплошная линия («only η»):</u> | $\dot{E}_{\text{frozen}}(\Omega, T^\infty) _{\zeta=0} = 0.$ |

Здесь метки «frozen», «fast» и «exact» указывают на используемое в вычислениях значение адиабатического индекса. По определению, первые три кривые очерчивают границы окон неустойчивости «замороженных», «быстрых» и «точных» r -мод. Четвертая кривая иллюстрирует роль сдвиговой вязкости в подавлении r -мод и показывает границу окна неустойчивости в том случае, когда сдвиговая вязкость является единственным диссипативным механизмом, а влиянием химических реакций полностью пренебрегается (т.е. объемная вязкость «отключена», а адиабатический индекс равен «замороженному»). Черными точками показаны наблюдения нейтронных звезд в LMXB системах, заимствованные из работы [167]. указанная для этих точек неопределенность в значениях температуры T^∞ отражает неопределенность химического состава внешних слоев НЗ [134].

Мы используем различную заливку, чтобы отличить окна неустойчивости ($\dot{E} > 0$) от долин стабильности ($\dot{E} < 0$) r -мод. Прежде всего, синей заливкой показаны долины стабильности «замороженных» r -мод:

$$\text{синие области:} \quad \dot{E}_{\text{frozen}}(\Omega, T^\infty) \leq 0. \quad (4.40)$$

Далее, при расчетах мы обнаружили, что учет влияния химических реакций на адиабатический индекс в общем случае приводит к уширению долин стабильности. Это уширение наиболее ярко выражено в предположении быстрых реакций (что соответствует расчетам для «быстрых» r -мод) и выделено полосами красного цвета:

$$\text{красные полосы:} \quad \begin{cases} \dot{E}_{\text{fast}}(\Omega, T^\infty) \leq 0 \\ \dot{E}_{\text{frozen}}(\Omega, T^\infty) \geq 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

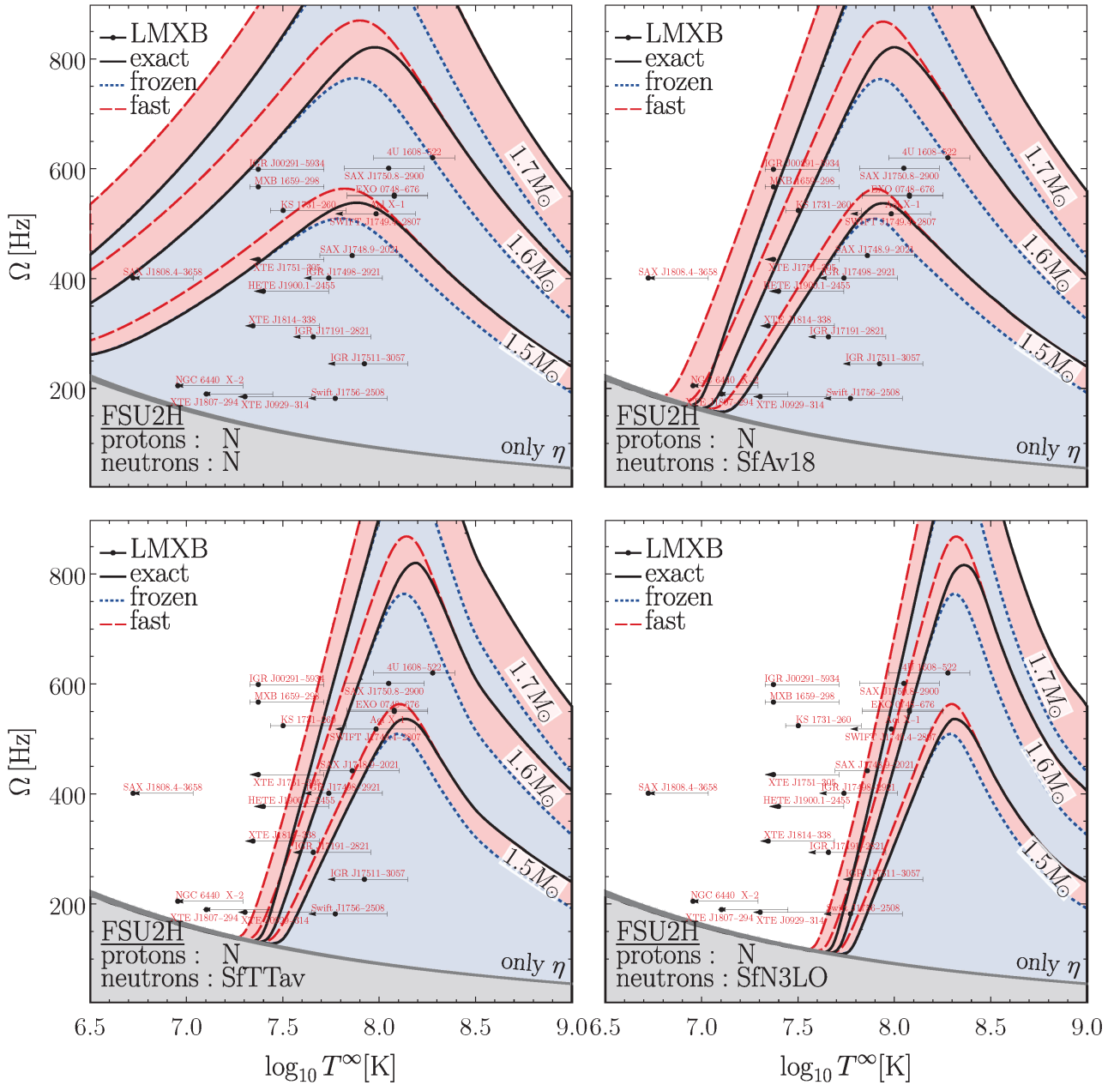


Рис. 4.11: Окна неустойчивости релятивистских r -мод для звездных моделей с FSU2H ядром и массами $M = 1.5 M_\odot$, $M = 1.6 M_\odot$ и $M = 1.7 M_\odot$. Протоны считаются нормальными, а нейтроны – нормальными (сверху слева) либо сверхпроводящими в рамках моделей Av18 (сверху справа), TTav (снизу слева), или N3LO (снизу справа). Для каждой из моделей синие точки («frozen»), красные штрихи («fast») и сплошная черная линия («exact») показывают границы окон неустойчивости «замороженных», «быстрых» и «точных» r -мод. Серые кривые («only η ») показывают границу окон неустойчивости «замороженных» r -мод в случае, когда объемная вязкость выключена и они подавляются исключительно сдвиговой вязкостью. Черными точками показаны наблюдения НЗ в LMXB системах (из работы [167]), а соответствующие этим точкам неопределенности в определении температуры отражают неопределенность химического состава во внешних слоях звезды (см. детали в работе [134]).

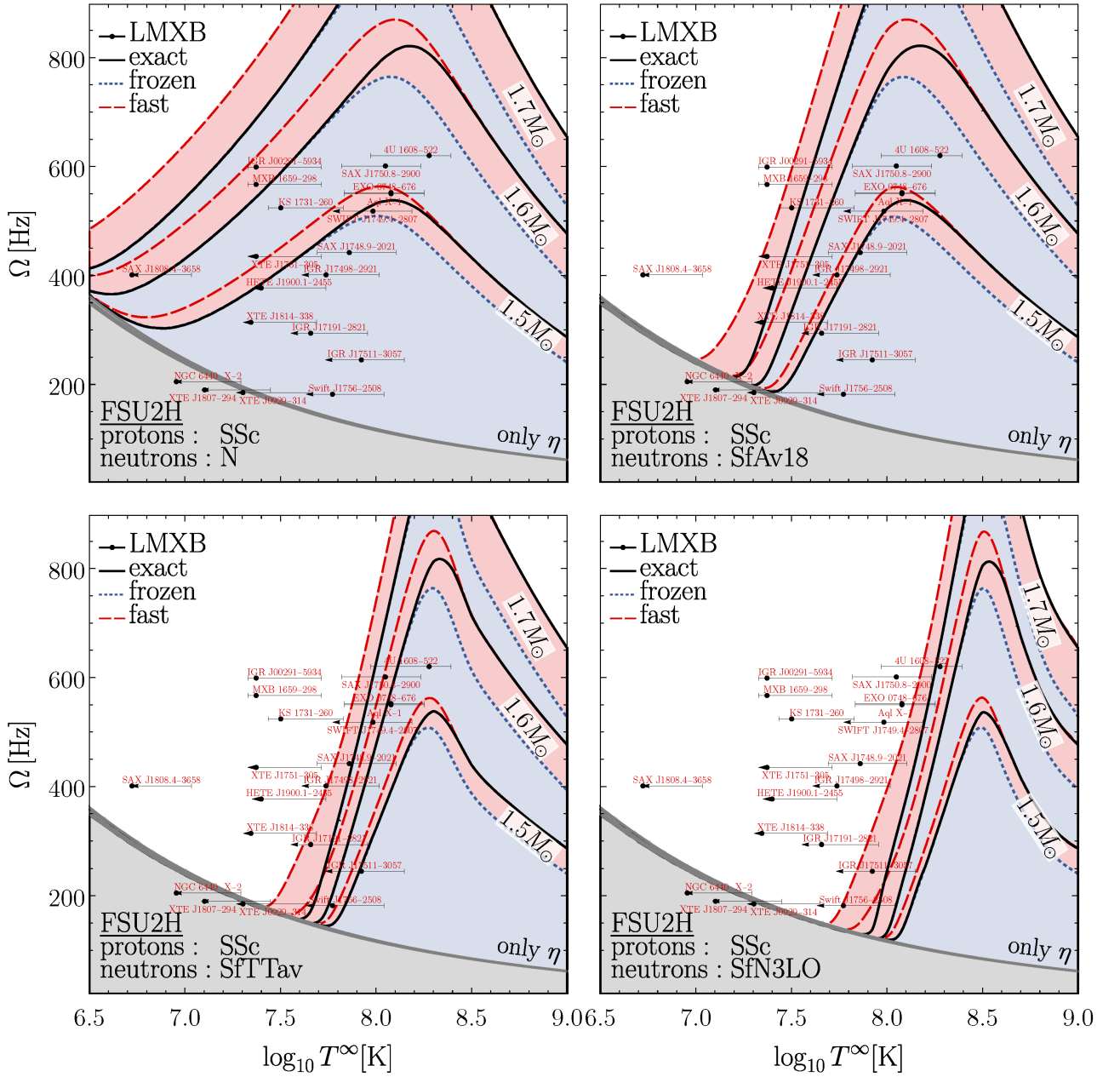


Рис. 4.12: Аналог Рис. 4.11, только для случая сверхпроводящих протонов.

Как следует из определения, данные полосы соответствуют таким звездным параметрам, при которых «замороженные» r -моды уже неустойчивы, в то время как «быстрые» r -моды все еще подавлены диссипацией. Наконец, области, где r -моды подавляются исключительно сдвиговой вязкостью, показаны серой заливкой:

$$\text{серые области: } \dot{E}_{\text{frozen}}(\Omega, T^\infty)|_{\zeta=0} \leq 0. \quad (4.42)$$

Эти области и их границы очень слабо зависят от звездной массы, а потому практически неразличимы.

в работе [68]). В предлагаемой нами релятивистской теории подавление r -мод происходит уже при $M \gtrsim 1.6 M_{\odot}$, причем оно оказывается возможным даже с учетом эффектов нуклонного спаривания (см. окна неустойчивости в FSU2H моделях с Av18 нейтронами). Что касается TM1C моделей, в них для подавления r -мод для случая нормального вещества требуются $M \gtrsim 1.7 M_{\odot}$, в то время как учет нейтронной сверхтекучести увеличивает пороговые массы как минимум до $M \gtrsim 1.8 M_{\odot}$. Для сравнения, подавление r -мод в ньютоновских TM1C моделях в отсутствие эффектов нуклонного спаривания требует $M \gtrsim 1.8 M_{\odot}$, в то время как спаривание нуклонов повышает требуемые массы примерно до $M \gtrsim 1.9 M_{\odot}$ (см. правую колонку на Рис. 12 в работе [68]). Таким образом, мы приходим к выводу, что, по сравнению с ньютоновским случаем, гиперонная объемная вязкость для релятивистских r -мод оказывается намного более эффективным диссипативным механизмом, который (при подходящих микрофизических входных данных) способен подавлять r -моды в LMXB системах даже с учетом протонной сверхпроводимости и нейтронной сверхтекучести.

Во-вторых, мы видим, что, вне зависимости от выбранного уравнения состояния, протонная сверхпроводимость слабо влияет на окна неустойчивости: она приводит к незначительному сужению долин неустойчивости и смещает их в область чуть более высоких температур. Тот факт, что влияние сверхпроводимости является слабым, вполне ожидаем, поскольку из рассматриваемых безлептонных процессов она подавляет только два [(1.30) и (1.33)], в то время как остальные реакции [(1.29), (1.31) и (1.32)] остаются активными. А вот нейтронная сверхтекучесть, наоборот, сильно модифицирует окна неустойчивости, поскольку нейтроны вовлечены во все рассматриваемые реакции. Локально в точке r при понижении температуры $T(r)$ ниже критической нейтронная сверхтекучесть сильно замедляет протекание реакций. Глобально это отражается в виде крутой левой границы долин стабильности. Точные значения температуры T^{∞} , соответствующие данной границе, зависят от выбранной модели нейтронной сверхтекучести, а именно – от профиля $T_c(r)$ температуры сверхтекучего перехода в гиперонном ядре. По мере уменьшения T^{∞} в ядре образуется сверхтекучая область с $T(r) < T_c(r)$, которая продолжает расти с дальнейшим падением T^{∞} . Химические реакции в этой области постепенно «замораживаются» с уменьшением T^{∞} , что приводит к ослаблению диссипации за счет объемной вязкости. В конце концов все ядро становится сверхтекучим и диссипация за

счет объемной вязкости становится пренебрежимо слабой. Таким образом, более высокие значения $T_c(r)$ в гиперонном ядре приводят к более высоким значениям T^∞ , соответствующим крутой левой границе долин неустойчивости. Из рассматриваемых нами, модель Av18 характеризуется наиболее низкими температурами сверхтекучего перехода $T_c(r)$ в гиперонном ядре (см. Рис. 4.9), а потому именно она наиболее благоприятна для подавления r -мод в LMXB. Другие модели – TTav и особенно N3LO – обладают более высокими критическими температурами и хуже подходят для подавления r -мод.

В-третьих, как упоминалось выше, учет влияния химических реакций на адиабатический индекс приводит к уширению долин стабильности r -мод. Чтобы объяснить этот эффект, заметим, что учет химических реакций уменьшает значение адиабатического индекса. Согласно определению (1.66), это означает, что химические реакции смягчают звездное вещество: более низкое давление Δp требуется для того же сжатия $\Delta \varepsilon$. Поскольку вещество становится более податливым для сжатия и расширения, которые приводят к диссипации за счет объемной вязкости, это объясняет, почему учет влияния реакций на адиабатический индекс приводит к более эффективному подавлению r -мод и, следовательно, более широким долинам стабильности. Красными полосами на рисунках показана получающаяся из-за этого эффекта разница между долинами стабильности «быстрых» и «замороженных» r -мод. Истинные границы долин стабильности («exact», черные кривые), которые точно учитывают влияние реакций на адиабатический индекс, проходят между границами долин стабильности «замороженных» (синие точки) и «быстрых» (красные штрихи) r -мод. При низких температурах, где реакции медленные, точные границы совпадают с «замороженными», а при высоких, где реакции быстрые, – с «быстрыми». В относительно узких областях, соответствующих промежуточным температурам, при которых реакции протекают с умеренной скоростью, точные границы проходят между «быстрыми» и «замороженными». Напомним, что диссипация наиболее эффективна именно при промежуточных скоростях реакций и исчезает для слишком быстрых или медленных реакций [см. формулу (1.153)], что объясняет полученную нами колоколообразную форму долин стабильности. Согласно проведенным расчетам, изменения адиабатического индекса, обусловленные слабыми реакциями, не могут качественно повлиять на окна неустойчивости и приводят к смещению их границ примерно на $\lesssim 10\%$.

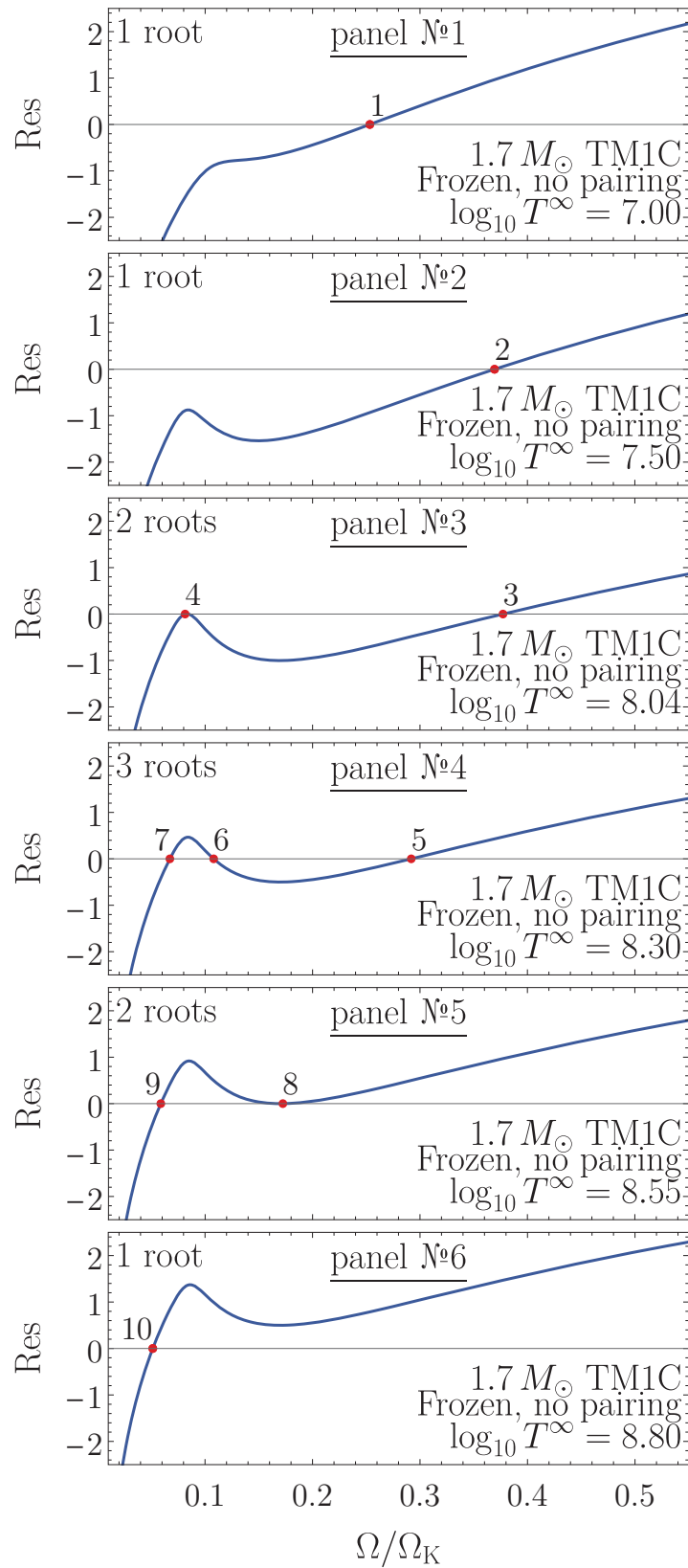


Рис. 4.15: Невязка $\text{Res}(\Omega, T^{\infty})$ как функция Ω при разных температурах T^{∞} для «замороженных» r -мод в $1.7 M_{\odot}$ TM1C модели с нормальными нейтронами и протонами. На каждой панели красные точки показывают корни $\text{Res}(\Omega, T^{\infty})$ при соответствующих температурах. При температурах на панелях 1, 2 и 6 функция $\text{Res}(\Omega, T^{\infty})$ имеет только один корень, на панелях 3 и 5 – два корня, а на панели 4 – три корня.

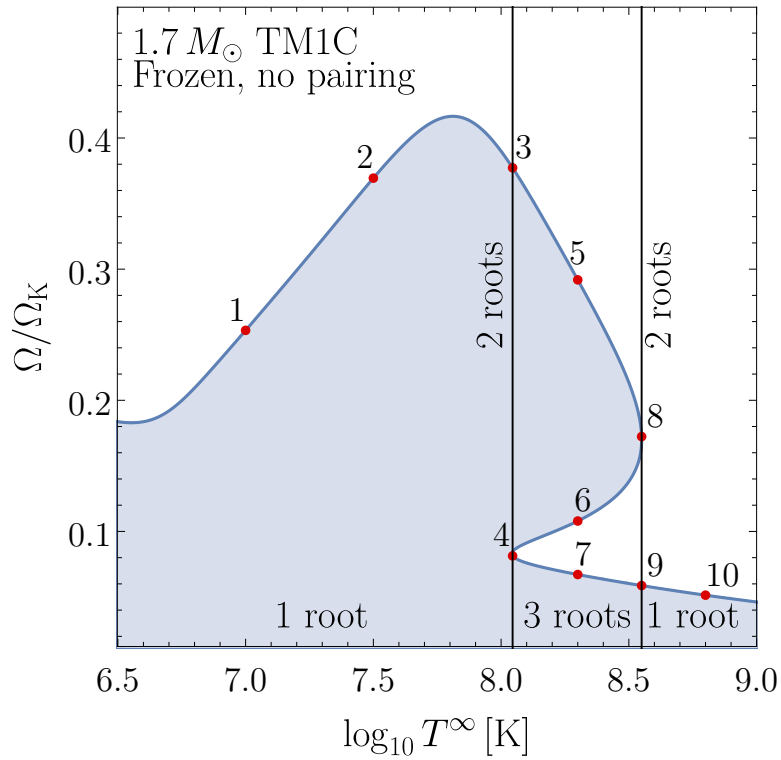


Рис. 4.16: Окно неустойчивости «замороженных» r -мод в $1.7 M_{\odot}$ TM1C модели с нормальными нейтронами и протонами. Красные точки соответствуют корням невязки $\text{Res}(\Omega, T^{\infty})$, показанным на Рис. 4.15 (корни пронумерованы в точности так же). Вертикальные линии, на которых $\text{Res}(\Omega, T^{\infty})$ имеет два корня, разделяют области, где $\text{Res}(\Omega, T^{\infty})$ имеет один или три корня.

Наконец, мы хотели бы обратить внимание на необычную форму окон неустойчивости в TM1C моделях. Эта форма характерна исключительно для релятивистской теории и не возникает для ньютоновских r -мод. Ее появление объясняется нетривиальной зависимостью от Ω темпов изменения энергии r -мод, обусловленной соответствующей нетривиальной зависимостью их собственных функций. Данная зависимость изображена на Рис. 4.15, где построена невязка

$$\text{Res}(\Omega, T^{\infty}) \equiv \log_{10} \dot{E}_{\text{GW}} - \log_{10} |\dot{E}_{\text{diss}}| \quad (4.43)$$

как функция скорости вращения Ω для «замороженных» r -мод в $1.7 M_{\odot}$ TM1C модели с нормальными нейтронами и протонами. Различные панели рисунка соответствуют различным значениям температуры T^{∞} , меняющимся от 10^7 К (1я панель) до $10^{8.8}$ К (6я панель). На каждой панели красными точками изображены корни невязки (4.43). Для удобства эти корни пронумерованы последовательно, начиная с 1й панели и заканчивая 6й панелью. В зависимости от

T^∞ функция $\text{Res}(\Omega, T^\infty)$ может иметь один корень (панели 1, 2 и 6), два корня (панели 3 и 5) и три корня (панель 4). При соответствующих температурах эти точки определяют границу окна неустойчивости, изображенного на Рис. 4.16. Это окно неустойчивости построено в тех же предположениях, что использовались при построении Рис. 4.15. Красные точки на его границе соответствуют корням невязки на Рис. 4.15 (с теми же номерами).

4.5 Обсуждение результатов главы 4

До недавнего времени вычисление эволюционных времен и окон неустойчивости релятивистских r -мод в небаротропных звездах представляло собой достаточно сложную задачу, поскольку из-за проблемы непрерывного спектра моделирование самих r -мод (их спектра и собственных функций) было затруднено и их свойства оставались неопределенными (см. раздел 3.3.2). Обнаруженная нами неаналитическая зависимость релятивистских r -мод от Ω (см. раздел 3.4) позволила нам преодолеть эти трудности и разработать надежный метод моделирования r -мод. Научившись моделировать r -моды, мы смогли заняться исследованием их поведения (затухания/раскачки) под действием различных эволюционных механизмов, построением их окон неустойчивости и сравнением предсказаний релятивистской и ньютоновской теории.

Мы сосредоточились на решении двух задач: 1) определение вклада диффузии частиц в подавление r -мод и 2) изучение подавления r -мод гиперонной объемной вязкостью. Интерес к диффузии частиц был мотивирован тем, что для ряда звездных колебаний (звуковых волн, p -мод и g -мод) в сверхпроводящих звездах она приводит к существенным энергопотерям. Кроме того, в умеренно горячих звездах данная диссипация превышает диссипацию за счет сдвиговой вязкости, которая считалась ведущим диссипативным механизмом при данных температурах (см. главу 2). Интерес к гиперонной объемной вязкости был связан с тем, что химические реакции с участием гиперонов приводят к увеличению коэффициента объемной вязкости и, следовательно, более эффективному подавлению колебаний объемной вязкостью. Роль этого эффекта прежде исследовалась только для ньютоновских r -мод, и, имея в виду необычные свойства релятивистских r -мод, мы решили пересмотреть данную задачу с учетом релятивистских эффектов.

Сначала, пользуясь формализмом, изложенным в разделах 1.2.4-1.3, мы получили выражения (4.18)–(4.22) для расчета энергии r -мод E и темпов ее изменения $\dot{E}_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}}$. Эти выражения применимы к медленно вращающимся звездам в ОТО, а при переходе к соответствующему пределу – также и в ньютоновской теории. Анализируя данные выражения, мы установили, что, по сравнению с ньютоновским случаем, при медленных скоростях вращения особенности релятивистских r -мод снижают эффективность их раскачки CFS-механизмом и существенно увеличивают эффективность их подавления диссипативными механизмами. Чтобы проиллюстрировать этот эффект, мы рассмотрели предел экстремально медленного вращения, когда релятивистские r -моды радикально отличаются от ньютоновских (см. раздел 3.4.3), и аналитически исследовали зависимость эволюционных времен $\tau_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}} = 2E/|\dot{E}_{\eta,\zeta,\mathcal{D},\text{GW}}|$ от Ω .

Роль диффузии частиц мы исследовали в рамках полностью небаротропной модели НЗ с нуклонным *прем*-составом. Мы промоделировали фундаментальные $l = m = 2$ релятивистские и ньютоновские r -моды и рассчитали соответствующие эволюционные времена. Полученные результаты не только подтвердили наши теоретические предсказания, но и выявили неожиданный эффект: даже в случае относительно быстрого вращения ($\Omega \gtrsim 0.1 \Omega_K$), когда собственные функции релятивистских r -мод качественно похожи на функции ньютоновских r -мод, для релятивистских r -мод диффузия и объемная вязкость оказываются значительно более эффективными механизмами затухания, чем для ньютоновских r -мод. Мы установили, что этот эффект связан не столько с особенностями релятивистских r -мод, сколько с поведением собственных функций *ньютоновских* r -мод. Оказалось, что, в отличие от релятивистского случая, для ньютоновских r -мод функция h_1 (4.17) является практически постоянной во всей звезде. Поскольку производные как раз этой функции определяют энергопотери за счет объемной вязкости \dot{E}_ζ (4.20) и диффузии $\dot{E}_\mathcal{D}$ (4.21), подавление ньютоновских r -мод данными механизмами оказывается ослабленным по сравнению с релятивистским даже при относительно высоких скоростях вращения. Примечательно, что в результате этого эффекта разница в диссипации за счет диффузии оказывается настолько большой, что для релятивистских r -мод в сверхпроводящих звездах с нуклонным составом именно диффузия оказывается ведущим диссипативными механизмом, в то время как роль сдвиговой вязкости оказывается пренебрежимо слабой.

Для этой же звездной модели мы построили окна неустойчивости релятивистских и ньютоновских r -мод. При не слишком высоких температурах ($T^\infty \lesssim 10^8$ К) мы рассмотрели три способа подавления r -мод: только сдвиговой вязкостью, только диффузией или обоими данными механизмами. Мы убедились, что граница окна неустойчивости релятивистских r -мод при этих температурах определяется диффузией, а сдвиговая вязкость на нее практически не влияет. Для ньютоновских же r -мод граница окна неустойчивости определяется, наоборот, сдвиговой вязкостью, а диффузией можно пренебречь. Далее, чтобы оценить влияние релятивистского усиления подавления r -мод объемной вязкостью, мы «отключили» протонную сверхпроводимость и рассчитали окна неустойчивости релятивистских и ньютоновских r -мод, предполагая, что они подавляются только сдвиговой и [обусловленной mUrca и dUrca процессами (1.27)-(1.28)] объемной вязкостью. При этом мы пренебрегали диффузией, поскольку в нормальном веществе она не может приводить к значимому подавлению колебаний (см. раздел 2.2). Как мы ожидали, при высоких температурах ($T^\infty \gtrsim 10^8$ К), где r -моды подавляются преимущественно объемной вязкостью, граница окна неустойчивости релятивистских r -мод проходит при более высоких значениях Ω , отражая их более эффективное подавление.

Таким образом, мы установили, что комбинированное влияние эффектов ОТО и диффузии в небаротропном веществе может значительно модифицировать окна неустойчивости r -мод. При низких и умеренных температурах ($T^\infty \lesssim 10^8$ К) в сверхпроводящем нуклонном веществе диффузия оказывается намного более эффективным механизмом диссипации, чем сдвиговая вязкость. Что касается нормального (несверхпроводящего) вещества, мы установили, что релятивистские r -моды намного эффективнее подавляются объемной вязкостью, чем ньютоновские, что отражается на границе окон неустойчивости при высоких температурах ($T^\infty \gtrsim 10^8$ К). Несмотря на усиленное подавление диффузией частиц и объемной вязкостью, однако, построенные окна неустойчивости все еще содержат наблюдаемые источники. Это указывает на необходимость дальнейшего поиска дополнительных механизмов подавления r -мод. Учитывая усиленное подавление релятивистских r -мод объемной вязкостью, мы решили пересмотреть задачу об их окнах неустойчивости в гиперонных звездах, где наличие гиперонов приводит в увеличенному значению коэффициента объемной вязкости ζ .

Чтобы исследовать **роль гиперонной объемной вязкости** в подавлении r -мод, мы опирались на расчеты, проведенные в работе [68] (соответствующий подход к определению объемной вязкости в гиперонном веществе мы частично изложили в разделе 1.3.2). Результаты этой работы «воскресли» идею о том, что гиперонная объемная вязкость могла бы обеспечить диссипацию, необходимую для подавления r -мод в LMXB системах. Авторы этого исследования пересмотрели подавление r -мод гиперонной вязкостью, улучшив его в двух аспектах: они 1) опирались на современные уравнения состояния с $pre\mu\Lambda\Xi^-$ -составом вещества и 2) использовали улучшенное описание слабых безлептонных реакций, учитывающее наиболее эффективный канал их протекания – посредством мезонного обмена. Согласно результатам работы [68], по крайней мере для ньютоновских r -мод, гиперонная объемная вязкость оказалась намного более сильным механизмом диссипации, чем считалось ранее.

Следуя [68], мы провели расчеты для гиперонных звезд с $pre\mu\Lambda\Xi^-$ -составом, используя полученные в [68] более точные выражения для скоростей слабых безлептонных реакций. Мы рассмотрели окна неустойчивости релятивистских r -мод при разных предположениях о микрофизических свойствах вещества. А именно, мы рассмотрели, как учет влияния слабых безлептонных процессов на адиабатический индекс отражается на окнах неустойчивости, а также оценили изменение формы окон неустойчивости при включении эффектов нуклонного спаривания. Мы установили, что в рассмотренных звездных моделях учет влияния химических реакций на адиабатический индекс может сдвигать границу окна неустойчивости в область чуть более высоких скоростей вращения, не более чем на $\lesssim 10\%$. Также мы установили, что протонная сверхпроводимость слабо меняет окна неустойчивости, а вот нейтронная сверхтекучесть, подавляя диссипацию \dot{E}_ζ за счет объемной вязкости, может их сильно модифицировать при достаточно низких температурах.

Мы показали, что связанное с особенностями r -мод в ОТО усиление их подавления гиперонной объемной вязкостью приводит к тому, что для r -мод последняя оказывается намного более значимым диссипативным механизмом, чем считалось ранее. Сравнение с наблюдениями показало, что гиперонная вязкость способна подавить r -моды даже в наиболее «проблемных» – быстро вращающихся и умеренно горячих – звездах в LMXB системах, причем подобное подавление возможно даже с учетом эффектов нуклонного спаривания.

Сравнение наших расчетов с ньютоновскими [68] показало, что при тех же предположениях о микрофизических свойствах вещества для подавления r -мод в ОТО требуются менее массивные звездные модели, чем в ньютоновской теории. Так, например, в отсутствие нуклонного спаривания для подавления r -мод в FSU2H моделях требуются массы $M \gtrsim 1.7 M_{\odot}$, в то время как в их релятивистских аналогах r -моды подавлены уже при $M \gtrsim 1.6 M_{\odot}$, причем, возможно, даже с учетом нуклонного спаривания. Кроме того, в релятивистских FSU2H моделях большинство источников подавляется уже при $M \gtrsim 1.5 M_{\odot}$.

Отметим, что полученные окна неустойчивости очень чувствительны к микрофизическим входным данным (уравнению состояния, модели сверхтекучести и т.д.). Эту чувствительность можно было бы использовать в будущем, чтобы наложить ограничения на физические свойства холодного сверхплотного ядерного вещества. Кроме того отметим, что в рамках нашего подхода имеющиеся наблюдательные данные (см. Рис. 4.1) объясняются при достаточно консервативных представлениях о составе и свойствах звездного вещества. Таким образом, подавление r -мод объемной вязкостью, связанной с неравновесным протеканием химических процессов в гиперонном веществе, представляет собой естественное объяснение наблюдений НЗ в LMXB системах.

В завершение мы хотели бы кратко обсудить **применимость приближений**, использовавшихся в в этой главе. *Во-первых*, мы либо полностью пренебрегали корой НЗ¹², либо опирались на упрощенное моделирование коры, пренебрегая ее упругими свойствами, моделируя ее как баротропную жидкость и не учитывая диссипацию в коре и в слое Экмана (вязком пограничном слое) на границе кора-ядро¹³. Как обсуждалось в разделе 3.5, в рамках гидродинамического моделирования кора, будучи относительно легкой и тонкой по сравнению с ядром, не может существенно повлиять на собственные функции r -мод. При этом следует оговориться, что при частотах r -мод, близких к частотам торсионных мод, включение эффектов, связанных с кристаллической решеткой в коре, может оказаться важным. Что касается диссипации в коре, она обусловлена сдвиговой вязкостью (диффузия и объемная вязкость в коре неэффективны), и в рассмотренных задачах пренебрегать ей вполне законно, так как ее роль в подавлении релятивистских r -мод незначительна по сравнению с ролью других

¹²Большинство расчетов в разделе 4.3 проводились для полностью небаротропной модели НЗ из раздела 3.4.5. Исключением являются кривые \mathcal{D} (crust) и \mathcal{D} (crust, limited) на Рис. 4.5.

¹³Это относится к кривым \mathcal{D} (crust) и \mathcal{D} (crust, limited) на Рис. 4.5, а также ко всем вычислениям в разделе 4.4.

диссипативных механизмов, рассмотренных в этой работе¹⁴. Что до диссипации в слое Экмана – она могла бы сыграть важную роль в подавлении r -мод, если бы граница кора-ядро была резкой, как при трении жидкости о твердые стенки ее контейнера. В действительности, однако, это скорее всего это не так: переход от коры к ядру происходит через промежуточные «кулинарные» фазы, что размывает границу и затрудняет формирование вязкого пограничного слоя (см. обсуждение и ссылки в [20]).

Во-вторых, мы полностью пренебрегаем обусловленной вращением сплюснутостью звезды, то есть поправками $O(\Omega^2/\Omega_K^2)$ к гравитационному полю (1.37), красному смещению (1.38) и другим равновесным физическим величинам. Строго говоря, данные поправки следует учитывать в наиболее точном расчете, однако, как обсуждалось в разделе 3.5, они не могут качественно повлиять на тороидальную функцию r -мод. Наши предварительные расчеты также показывают, что учет сплюснутости не модифицирует выражения для энергии r -мод (4.18) и темпов ее изменения (4.20)–(4.22). Поэтому мы ожидаем, что учет сплюснутости не должен качественно изменить полученные результаты.

В-третьих, наши расчеты проведены в приближении Каулинга, то есть в гидродинамических уравнениях и выражении для раскачки r -мод CFS-механизмом мы игнорируем возмущения гравитационного поля, предполагая, что они малы по сравнению с возмущениями гидродинамических величин. Это приближение сильно упрощает задачу и в то же время позволяет хорошо оценить свойства r -мод [80–82]. К тому же, как мы упоминали в разделе 3.5, согласно нашим предварительным расчетам, более общие уравнения релятивистских r -мод, получающиеся за рамками приближения Каулинга, в пределе $\Omega \rightarrow 0$ в *точности* совпадают с уравнениями в приближении Каулинга в том же пределе (см. разделы 3.4.2–3.4.3). При этом, конечно, наиболее точный подход к изучению раскачки r -мод требует учесть возмущения гравитационного поля и, решая уравнения, определить комплексную поправку к частоте, которая и будет описывать раскачку r -мод. Такой подход существенно выходит за рамки гидродинамического и заслуживает отдельного рассмотрения.

¹⁴Оговоримся, что учет диссипации в коре может повлиять на наши предсказания в пределе $\Omega \rightarrow 0$. Это связано с тем, что в данном пределе r -моды в ядре экспоненциально подавлены, и основной вклад в диссипативные энергопотери определяется именно диссипацией в коре. При представляющих интерес скоростях вращения звезд в LMXB системах, однако, собственные функции в ядре практически не подавлены, так что диссипация в тонкой коре не может ощутимо изменить энергопотери.

В-четвертых, мы пренебрегаем влиянием эффектов нуклонного спаривания на вид гидродинамических уравнений. Как обсуждалось в разделе 3.5, в случае вещества, в котором только одному сорту частиц позволено быть сверхпроводящим, а все остальные сорта частиц являются нормальными, такое описание оказывается точным, поскольку электромагнитное взаимодействие сверхпроводящего сорта заставляет его двигаться совместно с нормальными заряженными сортами частиц. Поэтому наши результаты точно описывают окна неустойчивости в предположении нормальных нейтронов и сверхпроводящих протонов. Сверхтекучесть нейтронов, в свою очередь, уже существенно модифицирует гидродинамические уравнения, а потому полученные в предположении сверхтекучих нейтронов результаты следует воспринимать как оценку. Точное же решение задачи в этом случае должно опираться на уравнения сверхтекучей гидродинамики. При таком рассмотрении возникают два дополнительных механизма подавления r -мод: взаимное трение [20, 186–189] и их резонансное взаимодействие со сверхтекучими модами [9, 62, 134, 167, 190, 191]. Примечательно, что эффективность взаимного трения определяется скоростью относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент вещества, которая, в свою очередь, зависит от отклонений от равновесия слабых химических реакций (см., например, [187]). Поскольку отклонения от химического равновесия для релятивистских r -мод существенно больше, чем для ньютоновских, можно ожидать, что диссипация за счет взаимного трения будет усилена релятивистскими эффектами.

Помимо влияния на гидродинамические уравнения, сверхтекучесть и сверхпроводимость также модифицируют и кинетические свойства вещества. Обсудим сначала их влияние на диффузию частиц в нуклонном веществе. Как обсуждалось в главе 2, при физических условиях, реализующихся в нейтронных звездах, чем слабее силы трения между различными сортами частиц, тем сильнее оказывается диссипация за счет диффузии. Эту закономерность легко объяснить следующим образом: когда силы трения очень большие, они удерживают различные сорта частиц вместе, подавляя их относительное движение, приводящее к диссипации. Силы трения определяются частотой столкновений частиц в звездном веществе. В нормальном $nre\mu$ -веществе сильное нейтрон-протонное и электромагнитное нуклон-лептонное взаимодействия не позволяют различным сортам частиц двигаться со значимо отличающимися скоростями.

ми, а потому диссипация за счет диффузии в этом случае оказывается слабой. Протонная сверхпроводимость ослабляет взаимодействие частиц с протонами, давая большую свободу движения лептонов (связанных квазинейтральностью с протонами) и нейтронов, что приводит к усилению диссипации за счет диффузии (см. раздел 2.2). Теперь, если в заданной области звезды протоны сверхпроводящие, а нейтроны сверхтекучие, то рассеяние нейтронов на других сортах частиц оказывается подавленным, и диссипация за счет диффузии обусловлена преимущественно взаимодействием заряженных частиц, которое значительно сильнее нейтрон-лептонного. В результате диссипация за счет диффузии в такой области будет подавлена (чем больше трение, тем слабее диссипация). Другими словами, диссипация за счет диффузии эффективна в той части звезды, где протоны сверхпроводящие, а нейтроны – нормальные или слабо сверхтекучие (то есть доля сверхтекучих нейтронов мала). При этом отметим, что, даже когда диссипация за счет диффузии ограничена такой областью, она все еще может (в зависимости от модели нейтронной сверхтекучести) быть достаточно эффективной и превосходить диссипацию за счет сдвиговой вязкости. Хотя подход для расчета коэффициентов диффузии в сверхтекучих/сверхпроводящих смесях был недавно разработан [100], их детальные расчеты пока не проводились, так что на данный момент мы можем только делать оценки, «руками» варьируя звездные области, в которых диффузия эффективна. Например, как показано на Рис. 4.5, даже когда протонная сверхпроводимость ограничена узкой областью вблизи границы кора-ядро, окно неустойчивости релятивистских r -мод все еще определяется в первую очередь диффузией, а не сдвиговой вязкостью.

Также обратим внимание на то, что при изучении окон неустойчивости в гиперонных звездах мы предполагали, что Λ - и Ξ -гипероны являются нормальными. Поскольку Λ -гипероны вовлечены в каждую реакцию, определяющую объемную вязкость, достаточно сильная их сверхтекучесть могла бы радикально изменить сделанные нами выводы: она подавила бы гиперонную объемную вязкость и, следовательно, сделала бы связанное с ней подавление r -мод в LMXB системах практически невозможным. Влияние сверхпроводимости Ξ^- -гиперонов, напротив, скорее всего является слабым и походит на влияние протонной сверхпроводимости. Как и протонная сверхпроводимость, она подавляет лишь часть слабых безлептонных процессов [реакции (1.32)-(1.33)] и не влияет на протекание остальных слабых реакций (1.29)-(1.31). Далее, связанное со

сверхпроводимостью Ξ^- -гиперонов подавление сильной реакции (1.34) также не может существенно повлиять на наши результаты (см. обсуждение в разделе 1.4). Как и в случае с протонами, движение Ξ^- -гиперонов ограничивается их электромагнитным взаимодействием с другими заряженными сортами частиц, а потому их сверхпроводимость не модифицирует гидродинамические уравнения, если все остальные сорта частиц являются нормальными. При этом описание комбинированного влияния сверхпроводимости протонов и Ξ^- -гиперонов уже требует введения дополнительных скоростей в гидродинамические уравнения (см. пример такого подхода в работе [201]).

И последнее приближение, которое мы хотели бы обсудить, заключается в том, что мы формально рассматривали эффект увлечения и.с.о. $\omega(r)$ как слабый. Как обсуждалось в разделе 3.5, в пределе $\Omega \rightarrow 0$ данное приближение должно точно описывать свойства r -мод, поскольку в этом пределе они локализируются во внешних частях звезды, где увлечение и.с.о. действительно можно считать слабым. В более глубоких слоях звезды, особенно вблизи центра звезды, функцию $\omega(r)$ уже нельзя считать малой и данное приближение становится менее точным. На данный момент мы работаем над обобщением теории на более общий случай произвольно сильного (или слабого) увлечения и.с.о. Наши предварительные расчеты показывают, что приближение слабого увлечения и.с.о. сохраняет особые свойства релятивистских r -мод – их нестандартный ордеринг $\xi_{m+1}^r(r) \sim \Omega T_m(r)$ и неаналитическую зависимость от скорости вращения звезды. Поэтому можно считать, что приближение слабого увлечения и.с.о. позволяет получить разумную оценку физических свойств релятивистских r -мод.

Заключение

В этой работе мы представили результаты исследований, посвященных двум взаимосвязанным вопросам физики нейтронных звезд: 1) роли диффузии частиц как механизма подавления их колебаний и 2) влиянию релятивистских эффектов на физические свойства r -мод. В главе 1 мы изложили центральные элементы формализма, который использовался для моделирования колебаний и изучения их поведения в результате излучения гравитационных волн и действия сдвиговой вязкости, объемной вязкости и диффузии частиц. Пользуясь этим формализмом, в главе 2 мы рассмотрели роль диффузии в подавлении простейших гидродинамических колебаний – звуковых волн, а также f -мод, p -мод и g -мод в невращающихся нейтронных звездах. В главе 3 мы рассмотрели задачу о моделировании релятивистских r -мод и предложили жизнеспособное решение «проблемы непрерывного спектра» – качественных противоречий, возникающих при применении разных подходов к моделированию r -мод в общей теории относительности. И наконец, в главе 4 мы смогли изучить роль диффузии в подавлении r -мод, а также влияние релятивистских эффектов на гравитационно-волновую раскачку r -мод и их подавление сдвиговой вязкостью, объемной вязкостью и диффузией частиц. Здесь же мы исследовали влияние диффузии частиц и гиперонной объемной вязкости на окна неустойчивости r -мод. Подводя итоги, мы хотели бы кратко перечислить основные результаты проведенных исследований:

1. Рассчитаны времена подавления диффузией для звуковых волн, f -мод, p -мод, g -мод и r -мод в НЗ с нуклонным составом вещества. Показано, что сверхпроводимость протонов усиливает диффузионное подавление колебаний, так что для звуковых волн, p -мод, g -мод и r -мод в сверхпроводящих НЗ с нуклонным составом диффузия оказывается ведущим каналом диссипативных энергопотерь при $T^\infty \lesssim 10^8$ К.

2. Предложено возможное решение «проблемы непрерывного спектра», затруднявшей с 1997 года моделирование r -мод в ОТО. Получено релятивистское обобщение уравнений ньютоновских r -мод, а также рассчитан спектр и собственные функции релятивистских r -мод.
3. Показано, что увлечение и.с.о. приводит к неаналитической зависимости с.ф. r -мод от скорости вращения звезды, а также изменяет геометрию соответствующих потоков вещества, что при замедлении вращения проявляется как локализация r -мод во внешних слоях звезды. В пределе $\Omega \rightarrow 0$ получены явные формулы для спектра и с.ф. релятивистских r -мод.
4. Получены формулы для энергии релятивистских r -мод и темпов ее изменения из-за гравитационно-волновой неустойчивости, сдвиговой вязкости, объемной вязкости и диффузии. Показано, что особенности релятивистских r -мод изменяют зависимость данных величин от угловой скорости вращения звезды. В пределе $\Omega \rightarrow 0$ установлен конкретный вид этой зависимости.
5. Для r -мод в НЗ с нуклонным составом рассчитаны времена их гравитационно-волновой раскачки и подавления сдвиговой вязкостью, объемной вязкостью и диффузией. Показано, что в ОТО r -моды подавляются диффузией и объемной вязкостью сильнее, чем в ньютоновской теории. В сверхпроводящих НЗ с нуклонным составом комбинированное усиление диффузионных энергопотерь протонной сверхпроводимостью и особенностями релятивистских r -мод приводит к определяющей роли диффузии в их подавлении при $T^\infty \lesssim 10^8$ К.
6. Рассчитаны окна неустойчивости релятивистских и ньютоновских r -мод в НЗ с нуклонным составом вещества. Показано, что диффузия частиц недостаточно эффективна для подавления r -мод в НЗ в LMXB системах.
7. Рассчитаны окна неустойчивости релятивистских r -мод в НЗ с гиперонным составом. Показано, что гиперонная объемная вязкость приводит к сильному подавлению релятивистских r -мод и способна объяснить наблюдаемые параметры звезд в LMXB системах даже с учетом эффектов нуклонного спаривания.

Благодарности

Я благодарен моему научному руководителю, Михаилу Евгеньевичу Гусакову, за чуткое руководство, доброжелательность, терпение и поддержку. Хочу также выразить благодарность Елене Михайловне Кантор за отзывчивость, полезные обсуждения и активное участие в совместных исследованиях. Я признателен Петру Сергеевичу Штернину за помощь в подготовке и подаче диссертации и автореферата. Благодарю коллектив сектора теоретической астрофизики за создание комфортной и доброжелательной рабочей атмосферы. Искреннее спасибо моим родным и близким за всестороннюю поддержку и веру в меня во время работы над диссертацией.

Список литературы

1. *Haensel P., Potekhin A. Y., Yakovlev D. G.* Neutron Stars 1 : Equation of State and Structure. Vol. 326. — 2007.
2. *Glendenning N. K.* Compact stars. Nuclear physics, particle physics, and general relativity. — 1997.
3. *Shapiro S. L., Teukolsky S. A.* Black holes, white dwarfs and neutron stars. The physics of compact objects. — 1983.
4. *Steiner A. W., Watts A. L.* Constraints on Neutron Star Crusts from Oscillations in Giant Flares // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Oct. — Vol. 103, no. 18. — P. 181101.
5. *Strohmayer T., Mahmoodifar S.* A Non-radial Oscillation Mode in an Accreting Millisecond Pulsar? // *Astrophys. J.* — 2014. — Mar. — Vol. 784, no. 1. — P. 72.
6. *Andersson N., Jones D. I., Ho W. C. G.* Implications of an r mode in XTE J1751-305: mass, radius and spin evolution // *MNRAS.* — 2014. — Aug. — Vol. 442, no. 2. — P. 1786–1793.
7. *Sotani H., Iida K., Oyamatsu K.* Constraints on the nuclear equation of state and the neutron star structure from crustal torsional oscillations // *MNRAS.* — 2018. — Oct. — Vol. 479, no. 4. — P. 4735–4748.
8. A New Method to Constrain Neutron Star Structure from Quasi-periodic Oscillations / A. Maselli [et al.] // *Astrophys. J.* — 2020. — Aug. — Vol. 899, no. 2. — P. 139.
9. *Kantor E. M., Gusakov M. E., Dommes V. A.* Constraining Neutron Superfluidity with R -Mode Physics // *Phys. Rev. Lett.* — 2020. — Oct. — Vol. 125, no. 15. — P. 151101.

10. *Zhu C., Wang Y.-B., Zhou X.* R-mode instability in compact stars // Xiamen-CUSTIPEN Workshop on the Equation of State of Dense Neutron-Rich Matter in the Era of Gravitational Wave Astronomy. Vol. 2127. — 07/2019. — P. 020012. — (American Institute of Physics Conference Series).
11. *Andersson N., Kokkotas K. D.* The R-Mode Instability in Rotating Neutron Stars // International Journal of Modern Physics D. — 2001. — Jan. — Vol. 10, no. 4. — P. 381–441.
12. *Provost J., Berthomieu G., Rocca A.* Low Frequency Oscillations of a Slowly Rotating Star - Quasi Toroidal Modes // A& A. — 1981. — Jan. — Vol. 94. — P. 126.
13. *Andersson N.* A New Class of Unstable Modes of Rotating Relativistic Stars // Astrophys. J. — 1998. — Aug. — Vol. 502, no. 2. — P. 708–713.
14. *Friedman J. L., Morsink S. M.* Axial Instability of Rotating Relativistic Stars // Astrophys. J. — 1998. — Aug. — Vol. 502, no. 2. — P. 714–720.
15. Science case for the Einstein telescope / M. Maggiore [et al.] // JCAP. — 2020. — Mar. — Vol. 2020, no. 3. — P. 050.
16. *Sieniawska M., Bejger M.* Continuous Gravitational Waves from Neutron Stars: Current Status and Prospects // Universe. — 2019. — Oct. — Vol. 5, no. 11. — P. 217.
17. *Cutler C., Lindblom L., Splinter R. J.* Damping Times for Neutron Star Oscillations // Astrophys. J. — 1990. — Nov. — Vol. 363. — P. 603.
18. *Gusakov M. E., Yakovlev D. G., Gnedin O. Y.* Thermal evolution of a pulsating neutron star // MNRAS. — 2005. — Aug. — Vol. 361, no. 4. — P. 1415–1424.
19. *Glampedakis K., Gualtieri L.* Gravitational Waves from Single Neutron Stars: An Advanced Detector Era Survey // Astrophysics and Space Science Library. Vol. 457 / ed. by L. Rezzolla [et al.]. — 2018. — P. 673. — (Astrophysics and Space Science Library).
20. *Haskell B.* R-modes in neutron stars: Theory and observations // International Journal of Modern Physics E. — 2015. — Aug. — Vol. 24, no. 9. — P. 1541007.

21. *Lindblom L., Owen B. J., Morsink S. M.* Gravitational Radiation Instability in Hot Young Neutron Stars // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — June. — Vol. 80, no. 22. — P. 4843–4846.
22. *Levin Y.* Runaway Heating by R-Modes of Neutron Stars in Low-Mass X-Ray Binaries // *Astrophys. J.* — 1999. — May. — Vol. 517, no. 1. — P. 328–333.
23. *Bildsten L., Ushomirsky G.* Viscous Boundary-Layer Damping of R-Modes in Neutron Stars // *ApJL.* — 2000. — Jan. — Vol. 529, no. 1. — P. L33–L36.
24. *Chugunov A. I.* Radiation Driven Instability of Rapidly Rotating Relativistic Stars: Criterion and Evolution Equations Via Multipolar Expansion of Gravitational Waves // *PASA.* — 2017. — Oct. — Vol. 34. — e046.
25. *Kolomeitsev E. E., Voskresensky D. N.* Viscosity of neutron star matter and r -modes in rotating pulsars // *Phys. Rev. C.* — 2015. — Feb. — Vol. 91, no. 2. — P. 025805.
26. *Kolomeitsev E. E., Voskresensky D. N.* Mechanism of r-mode stability in young rapidly rotating pulsars // *European Physical Journal A.* — 2014. — Dec. — Vol. 50. — P. 180.
27. *Dommes V. A., Gusakov M. E., Shternin P. S.* Dissipative relativistic magnetohydrodynamics of a multicomponent mixture and its application to neutron stars // *Phys. Rev. D.* — 2020. — May. — Vol. 101, no. 10. — P. 103020.
28. *Dommes V. A., Gusakov M. E.* Dissipative superfluid relativistic magnetohydrodynamics of a multicomponent fluid: The combined effect of particle diffusion and vortices // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Dec. — Vol. 104, no. 12. — P. 123008.
29. *Kraav K. Y., Gusakov M. E., Kantor E. M.* Nonanalytic behavior of the relativistic r -modes in slowly rotating neutron stars // *Phys. Rev. D.* — 2022. — Nov. — Vol. 106, no. 10. — P. 103009.
30. *Kraav K. Y., Gusakov M. E., Kantor E. M.* Instability windows of relativistic r -modes // *Phys. Rev. D.* — 2024. — Feb. — Vol. 109, no. 4. — P. 043012.
31. *Kraav K. Y., Gusakov M. E., Kantor E. M.* Instability windows of relativistic r-modes in stably stratified neutron stars with hyperonic cores // *Phys. Rev. D.* — 2025. — Aug. — Vol. 112, no. 4. — P. 043012.

32. *Gusakov M. E., Haensel P., Kantor E. M.* Physics input for modelling superfluid neutron stars with hyperon cores // MNRAS. — 2014. — Mar. — Vol. 439, no. 1. — P. 318–333.
33. *Raduta A. R., Sedrakian A., Weber F.* Cooling of hypernuclear compact stars // MNRAS. — 2018. — Apr. — Vol. 475, no. 4. — P. 4347–4356.
34. Cooling of Small and Massive Hyperonic Stars / R. Negreiros [et al.] // *Astrophys. J.* — 2018. — Aug. — Vol. 863, no. 1. — P. 104.
35. Hypernuclei and massive neutron stars / M. Fortin [et al.] // *Phys. Rev. C.* — 2017. — June. — Vol. 95, no. 6. — P. 065803.
36. Hyperonic stars and the symmetry energy / C. Providência [et al.] // *Frontiers in Astronomy and Space Sciences.* — 2019. — Mar. — Vol. 6. — P. 13.
37. *Yakovlev D. G., Levenfish K. P., Shibano Y. A.* REVIEWS OF TOPICAL PROBLEMS: Cooling of neutron stars and superfluidity in their cores // *Sov. Phys.—Usp.* — 1999. — Aug. — Vol. 42. — P. 737–778.
38. *Lombardo U., Schulze H.-J.* Superfluidity in Neutron Star Matter // *Physics of Neutron Star Interiors. Vol. 578* / ed. by D. Blaschke, N. K. Glendenning, A. Sedrakian. — 2001. — P. 30. — (Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag).
39. Stellar Superfluids / D. Page [et al.] // *ArXiv e-prints.* — 2013. — Feb.
40. *Gezerlis A., Pethick C. J., Schwenk A.* Pairing and superfluidity of nucleons in neutron stars // *ArXiv e-prints.* — 2014. — June.
41. *Dong J. M., Lombardo U., Zuo W.* Superfluid states in β -stable nuclear matter // *Physics of Atomic Nuclei.* — 2014. — Aug. — Vol. 77. — P. 1057–1062.
42. Pairing in high-density neutron matter including short- and long-range correlations / D. Ding [et al.] // *Phys. Rev. C.* — 2016. — Aug. — Vol. 94, issue 2. — P. 025802.
43. *Sedrakian A., Clark J. W.* Superfluidity in nuclear systems and neutron stars // *European Physical Journal A.* — 2019. — Sept. — Vol. 55, no. 9. — P. 167.
44. *Wang Y. N., Shen H.* Superfluidity of Λ hyperons in neutron stars // *Phys. Rev. C.* — 2010. — Feb. — Vol. 81, no. 2. — P. 025801.

45. Occurrence of Hyperon Superfluidity in Neutron Star Cores / T. Takatsuka [et al.] // Progress of Theoretical Physics. — 2006. — Feb. — Vol. 115, no. 2. — P. 355–379.
46. Observation of a ${}^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$ Double Hypernucleus / H. Takahashi [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Nov. — Vol. 87, no. 21. — P. 212502.
47. *Sedrakian A., Clark J. W.* Superfluidity in nuclear systems and neutron stars // European Physical Journal A. — 2019. — Sept. — Vol. 55, no. 9. — P. 167.
48. *Braginskii S. I.* Transport Processes in a Plasma // Reviews of Plasma Physics. — 1965. — Jan. — Vol. 1. — P. 205.
49. *Mendell G.* Superfluid hydrodynamics in rotating neutron stars. I - Nondissipative equations. II - Dissipative effects // Astrophys. J. — 1991. — Oct. — Vol. 380. — P. 515–540.
50. *Gusakov M. E., Dommes V. A.* Relativistic dynamics of superfluid-superconducting mixtures in the presence of topological defects and an electromagnetic field with application to neutron stars // Phys. Rev. D. — 2016. — Oct. — Vol. 94, no. 8. — P. 083006.
51. *Finn L. S.* G-modes in zero-temperature neutron stars // MNRAS. — 1987. — July. — Vol. 227. — P. 265–293.
52. *Lee U.* Nonradial oscillations of neutron stars with the superfluid core. // A&A. — 1995. — Nov. — Vol. 303. — P. 515.
53. *Andersson N., Comer G. L.* On the dynamics of superfluid neutron star cores // MNRAS. — 2001. — Dec. — Vol. 328, no. 4. — P. 1129–1143.
54. *Andersson N., Comer G. L., Langlois D.* Oscillations of general relativistic superfluid neutron stars // Phys. Rev. D. — 2002. — Nov. — Vol. 66, no. 10. — P. 104002.
55. *Prix R., Rieutord M.* Adiabatic oscillations of non-rotating superfluid neutron stars // A&A. — 2002. — Oct. — Vol. 393. — P. 949–963.
56. *Kantor E. M., Gusakov M. E.* Composition temperature-dependent g modes in superfluid neutron stars. // MNRAS. — 2014. — July. — Vol. 442. — P. L90–L94.

57. *Lindblom L., Mendell G.* The Oscillations of Superfluid Neutron Stars // *Astrophys. J.* — 1994. — Feb. — Vol. 421. — P. 689.
58. *Gusakov M. E., Kantor E. M.* Decoupling of superfluid and normal modes in pulsating neutron stars // *Phys. Rev. D.* — 2011. — Apr. — Vol. 83, no. 8. — P. 081304.
59. *Kantor E. M., Gusakov M. E.* Decoupling of Superfluid and Normal Oscillation Modes in Rotating Neutron Stars // *Electromagnetic Radiation from Pulsars and Magnetars.* Vol. 466 / ed. by W. Lewandowski, O. Maron, J. Kijak. — 12/2012. — P. 211. — (Astronomical Society of the Pacific Conference Series).
60. Quasinormal modes of superfluid neutron stars / L. Gualtieri [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 2014. — July. — Vol. 90, no. 2. — P. 024010.
61. *Andreev A. F., Bashkin E. P.* Three-velocity hydrodynamics of superfluid solutions // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics.* — 1975. — July. — Vol. 42. — P. 164.
62. *Dommes V. A., Kantor E. M., Gusakov M. E.* Temperature-dependent oscillation modes in rotating superfluid neutron stars // *MNRAS.* — 2019. — Jan. — Vol. 482, no. 2. — P. 2573–2587.
63. *Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G.* Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. II. Modified Urca processes in npe mu matter // *A & A.* — 2001. — June. — Vol. 372. — P. 130–137.
64. *Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G.* Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. I. Direct Urca processes in npemu matter // *A & A.* — 2000. — May. — Vol. 357. — P. 1157–1169.
65. *Lindblom L., Owen B. J.* Effect of hyperon bulk viscosity on neutron-star r-modes // *Phys. Rev. D.* — 2002. — Mar. — Vol. 65, no. 6. — P. 063006.
66. *Haensel P., Levenfish K. P., Yakovlev D. G.* Bulk viscosity in superfluid neutron star cores. III. Effects of Sigma⁻ hyperons // *A & A.* — 2002. — Jan. — Vol. 381. — P. 1080–1089.
67. *van Dalen E. N., Dieperink A. E.* Bulk viscosity in neutron stars from hyperons // *Phys. Rev. C.* — 2004. — Feb. — Vol. 69, no. 2. — P. 025802.

68. Bulk viscosity in neutron stars with hyperon cores / D. D. Ofengeim [et al.] // Phys. Rev. D. — 2019. — Nov. — Vol. 100, no. 10. — P. 103017.
69. *Hartle J. B.* Slowly Rotating Relativistic Stars. I. Equations of Structure // ApJ. — 1967. — Dec. — Vol. 150. — P. 1005.
70. *Tolman R. C.* Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid // Physical Review. — 1939. — Feb. — Vol. 55, no. 4. — P. 364–373.
71. *Oppenheimer J. R., Volkoff G. M.* On Massive Neutron Cores // Physical Review. — 1939. — Feb. — Vol. 55, no. 4. — P. 374–381.
72. *Miralles J. A., van Riper K. A., Lattimer J. M.* The Boltzmann Equation in General Relativistic Rotating Systems: Cooling of Rotating Neutron Stars // Astrophys. J. — 1993. — Apr. — Vol. 407. — P. 687.
73. *Hawking S. W., Ellis G. F. R.* The Large Scale Structure of Space-Time. — 1975.
74. *Friedman J. L.* Generic instability of rotating relativistic stars // Communications in Mathematical Physics. — 1978. — Oct. — Vol. 62, no. 3. — P. 247–278.
75. Nonradial oscillations of stars / W. Unno [et al.]. — 1979.
76. *Yoshida S., Lee U.* Relativistic r-Modes in Slowly Rotating Neutron Stars: Numerical Analysis in the Cowling Approximation // Astrophys. J. — 2002. — Mar. — Vol. 567, no. 2. — P. 1112–1120.
77. *Cowling T. G.* The non-radial oscillations of polytropic stars // MNRAS. — 1941. — Jan. — Vol. 101. — P. 367.
78. *Cox J. P.* Theory of stellar pulsation. — 1980.
79. *Saio H.* R-mode oscillations in uniformly rotating stars // Astrophys. J. — 1982. — May. — Vol. 256. — P. 717–735.
80. *Lindblom L., Splinter R. J.* The Accuracy of the Relativistic Cowling Approximation // Astrophys. J. — 1990. — Jan. — Vol. 348. — P. 198.
81. *Yoshida S., Kojima Y.* Accuracy of the relativistic Cowling approximation in slowly rotating stars // MNRAS. — 1997. — July. — Vol. 289, no. 1. — P. 117–122.

82. *Jasiulek M., Chirenti C.* *R*-mode frequencies of rapidly and differentially rotating relativistic neutron stars // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Mar. — Vol. 95, issue 6. — P. 064060.
83. *Thorne K. S.* Multipole expansions of gravitational radiation // *Reviews of Modern Physics.* — 1980. — Apr. — Vol. 52, no. 2. — P. 299–340.
84. *Iakovlev D. G., Shalybkov D. A.* Electrical Conductivity of Neutron Star Cores in the Presence of a Magnetic Field - Part One - General Solution for a Multi-component Fermi Liquid // *Ap&SS.* — 1991. — Feb. — Vol. 176, no. 2. — P. 171–189.
85. *Gusakov M. E., Kantor E. M., Ofengeim D. D.* Evolution of the magnetic field in neutron stars // *Phys. Rev. D.* — 2017. — Nov. — Vol. 96, no. 10. — P. 103012.
86. *Ofengeim D. D., Gusakov M. E.* Fast magnetic field evolution in neutron stars: The key role of magnetically induced fluid motions in the core // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Aug. — Vol. 98, no. 4. — P. 043007.
87. The relevance of ambipolar diffusion for neutron star evolution / A. Passamonti [et al.] // *MNRAS.* — 2017. — Mar. — Vol. 465, no. 3. — P. 3416–3428.
88. *Goldreich P., Reisenegger A.* Magnetic Field Decay in Isolated Neutron Stars // *Astrophys. J.* — 1992. — Aug. — Vol. 395. — P. 250.
89. *Tolman R. C.* *Relativity, thermodynamics and cosmology.* — Dover Publications, 1987.
90. *Kantor E. M., Gusakov M. E.* Temperature effects in pulsating superfluid neutron stars // *Phys. Rev. D.* — 2011. — May. — Vol. 83, no. 10. — P. 103008.
91. Dissipation in relativistic superfluid neutron stars / M. E. Gusakov [et al.] // *MNRAS.* — 2013. — Jan. — Vol. 428, no. 2. — P. 1518–1536.
92. *Gusakov M. E.* Relativistic formulation of the Hall-Vinen-Bekarevich-Khalatnikov superfluid hydrodynamics // *Phys. Rev. D.* — 2016. — Mar. — Vol. 93, no. 6. — P. 064033.
93. Rotochemical Heating of Neutron Stars: Rigorous Formalism with Electrostatic Potential Perturbations / A. Reisenegger [et al.] // *Astrophys. J.* — 2006. — Dec. — Vol. 653, no. 1. — P. 568–572.

94. *Schmitt A., Shternin P.* Reaction Rates and Transport in Neutron Stars // Astrophysics and Space Science Library. Vol. 457 / ed. by L. Rezzolla [et al.]. — 01/2018. — P. 455. — (Astrophysics and Space Science Library).
95. *Shternin P., Vidaña I.* Transport Coefficients of Hyperonic Neutron Star Cores // Universe. — 2021. — June. — Vol. 7, no. 6. — P. 203.
96. *Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P.* Statistical Physics, Part 2. — Oxford : Pergamon, 1980.
97. *Baiko D. A., Haensel P., Yakovlev D. G.* Thermal conductivity of neutrons in neutron star cores // A & A. — 2001. — July. — Vol. 374. — P. 151–163.
98. *Gusakov M. E., Haensel P.* The entrainment matrix of a superfluid neutron proton mixture at a finite temperature // Nucl. Phys. A. — 2005. — Nov. — Vol. 761, no. 3/4. — P. 333–348.
99. *Leinson L. B.* Non-linear approach to the entrainment matrix of superfluid nucleon mixture at zero temperature // MNRAS. — 2017. — Sept. — Vol. 470, no. 3. — P. 3374–3387.
100. *Goglichidze O. A., Gusakov M. E.* Diffusion in superfluid Fermi mixtures: General formalism // Phys. Rev. C. — 2023. — Aug. — Vol. 108, issue 2. — P. 025814.
101. *Barrera R. G., Estevez G. A., Giraldo J.* Vector spherical harmonics and their application to magnetostatics // European Journal of Physics. — 1985. — Oct. — Vol. 6, no. 4. — P. 287–294.
102. *Regge T., Wheeler J. A.* Stability of a Schwarzschild Singularity // Physical Review. — 1957. — Nov. — Vol. 108, no. 4. — P. 1063–1069.
103. *Thorne K. S., Campolattaro A.* Non-Radial Pulsation of General-Relativistic Stellar Models. I. Analytic Analysis for $L \geq 2$ // Astrophys. J. — 1967. — Sept. — Vol. 149. — P. 591.
104. *Kraav K. Y., Gusakov M. E., Kantor E. M.* Diffusion as a leading dissipative mechanism in superconducting neutron stars // MNRAS. — 2021. — Sept. — Vol. 506, no. 1. — P. L74–L78.
105. *Kraav K., Gusakov M.* Diffusion as a damping mechanism for neutron-star oscillations // Journal of Physics Conference Series. Vol. 1697. — IOP, 12/2020. — P. 012023. — (Journal of Physics Conference Series).

106. *Cutler C., Lindblom L.* The effect of viscosity on neutron star oscillations // *Astrophys. J.* — 1987. — Mar. — Vol. 314. — P. 234–241.
107. *McDermott P. N., van Horn H. M., Hansen C. J.* Nonradial Oscillations of Neutron Stars // *Astrophys. J.* — 1988. — Feb. — Vol. 325. — P. 725.
108. The Boltzmann-equation description of transport in superconductors / A. G. Aronov [et al.] // *Advances in Physics.* — 1981. — July. — Vol. 30, no. 4. — P. 539–592.
109. *Landau L. D., Lifshitz E.* Fluid mechanics. Course of theoretical physics. — Oxford : Butterworth-Heinemann, 1987.
110. *Putterman S. J.* Superfluid hydrodynamics. Vol. 3. — Amsterdam : North-Holland Pub. Co. ; New York : American Elsevier Pub. Co., 01/1974.
111. *Goriely S., Chamel N., Pearson J. M.* Further explorations of Skyrme-Hartree-Fock-Bogoliubov mass formulas. XIII. The 2012 atomic mass evaluation and the symmetry coefficient // *Phys. Rev. C.* — 2013. — Aug. — Vol. 88, no. 2. — P. 024308.
112. *Shternin P. S.* Transport coefficients of leptons in superconducting neutron star cores // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Sept. — Vol. 98, no. 6. — P. 063015.
113. *Reisenegger A., Goldreich P.* A New Class of g-Modes in Neutron Stars // *Astrophys. J.* — 1992. — Aug. — Vol. 395. — P. 240.
114. *Yu H., Weinberg N. N.* Resonant tidal excitation of superfluid neutron stars in coalescing binaries // *MNRAS.* — 2017. — Jan. — Vol. 464, no. 3. — P. 2622–2637.
115. *Weinberg N. N.* Growth Rate of the Tidal p-Mode g-Mode Instability in Coalescing Binary Neutron Stars // *Astrophys. J.* — 2016. — Mar. — Vol. 819, no. 2. — P. 109.
116. *Andersson N., Ho W. C. G.* Using gravitational-wave data to constrain dynamical tides in neutron star binaries // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Jan. — Vol. 97, no. 2. — P. 023016.
117. *Abbott B. P., al. et.* Constraining the p -Mode-g -Mode Tidal Instability with GW170817 // *Phys. Rev. Lett.* — 2019. — Feb. — Vol. 122, no. 6. — P. 061104.

118. *Bondarescu R., Teukolsky S. A., Wasserman I.* Spin evolution of accreting neutron stars: Nonlinear development of the r-mode instability // *Phys. Rev. D.* — 2007. — Sept. — Vol. 76, no. 6. — P. 064019.
119. *Glampedakis K., Andersson N., Jones D. I.* Do superfluid instabilities prevent neutron star precession? // *MNRAS.* — 2009. — Apr. — Vol. 394, no. 4. — P. 1908–1924.
120. *Glampedakis K., Andersson N.* Hydrodynamical Trigger Mechanism for Pulsar Glitches // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Apr. — Vol. 102, no. 14. — P. 141101.
121. *Lindblom L.* The Role of the Viscous Secular Instability in Rotating Neutron Stars // *Astrophys. J.* — 1987. — June. — Vol. 317. — P. 325.
122. *Skinner D., Lindblom L.* On the Viscosity-driven Secular Instability in Rotating Neutron Stars // *Astrophys. J.* — 1996. — Apr. — Vol. 461. — P. 920.
123. *Andersson N.* TOPICAL REVIEW: Gravitational waves from instabilities in relativistic stars // *Classical and Quantum Gravity.* — 2003. — Apr. — Vol. 20, no. 7. — R105–R144.
124. *Shapiro S. L.* The Secular Bar-Mode Instability in Rapidly Rotating Stars Revisited // *Astrophys. J.* — 2004. — Oct. — Vol. 613, no. 2. — P. 1213–1220.
125. *Kraav K. Y., Gusakov M. E., Kantor E. M.* Nonanalytic Relativistic r-Modes of Slowly Rotating Nonbarotropic Neutron Stars // *Universe.* — 2022. — Oct. — Vol. 8, no. 10. — P. 542.
126. *Chandrasekhar S.* Solutions of Two Problems in the Theory of Gravitational Radiation // *Phys. Rev. Lett.* — 1970. — Mar. — Vol. 24, no. 11. — P. 611–615.
127. *Friedman J. L., Schutz B. F.* Lagrangian perturbation theory of nonrelativistic fluids. // *Astrophys. J.* — 1978. — May. — Vol. 221. — P. 937–957.
128. *Friedman J. L., Schutz B. F.* Secular instability of rotating Newtonian stars. // *Astrophys. J.* — 1978. — May. — Vol. 222. — P. 281–296.
129. *Lindblom L., Tohline J. E., Vallisneri M.* Nonlinear Evolution of the r-Modes in Neutron Stars // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Feb. — Vol. 86, no. 7. — P. 1152–1155.

130. *Reisenegger A., Bonačić A.* Millisecond Pulsars with r-Modes as Steady Gravitational Radiators // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Nov. — Vol. 91, no. 20. — P. 201103.
131. *Mannarelli M., Manuel C., Sa'D B. A.* Mutual Friction in a Cold Color-Flavor-Locked Superfluid and r-Mode Instabilities in Compact Stars // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Dec. — Vol. 101, no. 24. — P. 241101.
132. *Ho W. C. G., Andersson N., Haskell B.* Revealing the Physics of r Modes in Low-Mass X-Ray Binaries // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Sept. — Vol. 107, no. 10. — P. 101101.
133. *Alford M. G., Schwenzer K.* What the Timing of Millisecond Pulsars Can Teach us about Their Interior // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Dec. — Vol. 113, no. 25. — P. 251102.
134. *Gusakov M. E., Chugunov A. I., Kantor E. M.* Explaining observations of rapidly rotating neutron stars in low-mass x-ray binaries // *Phys. Rev. D.* — 2014. — Sept. — Vol. 90, no. 6. — P. 063001.
135. *Haskell B., Patruno A.* Are Gravitational Waves Spinning Down PSR J 1023 +0038 ? // *Phys. Rev. Lett.* — 2017. — Oct. — Vol. 119, no. 16. — P. 161103.
136. *The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration.* Searches for Continuous Gravitational Waves from 15 Supernova Remnants and Fomalhaut b with Advanced LIGO // *Astrophys. J.* — 2019. — Apr. — Vol. 875, no. 2. — P. 122.
137. *The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, the KAGRA Collaboration.* Constraints from LIGO O3 Data on Gravitational-wave Emission Due to R-modes in the Glitching Pulsar PSR J0537–6910 // *Astrophys. J.* — 2021. — Nov. — Vol. 922, no. 1. — P. 71.
138. *The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration.* All-sky search in early O3 LIGO data for continuous gravitational-wave signals from unknown neutron stars in binary systems // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Mar. — Vol. 103, no. 6. — P. 064017.

139. *The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, the KAGRA Collaboration*. Searches for Continuous Gravitational Waves from Young Supernova Remnants in the Early Third Observing Run of Advanced LIGO and Virgo // *Astrophys. J.* — 2021. — Nov. — Vol. 921, no. 1. — P. 80.
140. *The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, the KAGRA Collaboration*. Search for continuous gravitational waves from 20 accreting millisecond x-ray pulsars in O3 LIGO data // *Phys. Rev. D.* — 2022. — Jan. — Vol. 105, no. 2. — P. 022002.
141. *The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, the KAGRA Collaboration*. All-sky search for continuous gravitational waves from isolated neutron stars in the early O3 LIGO data // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Oct. — Vol. 104, no. 8. — P. 082004.
142. *Fesik L., Papa M. A.* First Search for r-mode Gravitational Waves from PSR J0537-6910 // *Astrophys. J.* — 2020. — May. — Vol. 895, no. 1. — P. 11.
143. Results from an Einstein@Home Search for Continuous Gravitational Waves from Cassiopeia A and Vela Jr. Using LIGO O2 Data / J. Morales [et al.] // *Astrophys. J.* — 2025. — June. — Vol. 986, no. 2. — P. 202.
144. Deep Einstein@Home All-sky Search for Continuous Gravitational Waves in LIGO O3 Public Data / B. Steltner [et al.] // *Astrophys. J.* — 2023. — July. — Vol. 952, no. 1. — P. 55.
145. *Strohmayer T., Mahmoodifar S.* Discovery of a Neutron Star Oscillation Mode During a Superburst // *ApJL.* — 2014. — Oct. — Vol. 793, no. 2. — P. L38.
146. *Strohmayer T., Mahmoodifar S.* A Non-radial Oscillation Mode in an Accreting Millisecond Pulsar? // *Astrophys. J.* — 2014. — Mar. — Vol. 784, no. 1. — P. 72.
147. *Hall E. D., Evans M.* Metrics for next-generation gravitational-wave detectors // *Classical and Quantum Gravity.* — 2019. — Nov. — Vol. 36, no. 22. — P. 225002.
148. *Kojima Y.* Chapter 4. The Rotational Effects of General Relativity on the Stellar Pulsations // *Progress of Theoretical Physics Supplement.* — 1997. — Jan. — Vol. 128. — P. 251–293.

149. *Kojima Y.* Quasi-toroidal oscillations in rotating relativistic stars // MNRAS. — 1998. — Jan. — Vol. 293, no. 1. — P. 49–52.
150. *Beyer H. R., Kokkotas K. D.* On the r-mode spectrum of relativistic stars // MNRAS. — 1999. — Sept. — Vol. 308, no. 3. — P. 745–750.
151. *Kojima Y., Hosonuma M.* The r-Mode Oscillations in Relativistic Rotating Stars // Astrophys. J. — 1999. — Aug. — Vol. 520, no. 2. — P. 788–796.
152. *Kojima Y., Hosonuma M.* Approximate equation relevant to axial oscillations on slowly rotating relativistic stars // Phys. Rev. D. — 2000. — Aug. — Vol. 62, no. 4. — P. 044006.
153. *Lockitch K. H., Andersson N., Friedman J. L.* Rotational modes of relativistic stars: Analytic results // Phys. Rev. D. — 2001. — Jan. — Vol. 63, no. 2. — P. 024019.
154. *Ruoff J., Kokkotas K. D.* On the r-mode spectrum of relativistic stars in the low-frequency approximation // MNRAS. — 2001. — Dec. — Vol. 328, no. 2. — P. 678–688.
155. *Lockitch K. H., Friedman J. L., Andersson N.* Rotational modes of relativistic stars: Numerical results // Phys. Rev. D. — 2003. — Dec. — Vol. 68, no. 12. — P. 124010.
156. *Yoshida S., Yoshida S., Eriguchi Y.* R-mode oscillations of rapidly rotating barotropic stars in general relativity: analysis by the relativistic Cowling approximation // MNRAS. — 2005. — Jan. — Vol. 356, no. 1. — P. 217–224.
157. *Gaertig E., Kokkotas K. D.* Oscillations of rapidly rotating relativistic stars // Phys. Rev. D. — 2008. — Sept. — Vol. 78, no. 6. — P. 064063.
158. *Idrisy A., Owen B. J., Jones D. I.* R -mode frequencies of slowly rotating relativistic neutron stars with realistic equations of state // Phys. Rev. D. — 2015. — Jan. — Vol. 91, no. 2. — P. 024001.
159. *Villain L., Bonazzola S., Haensel P.* Inertial modes in stratified rotating neutron stars: An evolutionary description // Phys. Rev. D. — 2005. — Apr. — Vol. 71, no. 8. — P. 083001.

160. *Yoshida S., Futamase T.* R-mode instability of slowly rotating nonisentropic relativistic stars // *Phys. Rev. D.* — 2001. — Dec. — Vol. 64, no. 12. — P. 123001.
161. *Ruoff J., Kokkotas K. D.* On the r-mode spectrum of relativistic stars: the inclusion of the radiation reaction // *MNRAS.* — 2002. — Mar. — Vol. 330, no. 4. — P. 1027–1033.
162. *Lockitch K. H., Andersson N., Watts A. L.* Regularizing the r-mode problem for nonbarotropic relativistic stars // *Classical and Quantum Gravity.* — 2004. — Oct. — Vol. 21, no. 19. — P. 4661–4675.
163. Relativistic r modes and shear viscosity: regularizing the continuous spectrum / J. A. Pons [et al.] // *MNRAS.* — 2005. — Oct. — Vol. 363, no. 1. — P. 121–130.
164. Relativistic r-modes and shear viscosity / L. Gualtieri [et al.] // *Albert Einstein Century International Conference. Vol. 861 / ed. by J.-M. Alimi, A. Füzfa.* — 11/2006. — P. 638–645. — (American Institute of Physics Conference Series).
165. *Yoshida S.* r-Modes of Slowly Rotating Nonisentropic Relativistic Stars // *Astrophys. J.* — 2001. — Sept. — Vol. 558, no. 1. — P. 263–269.
166. Gravitational wave asteroseismology of fast rotating neutron stars with realistic equations of state / D. D. Doneva [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 2013. — Aug. — Vol. 88, issue 4. — P. 044052.
167. *Kantor E. M., Gusakov M. E., Dommers V. A.* Resonance suppression of the r-mode instability in superfluid neutron stars: Accounting for muons and entrainment // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Jan. — Vol. 103, no. 2. — P. 023013.
168. *Borumand M., Joynt R., Kluźniak W.* Superfluid densities in neutron-star matter // *Phys. Rev. C.* — 1996. — Nov. — Vol. 54, no. 5. — P. 2745–2750.
169. *Hartle J. B., Thorne K. S.* Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars // *Astrophys. J.* — 1968. — Sept. — Vol. 153. — P. 807.
170. Unified equations of state for cold non-accreting neutron stars with Brussels-Montreal functionals - I. Role of symmetry energy / J. M. Pearson [et al.] // *MNRAS.* — 2018. — Dec. — Vol. 481, no. 3. — P. 2994–3026.

171. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Quantum mechanics. — 1965.
172. Constraints on r-modes and Mountains on Millisecond Neutron Stars in Binary Systems / P. B. Covas [et al.] // *Astrophys. J. Lett.* — 2022. — Apr. — Vol. 929, no. 2. — P. L19.
173. *Ho W. C. G., Heinke C. O., Chugunov A. I.* XMM-Newton Detection and Spectrum of the Second Fastest Spinning Pulsar PSR J0952-0607 // *Astrophys. J. Lett.* — 2019. — Sept. — Vol. 882, no. 2. — P. 128.
174. First searches for gravitational waves from r -modes of the Crab pulsar / B. Rajbhandari [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 2021. — Dec. — Vol. 104, no. 12. — P. 122008.
175. *Abbott, R. et al.* Constraints from LIGO O3 Data on Gravitational-wave Emission Due to R-modes in the Glitching Pulsar PSR J0537-6910 // *ApJ.* — 2021. — Nov. — Vol. 922, no. 1. — P. 71.
176. Strengthening the bounds on the r-mode amplitude with X-ray observations of millisecond pulsars / T. Boztepe [et al.] // *MNRAS.* — 2020. — Oct. — Vol. 498, no. 2. — P. 2734–2749.
177. Chandra studies of the globular cluster 47 Tucanae: A deeper X-ray source catalogue, five new X-ray counterparts to millisecond radio pulsars, and new constraints to r-mode instability window / S. Bhattacharya [et al.] // *MNRAS.* — 2017. — Dec. — Vol. 472, no. 3. — P. 3706–3721.
178. How to search for gravitational waves from r -modes of known pulsars / S. Caride [et al.] // *Phys. Rev. D.* — 2019. — Sept. — Vol. 100, no. 6. — P. 064013.
179. *Glampedakis K., Gualtieri L.* Gravitational Waves from Single Neutron Stars: An Advanced Detector Era Survey // *Astrophysics and Space Science Library.* Vol. 457 / ed. by L. Rezzolla [et al.]. — 01/2018. — P. 673. — (Astrophysics and Space Science Library).
180. *Bildsten L., Ushomirsky G.* Viscous Boundary-Layer Damping of R-Modes in Neutron Stars // *Astrophys. J. Lett.* — 2000. — Jan. — Vol. 529, no. 1. — P. L33–L36.

181. *Chugunov A. I., Gusakov M. E., Kantor E. M.* R modes and neutron star recycling scenario // MNRAS. — 2017. — June. — Vol. 468, no. 1. — P. 291–304.
182. Gravitational waves from hot young rapidly rotating neutron stars / B. J. Owen [et al.] // Phys. Rev. D. — 1998. — Oct. — Vol. 58, no. 8. — P. 084020.
183. *Ho W. C. G., Lai D.* r-Mode Oscillations and Spin-down of Young Rotating Magnetic Neutron Stars // Astrophys. J. — 2000. — Nov. — Vol. 543, no. 1. — P. 386–394.
184. *Levin Y., Ushomirsky G.* Crust-core coupling and r-mode damping in neutron stars: a toy model // MNRAS. — 2001. — July. — Vol. 324, no. 4. — P. 917–922.
185. *Glampedakis K., Andersson N.* Crust-core coupling in rotating neutron stars // Phys. Rev. D. — 2006. — Aug. — Vol. 74, no. 4. — P. 044040.
186. *Haskell B., Andersson N., Passamonti A.* r modes and mutual friction in rapidly rotating superfluid neutron stars // MNRAS. — 2009. — Aug. — Vol. 397, no. 3. — P. 1464–1485.
187. *Lindblom L., Mendell G.* r-modes in superfluid neutron stars // Phys. Rev. D. — 2000. — May. — Vol. 61, no. 10. — P. 104003.
188. *Lee U., Yoshida S.* r-Modes of Neutron Stars with Superfluid Cores // Astrophys. J. — 2003. — Mar. — Vol. 586, no. 1. — P. 403–418.
189. *Passamonti A., Haskell B., Andersson N.* Oscillations of rapidly rotating superfluid stars // MNRAS. — 2009. — June. — Vol. 396, no. 2. — P. 951–963.
190. *Gusakov M. E., Chugunov A. I., Kantor E. M.* Instability Windows and Evolution of Rapidly Rotating Neutron Stars // Phys. Rev. Lett. — 2014. — Apr. — Vol. 112, no. 15. — P. 151101.
191. *Kantor E. M., Gusakov M. E.* Temperature-dependent r modes in superfluid neutron stars stratified by muons // MNRAS. — 2017. — Aug. — Vol. 469, no. 4. — P. 3928–3945.
192. *Nayyar M., Owen B. J.* R-modes of accreting hyperon stars as persistent sources of gravitational waves // Phys. Rev. D. — 2006. — Apr. — Vol. 73, no. 8. — P. 084001.

193. *Vidaña I.* Hyperons and neutron stars // Exotic Nuclei and Nuclear/Particle Astrophysics (V) From Nuclei to Stars: Carpathian Summer School of Physics 2014. Vol. 1645. — AIP, 02/2015. — P. 79–85. — (American Institute of Physics Conference Series).
194. *Baldo M., Schulze H. .-* Proton pairing in neutron stars // Phys. Rev. C. — 2007. — Feb. — Vol. 75, no. 2. — P. 025802.
195. Proton-proton S1_0 pairing in neutron stars / W. Guo [et al.] // Nucl. Phys. A. — 2019. — June. — Vol. 986. — P. 18–25.
196. *Lim Y., Holt J. W.* Proton pairing in neutron stars from chiral effective field theory // Phys. Rev. C. — 2021. — Feb. — Vol. 103, no. 2. — P. 025807.
197. Tests of the nuclear equation of state and superfluid and superconducting gaps using the Cassiopeia A neutron star / W. C. G. Ho [et al.] // Phys. Rev. C. — 2015. — Jan. — Vol. 91, no. 1. — P. 015806.
198. *Takatsuka T., Tamagaki R.* Baryon Superfluidity and Neutrino Emissivity of Neutron Stars // Progress of Theoretical Physics. — 2004. — July. — Vol. 112, no. 1. — P. 37–72.
199. *Wiringa R. B., Stoks V. G. J., Schiavilla R.* Accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking // Phys. Rev. C. — 1995. — Jan. — Vol. 51, no. 1. — P. 38–51.
200. *Entem D. R., Machleidt R.* Accurate charge-dependent nucleon-nucleon potential at fourth order of chiral perturbation theory // Phys. Rev. C. — 2003. — Oct. — Vol. 68, no. 4. — P. 041001.
201. *Kantor E. M., Gusakov M. E.* Damping of sound waves in superfluid nucleon-hyperon matter of neutron stars // Phys. Rev. D. — 2009. — Feb. — Vol. 79, no. 4. — P. 043004.